Alain Troesch
Cours de mathématiques en ECS2
Lycée La Bruyère (Versailles)
Année scolaire 2012/2013

Probabilités – Chapitre 3

Variables aléatoires à densité

Introduction

Introduction

- Idée : définir, après les v.a.r.d., une nouvelle grande famille de v.a.r.

Introduction

- Idée : définir, après les v.a.r.d., une nouvelle grande famille de v.a.r.
- Différence essentielle : l'ensemble des valeurs possibles n'est plus dénombrable (intervalle)

Introduction

- Idée : définir, après les v.a.r.d., une nouvelle grande famille de v.a.r.
- Différence essentielle : l'ensemble des valeurs possibles n'est plus dénombrable (intervalle)
- La notion de somme est caduque ; remplacée par des intégrales, éventuellement impropres.

I. Densités

I. Densités

- Si X prend une infinité (non dénombrable) de valeurs proches de a, imposer $[X = a]$ est trop précis.

I. Densités

- Si X prend une infinité (non dénombrable) de valeurs proches de a, imposer $[X = a]$ est trop précis.
- Pour beaucoup de variables, même si $a \in X(\Omega)$, il est fréquent que $P(X = a) = 0$

I. Densités

- Si X prend une infinité (non dénombrable) de valeurs proches de a, imposer $[X = a]$ est trop précis.
- Pour beaucoup de variables, même si $a \in X(\Omega)$, il est fréquent que $P(X = a) = 0$
- Pour les variables que nous allons considérer, on a même $P(X = a)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

I. Densités

- Si X prend une infinité (non dénombrable) de valeurs proches de a, imposer $[X = a]$ est trop précis.
- Pour beaucoup de variables, même si $a \in X(\Omega)$, il est fréquent que $P(X = a) = 0$
- Pour les variables que nous allons considérer, on a même $P(X = a)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Impossibilité de décrire la loi d'une variable à densité à l'aide des probabilités d'événements ponctuels.

I-1. Fonctions de répartition et densités

I-1. Fonctions de répartition et densités

Définition 1.1 (Fonction de répartition)

Soit X une variable aléatoire réelle. La fonction de répartition F_X de X est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = P(X \leqslant x).$$

I-1. Fonctions de répartition et densités

Définition 1.1 (Fonction de répartition)

Soit X une variable aléatoire réelle. La fonction de répartition F_X de X est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = P(X \leqslant x).$$

Proposition 1.2 (Caractérisation d'une fonction de répartition)

Une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X si et seulement si :

I-1. Fonctions de répartition et densités

Définition 1.1 (Fonction de répartition)

Soit X une variable aléatoire réelle. La fonction de répartition F_X de X est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = P(X \leqslant x).$$

Proposition 1.2 (Caractérisation d'une fonction de répartition)

Une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X si et seulement si :

(i) F est croissante

I-1. Fonctions de répartition et densités

Définition 1.1 (Fonction de répartition)

Soit X une variable aléatoire réelle. La fonction de répartition F_X de X est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = P(X \leqslant x).$$

Proposition 1.2 (Caractérisation d'une fonction de répartition)

Une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X si et seulement si :

(i) F est croissante

(ii) F est continue à droite en tout point

I-1. Fonctions de répartition et densités

Définition 1.1 (Fonction de répartition)

Soit X une variable aléatoire réelle. La fonction de répartition F_X de X est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = P(X \leqslant x).$$

Proposition 1.2 (Caractérisation d'une fonction de répartition)

Une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X si et seulement si :

(i) F est croissante

(ii) F est continue à droite en tout point

(iii) F admet des limites en $-\infty$ et $+\infty$, et $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Définition 1.3 (Variable aléatoire réelle à densité)

On dit que X est une variable aléatoire réelle à densité si :

Définition 1.3 (Variable aléatoire réelle à densité)

On dit que X est une variable aléatoire réelle à densité si :

(i) F_X est continue sur $\mathbb{R}$;

Définition 1.3 (Variable aléatoire réelle à densité)

On dit que X est une variable aléatoire réelle à densité si :

(i) F_X est continue sur $\mathbb{R}$;

(ii) F_x est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points

Définition 1.3 (Variable aléatoire réelle à densité)

On dit que X est une variable aléatoire réelle à densité si :

(i) F_X est continue sur $\mathbb{R}$;

(ii) F_x est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points

Définition 1.4 (Densité)

Soit X une variable aléatoire réelle à densité, et soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$. On dit que f est une densité de X si :

Définition 1.3 (Variable aléatoire réelle à densité)

On dit que X est une variable aléatoire réelle à densité si :

(i) F_X est continue sur $\mathbb{R}$;

(ii) F_x est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points

Définition 1.4 (Densité)

Soit X une variable aléatoire réelle à densité, et soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$. On dit que f est une densité de X si :

(i) $f \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$;

Définition 1.3 (Variable aléatoire réelle à densité)

On dit que X est une variable aléatoire réelle à densité si :

(i) F_X est continue sur $\mathbb{R}$;

(ii) F_x est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points

Définition 1.4 (Densité)

Soit X une variable aléatoire réelle à densité, et soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$. On dit que f est une densité de X si :

(i) $f \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$;

(ii) il existe un nombre fini de points $x_1 < \cdots < x_n$ tels que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}, \quad f(x) = F_X'(x)$.

Définition 1.3 (Variable aléatoire réelle à densité)

On dit que X est une variable aléatoire réelle à densité si :

(i) F_X est continue sur $\mathbb{R}$;

(ii) F_x est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points

Définition 1.4 (Densité)

Soit X une variable aléatoire réelle à densité, et soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$. On dit que f est une densité de X si :

(i) $f \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$;

(ii) il existe un nombre fini de points $x_1 < \cdots < x_n$ tels que
$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}, \quad f(x) = F'_X(x).$

Ainsi, une densité f est **presque partout** la dérivée de la fonction de répartition.

Remarques 1.5

1. L'hypothèse de positivité de f est nécessairement vérifiée sur $\mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$, puisque F_X est croissante

Remarques 1.5

1. L'hypothèse de positivité de f est nécessairement vérifiée sur $\mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$, puisque F_X est croissante
2. Pas unicité d'une densité de f.
   Toute variable aléatoire réelle à densité admet même une infinité de densités.

Remarques 1.5

1. L'hypothèse de positivité de f est nécessairement vérifiée sur $\mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$, puisque F_X est croissante
2. Pas unicité d'une densité de f.
   Toute variable aléatoire réelle à densité admet même une infinité de densités.
   Par abus de notation, on désignera tout de même par f_X <u>une</u> densité de X.

Remarques 1.5

1. L'hypothèse de positivité de f est nécessairement vérifiée sur $\mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$, puisque F_X est croissante
2. Pas unicité d'une densité de f.
   Toute variable aléatoire réelle à densité admet même une infinité de densités.
   Par abus de notation, on désignera tout de même par f_X <u>une</u> densité de X.

Terminologie 1.6 (presque partout)

- presque partout = partout sauf en un nombre fini de point

Remarques 1.5

1. L'hypothèse de positivité de f est nécessairement vérifiée sur $\mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$, puisque F_X est croissante
2. Pas unicité d'une densité de f.
   Toute variable aléatoire réelle à densité admet même une infinité de densités.
   Par abus de notation, on désignera tout de même par f_X une densité de X.

Terminologie 1.6 (presque partout)

- presque partout $=$ partout sauf en un nombre fini de point
- Abréviation : p.p.

Remarques 1.5

1. L'hypothèse de positivité de f est nécessairement vérifiée sur $\mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$, puisque F_X est croissante
2. Pas unicité d'une densité de f.
   Toute variable aléatoire réelle à densité admet même une infinité de densités.
   Par abus de notation, on désignera tout de même par f_X <u>une</u> densité de X.

Terminologie 1.6 (presque partout)

- presque partout = partout sauf en un nombre fini de point
- Abréviation : p.p.
- Exemple : $f(x) \underset{\text{p.p.}}{=} g(x)$ (Notation à redéfinir).

Exemples 1.7

1. Plusieurs densités de X lorsque :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Exemples 1.7

1. Plusieurs densités de X lorsque :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

2. Les v.a.r.d. ne sont pas des variables aléatoires réelles à densité.

Exemples 1.7

1. Plusieurs densités de X lorsque :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$
2. Les v.a.r.d. ne sont pas des variables aléatoires réelles à densité.
3. Une v.a.r. qui n'est ni une v.a.r.d. ni une v.a.r.a.d. :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x+2}{4} & \text{si } -1 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Exemples 1.7

4. Exemple classique (un cas particulier de loi de Pareto) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x} & \text{si } x \geqslant 1, \end{cases}$$

Exemples 1.7

4. Exemple classique (un cas particulier de loi de Pareto) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x} & \text{si } x \geqslant 1, \end{cases}$$

5. Exemple d'une densité non bornée

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Exemples 1.7

6. Loi uniforme sur $[a, b]$, $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) \underset{\text{p.p.}}{=} \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \text{ ou } x > b \\ \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \end{cases}$$

Exemples 1.7

6. Loi uniforme sur $[a,b]$, $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) \underset{\text{p.p.}}{=} \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \text{ ou } x > b \\ \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \end{cases}$$

7. Loi exponentielle de paramètre $c > 0$, $X \hookrightarrow \mathcal{E}(c)$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) \underset{\text{p.p.}}{=} \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ c\mathrm{e}^{-cx} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Proposition 1.8 (Interprétation de la densité)

Soit X une variable aléatoire réelle à densité. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ en lequel $f(x) = F'(x) \neq 0$, on a :

$$P(x < X \leqslant x + h) \underset{h \to 0}{\sim} f_X(x) \cdot h.$$

Proposition 1.8 (Interprétation de la densité)

Soit X une variable aléatoire réelle à densité. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ en lequel $f(x) = F'(x) \neq 0$, on a :

$$P(x < X \leqslant x + h) \underset{h \to 0}{\sim} f_X(x) \cdot h.$$

Proposition 1.9

Soit X une variable aléatoire réelle à densité. Alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(X = x) = 0$.

Théorème 1.10 (Expression intégrale de F_X)

Soit X une variable aléatoire réelle à densité, de fonction de répartition F_X, de densité f_X. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale ci-dessous converge, et on a l'égalité :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 1.10 (Expression intégrale de F_X)

Soit X une variable aléatoire réelle à densité, de fonction de répartition F_X, de densité f_X. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale ci-dessous converge, et on a l'égalité :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

Corollaire 1.11 (Intégrale d'une densité)

Soit X une variable aléatoire réelle à densité, et f_X une densité de X. Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x$ converge et : $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Corollaire 1.12

Soit X une variable aléatoire réelle à densité, de densité f_X, et soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. Alors :

- $P(X \leqslant a) = P(X < a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(t)\,\mathrm{d}t$;

Corollaire 1.12

Soit X une variable aléatoire réelle à densité, de densité f_X, et soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. Alors :

- $P(X \leqslant a) = P(X < a) = \displaystyle\int_{-\infty}^{a} f_X(t)\,\mathrm{d}t$;
- $P(X \geqslant a) = P(X > a) = \displaystyle\int_{a}^{+\infty} f_X(t)\,\mathrm{d}t$;

Corollaire 1.12

Soit X une variable aléatoire réelle à densité, de densité f_X, et soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. Alors :

- $P(X \leqslant a) = P(X < a) = \displaystyle\int_{-\infty}^{a} f_X(t)\,\mathrm{d}t$;
- $P(X \geqslant a) = P(X > a) = \displaystyle\int_{a}^{+\infty} f_X(t)\,\mathrm{d}t$;
- $P(a \leqslant X \leqslant b) = \displaystyle\int_{a}^{b} f_X(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème 1.13 (Caractérisation d'une densité)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Les p.s.s.e. :

(i) f est la densité d'une variable aléatoire réelle X ;

Théorème 1.13 (Caractérisation d'une densité)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Les p.s.s.e. :

(i) f est la densité d'une variable aléatoire réelle X ;

(ii) f vérifie les trois propriétés suivantes :

Théorème 1.13 (Caractérisation d'une densité)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Les p.s.s.e. :

(i) f est la densité d'une variable aléatoire réelle X ;

(ii) f vérifie les trois propriétés suivantes :

- f est positive ;

Théorème 1.13 (Caractérisation d'une densité)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Les p.s.s.e. :

(i) f est la densité d'une variable aléatoire réelle X ;

(ii) f vérifie les trois propriétés suivantes :

- f est positive ;
- f est continue presque partout sur $\mathbb{R}$;

Théorème 1.13 (Caractérisation d'une densité)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Les p.s.s.e. :

(i) f est la densité d'une variable aléatoire réelle X ;

(ii) f vérifie les trois propriétés suivantes :

- f est positive ;
- f est continue presque partout sur $\mathbb{R}$;
- l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge, et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

I-2. Premier théorème de transfert

Introduction

I-2. Premier théorème de transfert

Introduction

- But : déterminer une densité de $\varphi(X)$ connaissant une densité de X.

I-2. Premier théorème de transfert

Introduction

- But : déterminer une densité de $\varphi(X)$ connaissant une densité de X.
- Pour cela : premier théorème de transfert.

I-2. Premier théorème de transfert

Introduction

- But : déterminer une densité de $\varphi(X)$ connaissant une densité de X.
- Pour cela : premier théorème de transfert.
- Dans les cas simples, préférer un calcul direct (stipulé dans le programme)

I-2. Premier théorème de transfert

Introduction

- But : déterminer une densité de $\varphi(X)$ connaissant une densité de X.
- Pour cela : premier théorème de transfert.
- Dans les cas simples, préférer un calcul direct (stipulé dans le programme)

Exemples 1.14

1. $\varphi(X) = aX + b$.

I-2. Premier théorème de transfert

Introduction

- But : déterminer une densité de $\varphi(X)$ connaissant une densité de X.
- Pour cela : premier théorème de transfert.
- Dans les cas simples, préférer un calcul direct (stipulé dans le programme)

Exemples 1.14

1. $\varphi(X) = aX + b$.
2. $\varphi(X) = X^2$.

I-2. Premier théorème de transfert

Introduction

- But : déterminer une densité de $\varphi(X)$ connaissant une densité de X.
- Pour cela : premier théorème de transfert.
- Dans les cas simples, préférer un calcul direct (stipulé dans le programme)

Exemples 1.14

1. $\varphi(X) = aX + b$.
2. $\varphi(X) = X^2$.
3. $\varphi(X) = \mathrm{e}^X$.

Théorème 1.15 (Premier théorème de transfert)

Soit X une variable aléatoire réelle à densité de densité f, et soit φ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que φ' soit strictement positive p.p. Alors :

Théorème 1.15 (Premier théorème de transfert)

Soit X une variable aléatoire réelle à densité de densité f, et soit φ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que φ' soit strictement positive p.p. Alors :

(i) φ induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\varphi(\mathbb{R})$;
on note $\varphi^{-1} : \varphi(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ sa réciproque ;

Théorème 1.15 (Premier théorème de transfert)

Soit X une variable aléatoire réelle à densité de densité f, et soit φ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que φ' soit strictement positive p.p. Alors :

(i) φ induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\varphi(\mathbb{R})$;
on note $\varphi^{-1} : \varphi(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ sa réciproque ;

(ii) $\varphi(X)$ est une variable aléatoire réelle à densité, dont toute densité g est nulle p.p. en dehors de $\varphi(\mathbb{R})$, et vérifie :

$$\forall y \in \varphi(\mathbb{R}), \quad g(y) \underset{\text{p.p.}}{=} (f \circ \varphi^{-1}(y))(\varphi^{-1})'(y).$$

Remarques 1.16

Remarques 1.16

1. L'égalité définissant $g(y)$ sur $\varphi(\mathbb{R})$ n'est pas définie en tout point en lequel s'annule φ'.

Remarques 1.16

1. L'égalité définissant $g(y)$ sur $\varphi(\mathbb{R})$ n'est pas définie en tout point en lequel s'annule φ'.
2. Si φ' est strictement négative p.p., alors :

$$\forall y \in \varphi(\mathbb{R}), \quad g(y) \underset{\text{p.p.}}{=} -(f \circ \varphi^{-1}(y))(\varphi^{-1})'(y).$$

Remarques 1.16

1. L'égalité définissant $g(y)$ sur $\varphi(\mathbb{R})$ n'est pas définie en tout point en lequel s'annule φ'.
2. Si φ' est strictement négative p.p., alors :

$$\forall y \in \varphi(\mathbb{R}), \quad g(y) \underset{\text{p.p.}}{=} -(f \circ \varphi^{-1}(y))(\varphi^{-1})'(y).$$

3. Dans ce théorème φ peut n'être défini que sur un intervalle ouvert contenant $X(\Omega)$.

Remarques 1.16

1. L'égalité définissant $g(y)$ sur $\varphi(\mathbb{R})$ n'est pas définie en tout point en lequel s'annule φ'.
2. Si φ' est strictement négative p.p., alors :

$$\forall y \in \varphi(\mathbb{R}), \quad g(y) \underset{\text{p.p.}}{=} -(f \circ \varphi^{-1}(y))(\varphi^{-1})'(y).$$

3. Dans ce théorème φ peut n'être défini que sur un intervalle ouvert contenant $X(\Omega)$.

Exemples 1.17

Retrouver les formules pour les densités de $aX + b$, de e^X.

II. Moments d'une variable aléatoire réelle à densité

II-1. Espérance

II. Moments d'une variable aléatoire réelle à densité

II-1. Espérance

Lemme 2.1

Soit f une fonction positive, continue sur $\mathbb{R}$ p.p., telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ converge, sauf éventuellement en $-\infty$ et en $+\infty$.

Définition 2.2 (Espérance d'une v.a.r.a.d.)

Soit X une v.a.r.a.d. de densité f_X.

- X admet une espérance ssi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf_X(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Définition 2.2 (Espérance d'une v.a.r.a.d.)

Soit X une v.a.r.a.d. de densité f_X.

- X admet une espérance ssi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
- Dans ce cas, l'espérance de X est : $\displaystyle E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\,\mathrm{d}t.$

Définition 2.2 (Espérance d'une v.a.r.a.d.)

Soit X une v.a.r.a.d. de densité f_X.

- X admet une espérance ssi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
- Dans ce cas, l'espérance de X est : $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque 2.3

- Contrairement aux v.a.r.d., il est inutile d'imposer la convergence absolue (automatique en cas de convergence)

Définition 2.2 (Espérance d'une v.a.r.a.d.)

Soit X une v.a.r.a.d. de densité f_X.

- X admet une espérance ssi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf_X(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
- Dans ce cas, l'espérance de X est : $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf_X(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque 2.3

- Contrairement aux v.a.r.d., il est inutile d'imposer la convergence absolue (automatique en cas de convergence)
- Les seuls défauts éventuels de convergence sont en $+\infty$ et en $-\infty$

Exemples 2.4

1. $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$, alors $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ **(à connaître)**

Exemples 2.4

1. $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$, alors $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ **(à connaître)**
2. $X \hookrightarrow \mathcal{E}(c)$, alors $E(X) = \dfrac{1}{c}$ **(à connaître)**

Exemples 2.4

1. $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$, alors $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ **(à connaître)**
2. $X \hookrightarrow \mathcal{E}(c)$, alors $E(X) = \dfrac{1}{c}$ **(à connaître)**
3. $f_X(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+t^2}$ (Loi de Cauchy) : X n'admet pas d'espérance.

Exemples 2.4

1. $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$, alors $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ **(à connaître)**
2. $X \hookrightarrow \mathcal{E}(c)$, alors $E(X) = \dfrac{1}{c}$ **(à connaître)**
3. $f_X(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+t^2}$ (Loi de Cauchy) : X n'admet pas d'espérance.
4. Une v.a.r.a.d. de densité non bornée peut admettre une espérance.

   Exemple : $f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \text{ ou si } x > 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$; $E(X) = \frac{1}{3}$.

Exemples 2.4

1. $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$, alors $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ **(à connaître)**
2. $X \hookrightarrow \mathcal{E}(c)$, alors $E(X) = \dfrac{1}{c}$ **(à connaître)**
3. $f_X(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+t^2}$ (Loi de Cauchy) : X n'admet pas d'espérance.
4. Une v.a.r.a.d. de densité non bornée peut admettre une espérance.

   Exemple : $f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \text{ ou si } x > 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$; $E(X) = \frac{1}{3}$.

Proposition 2.5 (Existence de $E(X)$ si X est bornée p.s.)

Si $X(\Omega)$ est borné ps (*i.e.* f_X à support borné), alors $E(X)$ existe.

Proposition 2.6 (Positivité de l'espérance)

Soit X une v.a.r.a.d. admettant une espérance.
Si $X \geqslant 0$ ps (*i.e.* si $P(X < 0) = 0$), alors $E(X) \geqslant 0$.

Proposition 2.6 (Positivité de l'espérance)

Soit X une v.a.r.a.d. admettant une espérance.
Si $X \geqslant 0$ ps (*i.e.* si $P(X < 0) = 0$), alors $E(X) \geqslant 0$.

Proposition 2.7

Soit X une variable aléatoire réelle à densitéde densité f, et admettant une espérance.
Si f est pair (densité symétrique), alors $E(X) = 0$.

Théorème 2.8 (Second théorème de transfert)

Soit :

- X une v.a.r.a.d., et f une densité de X.
- $I =]a, b[$ un intervalle ouvert tel que $X(\Omega) \subset I$,
- $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$, continue pp.

Alors :

Théorème 2.8 (Second théorème de transfert)

Soit :

- X une v.a.r.a.d., et f une densité de X.
- $I =]a, b[$ un intervalle ouvert tel que $X(\Omega) \subset I$,
- $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$, continue pp.

Alors :

(i) $Y = \varphi(X)$ est une v.a.r.

Théorème 2.8 (Second théorème de transfert)

Soit :

- X une v.a.r.a.d., et f une densité de X.
- $I =]a, b[$ un intervalle ouvert tel que $X(\Omega) \subset I$,
- $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$, continue pp.

Alors :

(i) $Y = \varphi(X)$ est une v.a.r.

(ii) Y admet une espérance ssi $\displaystyle\int_a^b \varphi(t) f(t)\, \mathrm{d}t$ CV **absolument**

Théorème 2.8 (Second théorème de transfert)

Soit :

- X une v.a.r.a.d., et f une densité de X.
- $I =]a, b[$ un intervalle ouvert tel que $X(\Omega) \subset I$,
- $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$, continue pp.

Alors :

(i) $Y = \varphi(X)$ est une v.a.r.

(ii) Y admet une espérance ssi $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)f(t)\,\mathrm{d}t$ CV **absolument**

(iii) dans ce cas, $E(X) = \displaystyle\int_a^b \varphi(t)f(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème 2.8 (Second théorème de transfert)

Soit :

- X une v.a.r.a.d., et f une densité de X.
- $I =]a, b[$ un intervalle ouvert tel que $X(\Omega) \subset I$,
- $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$, continue pp.

Alors :

(i) $Y = \varphi(X)$ est une v.a.r.

(ii) Y admet une espérance ssi $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)f(t)\,\mathrm{d}t$ CV **absolument**

(iii) dans ce cas, $E(X) = \displaystyle\int_a^b \varphi(t)f(t)\,\mathrm{d}t$.

Confomément au programme, nous le démontrons uniquement si φ est de classe $\mathcal{C}^1$, et φ' strictement positive.

Remarque 2.9

- L'énoncé général du second de transfert dépasse largement le cadre du programme, puisque $\varphi(X)$ n'est avec ces hypothèses pas nécessairement une v.a.r.a.d.

Remarque 2.9

- L'énoncé général du second de transfert dépasse largement le cadre du programme, puisque $\varphi(X)$ n'est avec ces hypothèses pas nécessairement une v.a.r.a.d.
- C'est pour cette raison que :
    - l'hypothèse de convergence **absolue** est indispensable ;

Remarque 2.9

- L'énoncé général du second de transfert dépasse largement le cadre du programme, puisque $\varphi(X)$ n'est avec ces hypothèses pas nécessairement une v.a.r.a.d.
- C'est pour cette raison que :
  - l'hypothèse de convergence **absolue** est indispensable ;
  - la démonstration dans le cadre général n'est pas au programme.

Remarque 2.9

- L'énoncé général du second de transfert dépasse largement le cadre du programme, puisque $\varphi(X)$ n'est avec ces hypothèses pas nécessairement une v.a.r.a.d.
- C'est pour cette raison que :
  - l'hypothèse de convergence **absolue** est indispensable ;
  - la démonstration dans le cadre général n'est pas au programme.

Exemple 2.10

$X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$, et φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ 2x - 1 & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Exemples 2.11

1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, alors e^X n'admet pas d'espérance.

Exemples 2.11

1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, alors e^X n'admet pas d'espérance.
2. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, alors X^2 admet une espérance, et $E(X^2) = \Gamma(3) = 2$.

Exemples 2.11

1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, alors e^X n'admet pas d'espérance.
2. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, alors X^2 admet une espérance, et $E(X^2) = \Gamma(3) = 2$.
3. Soit X une variable aléatoire réelle à densitéde densité f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1 \\ \frac{2}{x^3} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Soit $Y = X^2 \sin X$. Alors Y n'admet pas d'espérance.

Exemples 2.11

1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, alors e^X n'admet pas d'espérance.
2. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, alors X^2 admet une espérance, et $E(X^2) = \Gamma(3) = 2$.
3. Soit X une variable aléatoire réelle à densitéde densité f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1 \\ \frac{2}{x^3} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Soit $Y = X^2 \sin X$. Alors Y n'admet pas d'espérance.

Corollaire 2.12

Soit X une v.a.r.a.d., et a et b deux réels.
Si X admet une espérance, alors $aX + b$ aussi, et
$E(aX + b) = aE(X) + b$.

II-2. Moments d'ordre 2

Définition 2.13 (Moment d'ordre 2)

Soit X une v.a.r.a.d., soit f_X une densité de X.

- X admet un moment d'ordre 2 si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t)\,\mathrm{d}t$ CV.

II-2. Moments d'ordre 2

Définition 2.13 (Moment d'ordre 2)

Soit X une v.a.r.a.d., soit f_X une densité de X.

- X admet un moment d'ordre 2 si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t)\,\mathrm{d}t$ CV.
- Dans ce cas, on définit le moment d'ordre 2 par :

$$M_2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

II-2. Moments d'ordre 2

Définition 2.13 (Moment d'ordre 2)

Soit X une v.a.r.a.d., soit f_X une densité de X.

- X admet un moment d'ordre 2 si $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t)\,\mathrm{d}t$ CV.
- Dans ce cas, on définit le moment d'ordre 2 par :
  $$M_2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

Proposition 2.14

Si X admet un moment d'ordre 2, alors X admet une espérance.

II-2. Moments d'ordre 2

Définition 2.13 (Moment d'ordre 2)

Soit X une v.a.r.a.d., soit f_X une densité de X.

- X admet un moment d'ordre 2 si $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t)\,\mathrm{d}t$ CV.
- Dans ce cas, on définit le moment d'ordre 2 par :
  $M_2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t)\,\mathrm{d}t$

Proposition 2.14

Si X admet un moment d'ordre 2, alors X admet une espérance.

Proposition 2.15

X admet un mom. d'ordre 2 ssi X^2 admet une espérance.
Dans ce cas, $M_2(X) = E(X^2)$.

Définition 2.16 (Variance)

- On dit que X admet une variance (ou moment centré d'ordre 2) si X admet une espérance, et si $(X - E(X))^2$ admet une espérance.

Définition 2.16 (Variance)

- On dit que X admet une variance (ou moment centré d'ordre 2) si X admet une espérance, et si $(X - E(X))^2$ admet une espérance.
- Dans ce cas,

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f_X(t) \, \mathrm{d}t.$$

Définition 2.16 (Variance)

- On dit que X admet une variance (ou moment centré d'ordre 2) si X admet une espérance, et si $(X - E(X))^2$ admet une espérance.
- Dans ce cas,
$$V(X) = E((X - E(X))^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 2.17 (Positivité de la variance)

Soit X une v.a.r.a.d., admettant une variance. Alors $V(X) \geqslant 0$

Définition 2.16 (Variance)

- On dit que X admet une variance (ou moment centré d'ordre 2) si X admet une espérance, et si $(X-E(X))^2$ admet une espérance.
- Dans ce cas,

$$V(X) = E((X-E(X))^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t-E(X))^2 f_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 2.17 (Positivité de la variance)

Soit X une v.a.r.a.d., admettant une variance. Alors $V(X) \geqslant 0$

Proposition 2.18

Soit X une v.a.r.a.d..
X admet un mom d'ordre 2 ssi X admet une variance.

Définition 2.19 (Écart-type)

Soit X une v.a.r.a.d. admettant une variance.
L'écart-type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Définition 2.19 (Écart-type)

Soit X une v.a.r.a.d. admettant une variance.
L'écart-type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Théorème 2.20 (Formule de König-Huygens)

Soit X une v.a.r.a.d. admettant un moment d'ordre 2, alors :
$V(X) = M_2(X) - E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$.

Définition 2.19 (Écart-type)

Soit X une v.a.r.a.d. admettant une variance.
L'écart-type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Théorème 2.20 (Formule de König-Huygens)

Soit X une v.a.r.a.d. admettant un moment d'ordre 2, alors :
$V(X) = M_2(X) - E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$.

Théorème 2.21

Soit X une v.a.r.a.d. admettant une variance, et a et b deux réels.
Alors $aX + b$ admet aussi une variance, et
$V(aX + b) = a^2 V(X)$.

Exemples 2.22

1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$, alors $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$ **(à connaître)**

Exemples 2.22

1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$, alors $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$ **(à connaître)**
2. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(c)$, alors $V(X) = \dfrac{1}{c^2}$ **(à connaître)**.

Exemples 2.22

1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$, alors $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$ **(à connaître)**
2. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(c)$, alors $V(X) = \dfrac{1}{c^2}$ **(à connaître)**.
3. Soit X de densité f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1 \\ \frac{2}{x^3} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Alors X admet une espérance mais pas une variance.

Définition 2.23 (Variable centrée, réduite)

Soit X une v.a.r.a.d.

1. X est centrée si X admet une espérance et $E(X) = 0$;

Définition 2.23 (Variable centrée, réduite)

Soit X une v.a.r.a.d.

1. X est centrée si X admet une espérance et $E(X) = 0$;
2. X est centrée réduite si X admet un moment d'ordre 2, et $E(X) = 0$, $\sigma(X) = 1$.

Définition 2.23 (Variable centrée, réduite)

Soit X une v.a.r.a.d.

1. X est centrée si X admet une espérance et $E(X) = 0$;
2. X est centrée réduite si X admet un moment d'ordre 2, et $E(X) = 0$, $\sigma(X) = 1$.

Proposition 2.24

Soit X une v.a.r.a.d. admettant un moment d'ordre 2.

Alors $X - E(X)$ est centrée, et $\dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

Définition 2.23 (Variable centrée, réduite)

Soit X une v.a.r.a.d.

1. X est centrée si X admet une espérance et $E(X) = 0$;
2. X est centrée réduite si X admet un moment d'ordre 2, et $E(X) = 0$, $\sigma(X) = 1$.

Proposition 2.24

Soit X une v.a.r.a.d. admettant un moment d'ordre 2.

Alors $X - E(X)$ est centrée, et $\dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

Définition 2.25 (Variable centrée réduite associée à X)

$X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est appelée variable centrée réduite associée à X.

III. Somme de deux variables aléatoires (à densité ou plus générales)

III-1. Densité d'une somme

III. Somme de deux variables aléatoires (à densité ou plus générales)

III-1. Densité d'une somme

Définition 3.1 (Variables indépendantes)

Soit X deux v.a.r.(à densité ou non). On dit que X et Y sont indépendantes si pour tout $t \in \mathbb{R}$, et tout $t' \in \mathbb{R}$, on a :
$P(X \leqslant t, Y \leqslant t') = P(X \leqslant t)P(Y \leqslant t') = F_X(t)F_Y(t')$.

III. Somme de deux variables aléatoires (à densité ou plus générales)

III-1. Densité d'une somme

Définition 3.1 (Variables indépendantes)

Soit X deux v.a.r.(à densité ou non). On dit que X et Y sont indépendantes si pour tout $t \in \mathbb{R}$, et tout $t' \in \mathbb{R}$, on a :
$P(X \leqslant t, Y \leqslant t') = P(X \leqslant t)P(Y \leqslant t') = F_X(t)F_Y(t')$.

Définition 3.2 (Produit de convolution de deux fonctions)

Soit f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On appelle produit de convolution, et on note $f \star g$, la fonction définie pour tout x en lequel on a convergence par

$$f \star g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 3.3 (Densité d'une somme, admis)

Soit X et Y deux v.a.r.a.d. **indépendantes**. Si le produit de convolution $f_X \star f_Y$ est continu presque partout, alors la variable $X + Y$ est une variable aléatoire réelle à densité, dont une densité est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{X+Y}(x) \underset{\text{p.p.}}{=} f_X \star f_Y(x) \underset{\text{p.p.}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 3.3 (Densité d'une somme, admis)

Soit X et Y deux v.a.r.a.d. **indépendantes**. Si le produit de convolution $f_X \star f_Y$ est continu presque partout, alors la variable $X+Y$ est une variable aléatoire réelle à densité, dont une densité est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{X+Y}(x) \underset{\text{p.p.}}{=} f_X \star f_Y(x) \underset{\text{p.p.}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t) \, \mathrm{d}t.$$

Exemples 3.4

1. $X, Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, indépendantes. Densité de $X+Y$?

Théorème 3.3 (Densité d'une somme, admis)

Soit X et Y deux v.a.r.a.d. **indépendantes**. Si le produit de convolution $f_X \star f_Y$ est continu presque partout, alors la variable $X+Y$ est une variable aléatoire réelle à densité, dont une densité est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{X+Y}(x) \underset{\text{p.p.}}{=} f_X \star f_Y(x) \underset{\text{p.p.}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemples 3.4

1. $X, Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, indépendantes. Densité de $X+Y$?
2. $X, Y \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$, indépendantes. Densité de $X+Y$?

III-2. Espérance d'une somme

Le théorème de transfert peut nous faire sortir du cadre des v.a.r.d. et des v.a.r.a.d. Voici de quoi manipuler les espérances et variances obtenues :

III-2. Espérance d'une somme

Le théorème de transfert peut nous faire sortir du cadre des v.a.r.d. et des v.a.r.a.d. Voici de quoi manipuler les espérances et variances obtenues :

Théorème 3.5 (Espérance d'une somme, admis)

Soit X et Y deux v.a.r. **quelconques**, admettant une espérance. Alors $X+Y$ admet une espérance et
$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

III-2. Espérance d'une somme

Le théorème de transfert peut nous faire sortir du cadre des v.a.r.d. et des v.a.r.a.d. Voici de quoi manipuler les espérances et variances obtenues :

Théorème 3.5 (Espérance d'une somme, admis)

Soit X et Y deux v.a.r. **quelconques**, admettant une espérance. Alors $X + Y$ admet une espérance et
$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Corollaire 3.6

Si $X \leqslant Y$ presque sûrement, alors $E(X) \leqslant E(Y)$.

III-3. Variance d'une somme

Théorème 3.7 (Variance d'une somme, admis)

Soit X et Y deux v.a.r. **quelconques**, admettant des variances.

1. Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$

III-3. Variance d'une somme

Théorème 3.7 (Variance d'une somme, admis)

Soit X et Y deux v.a.r. **quelconques**, admettant des variances.

1. Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$
2. Si X et Y sont indépendantes, alors $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$.

III-3. Variance d'une somme

Théorème 3.7 (Variance d'une somme, admis)

Soit X et Y deux v.a.r. **quelconques**, admettant des variances.

1. Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$
2. Si X et Y sont indépendantes, alors $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$.

Remarque 3.8 (Covariance pour les v.a.r.a.d., hors-programme)

On pourrait définir pour les v.a.r.a.d., exactement de la même façon que pour les v.a.r.d., la notion de covariance. Les formules obtenues seraient les mêmes. C'est parfois introduit (en admettant les résultats) dans les problèmes.