# Cours de mathématiques
# Partie II – Analyse
## MPSI 4

**Alain TROESCH**

Version du:

27 avril 2014

# Table des matières

# 1

# L'outil analytique

## Introduction

**Note Historique 1.0.1**

Longtemps, les mathématiques se sont développés au service des autres sciences ; d'ailleurs, la séparation des différentes sciences est tardive, et nombreux ont été les mathématiciens à avoir également été des physiciens de renommés, comme Newton par exemple. Les mathématiques ont d'abord été vues comme un outil :

- au service de la mécanique et de l'ingéniérie (Archimède)
- au service de l'astronomie (géométrie grecque, Ptolémée, écoles indienne et arabe)
- au service de toute étude nécessitant d'être chiffrée pour obtenir des ordres de grandeurs.

Du dernier point découle l'importance du développement du calcul numérique (calcul approché, en opposition au calcul algébrique). C'est ce point de vue qui est à la base des procédés d'approximation (méthode de Newton de recherche d'un zéro, méthodes approchées de calcul d'intégrales), aboutissant notamment à la notion de convergence (qui donne la validité de l'approximation à l'infini)
Ainsi, l'utilisation de l'outil est souvent à la base de sa définition, et a souvent précédé sa théorisation : les mathématiques ont évolué de façon empirique.

Dans ce chapitre, nous introduisons certaines techniques d'analyse (dérivation, intégration, équations différentielles). Le but de ce chapitre n'est pas d'introduire toute la théorie sous-jacente (cela sera fait plus tard), mais de donner très rapidement des bases suffisantes pour pouvoir utiliser de façon effective ces techniques, soit pour d'autres domaines scientifiques, soit pour pouvoir illustrer de façon plus intéressante d'autres notions à venir.

## I Fonctions d'une variable réelle

### I.1 Généralités, interprétations graphiques

Nous avons déjà parlé de fonctions d'une ensemble $E$ dans un ensemble $F$. Nous étudions plus particulièrement ici le cas de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, ou au moins, d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Nous ferons un peu plus loin une rapide incursion dans le monde des fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$ (courbes dans $\mathbb{C}$) ainsi que des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

#### I.1.1 Graphe

Nous rappelons que le domaine de définition d'une fonction $f$ est le sous-ensemble $D_f$ (de $\mathbb{R}$ ici) constitué de l'ensemble des éléments $x$ tel que $f(x)$ soit défini.
Dans le cas d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, le graphe, tel que nous l'avons défini dans un chapitre antérieur, correspond au sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ constitué des éléments $(x, f(x))$, pour $x \in D_f$.

Le graphe permet d'avoir une idée générale de la fonction étudiée. Un graphe précis (par approximations et interpolation à partir d'un grand nombre de points, obtenus par exemple par des expériences) permet d'obtenir facilement une première approximation de solutions de certaines équations ou inéquations (figure 1.1)

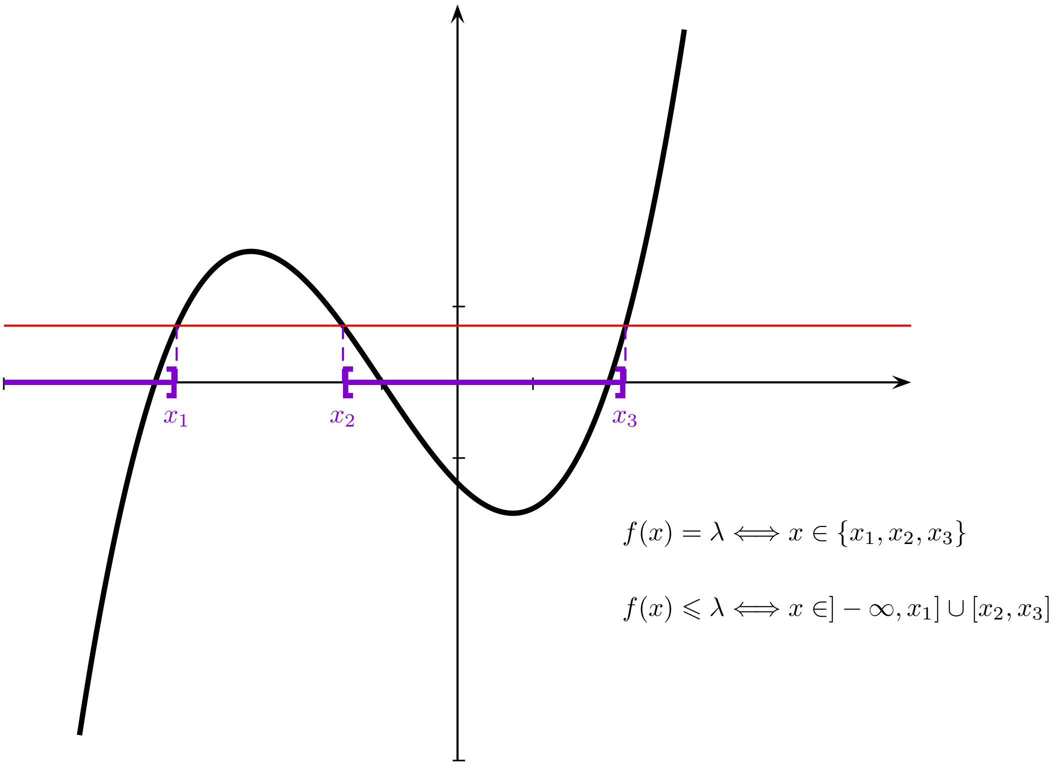


FIGURE 1.1 – Résolution graphique d'une équation $f(x) = \lambda$, ou d'une inéquation $f(x) \leqslant \lambda$

Évidemment, les résolutions graphiques ne peuvent fournir que des valeur approchées grossières, mais elles sont souvent suffisantes pour trouver des ordres de grandeur.
On peut aussi utiliser le graphe comme aide visuelle à la résolution d'inéquations (non pas pour trouver les valeurs limites, mais pour comprendre comment se situe l'ensemble des solutions par rapport à ces valeurs limites.

**Exemple 1.1.1**

Soit $X$ une variable aléatoire de fonction répartition $F_X : x \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)(1 - \mathrm{e}^{-x})$, c'est-à-dire telle que pour tout $x$, $P(X \leqslant x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)(1 - \mathrm{e}^{-x})$. Déterminer la fonction de répartition de $Y = \frac{X+1}{X-2}$

Certaines opérations simples sur les fonctions se traduisent facilement sur le graphe.

**Proposition 1.1.2 (Effet sur le graphe de certaines opérations simples, figure 1.2)**

*Soit $f$ une fonction d'un sous-ensemble $E$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $a \in \mathbb{R}$. On note $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ le repère dans lequel on représente les graphes.*

1. *Le graphe de $g : x \mapsto f(x - a)$ est obtenu du graphe de $f$ par translation de vecteur $a \cdot \vec{\imath}$.*
2. *Le graphe de $h : x \mapsto f(ax)$ est obtenu du graphe de $f$ par une affinité de rapport $\frac{1}{a}$ suivant la direction $\vec{\imath}$ de centre $O$.*
3. *Le graphe de $h : x \mapsto af(x)$ est obtenu du graphe $f$ par une affinité de rapport $a$ suivant la direction $\vec{\jmath}$ de center $O$.*

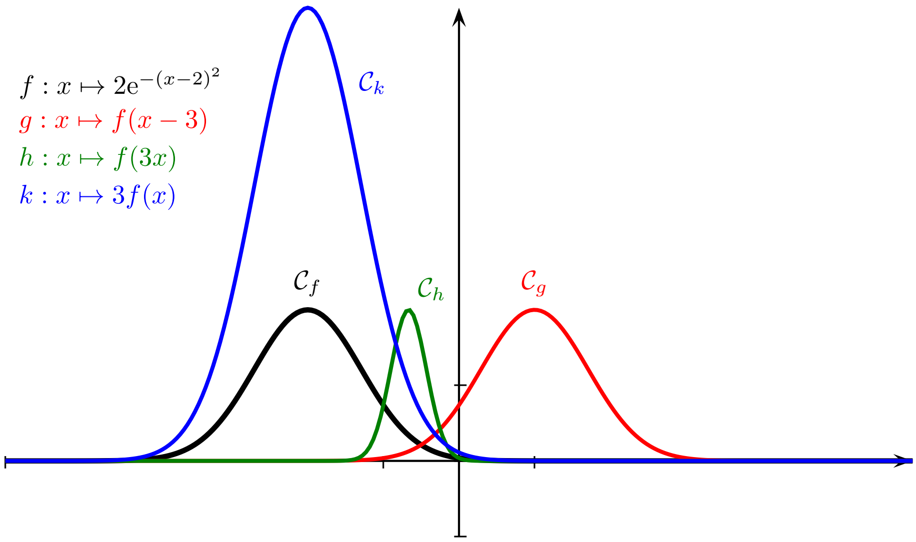


Figure 1.2 – Effet sur le graphe de certaines opérations

**Exemple 1.1.3**

Comment déduit-on du graphe de $f$ celui de $x \mapsto 2f(4-2x)$ ?

Une autre opération se traduisant élégamment sur les graphes est la réciproque des fonctions bijectives.

**Proposition 1.1.4 (Graphe d'une fonction réciproque, figure 1.3)**

*Soit $I, J \subset \mathbb{R}$, et $f : I \longrightarrow J$ une bijection. Alors le graphe de $f^{-1}$ est l'image du graphe de $f$ par la symétrie d'axe $D$, où $D$ est la droite d'équation $y = x$.*

### I.1.2 Parité, imparité, périodicité

**Définition 1.1.5 (fonctions paires, impaires, périodiques)**

Soit $f$ une fonction de domaine de définition $D_f \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- On dit que $f$ est *paire* si $D_f$ est symétrique par rapport à 0 (donc $D_f = -D_f = \{-x, x \in D_f\}$), et

$$\forall x \in D_f, \quad f(-x) = f(x).$$

- On dit que $f$ est *impaire* si $D_f$ est symétrique par rapport à 0 et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = -f(x).$$

- On dit que $f$ est périodique de période $T$ si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+T) = f(x).$$

**Exemple 1.1.6**

Que dire des symétries du graphe d'une fonction vérifiant $f(4-x) = f(x)$ ? Même question si $f(4-x) = -f(x)$.

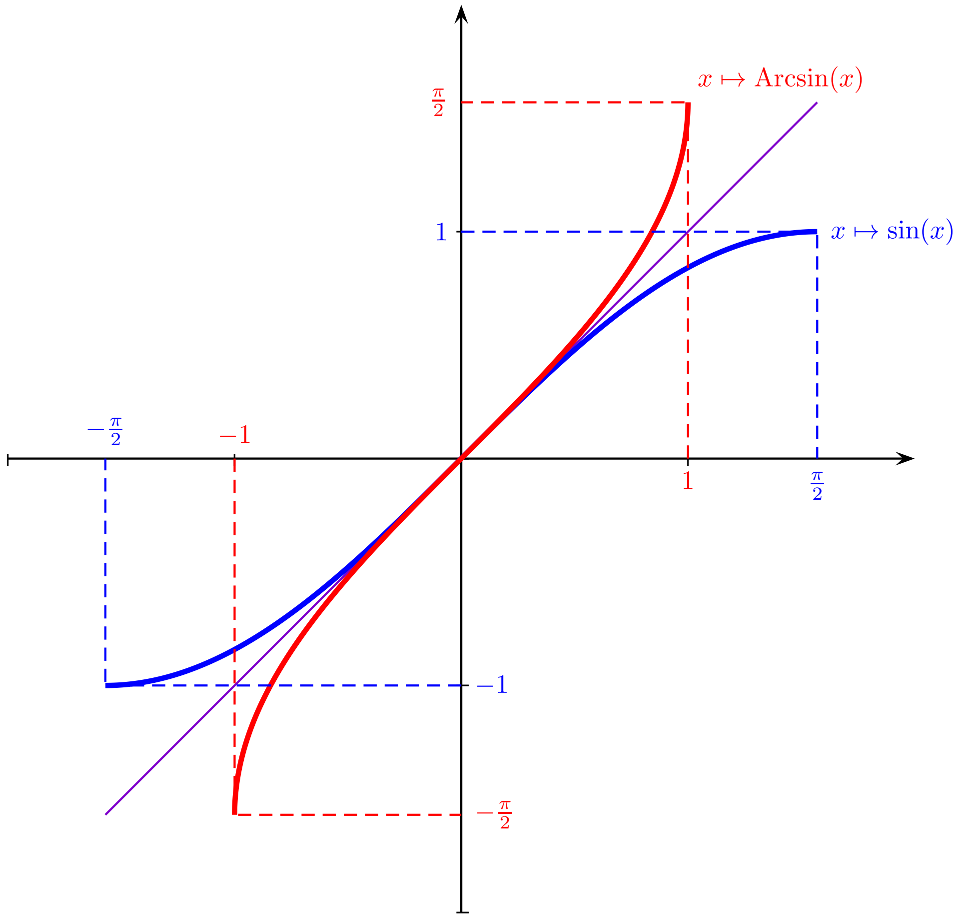


FIGURE 1.3 – Graphe d'une fonction réciproque

**Définition 1.1.7 (période minimale)**

Soit $f$ une fonction périodique, et soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des périodes strictement positives de $f$. Si $\mathcal{T}$ admet un minimum $T$, alors $T$ est appelée *période minimale de* $f$, ou *plus petite période de* $f$.

**Proposition 1.1.8 (description des périodes en fonction de la période minimale)**

*Soit $f$ une fonction périodique admettant une plus petite période $T$. Alors l'ensemble des périodes de $f$ est*

$$\mathcal{T} = T\mathbb{Z} = \{nT,\ n \in \mathbb{Z}.\}$$

**Exemples 1.1.9**

1. cos et sin sont périodiques de période $2\pi$. Il s'agit de la période minimale.
2. tan est également périodique de période $2\pi$, mais ce n'est pas la période minimale. La période minimale est $\pi$.
3. Il existe des fonctions périodiques n'admettant pas de période minimale, par exemple $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$, pour laquelle tous les rationnels sont périodes.

**Proposition 1.1.10 (ensemble des périodes d'une fonction sans période minimale)**

*Soit $f$ une fonction périodique n'ayant pas de période minimale. Alors l'ensemble des périodes est dense* *dans* $\mathbb{R}$.

On en déduira plus tard que toute fonction périodique continue et non constante admet une période minimale.

**Proposition 1.1.11 (signification graphique de l'(im)parité et de la périodicité, figure 1.4)** *Soit $f$ une fonction d'un sous-ensemble $E$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

1. *Si $f$ est paire, alors la courbe de $f$ est invariante par la symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.*
2. *Si $f$ est impaire, alors la courbe de $f$ est invariante par rapport à la symétrie de centre $0$. En particulier, $f(0) = 0$.*
3. *Si $f$ est périodique de période $T$, la courbe de $f$ est invariante par translation de vecteur $T \cdot \vec{\imath}$.*

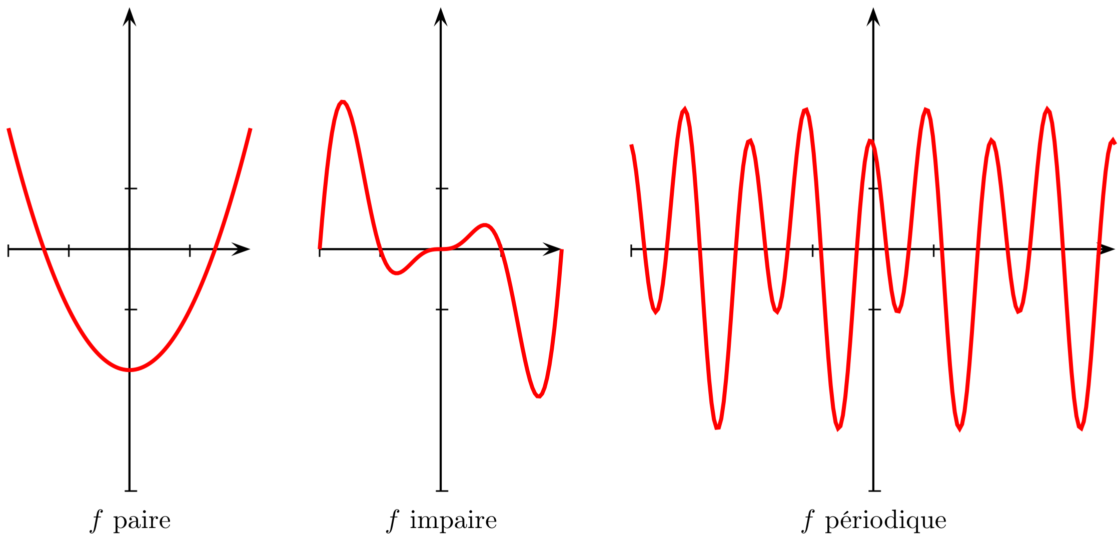


Figure 1.4 – Graphe d'une fonction paire, impaire, périodique

### I.1.3 Somme, produit, composition

Puisque l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$ est muni d'une somme et d'un produit, on peut faire la somme et le produit de deux fonctions définies sur un même ensemble $E \subset \mathbb{R}$ : par définition,

$$\forall x \in E, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{et} \qquad (fg)(x) = f(x)g(x).$$

Puisque l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée est le même (ou presque), on peut envisager de les composer. Soit :

- $f$ une fonction définie sur $D_f \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$
- $g$ une fonction définie sur $D_g \subset \mathbb{R}$

Alors $g \circ f$ est définie sur $f^{-1}(D_g)$ par

$$\forall x \in f^{-1}(D_g), \quad g \circ f(x) = g(f(x)).$$

En particulier, si $f(D_f) \subset D_g$, alors $g \circ f$ est définie sur $D_f$.

**Exemple 1.1.12**

Sur quel domaine est défini $g \circ f$ lorsque $g = \ln$ et $f : x \mapsto \frac{x-1}{x+1}$ ?

### I.1.4 Monotonie

**Définition 1.1.13 (fonctions monotones)**

Soit $f$ une fonction de $D_f \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $I \subset D_f$ un intervalle.
- $f$ est *croissante* sur $I$ si : $\forall (x,y) \in I^2, \quad x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$ ;
- $f$ est *strictement croissante* sur $I$ si : $\forall (x,y) \in I^2, \quad x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$ ;
- $f$ est *décroissante* sur $I$ si : $\forall (x,y) \in I^2, \quad x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \geqslant f(y)$ ;
- $f$ est *strictement décroissante* sur $I$ si : $\forall (x,y) \in I^2, \quad x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$ ;
- $f$ est *monotone* si $f$ est croissante ou décroissante ;
- $f$ est *strictement monotone* si $f$ est strictement croissante ou strictement décroissante.

**Avertissement 1.1.14**

Si $f$ est croissante (ou décroissante) sur deux intervalles $I$ et $J$, elle n'est pas nécessairement croissante sur l'union $I \cup J$. Considérer par exemple $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $I = ]-\infty, 0[$, $J = ]0, +\infty[$.

**Proposition 1.1.15 (monotonie et composition)**

*Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies sur les sous-ensembles $E$ et $F$ de $\mathbb{R}$, et telles que $f(E) \subset F$. Alors :*
- *Si $f$ et $g$ sont croissantes, ou si $f$ et $g$ sont décroissantes, alors $g \circ f$ est croissante ;*
- *Si $f$ et croissante et $g$ décroissante, ou si $f$ est décroissante et $g$ croissante, alors $g \circ f$ est décroissante.*

*De plus, si la monotonie de $f$ et $g$ est stricte, celle de $g \circ f$ l'est également.*

Ainsi, la monotonie suit, vis-à-vis de la composition, une règle similaire à la règle des signes. Si les deux fonctions sont *strictement* monotones, on obtient la monotonie *stricte* de $g \circ f$.

**Proposition 1.1.16 (monotonie et réciproque)**

*Soit $f : I \longrightarrow J$ une fonction bijective réelle définie sur un sous-ensemble $I$ de $\mathbb{R}$. Si $f$ est monotone (nécessairement strictement), alors $f^{-1}$ est monotone, de même sens de monotonie que $f$.*

**Proposition 1.1.17 (monotonie et injectivité)**

*Une fonction strictement monotone sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est injective sur ce sous-ensemble.*

### I.1.5 Fonctions bornées

On rappelle :

**Définition 1.1.18 (fonctions majorées, minorées, bornées)**

Soit $f$ une fonction définie sur un sous-ensemble $E$ de $\mathbb{R}$.
- On dit que $f$ est majorée si : $\exists M \in \mathbb{R}, \ \forall x \in E, \ f(x) \leqslant M$.
- On dit que $f$ est minorée si : $\exists M \in \mathbb{R}, \ \forall x \in E, \ f(x) \geqslant M$.
- On dit que $f$ est bornée si $f$ est majorée et minorée.

Ainsi, $f$ est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.
Graphiquement (voir figure 1.5) :

- $f$ est majorée si la courbe de $f$ reste sous une droite horizontale ;
- $f$ est minorée si la courbe de $f$ reste au-dessus d'une droite horizontale ;
- $f$ est bornée si la courbe de $f$ reste coincée entre deux droites horizontales.

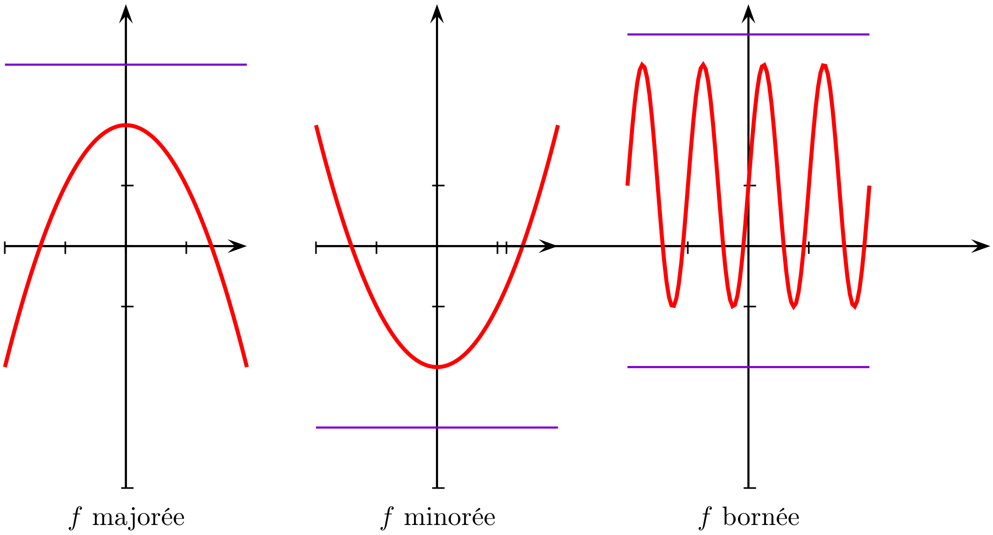


FIGURE 1.5 – Graphe d'une fonction majorée, minorée, bornée

## I.2 Dérivation

Une fonction peut être plus ou moins « régulière ». La régularité d'une fonction se mesure à l'aide des propriétés de continuité et de dérivabilité. Plus on peut dériver une fonction, plus celle-ci sera régulière. Intuitivement, plus une fonction est régulière, plus son graphe est lisse.

### I.2.1 Limites et continuité

**Définition 1.1.19 (Limite d'une fonction)**

Soit $f$ une fonction réelle définie sur un intervalle $I$, et $x_0$ un point de $I$, ou une des deux bornes de $I$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que $f$ admet une limite finie $\ell$ en $x_0$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I, \quad |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Ainsi, on peut forcer $f(x)$ à être aussi proche qu'on veut de $\ell$ à condition que $x$ ne s'éloigne pas trop de $x_0$.
Si de plus, $f$ est définie en $x_0$, on a nécessairement $\ell = f(x_0)$.
La définition de la limite est aussi valable pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$. Dans ce cas, la notion de module remplace la notion de valeur absolue. Dans le cas d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$, on peut étudier la limite à l'aide des parties réelle et imaginaire :

**Proposition 1.1.20 (Limite d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$)**

*Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0$ un point de $I$ ou se son bord. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes. Alors $f$ admet une limite en $x_0$ si et seulement si les fonctions $x \mapsto \mathrm{Re}(f(x))$ et $x \mapsto \mathrm{Im}(f(x))$ admettent une limite en $x_0$, et dans ce cas,*

$$\lim_{x \mapsto x_0} f(x) = \lim_{x \mapsto x_0} \mathrm{Re}(f(x)) + \mathrm{i} \lim_{x \mapsto x_0} \mathrm{Im}(f(x)).$$

**Définition 1.1.21 (continuité)**

Soit $f$ une fonction réelle définie sur $I$ et $x_0 \in I$. On dit que $f$ est continue en $x_0$ si $f$ admet une limite (nécessairement égale à $f(x_0)$) en $x_0$. Autrement dit, $f$ est continue en $x_0$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I, \quad |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Ainsi, si $x$ ne s'éloigne pas trop de $x_0$, $f(x)$ ne s'éloigne pas trop de $f(x_0)$.
Ici aussi, la notion de continuité se généralise aux fonctions d'une variable réelle et à valeurs complexes, et peut se voir au travers des propriétés de continuité de la partie réelle et de la partie imaginaire.
On aura l'occasion de revenir plus longuement sur ces notions dans un chapitre ultérieur.

### I.2.2 Dérivation et tangente

Dans ce paragraphe, les fonctions étudiées seront systématiquement des fonctions définies sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

**Définition 1.1.22 (dérivabilité, dérivée)**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle ouvert $I$, et $x_0 \in I$. On dit que $f$ est dérivable en $x_0$ si le taux d'accroissement $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ définie sur $I \setminus \{x_0\}$ admet une limite finie en $x_0$. Dans ce cas, on définit la dérivée par :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

**Remarques 1.1.23**

1. La dérivation est une notion *locale* et *non ponctuelle* ($f$ doit être défini sur un voisinage de $x_0$).
2. La dérivation est une notion *locale* et non *globale* (ne dépend que d'un voisinage quelconque de $x_0$, quel qu'il soit).

**Exemples 1.1.24**

1. $f : x \mapsto c$ la fonction constante.
2. $f : x \mapsto x$ la fonction identité.
3. $f : x \mapsto \sin x$

**Remarque 1.1.25**

Interprétation géométrique : la dérivée en $x_0$ est la pente de la tangente à la courbe de $f$ en $x_0$.

On en déduit :

**Proposition 1.1.26 (équation de la tangente)**

*Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $I$ et $x_0 \in I$. Alors la courbe de $f$ admet une tangente en $x_0$, d'équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.*

**Théorème 1.1.27**

*Si $f$ est dérivable en $x_0$, alors $f$ est continue en $x_0$.* ***La réciproque est fausse !***

**Définition 1.1.28**

Soit $Y \subset X$ un sous-ensemble *ouvert* de $X$. On dit que $f$ est *dérivable* sur $Y$ si $f$ est dérivable en tout point de $Y$.

**Note Historique 1.1.29**

- La notion de dérivée tire son origine dans l'étude des tangentes, et en particulier de la pente des tangentes. Pierre de Fermat le premier (en 1636) constate que très souvent, la pente s'obtient en écrivant $\dfrac{f(a+e)-f(a)}{e}$, puis en « prenant » $e=0$ (il ne dispose pas encore de la notion de limite). Il appelle $e$ un « infiniment petit ».
- Newton, en 1669, introduit la notation $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, pour les dérivées des coordonnées d'un point, qu'il appelle « fluxions » des « fluentes » $(x, y, z)$, qu'il définit comme les vitesses dont les fluentes sont augmentées graduellement et indéfiniment. Sa notation est encore utilisée actuellement en physique.
- En 1674, Leibniz introduit la notation $\mathrm{d}x$ pour désigner une variation infinimésimale sur l'abscisse, et $\mathrm{d}y$ pour désigner une variation infinitésimale sur l'ordonnée. Si $y$ dépend de $x$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ désigne donc la variation infinitésimale de la fonction $y$ rapportée à la variation infinitésimale de $x$ qui l'a provoquée : il s'agit bel et bien de la définition de Fermat, et rien de plus : pas de nouvelle théorie, juste une nouvelle notation, encore largement utilisée aujourd'hui, notamment sous la forme non quotientée (pensez aux intégrales !)
- À la fin du 18-ième siècle, Joseph-Louis Lagrange introduit la terminologie « dérivée » et la notation $f'$.
- La formalisation rigoureuse est due à Karl Weierstrass dans la deuxième moitié du 19-ième siècle, s'appuyant sur une définition rigoureuse de la notion de limite et de continuité (dont il donne également pour la première fois une définition rigoureuse et précise)

### I.2.3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Soit une fonction réelle $f$ définie sur un intervalle $I$, et dérivable sur cet intervalle $I$. La fonction dérivée $f'$ est alors définie sur $I$. On peut alors étudier les propriétés de dérivabilité de $f'$, et, en cas de dérivabilité, on obtient la dérivée seconde $f''$ (dérivée de la dérivée). On peut continuer de la sorte tant que c'est possible.

**Définition 1.1.30 (dérivées d'ordre supérieur)**

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que $f$ est $n$-fois dérivable si on peut dériver $f$ sur $I$, $n$ fois de suite. Cela définit alors une fonction $f^{(n)}$.

**Remarque 1.1.31**

- N'oubliez pas les parenthèses autour de l'exposant, pour bien distinguer la dérivation de l'exponentiation.
- Pour $n=1$ et $n=2$, on utilise généralement les notations $f'$ et $f''$ au lieu de $f^{(1)}$ et $f^{(2)}$. On rencontre aussi parfois $f'''$ pour $f^{(3)}$ (« $f$ tierce »).

**Définition 1.1.32 (fonctions de classe $\mathcal{C}^n$)**

- Une fonction $f$ est dite de classe $\mathcal{C}^n$ si elle est $n$ fois dérivable et que $f^{(n)}$ est continue.
- Une fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si et seulement si elle est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, une fonction est de classe $\mathcal{C}^0$ si elle est continue. Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ si elle est dérivable (donc continue) et de dérivée continue, etc. Remarquez que la dérivabilité ne suffit pas à obtenir la classe $\mathcal{C}^1$.

**Exemple 1.1.33**

$f : x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$, prolongée par continuité en 0.

### I.2.4 Règles de dérivation

Nous admettons pour le moment les règles suivantes, permettant de calculer toutes les fonctions construites à partir des fonctions usuelles, à condition de connaître les dérivées de ces fonctions usuelles. Dans tout ce paragraphe, $I$ désigne un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

**Proposition 1.1.34 (dérivée d'une somme, d'un produit, admis provisoirement)**

*Soit $f$ et $g$ deux fonctions de $I$ dans $\mathbb{R}$, et $x \in I$. Soit $\lambda$ un réel.*

1. *Si $f$ est dérivable en $x$, alors $\lambda f$ aussi et $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x)$.*
2. *Si $f$ et $g$ sont dérivables en $x$, alors $f + g$ aussi et $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.*
3. *Si $f$ et $g$ sont dérivables en $x$, $fg$ aussi et $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$*
4. *Si $f$ et $g$ sont dérivables en $x$ et $g(x) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ aussi et $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$*

**Corollaire 1.1.35 (dérivée d'un produit de $n$ termes)**

*Soit $f_1, \dots, f_n : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Si $f_1, \dots, f_n$ sont dérivables en $x_0$, alors leur produit aussi, et :*

$$(f_1 \cdots f_n)' = \sum_{k=1}^{n} f_k'(x_0) \prod_{i \in [\![1,n]\!] \setminus \{k\}} f_i(x_0).$$

**Corollaire 1.1.36 (Formule de Leibniz)**

*Soit $f$ et $g$ deux fonctions de $I$ dans $\mathbb{R}$ et $x \in I$. Si $f$ et $g$ sont $n$ fois dérivables en $x$, alors $fg$ aussi, et :*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0).$$

Remarquez la ressemblance avec la formule du binôme.

**Exemple 1.1.37**

$f : x \mapsto x^n$.

**Proposition 1.1.38 (dérivation d'une composition, admis provisoirement)**

*Soit $I$ et $J$ deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, et $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$. Soit $x \in I$. Si $f$ est dérivable en $x$ et $g$ dérivable en $y = f(x)$, alors $g \circ f$ est dérivable en $x$, et :*

$$(g \circ f)'(x) = f'(x)g'(y) = f'(x) \cdot g' \circ f(x).$$

Une dernière règle de dérivation, que nous admettons ici, est la règle de dérivation des fonctions réciproques.

**Théorème 1.1.39 (Dérivation des fonctions réciproques, admis provisoirement)**

*Soit $I$ et $J$ deux intervalles, et soit $f$ une application bijective continue de $I$ dans $J$. Soit $t_0 \in I$, et $x_0 = f(t_0)$. Alors, si $f$ est dérivable en $t_0$, et si $f'(t_0) \neq 0$, alors $f^{-1}$ est dérivable en $x_0$, et :*

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(t_0)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x_0)}.$$

### I.2.5 Dérivées partielles

On peut étendre la notion de dérivée aux fonctions de plusieurs variables. On se limite ici à des fonctions de deux variables, les notions introduites se généralisant facilement à davantage de variables.
Soit $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ une fonction de deux variables.

**Définition 1.1.40 (dérivées partielles)**

- On dit que $f$ est dérivable par rapport à $x$ en $(x_0, y_0)$ si la fonction $f_{y_0} : x \mapsto f(x, y_0)$ obtenue en fixant $y_0$ est dérivable en $x$. On note alors :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_{y_0}(x_0).$$
- On définit de même la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ en dérivant par rapport à la variable $y$ à $x_0$ fixé.

Les règles de dérivation des fonctions de plusieurs variables s'adaptent, puisque par définition, on se ramène à la dérivée d'une fonction d'une variable.
On donne tout de même une règle de dérivation pour les compositions, ne se déduisant pas directement des règles pour les fonctions d'une variable

**Théorème 1.1.41 (dérivation le long d'une courbe, admis)**
*Soit $f$ une fonction de deux variables réelles, et $u$ et $v$ des fonctions d'une variable réelle définies sur un intervalle $I$ tel que pour tout $t \in I$, $(u(t), v(t))$ est dans le domaine de définition de $f$. Soit :*
$$\forall t \in I, \quad F(t) = f(u(t), v(t)).$$
*Si $u$ et $v$ sont dérivables en $t_0 \in I$ et si $F$ admet des dérivées partielles en $(u(t_0), v(t_0))$, alors $F$ est dérivable en $t_0$ et*
$$F'(t_0) = u'(t_0)\frac{\partial f}{\partial x}(u(t_0), v(t_0)) + v'(t_0)\frac{\partial f}{\partial y}(u(t_0), v(t_0)).$$

En notant $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$, $U'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix}$ et $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$ (gradient de $f$), cela se réécrit à l'aide du produit scalaire de $\mathbb{R}^2$ :
$$(f \circ U)'(t_0) = F'(t_0) = \langle\ \nabla f(U(t_0)), U'(t_0)\ \rangle.$$

## I.3 Étude d'une fonction

Nous commençons par un rappel de certaines propriétés (admises pour le moment) permettant une étude efficace d'une fonction d'une variable, puis nous rappelons le schéma général d'étude d'une fonction.

**Théorème 1.1.42 (variations des fonctions dérivables, admis provisoirement)**
*Soit $f : X \to \mathbb{R}$, et $I$ un* intervalle ouvert *tel que $f$ est dérivable sur $I$. Alors :*

1. *$f$ est croissante sur $I$ si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x_0) \geqslant 0$.*
   *Si cette inégalité est stricte sauf en un nombre fini de points, alors $f$ est strictement croissante.*
2. *$f$ est décroissante sur $I$ si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x_0) \leqslant 0$.*
   *Si cette inégalité est stricte sauf en un nombre fini de points, alors $f$ est strictement décroissante.*

**Corollaire 1.1.43 (caractérisation des fonctions constantes sur un intervalle)**

*Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur un intervalle ouvert $I$. Alors $f$ est constante si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.*

**Définition 1.1.44 (point critique)**

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $I$, et $x \in I$. On dit que $x$ est un point critique de $f$ si $f'(x) = 0$.

**Théorème 1.1.45 (condition nécessaire pour un extrémum)**

*Soit $f$ dérivable sur un intervalle ouvert $I$. Si $f$ admet en $x$ un extremum local (minimum ou maximum), alors $f'(x) = 0$.*

Cette condition n'est pas suffisante, comme le montre l'exemple de $x \mapsto x^3$ en 0. Il faut faire une étude locale.
Le comportement à l'infini (comportement asymptotique) peut aussi aider à cerner l'allure de la courbe. On définit pour cela la notion de droite asymptote : il s'agit d'une droite qui approche d'aussi près qu'on veut une portion de la courbe lorsqu'on s'éloigne vers l'infini dans l'une des deux directions. Plus précisément :

**Définition 1.1.46 (asymptotes)**

- asymptote verticale en $a$ : droite d'équation $x = a$ en $a$ : $\lim\limits_{x \to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$ ;
- asymptote horizontales au voisinage de $\pm\infty$ : droite d'équation $y = b$ telle que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$.
- Plus généralement, la droite $D$ d'équation $y = ax + b$ est dite asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ de $f$ en $+\infty$ si

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

  On définit évidemment une notion similaire en $-\infty$.

**Méthode 1.1.47 (Déterminer une droite asymptote (non verticale))**

Tant qu'on ne dispose pas de méthode plus sophistiquée, le principe est le suivant (pour une asymptote en $+\infty$) :

- Étudier la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ :
  - Si cette limite n'existe pas, ou si elle est infinie, la courbe de $f$ n'a pas d'asymptote en $+\infty$.
  - Si cette limite est finie, de valeur $a$, on dit que la droite $y = ax$ est direction asymptotique de la courbe en $+\infty$.
- On étudie la limite de $f(x) - ax$ :
  - Si elle n'existe pas, ou si elle est infinie, la courbe de $f$ n'a pas d'asymptote en $+\infty$.
  - Si cette limite est finie, de valeur $b$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe de $f$ en $+\infty$.

Nous verrons plus tard comment on peut obtenir $a$ sans former le quotient, à l'aide d'équivalents, ou même comment obtenir simultanément $a$ et $b$ à l'aide d'un « développement limité ».

**Exemples 1.1.48**

1. Déterminer les asymptotes de la courbe de $f : x \mapsto \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 + 1}$.
2. Montrer que $x \mapsto x + \sin x$ admet une direction asymptotique en $-\infty$ et $+\infty$, mais pas d'asymptote.

Enfin, l'allure de la courbe va dépendre fortement de « l'orientation de la courbure », c'est-à-dire de savoir si le « creux » de la courbe est orienté vers le haut ou vers le bas. C'est ce qu'on appelle la convexité de la courbe. Intuitivement, si le creux de la courbe est orienté vers le haut, la pente de la tangente est de plus en plus forte, donc $f'$ est croissante. Cela amène la définition suivante :

**Définition 1.1.49 (fonction convexe, concave, figure 1.6, définition provisoire)**

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $I$.

- On dit que $f$ est convexe sur $I$ si $f'$ est croissante sur $I$ ; si $f$ est deux fois dérivable, cela équivaut à : $f'' \geqslant 0$ sur $I$.
- On dit que $f$ est concave sur $I$ si $f'$ est décroissante sur $I$ ; si $f$ est deux fois dérivable, cela équivaut à : $f'' \leqslant 0$ sur $I$.

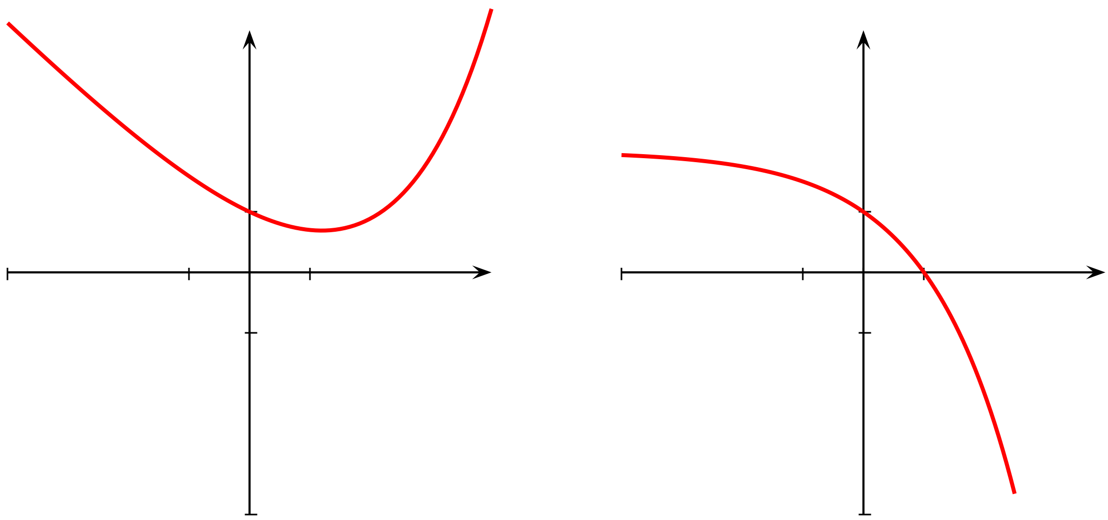


Figure 1.6 – Graphe d'une convexe, concave

**Exemples 1.1.50**

1. $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$ ;
2. $x \mapsto \ln x$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$

**Définition 1.1.51 (point d'inflexion)**

Un point d'inflexion de la courbe de $f$ est un point en lequel $f$ change de convexité.

**Proposition 1.1.52 (condition nécessaire de point d'inflexion)**

*Si $f$ est deux fois dérivable sur l'intervalle ouvert $I$, si la courbe de $f$ admet un point d'inflexion en $x_0$ alors $f''(x_0) = 0$.*

Ce n'est pas une condition suffisante, comme le montre l'exemple de $x \mapsto x^4$ en 0. Il faut étudier le signe de $f''$ à gauche et à droite de $x_0$ : si $f''$ change de signe en $x_0$ alors la courbe admet en $x_0$ un point d'inflexion.

On peut maintenant donner le plan d'étude d'une fonction.

**Méthode 1.1.53 (plan d'étude d'une fonction)**

1. Recherche du domaine de définition.
2. Étude des symétries (parité, imparité, périodicité...), qui permet une restriction du domaine d'étude. Ces symétries seront à reporter sur le graphe de façon aussi satisfaisante que possible.
3. Calcul des limites aux bords du domaine.
4. **Étude des variations** : dérivabilité, expression de la dérivée $f'$, points critiques, tableau de signe de $f'$ et tableau de variation de $f$.

   Préciser dans le tableau les valeurs de $f$ aux points critiques.

   L'étude du signe de $f'$ peut nécessiter l'étude d'une ou plusieurs fonctions auxiliaires.
5. Recherche des asymptotes (verticales, horizontales, obliques)
6. Calcul de $f''$, recherche du signe de $f''$ et des points d'inflexion. Convexité de la courbe entre les points d'inflexion.
7. Pour aider au tracé : recherche de l'équation de certaines tangentes :
   - demi-tangente aux bords du domaine, si $f$ est défini en ce point (le bord d'un intervalle fermé par-exemple), ou si $f$ se prolonge par continuité en ce point ;
   - tangentes aux points d'inflexion : en ces points, la courbe passe d'un côté à l'autre de la tangente (admis pour l'instant)
8. Tracé de la courbe, en s'aidant des points particuliers, des asymptotes, et des tangentes qu'on a déterminées, à reporter aussi précisément que possible sur le graphe.

**Exemple 1.1.54**

Étude aussi précise que possible de $f : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x+1}$.

Souvent, suivant ce que l'on recherche, une étude aussi complète n'est pas nécessaire. Les études de fonctions sont par exemple souvent utilisées pour déterminer des inégalités, mais dans ce cas, l'étude des variations est suffisante.

**Exemple 1.1.55**

Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\quad \dfrac{2x}{\pi} \leqslant \sin x \leqslant x$.

Lorsque nous aurons étudié un peu plus précisément la notion de convexité, nous verrons que cet encadrement est en fait une conséquence immédiate de la concavité de sin sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ (position de la courbe par rapport à ses tangentes et à ses cordes)

## I.4 Dérivations de fonctions réelles à valeurs dans $\mathbb{C}$

Nous élargissons dans ce paragraphe la notion de dérivation au cas de fonctions complexes, ou plus précisément, de fonctions d'une variable réelle, à valeurs dans $\mathbb{C}$.

**Définition 1.1.56 (Dérivation d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$)**

Soit $I = ]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ ($a, b \in \overline{\mathbb{R}}$) et $x_0 \in I$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes. On dit que $f$ est dérivable en $x_0$ si l'expression $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ admet une limite dans $\mathbb{C}$ lorsque le réel $h$ tend vers 0, c'est-à-dire s'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que

$$\lim_{h \to 0} \left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - \ell \right| = 0.$$

Dans ce cas, on définit la dérivée de $f$ en $x_0$ par :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

La dérivation d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ se ramène en fait à la dérivation de deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ (la partie réelle et la partie imaginaire) :

**Proposition 1.1.57 (Dérivation des parties réelles et imaginaires)**

*Soit, avec les mêmes notations, $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$, et définissons les fonctions $r$ et $i$ de $I$ dans $\mathbb{C}$ par :*

$$\forall x \in I, \quad r(x) = \mathrm{Re}(f(x)) \qquad \text{et} \qquad i(x) = \mathrm{Im}(f(x)).$$

*Alors $f$ est dérivable en $x_0$ si et seulement si $r$ et $i$ le sont, et dans ce cas,*

$$f'(x_0) = r'(x_0) + \mathrm{i}\, i'(x_0).$$

Les règles de dérivation des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ sont les mêmes que pour les fonctions à valeurs réelles :

**Proposition 1.1.58 (principales règles de dérivation des fonctions complexes)**

*Soit $f, g : I \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions complexes définie sur un intervalle ouvert $I$ de $\mathbb{R}$ et dérivables en $x_0 \in I$. Alors :*

*(i)* $f+g$ *est dérivable en* $x_0$ *et* $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ ;

*(ii)* *pour tout* $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha f$ *est dérivable en* $x_0$ *et* $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$ ;

*(iii)* $fg$ *est dérivable en* $x_0$ *et* $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ ;

*(iv)* *si* $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ *est dérivable en* $x_0$ *et* $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.

On ne donne pas de règle générale de dérivation de compositions : composer à la source par une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ne pose pas de problème en considérant partie réelle et partie imaginaire. Composer à l'arrivée est plus délicat, car cela implique des fonctions dont la variable est complexe ; la notion de dérivation de fonctions d'une variable complexe existe (fonctions holomorphes), mais c'est une autre histoire. Nous nous contentons du cas particulier de la composition par l'exponentielle complexe, très utile en physique :

**Proposition 1.1.59 (Dérivée de $t \mapsto \mathrm{e}^{\varphi(t)}$)**

*Soit $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes définie sur un intervalle $I$ ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$.*
*Soit $\psi : x \mapsto \mathrm{e}^{\varphi(t)}$.*
*Si $\varphi$ est dérivable en $x_0$, alors $\psi$ aussi, et*

$$\psi'(x_0) = \varphi'(x_0)\mathrm{e}^{\varphi(x_0)}.$$

**Exemples 1.1.60**

1. Calculer la dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer la dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x^2}$ sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer la dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}}$ sur $\mathbb{R}$.

En identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, la dérivée de $\varphi$ correspond à un vecteur tangent (dans un sens que nous ne définissons pas) à la courbe paramétrée par $\varphi$ au point $\varphi(x_0)$ (voir l'exemple de $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$ : la tangente au cercle trigonométrique est orthogonal au rayon, donc obtenu par multiplication par un imaginaire pur, ce qui correspond bien au facteur i qu'on obtient dans la dérivation)

# II Fonctions usuelles

Le but de ce paragraphe est de faire quelques rappels sur les fonctions usuelles que vous connaissez déjà, et d'en introduire des nouvelles.

## II.1 Exponentielle, logarithme, puissances

**Définition 1.2.1 (fonction logarithme (népérien) ln, courbe figure 1.7)**

La fonction ln est l'unique primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ s'annulant en 1

**Propriétés 1.2.2 (propriétés de ln)**

*Soit* $f : x \mapsto \ln(x)$.

- *Domaine de définition :* $]0, +\infty[$.
- *Dérivation :* $f$ *est de classe* $\mathcal{C}^{+\infty}$ *sur* $]0, +\infty[$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{x}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

- *Variations :* ln *est croissante sur son domaine.*
- *Propriétés de convexité :* ln *est* ***concave*** *sur* $\mathbb{R}_+^*$
- *Inégalité classique :* $\forall x \in ]-1, \infty[, \quad \ln(1+x) \leqslant x$
- *Valeurs remarquables et limites :*
  - $\ln(1) = 0$
  - $\ln(\mathrm{e}) = 1$
  - $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.
- *Limite remarquable :* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.
- *Autres propriétés remarquables :*
  - $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ *si* $a, b > 0$.
  - $\ln(a^x) = x\ln(a)$
  - $\ln(\mathrm{e}^x) = x$, $\mathrm{e}^{\ln x} = x$

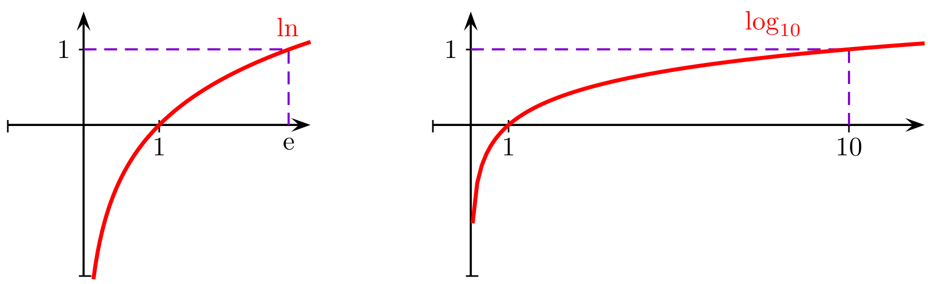


FIGURE 1.7 – Graphes de ln et $\log_{10}$

**Définition 1.2.3 (fonction exponentielle exp, courbe figure 1.8)**

La fonction exp est la réciproque de ln (bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$). Elle est indifféremment notée $x \mapsto \exp(x)$ ou $x \mapsto \mathrm{e}^x$.

**Propriétés 1.2.4 (propriétés de la fonction exp)**

*Soit $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$.*

- *Domaine de définition :* $\mathbb{R}$.
- *Dérivation : $f$ est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur $\mathbb{R}$,*

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = \mathrm{e}^x, \qquad \forall x \in \mathbb{R},\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x.$$

- *Variations : $f$ est croissante sur $\mathbb{R}$.*
- *Propriétés de convexité : $f$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$*
- *Inégalité classique :* $\forall x \in \mathbb{R},\quad \mathrm{e}^x \geqslant x + 1$
- *Valeurs remarquables et limites :*
  - $\mathrm{e}^0 = 1$
  - $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.
- *Limite remarquable :* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$.
- *Autres propriétés remarquables :*
  - $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \mathrm{e}^b$
  - $(\mathrm{e}^a)^b = \mathrm{e}^{ab}$
  - $\ln(\mathrm{e}^x) = x$, $\mathrm{e}^{\ln x} = x$

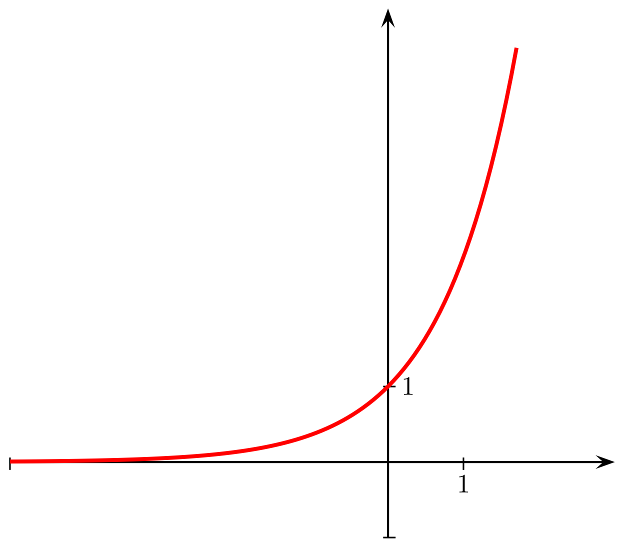


Figure 1.8 – Courbe de la fonction exp

**Définition 1.2.5 (puissance, ou exponentiation)**

Pour tout $x > 0$ et tout $y \in \mathbb{R}$, on définit $x^y = \mathrm{e}^{y \ln x}$.

Si $y = n \in \mathbb{Z}$, cela correspond à la puissance $x^n$ obtenue par itération du produit. Remarquez que dans ce cas (et uniquement dans ce cas), on peut étendre, par itération du produit, la définition de la puissance $x^y$ pour $x \leqslant 0$, mais prenez garde à ne pas écrire cette puissance sous forme exponentielle : cela n'a pas de sens. On pose aussi par convention :

**Convention 1.2.6 (puissances de 0)**
Soit $y \in \mathbb{R}$, on pose :

$$0^y = \begin{cases} 0 & \text{si } y \neq 0 \\ 1 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

On a alors les règles suivantes :

**Propriétés 1.2.7 (règles d'exponentiation)**
*Soit* $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, *et* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
- $x^{a+b} = x^a x^b$
- $(x^a)^b = x^{ab}$
- $x^{-a} = \dfrac{1}{x^a}$
- *Si* $n \in \mathbb{N}^*$, $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$
- $x^a y^a = (xy)^a$
- $\ln(x^a) = a \ln x$.

Vous remarquerez que l'exponentielle n'est dans ce contexte rien d'autre que l'exponentiation du réel $\mathrm{e} = \exp(1)$, unique réel tel que $\ln(\mathrm{e}) = 1$. Cela justifie la notation $\mathrm{e}^x$ pour l'exponentielle.

**Définition 1.2.8 (logarithme de base $b > 0$)**
Soit $b > 0$, le logarithme de base $b$ est la fonction réciproque de $x \mapsto b^x$, bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Elle est notée $\log_b$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\log_b(b^x) = x$, et en particulier, $\log_b(b) = 1$.

Par exemple, on utilise beaucoup en physique le logarithme en base 10, défini par la relation $\log_{10}(10^x) = 10$. Le logarithme en base 10 est souvent notée simplement log au lieu de $\log_{10}$. Il n'est pas très utilisé en mathématiques.
En informatique, c'est le logarithme en base 2 qui est le plus fréquemment utilisé. On le note souvent lg.

**Proposition 1.2.9 (expression de $\log_b$ en fonction de ln)**
*Pour tout* $x > 0$, $\log_b(x) = \dfrac{\ln x}{\ln b}$.

Ainsi, la courbe de $\log_b$ (donnée en figure 1.7 pour $b = 10$) s'obtient de celle de ln par affinité horizontale de rapport $\ln b$. On en déduit notamment la croissante, la concavité, les limites, l'égalité $\log_b(1) = 0$, l'expression de la dérivée :

$$\forall x > 0, \quad \log_b'(x) = \frac{1}{x \ln b},$$

ainsi que l'identité remarquable $\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$.
Remarquons pour terminer que le logarithme népérien n'est rien d'autre que le logarithme en base e.
Les fonctions exponentielle, logarithme, puissances sont souvent utilisées pour donner des ordres de grandeur au voisinage de 0 ou vers l'infini. Il est donc important de pouvoir comparer entre elles ces fonctions, au moins pour les très grandes ou très petites (en valeurs absolues) valeurs.

**Théorème 1.2.10 (théorème des croissances comparées en $+\infty$)**

1. *Pour tout* $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$.
2. *Pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{\mathrm{e}^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-x} = 0$.

Ce théorème affirme que la fonction ln est très petite à l'infini (= « négligeable ») devant les fonctions puissances (d'exposant fixe), elles mêmes très petites devant l'exponentielle. Aussi dit-on souvent « l'exponentielle l'emporte sur les puissances, qui l'emportent sur le ln ».
Dans les situations plus complexes, on peut toujours se ramener à ces situations, en écrivant les puissances sous forme exponentielle, et en étudiant la limite de l'exposant.

**Exemple 1.2.11**

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x}$
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\ln x} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$
3. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} x \mathrm{e}^{-\sqrt{\ln x}}$.

**Théorème 1.2.12 (théorème des croissances comparées en 0)**

*Pour tout* $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha \ln x = 0$

Ainsi, $\ln x$ est « négligeable » devant les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$, ce qui signifie que ces dernières tendent vers $-\infty$ beaucoup plus vite que ln.

## II.2 Fonctions trigonométriques

Nous avons déjà défini et fait une étude sommaire des fonctions trigonométriques sin, cos et tan. Nous complétons un peu cette étude, notamment avec l'expression des dérivées, que nous n'avions pas données à ce moment-là.

**Propriétés 1.2.13 (propriétés de sin)**

*Soit* $f : x \mapsto \sin x$.

- *Domaine de définition :* $\mathbb{R}$.
- *Symétries :* sin *est* $2\pi$*-périodique et impaire.*
- *Dérivation :* $f$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \cos(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} f^{(2n)}(x) & = (-1)^n \sin(x) \\ f^{(2n+1)}(x) & = (-1)^n \cos(x). \end{cases}$$

- *Variations :* *Voir le chapitre* « Les corps $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ »
- *Valeurs particulières :* *Voir le chapitre* « Les corps $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ »
- *Limites :* *Pas de limite en* $+\infty$ *et* $-\infty$.
- *Propriétés de convexité :*
  sin *est convexe sur les intervalles* $[-\pi, 0] + 2k\pi$ *et concave sur les intervalles* $[0, \pi] + 2k\pi$
- *Inégalités classiques*
  * $\forall x \in \mathbb{R}_+, \ \sin x \leqslant x$
  * $\forall x \in \mathbb{R}_-, \ \sin x \geqslant x$
  * $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \ \sin x \geqslant \frac{2x}{\pi}$.

• *Limite remarquable :* $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
• *Autres propriétés remarquables :*
  ∗ $\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$
  ∗ ***Toutes les formules de trigonométrie*** *( Voir le chapitre «* Les corps $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ *»)*

**Propriétés 1.2.14 (propriétés du cosinus cos)**

*Soit $f : x \mapsto \sin x$.*
• *Domaine de définition :* $\mathbb{R}$.
• *Symétries :* cos *est $2\pi$-périodique et paire.*
• *Dérivation : $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$,*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -\sin(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} f^{(2n)}(x) & = (-1)^n \cos(x) \\ f^{(2n+1)}(x) & = (-1)^{n+1} \sin(x). \end{cases}$$

• *Variations : Voir le chapitre «* Les corps $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ *»*
• *Valeurs particulières : Voir le chapitre «* les corps $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ *»*
• *Limites : Pas de limite en $+\infty$ et $-\infty$.*
• *Propriétés de convexité :* cos *est convexe sur les intervalles* $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]+2k\pi$ *et concave sur les intervalles* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] + 2k\pi$
• *Inégalités classiques :* $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \cos x \geqslant 1 - \frac{2x}{\pi}$
• *Limite remarquable :* $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.
• *Autres propriétés remarquables :*
  ∗ $\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$
  ∗ ***Toutes les formules de trigonométrie*** *( Voir le chapitre «* Les corps $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ *»)*

**Propriétés 1.2.15 (propriétés de la tangente tan)**

*Soit $f : x \mapsto \tan x$.*
• *Domaine de définition :* $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}$.
• *Symétries :* tan *est $\pi$-périodique et impaire.*
• *Dérivation :* tan *est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine,*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2(x)$$

• *Variations : Voir le chapitre «* Les corps $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ *»*
• *Valeurs particulières : Voir le chapitre «* Les corps $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ *»*
• *Propriétés de convexité :*
  tan *est convexe sur les intervalles* $[0, \frac{\pi}{2}] + k\pi$ *et concave sur les intervalles* $[-\frac{\pi}{2}, 0] + k\pi$
• *Inégalités classiques :*
  ∗ $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, \quad \tan(x) \geqslant x$ *(comparaison à la tangente en 0)*
  ∗ $\forall x \in ]-\frac{\pi}{2}, 0], \quad \tan(x) \leqslant x$.
• *Limite remarquable :* $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
• *Autres propriétés remarquables :* ***Toutes les formules de trigonométrie***

Les deux expressions de la dérivée de tan sont à connaître, car suivant les situations, on peut avoir intérêt à utiliser l'une ou l'autre.

Les courbes des fonctions trigonométriques sont représentées dans le chapitre « *Les corps* $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{C}$ ».

## II.3 Réciproques des fonctions trigonométriques

Les fonctions trigonométriques ne sont pas bijectives ni même injectives (elles ne peuvent pas l'être puisqu'elles sont périodiques). Même sur une période, on n'a pas l'injectivité (sauf pour la tangente). Mais en restreignant davantage le domaine de définition, on obtient des fonctions injectives, surjectives sur leur image. Cela permet de considérer leurs fonctions réciproques. Le graphe de ces fonctions s'obtient alors en utilisant la proposition 1.1.4, par symétrie par rapport à la première bissectrice.
La plus importante des fonctions réciproques de fonctions trigonométriques est probablement l'arctangente. Nous commençons donc par elle.

**Définition 1.2.16 (arctangente, Arctan, courbe figure 1.9)**
La fonction tan se restreint en une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.
La fonction arctangente, notée Arctan, est par définition la réciproque de tan restreinte à $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

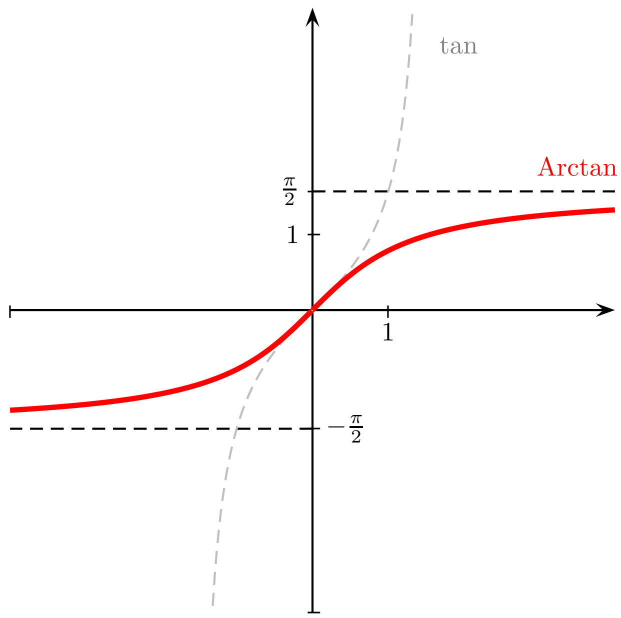


Figure 1.9 – Courbe de Arctan

Le théorème de dérivation des fonctions réciproques permet d'obtenir le résultat important suivant :

**Théorème 1.2.17 (Dérivée de Arctan)**
*La fonction* $f = \text{Arctan}$ *est définie et de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$*, et*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Ainsi, il faut toujours garder en tête les deux facettes de l'Arctan :
- définition comme fonction réciproque de la tangente
- l'arctangente se « dérive bien » (en une fraction rationnelle) ; autrement dit, Arctan est une primitive d'une fonction rationnelle simple (à retenir, on s'en sert très souvent dans des calculs d'intégrales)

Une fois l'expression de la dérivée obtenue, le reste de l'étude de la fonction Arctan est classique.

**Propriétés 1.2.18 (propriétés de Arctan)**
*Soit* $f : x \mapsto \text{Arctan}(x)$

- *Domaine de définition :* $\mathbb{R}$.
- *Dérivation : $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.*
- *Symétries :* Arctan *est impaire.*
- *Variations :* Arctan *est croissante sur* $\mathbb{R}$.
- *Valeurs remarquables :*

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{Arctan}(x) = -\frac{\pi}{2}; \quad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$$
$$\operatorname{Arctan}(0) = 0$$
$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}; \qquad \operatorname{Arctan}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$$
$$\operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}; \qquad \operatorname{Arctan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$$
$$\operatorname{Arctan}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} \qquad \operatorname{Arctan}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$$

- *Propriétés de convexité :* Arctan *est convexe sur* $\mathbb{R}_-$ *et concave sur* $\mathbb{R}_+$
- *Inégalités classiques :*
  - $*$ $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \operatorname{Arctan}(x) \leqslant x$ *(comparaison à la tangente en* $0$*)*
  - $*$ $\forall x \in \mathbb{R}_-, \quad \operatorname{Arctan}(x) \geqslant x$.
- *Limite remarquables :* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{Arctan} x}{x} = 1$.
- *Autres propriétés remarquables :*
  - $*$ $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan(\operatorname{Arctan}(x)) = x$
  - $*$ $\forall x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad \operatorname{Arctan}(\tan(x)) = x$
  - $*$ $\forall x \in ]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$, $\operatorname{Arctan}(\tan(x)) = x - k\pi$.
  - $*$ $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{x} = \varepsilon(x)\dfrac{\pi}{2}$, *où* $\varepsilon(x)$ *est le signe de* $x$.
  - $*$ $\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{Arctan} x < \dfrac{\pi}{2}$.

**Définition 1.2.19 (fonction arcsinus, Arcsin, courbe figure 1.10)**

La fonction sin induit par restriction une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dans $[-1, 1]$. La réciproque de cette fonction est appelée arcsinus, notée Arcsin : $[-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

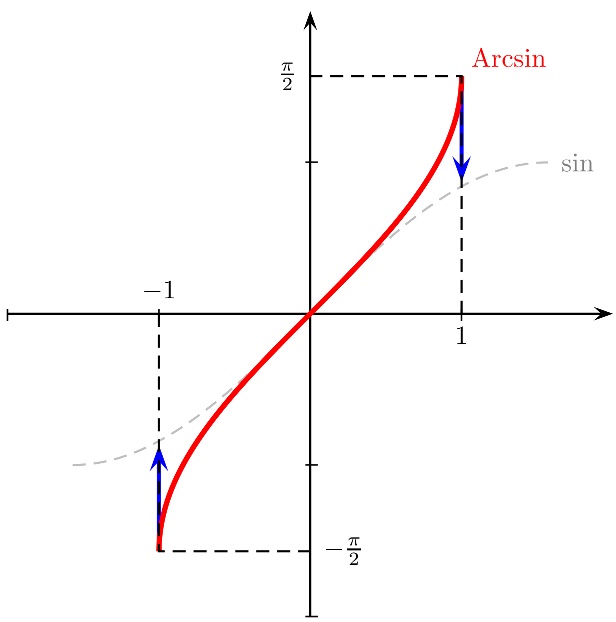


FIGURE 1.10 – Graphe de Arcsin

Comme pour la fonction Arctan, la première étape de l'étude est l'obtension de l'expression de la dérivée. Là encore, on obtient une drivée très simple ; ainsi, Arcsin est à voir comme primitive d'un certaine expression, qui n'est pas une fraction rationnelle cette fois, mais qu'on rencontre tout de même assez souvent dans des calculs d'intégrales.

**Théorème 1.2.20 (Dérivée de Arcsin)**

*La fonction* $f = \mathrm{Arcsin}$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]-1,1[$, *et*

$$\forall x \in ]-1,1[, \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

*En revanche, elle n'est pas dérivable en* $-1$ *et* $1$, *et la courbe présente en ces points des tangentes verticales.*

**Propriétés 1.2.21 (propriétés de Arcsin)**

*Soit* $f : x \mapsto \mathrm{Arcsin}(x)$

- *Domaine de définition :* $[-1,1]$.
- *Dérivation :* $f$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]-1,1[$, *et :* $\forall x \in ]-1,1[, \quad f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- *Symétries :* Arcsin *est impaire.*
- *Variations :* Arcsin *est croissante sur* $\mathbb{R}$.
- *Valeurs remarquables : voir tableau figure 1.12*
- *Propriétés de convexité :* Arcsin *est concave sur* $[-1,0]$ *et convexe sur* $[0,1]$
- *Inégalités classiques :*
  - $*$ $\forall x \in [0,1], \ \mathrm{Arcsin}(x) \geqslant x$ *(comparaison à la tangente en* $0$*)*
  - $*$ $\forall x \in [-1,0], \ \mathrm{Arcsin}(x) \leqslant x$.
- *Limite remarquables :* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{Arcsin} x}{x} = 1$.
- *Autres propriétés remarquables :*
  - $*$ $\forall x \in [-1,1], \quad \sin(\mathrm{Arcsin}(x)) = x$
  - $*$ $\forall x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad \mathrm{Arcsin}(\sin(x)) = x$
  - $*$ $\forall x \in ]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[, \quad \mathrm{Arcsin}(\sin(x)) = \pi - x$
  - $*$ *Les autres valeurs de* $\mathrm{Arcsin}(\sin(x))$ *s'obtiennent en se ramenant à un de ces deux intervalles par périodicité, comme dans le cas de l'arctangente.*

L'étude de l'arccosinus, réciproque de cos sur un intervalle adéquat, est très similaire à celle de l'arcsin.

**Définition 1.2.22 (fonction arccosinus, Arccos, courbe figure 1.11)**

La fonction cos induit par restriction une bijection de $[0,\pi]$ dans $[-1,1]$. La réciproque de cette fonction est appelée arccosinus, notée Arccos : $[-1,1] \to [0,\pi]$.

De par les symétries existant entre sin et cos, les courbes de Arccos et Arcsin peuvent se déduire l'une de l'autre par des symétries (qu'on explicite dans les propriétés ci-dessous). On obtient donc sans surprise :

**Théorème 1.2.23 (Dérivée de Arccos)**

*La fonction* $f = \mathrm{Arccos}$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]-1,1[$, *et*

$$\forall x \in ]-1,1[, \quad f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

*En revanche, elle n'est pas dérivable en* $-1$ *et* $1$, *et la courbe présente en ces points des tangentes verticales.*

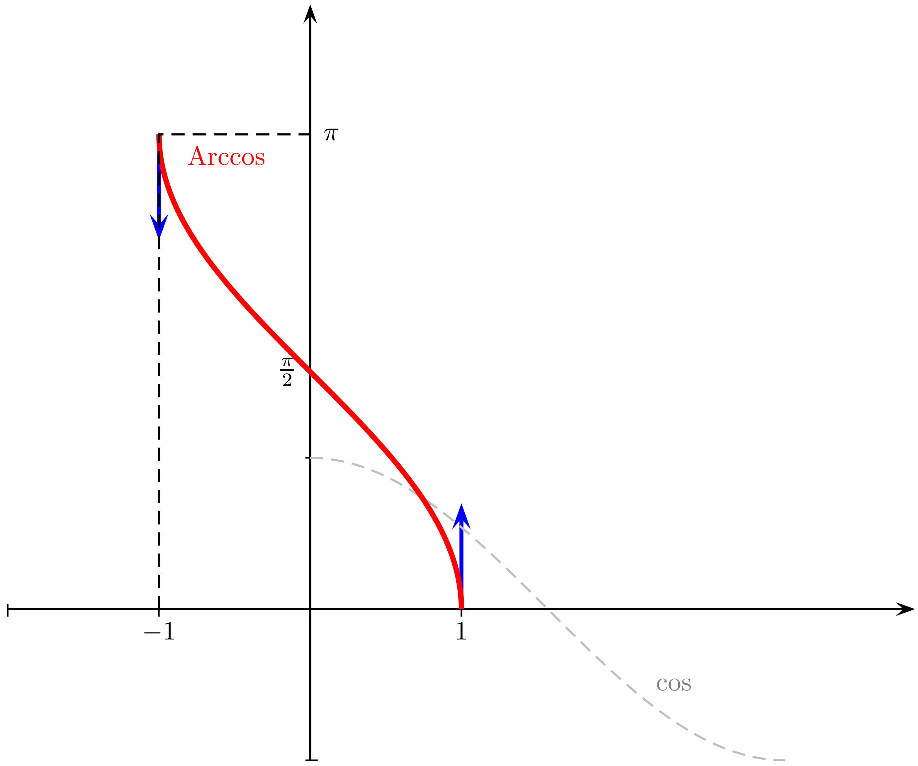


Figure 1.11 – Graphe de Arccos

**Propriétés 1.2.24 (propriétés de Arccos)**

*Soit* $f : x \mapsto \text{Arccos}(x)$

- *Domaine de définition :* $[-1, 1]$.
- *Dérivation : $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$, et :* $\forall x \in ]-1,1[, \quad f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- *Symétries :* $\text{Arccos} - \frac{\pi}{2}$ *est impaire.*
- *Variations :* Arccos *est décroissante sur* $\mathbb{R}$.
- *Valeurs remarquables : voir tableau figure 1.12*
- *Propriétés de convexité :* Arccos *est convexe sur* $[-1, 0]$ *et concave sur* $[0, 1]$
- *Inégalités classiques :*
  - $\forall x \in [0, 1], \quad \text{Arccos}(x) \leqslant \frac{\pi}{2} - x$ *(comparaison à la tangente en* 0*)*
  - $\forall x \in [-1, 0], \quad \text{Arccos}(x) \geqslant \frac{\pi}{2} - x$.
- *Limite remarquables :* $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\frac{\pi}{2} - \text{Arccos}(x)}{x} = 1$.
- *Autres propriétés remarquables :*
  - $\forall x \in [-1, 1], \quad \cos(\text{Arccos}(x)) = x$
  - $\forall x \in [0, \pi], \quad \text{Arccos}(\cos(x)) = x$
  - $\forall x \in [-\pi, 0], \quad \text{Arccos}(\cos(x)) = -x$
  - *Les autres valeurs de* $\text{Arccos}(\cos(x))$ *s'obtiennent en se ramenant à un de ces deux intervalles par périodicité.*
  - $\text{Arccos}(x) + \text{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}$ *(symétrie entre* Arccos *et* Arcsin*)*

## II.4 Fonctions hyperboliques

D'autres fonctions qu'on rencontre fréquemment en physique, et qui sont bien utiles en mathématiques, notamment pour le calcul de certaines intégrales, sont les fonctions hyperboliques, qui sont obtenues

| | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Arctan | $0$ | | $\frac{\pi}{6}$ | | | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ |
| Arcsin | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | |
| Arccos | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{3}$ | | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $0$ | |

Figure 1.12 – Tableau des valeurs particulières de Arctan, Arcsin, Arccos.

à l'aide de l'exponentielle réelle par des formules ressemblant aux formules d'Euler, liant les fonctions trigonométriques et l'exponentielle complexe. Cette analogie forte avec les fonctions trigonométriques motive la terminologie utilisée (sinus hyperbolique, cosinus hyperbolique...), et explique pourquoi la plupart des formules de trigonométrie ont un analogue hyperbolique.

**Définition 1.2.25 (sinus, cosinus, tangente hyperboliques, figure 1.13)**

Les fonctions « sinus hyperbolique », « cosinus hyperbolique » et « tangente hyperbolique », notées respectivement sh, ch et th, sont les fonctions définies par les formules :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}, \qquad \mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}, \qquad \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}.$$

Vous pouvez constater que sh et ch sont en fait, de par leur définition même, la partie impaire et la partie paire de la fonction exponentielle. Ainsi, sh est impaire, ch est paire, et $\mathrm{sh} + \mathrm{ch} = \exp$.

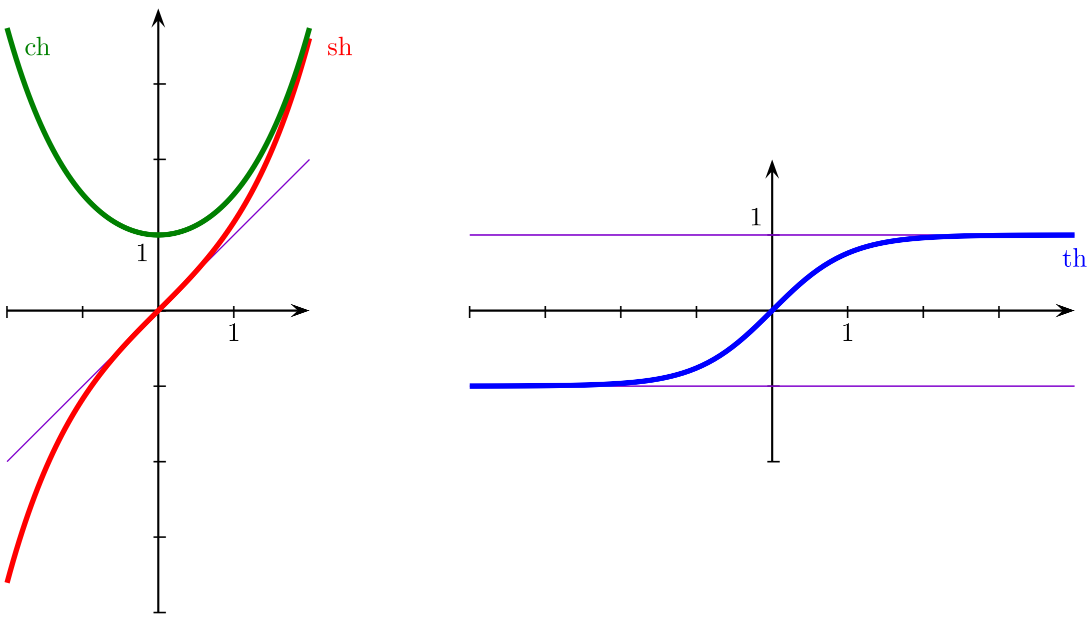


Figure 1.13 – Graphes des fonctions hyperboliques

**Propriétés 1.2.26 (propriétés de sh)**

*Soit* $f : x \mapsto \mathrm{sh}(x)$

- *Domaine de définition :* $\mathbb{R}$.
- *Dérivation : $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \mathrm{ch}(x), \qquad f^{(n)}(x) = \begin{cases} \mathrm{ch}(x) & \textit{si } n \textit{ impair} \\ \mathrm{sh}(x) & \textit{si } n \textit{ pair} \end{cases}$$

- *Symétries :* sh *est impaire.*
- *Variations :* sh *est croissante sur* $\mathbb{R}$.
- *Valeurs remarquables :* $\mathrm{sh}(0) = 0$
- *Propriétés de convexité :* sh *est concave sur* $\mathbb{R}_-$ *et convexe sur* $\mathbb{R}_+$
- *Inégalités classiques :*
  - $*$ $\forall x \in \mathbb{R}_+, \ \ \mathrm{sh}(x) \geqslant x$ *(comparaison à la tangente en* $0$*)*
  - $*$ $\forall x \in \mathbb{R}_-, \ \ \mathrm{sh}(x) \leqslant x$ *(idem)*
- *Limite remarquables :* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{x} = 1$.

**Propriétés 1.2.27 (propriétés de ch)**

*Soit* $f : x \mapsto \mathrm{ch}(x)$

- *Domaine de définition :* $\mathbb{R}$.
- *Dérivation : $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \mathrm{sh}(x), \qquad f^{(n)}(x) = \begin{cases} \mathrm{sh}(x) & \textit{si } n \textit{ impair} \\ \mathrm{ch}(x) & \textit{si } n \textit{ pair} \end{cases}$$

- *Symétries :* ch *est paire.*
- *Variations :* ch *est décroissante sur* $\mathbb{R}_-$ *et croissante sur* $\mathbb{R}_+$.
- *Valeurs remarquables :* $\mathrm{ch}(0) = 1$
- *Propriétés de convexité :* ch *est convexe*
- *Limite remarquables :* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{ch}(x) - 1}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

Nous ne donnons qu'une formule de trigonométrie hyperbolique, les autres peuvent être retrouvées à l'aide des exponentielles (par exemple des formules pour $\mathrm{sh}(a+b)$, $\mathrm{sh}(a) + \mathrm{sh}(b)$ etc).

**Théorème 1.2.28 (identité remarquable)**

*Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.

**Propriétés 1.2.29 (propriétés de th)**

*Soit* $f : x \mapsto \mathrm{th}(x)$

- *Domaine de définition :* $\mathbb{R}$.
- *Dérivation : $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et :* $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$
- *Symétries :* th *est impaire.*
- *Variations :* th *est croissante sur* $\mathbb{R}$.
- *Valeurs remarquables :* $\mathrm{th}(0) = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{th}(x) = -1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{th}(x) = 1$.
- *Propriétés de convexité :* th *est convexe sur* $\mathbb{R}_-$ *et concave sur* $\mathbb{R}_+$
- *Inégalités classiques :*

* $*$ $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \operatorname{th}(x) \leqslant x$ *(comparaison à la tangente en 0)*
* $*$ $\forall x \in \mathbb{R}_-,\ \operatorname{th}(x) \geqslant x$ *(idem)*
* *Limite remarquables :* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{th}(x)}{x} = 1.$

**Note Historique 1.2.30**

* Le premier à introduire les fonctions hyperboliques est le mathématicien et physicien italien Jacopo Riccati en 1760, dans le but d'exprimer l'aire sous une hyperbole (d'où le nom donné à ces fonctions). Ses définitions sont purement géométriques, et ne font pas référence à l'exponentielle.
* C'est Jean-Henri Lambert vers 1770 qui exprime sh et ch à l'aide de la fonction exponentielle, et qui en fait une étude complète.

### II.5 Réciproques des fonctions hyperboliques (HP)

Les réciproques des fonctions hyperboliques sont hors programme. Signalons tout de même que :
* sh est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et sa réciproque est appelée « argument sinus hyperbolique » et notée Argsh.
* ch est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$, et sa réciproque, définie sur $[1, +\infty[$, est appelée « argument cosinus hyperbolique » et notée Argch
* th est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$, et sa réciproque, définie sur $]-1, 1[$, est appelée « argument tangente hyperbolique », et notée Argth.

Une propriété remarquable des fonctions Argsh, Argch et Argth est qu'elles peuvent s'exprimer explicitement à l'aide des fonctions ln et exp.
Soit en utilisant ces expressions explicites, soit en utilisant le théorème de dérivation des fonctions réciproques, on obtient la dérivabilité de ces fonctions (sauf Argch en 1) et les expressions

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \forall x \in ]1, +\infty[,\ \operatorname{Argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad \forall x \in ]-1, 1[,\ \operatorname{Argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

### II.6 Tableau des dérivées à connaître

Le tableau 1.14 rappelle l'ensemble des dérivées à bien connaître. Nous n'y incluons pas les dérivées des réciproques des fonctions hyperboliques (HP).

## III Calcul intégral et primitivation

Cette section a pour but de mettre en place de façon rapide (et sans aborder tous les aspects théoriques sous-jacents) les techniques du calcul intégral. Nous serons obligés pour ce faire d'admettre un résultat important : l'existence et l'expression intégrale d'une primitive d'une fonction continue, permettant d'obtenir le théorème fondamental du calcul des intégrales (théorème de Newton), donnant l'expression d'une intégrale à l'aide d'une primitive. Ce résultat sera démontré ultérieurement.
Par ailleurs, nous donnons sans preuve les résultats suivants, dont on ne se servira pas dans la suite du chapitre (sauf pour établir l'inégalité de Taylor-Lagrange), mais qui peuvent se rencontrer au détour d'un exercice.

**Théorème 1.3.1 (Croissance, positivité et stricte de l'intégrale, admis provisoirement)**

1. *Soit $a < b$ et $f$ et $g$ deux fonctions continues telles que $f \leqslant g$ sur $[a, b]$. Alors :*

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$$

2. *En particulier, si $f \geqslant 0$ sur $[a,b]$, alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \geqslant 0$.
3. *Enfin, si $f$ est continue positive et non identiquement nulle sur $[a,b]$, alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t > 0$.

**Théorème 1.3.2 (Inégalité triangulaire intégrale, admis provisoirement)**
*Soit $a < b$, et $f$ une fonction continue sur $[a,b]$. Alors* $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t$.

## III.1 Primitivation de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

**Définition 1.3.3 (primitive)**

Soit $E$ un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : E \to \mathbb{R}$. Une primitive $F$ de $f$ est une fonction $F : E \to \mathbb{R}$, dérivable sur $E$ et telle que pour tout $x \in E$, $F'(x) = f(x)$.

**Remarque 1.3.4**

Toute fonction n'admet pas une primitive. On peut montrer (théorème de Darboux) que toute dérivée vérifie la propriété des valeurs intermédiaire sur un intervalle. Ainsi, une fonction ne vérifiant pas la propriété des valeurs intermédiaires n'admet pas de primitive. C'est le cas par exemple de $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$, ou plus simplement de $x \mapsto \lfloor x \rfloor$.

Voici une condition suffisante (mais non nécessaire) pour l'existence de primitives, que nous admettons provisoirement, conformément à ce que nous avons annoncé dans l'introduction de la section. L'expression intégrale de cette primitive sera donnée plus loin.

**Théorème 1.3.5 (existence de primitives des fonctions continues)**

*Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle ouvert $I$ de $\mathbb{R}$ (ou sur une union d'intervalles ouverts). Alors $f$ admet au moins une primitive $I$.*

À l'aide d'une primitive, on sait en fait déterminer toutes les primitives :

**Proposition 1.3.6 (unicité d'une primitive à constante près)**

*Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f$ admettant une primitive $F$. Alors l'ensemble des primitives de $f$ sur $I$ est $\{F + c,\ c \in \mathbb{R}\}$.*
*Autrement dit, deux primitives de $f$ sur un intervalle $I$ ne diffèrent que d'une constante additive.*

**Avertissement 1.3.7**

Attention, ce résultat n'est pas vrai si $I$ n'est pas un intervalle. Si $I$ est une réunion disjointe d'intervalles ouverts, les primitives diffèrent d'une fonction constante sur chacun des intervalles ouverts de l'union (mais pouvant différer d'un intervalle à l'autre).

**Corollaire 1.3.8**

*Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $f$ une fonction continue sur $I$, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Alors $f$ admet une unique primitive $F$ sur $I$ telle que $F(x_0) = y_0$.*

De la règle de dérivation des fonctions composées, on déduit facilement :

**Proposition 1.3.9 (primitivation de fonctions composées)**

*Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle ouvert $I$ et admettant une primitive $F$. Soit $u$ une fonction dérivable de $J$ dans $I$, où $J$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Alors, une primitive de $u' \times f \circ u$ est $F \circ u$.*

**Avertissement 1.3.10**

Attention à mettre le facteur $u'$ du bon côté. La fonction $f \circ u$ ne se primitive pas en $\frac{F \circ u}{u'}$. S'il manque le terme $u'$, il faut effectuer la primitivation d'une autre manière.

**Exemples 1.3.11**

1. Primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x(1+\ln x^2)}$.
2. Primitives de $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$

**Méthode 1.3.12 (primitivation d'inverses de trinômes)**

Soit $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$ un polynôme de degré 2 ($a \neq 0$).

1. Si $P$ admet une racine double $r$ , $\frac{1}{P}$ se primitive en $x \mapsto \dfrac{\alpha}{x-r}$.
2. Si $P$ admet deux racines réelles $r_1$ et $r_2$, chercher $\alpha$ et $\beta$ tels que
$$\frac{1}{P(x)} = \frac{\alpha}{x-r_1} + \frac{\beta}{x-r_2}.$$
La fonction $\frac{1}{P}$ se primitive en $x \mapsto \alpha \ln|x-r_1| + \beta \ln|x-r_2|$
3. Si $P$ n'a pas de racine réelle, effectuer une mise sous forme canonique pour obtenir :
$$\frac{1}{P(x)} = \frac{\gamma}{(\alpha x+\beta)^2+1},$$
puis utiliser une primitivation composée pour obtenir de l'arctangente.

Cette méthode est adaptable au cas de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. La mise sous forme canonique nous ramène dans ce cas soit à une dérivée (composée) de Arcsin, soit Argch, soit encore Argsh.

**Exemples 1.3.13**

1. Primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+2x+3}$
2. Primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-2x-x^2}}$.

Nous terminons par la donnée d'un tableau de primitives à connaître (figure 1.15). Il s'agit essentiellement de la lecture inverse de la table de dérivation. Nous donnons à chaque fois une primitive, sachant que les autres s'obtiennent en ajoutant une constante sur chaque intervalle du domaine. Nous donnons à droite la version composée. Dans ce tableau, les fonctions dont le nom est une lettre majuscule correspondent aux primitives des fonctions en lettres minuscules correspondantes. Dans la dernière colonne, nous avons noté par abus $\sin(u)$ pour la fonction composée de sin et $u$, et de même pour un certain nombre d'autres fonctions. Cette notation est incorrecte, mais commode ici.

## III.2 Techniques de calcul intégral

Nous admettons provisoirement le résultat suivant.

**Théorème 1.3.14 (Expression intégrale d'une primitive, Newton, admis provisoirement)**
*Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et $x_0 \in I$. Alors $f$ est intégrable sur $I$, et la fonction :*

$$F : x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(x)\ \mathrm{d}x$$

*est une primitive de $f$. Il s'agit de LA primitive s'annulant en $x_0$*

On trouve alors plus généralement l'expression de l'unique primitive $F$ de la fonction continue $f$ telle que $F(x_0) = y_0$, expression donnée par :

$$\forall x \in I, \quad F(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Ce théorème motive la notation (un peu abusive mais pratique) très répandue pour désigner une primitive de $f$ :

**Notation 1.3.15 (primitive d'une fonction continue)**
Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle. On désigne par $\displaystyle\int f(x)\ \mathrm{d}x$ toute primitive de $f$ (sans se préoccuper de la constante)

Pour donner un sens rigoureux à cette notation, il faudrait travailler dans l'ensemble des classes d'équivalence modulo la relation $f \sim g$ ssi $f$ et $g$ diffèrent d'une constante. Autrement dit, cette relation prend tout son sens dans l'espace quotient associé.

**Théorème 1.3.16 (Théorème fondamental du calcul des intégrales)**
*sur $[a, b]$. Soit $F$ une primitive de $f$. Alors :*

$$\int_{a}^{b} f(t)\ \mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Ce théorème est à la base des deux grandes techniques (outre le calcul directe à l'aide d'une primitive) permettant de calculer des intégrales :

**Théorème 1.3.17 (Intégration par parties)**
*Soit $f, g$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Alors :*

$$\int_{a}^{b} f'(x)g(x)\ \mathrm{d}x = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_{a}^{b} f(x)g'(x)\ \mathrm{d}x.$$

En effectuant plusieurs intégrations par parties successives, on obtient :

**Théorème 1.3.18 (Intégration par parties itérée)**
*Soit $f$ et $g$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$. Alors :*

$$\int_{a}^{b} f^{(n)}(x)g(x)\ \mathrm{d}x = \left[\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i f^{(n-1-i)}(x)g^{(i)}(x)\right]_a^b + (-1)^n \int_{a}^{b} f(x)g^{(n)}(x)\ \mathrm{d}x.$$

**Exemple 1.3.19**
Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x t^n \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$ sous forme d'une somme. déterminer la limite de $F_n(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

Il s'agit d'un cas particulier de la fonction $\Gamma$ d'Euler, définie pour tout $x > 0$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$. On peut donc voir la fonction $\Gamma$ comme un prolongement à $\mathbb{R}$ de la factorielle.
Une conséquence improtante du théorème d'intégration par parties itérée est la formule de Taylor avec reste-intégrale :

**Théorème 1.3.20 (Formule de Taylor avec reste-intégrale)**
*Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$. Alors*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t.$$

**Corollaire 1.3.21 (Inégalité de Taylor-Lagrange)**
*Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$, telle que $|f^{(n+1)}| \leqslant M$ sur $[a,b]$. Alors*

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} \right| \leqslant \frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

L'inégalité de Taylor est vraie dans un cas un peu plus général : il suffit en fait que $f$ soit de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$, et $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$, la majoration de $f^{(n+1)}$ étant alors à donner sur $]a,b[$. Ce résultat plus précis est hors-programme et la démonstration en est plus délicate.
Si on réexprime le théorème d'intégration par parties pour le calcul des primitives, on obtient :

**Corollaire 1.3.22 (Intégration par parties pour le calcul des primitives)**
*Soit $f, g$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $I$. Alors, sur l'intervalle $I$ :*

$$\int f'(x)g(x)\ \mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\ \mathrm{d}x.$$

**Exemple 1.3.23**
Calcul d'une primitive de $x \mapsto \ln(x)$.

**Théorème 1.3.24 (Changement de variables)**
*Soit $f$ une fonction* continue *sur $[\alpha,\beta]$, et $u$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $[a,b]$ vers $[\alpha,\beta]$. Alors $f$ est intégrable entre $u(a)$ et $u(b)$, et :*

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(u(t))u'(t)\ \mathrm{d}t.$$

*On dit qu'on a fait le changement de variable $x = u(t)$.*

**Remarques 1.3.25**

1. Si $u$ est bijective, on peut écrire : $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{u^{-1}(\alpha)}^{u^{-1}(\beta)} f(u(t))u'(t)\ \mathrm{d}t$.
2. Cette formule peut s'utiliser dans les deux sens, comme le montre l'exemple suivant.

**Exemples 1.3.26**

1. $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{4t^3}{1-t^8}\ \mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x$.

Le théorème fondamental du calcul des intégrales permet également l'étude de fonctions définies à l'aide d'intégrales, la dépendance s'effectuant au niveau des bornes, via le théorème suivant :

**Théorème 1.3.27 (Dérivation d'intégrales dépendant de leurs bornes)**
*Soit $I$ et $J$ deux intervalle Soit $u$ et $v$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $I$ dans $J$, et soit $f$ une fonction continue sur $J$. Soit $G$ la fonction définie par :* $\forall x \in I,\quad G(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\ \mathrm{d}t$.
*Alors $G$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$, et :* $\forall x \in I,\quad G'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$.

Le théorème fondamental du calcul des intégrales montre l'importance de la notion de primitive pour le calcul des intégrales, la capacité à calculer une intégrale étant fortement liée à la capacité de trouver une primitive. Il est donc indispensable de reconnaître rapidement les fonctions que l'on sait primitiver directement. Une telle habitude est aussi indispensable pour exploiter correctement la méthode de l'intégration par parties. Une bonne connaissance du tableau des primitives, et une pratique régulière de la primitivation et de l'intégration sont donc nécessaires.

## III.3 Conséquences pour les fonctions admettant des symétries

On donne trois conséquences importantes du théorème de changement de variable, et du théorème de dérivation d'une intégrale dépendant de ses bornes, pour le calcul d'intégrales de fonctions paires, impaires ou périodiques.

**Proposition 1.3.28 (Intégrale d'une fonction impaire)**
*Soit $I = [-a, a]$ et $f$ une fonction contine et impaire sur $I$. Alors*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\ \mathrm{d}x = 0.$$

**Proposition 1.3.29 (Intégrale d'une fonction paire)**
*Soit $I = [-a, a]$ et $f$ une fonction continue et impaire sur $I$. Alors*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\ \mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\ \mathrm{d}x.$$

**Proposition 1.3.30 (Intégrale d'une fonction périodique)**
*Soit $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période $T > 0$. Alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$,*

$$\int_a^{a+T} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\ \mathrm{d}t.$$

Ainsi, l'intégrale d'une fonction périodique sur une période ne dépend pas du choix de la période.

# IV Équations différentielles linéaires

## IV.1 Généralités sur les équations différentielles

Une équation différentielle satisfaite par une fonction $f$ est une relation liant $f$ et ses dérivées successives jusqu'à un certain ordre. Plus formellement :

**Définition 1.4.1 (Équation différentielle ordinaire, ED)**
Soit $r \in \mathbb{N}^*$, $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et $y$ une fonction à valeurs réelles ou complexes $r$ fois dérivable sur $I$. Soit $F$ une fonction définie sur une partie (ouverte) $U$ de $\mathbb{R}^{r+2}$. On dit que $y$ vérifie l'équation différentielle

$$F(x, y, y', \dots, y^{(r)}) = 0,$$

si pour tout $x \in I$, $(x, y(x), \dots, y^{(r)}(x)) \in U$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(r)}(x)) = 0.$$

On dit que l'équation est exactement d'ordre $r$ si $F$ dépend de façon effective de sa dernière variable.

On définit de même une équation différentielle satisfaite par un système $(y_1, \dots, y_p)$ de fonctions comme une relation liant $x$ et les dérivées successives des $y_i$. L'ordre de l'équation est l'ordre maximal des dérivées dont dépend la relation.

**Exemple 1.4.2**

1. $xy'' - 2y' + \sin(y) = 0$
2. $\dfrac{y'}{z''} - xyz' + \dfrac{\sin(x)}{1+z^2} = \dfrac{y'}{y}$

On définit l'analogue pour les fonctions de plusieurs variables. Nous ne serons pas amené à étudier ces équations ; nous nous contentons donc de cette définition un peu vague :

**Définition 1.4.3 (Équation aux dérivées partielles, EDP)**
Une équation aux dérivées partielles est une équation reliant la variable $x$ et les différentes dérivées partielles d'une ou plusieurs fonctions.

On recontre beaucoup d'EDO ou d'EDP en physiques. Par exemple :

**Exemples 1.4.4**

1. Équation de la chaleur (Fourier) : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\partial u}{\partial t}$
2. Équation des cordes vibrantes, ou de propagation des ondes : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

Dans la note qui suit, nous donnons quelques exemples d'EDO intervenant de manière naturelle en physique.

**Note Historique 1.4.5**

De nombreux problèmes physiques amènent à des équations différentielles, d'où la question qui s'est posée très tôt de savoir déterminer les solutions de telles équations. l'équation de la chaleur en est un exemple. On peut citer également :

- L'équation du pendule oscillant : $\theta'' + \omega_0^2 \sin\theta = 0$
- L'équation de la chaînette (courbe réalisée par une chaînette homogène suspendue par ses deux extrémités) : $p' = \frac{\omega}{H}\sqrt{1+p^2}$, où $p$ est la pente.
- L'équation de Bessel (introduite par Daniel Bernoulli, en rapport avec le mouvement des planètes, et étudiée par Bessel au 19e siècle) : $x^2y'' + xy' + (x^2-\alpha^2)y = 0$.
- Les équations de type $y'' = q_0(x) + q_1(x)y + q_2(x)y^2$, appelées équations de Riccati, introduites par ce dernier en vue d'études hydroliques et acoustiques
- Plus récemment, toute une série d'équations liées au fontionnement de circuits électroniques :
  * Circuit RC en régime libre : $u' + \frac{u}{RC} = 0$
  * Circuit RC en régime transitoire : $u' + \frac{u}{RC} = \frac{e_0}{R_0C}$
  * Circuit RC en régime sinusoïdal forcé : $u' + \frac{u}{RC} = \frac{E}{RC}\cos(\omega t)$
  * Circuit RCL : $q'' + 2\lambda q' + \omega_0^2 q = \frac{e_0}{L}$.
- On pourrait multiplier les exemples à l'infini quasiment !

Un système d'équations différentielles est un ensemble fini d'équations différentielles entre une ou plusieurs fonctions. L'ordre du système est l'ordre maximal de dérivation intervenant dans le système.

**Exemple 1.4.6**

Voici un système de 2 équations entre 3 fonctions :

$$\begin{cases} xy_1'' + y_2' + \sin(y_1y_3') & = 0 \\ x^2y_3' - y_3y_2 - \cos(y_1) & = 0 \end{cases}$$

Toute équation différentielle portant sur une fonction se ramène à un système d'ordre 1, par ajout d'inconnues et d'équations. Plus précisément :

$$F(x, f, f', f^{(2)}, \ldots, f^{(r)}) = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} f_1 & = & f' \\ f_2 & = & f_1' \\ \vdots & & \\ f_{r-1} & = & f_{r-2}' \\ F(x, f, f_1, \ldots, f_{r-1}, f_{r-1}') & = & 0 \end{array} \right.$$

Il n'est pas dur de se convaincre alors que toute équation différentielle portant sur un ensemble fini d'inconnues peut se rapporter de même à un système d'ordre 1, puis que tout système quelconque peut se rapporter à un système d'ordre 1. Ainsi, l'étude des systèmes différentiels d'ordre 1 fournit le cas général.

**Définition 1.4.7 (Forme normale)**

Un système différentiel est dit sous forme normale si, pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, il s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} y_1' & = f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ y_2' & = f_2(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \vdots & \\ y_n' & = f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{cases}$$

On dit qu'un système a été mis sous forme normale si on est parvenu à trouver un système sous forme normale admettant les mêmes solutions.

**Exemple 1.4.8**

Le système

$$\begin{cases} 3x + 2y' + z' + 2z & = 0 \\ x - 2x^2 y' + z' - 2xy & = 0 \end{cases}$$

n'est pas sous forme normale, mais peut être mis sous forme normale sur $\mathbb{R}_+^*$.

En adoptant une notation vectorielle, un système sous forme normale s'écrit donc :

$$Y' = F(x, Y), \text{ où } Y = (y_1, \dots, y_n), \quad Y' = (y_1', \dots, y_n'), \quad F = (f_1, \dots, f_n).$$

Une équation différentielle traduit souvent l'évolution d'un système dynamique. En physique, on appelle espace des phases l'ensemble des configurations possibles du système. Dans notre cas simple, il s'agit de l'ensemble des valeurs possibles de $(f_1(x), \dots, f_n(x))$, donc de $\mathbb{R}^n$, ou d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.
Lorsqu'on étudie un système dynamique, on connait souvent sa configuration initiale (c'est-à-dire qu'on connait, pour une valeur $x_0$ donnée, les valeurs des $f_i(x_0)$), et on aimerait connaître sa configuration à un autre moment. Il s'agit donc de rechercher une solution de l'équation différentielle vérifiant les conditions initiales fixées. C'est ce qu'on appelle le *problème de Cauchy*.

**Définition 1.4.9 (problème de Cauchy)**

Soit $Y' = F(x, Y)$ un système dynamique (écrit vectoriellement) sous forme normale. Le problème de Cauchy relatif à ce système et aux conditions initiales $(x_0, Y_0)$ consiste en la recherche des solutions $Y$ de l'équation vérifiant $Y(x_0) = Y_0$.

Remarquez que si les variables du système sont issues du procédé nous ayant permis de passer d'une équation d'ordre $r$ sur une seule fonction à un système d'ordre 1, alors la donnée du problème de Cauchy revient à la donnée de $f(x_0), f'(x_0), \dots, f^{(r)}(x_0)$.
Intuitivement, l'évolution d'un système dynamique est globalement déterministe (si on connait toutes les données extérieures). On peut donc s'attendre à avoir l'unicité de la solution d'une équation différentielle.

**Théorème 1.4.10 (Théorème de Cauchy-Lipschitz approximatif, HP)**

*Sous certaines conditions sur $F$, il existe une unique solution $y$ définie sur un intervalle de taille maximale de l'équation $Y' = F(x, Y)$ soumis au problème de Cauchy $Y(x_0) = Y_0$. Toute autre solution est une restriction de cette solution maximale à un intervalle plus petit.*

**Note Historique 1.4.11**

- La première version de ce théorème est dûe à Augustin Cauchy (première moitié du 19e siècle), et n'est qu'un résultat d'unicité locale. Rudolf Lipschitz élargit un peu la classe de fonctions $F$ à laquelle on peut appliquer ce théorème (les fonctions lispchitziennes). C'est Fuchs, Picard, Painlevé et Henri Poincaré qui proposent à la fin du 19e siècle une approche plus globale portant sur la solution maximale.
- L'hypothèse du théorème de Cauchy-Lispschitz est vérifiée pour les équations de la physique, mais ce n'est pas pour autant que le monde est déterministe, car une infime variation des conditions initiales amène de grosses variations à long terme, comme l'a montré Henri Poincaré. En 1972, Le météorologue Edward Lorenz a résumé cela dans le titre d'une de ses conférences :

  « *le battement d'ailes d'un papillon au Brésil peut-il provoquer une tornade au Texas ?* »

  Depuis, on appelle cela l'*effet papillon*.

## IV.2 Équations différentielles linéaires

**Définition 1.4.12 (Équation différentielle linéaire)**
Une équation différentielle linéaire d'ordre $r$ d'une variable $y$ est une équation différentielle de la forme :

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_r(x)y^{(r)} = b(x),$$

où $a_r$ n'est pas la fonction nulle.

On définit de la même manière une équation différentielle linéaire d'ordre $r$ de plusieurs variables $y_1, \ldots, y_p$ comme une relation affine à coefficients fonctionnels entre les dérivées des $y_i$ jusqu'à l'ordre $r$ (au moins l'un des coefficients d'un des termes d'ordre $r$ étant non nul).
On définit aussi les systèmes d'équations linéaires.
Les exemples issus de l'électronique cités ci-dessus fournissent des exemples d'équations linéaires (circuits RCL...) En revanche, l'équation de la chaînette, l'équation du pendule oscillant et les équations de Riccati ne sont pas linéaires.
Puisque les équations du type $f_{i+1} = f_i'$ qu'on avait rajoutées pour ramener tout système à un système d'ordre 1 sont linéaires, tout système linéaire se ramène à un système linéaire d'ordre 1. L'intérêt essentiel de cette réduction (et la raison pour laquelle on a dans cette situation des techniques particulières et efficaces) réside en la possibilité de décrire un tel système par une opération matricielle.

**Proposition 1.4.13 (Écriture matricielle d'un système différentiel d'ordre 1)**
*Un système de $n$ équations différentielles linéaires d'ordre 1 en les variables $y_1, \ldots, y_p$ peut s'écrire sous la forme $Y' = A(x)Y + B(x)$, où :*
- $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$, *et* $Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_p' \end{pmatrix}$,
- *$A$ est une fonction de $I$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Ainsi, $A$ est une matrice à $n$ lignes et $p$ colonnes, à coefficients dépendant de $x$.*
- *Le produit $A(x)Y'$ correspond au produit matriciel usuel.*
- *$B$ est une fonction de $I$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Ainsi, $B$ est une matrice-colonne à $n$ lignes, à coefficients dépendant de $x$.*

Ainsi, cette proposition et l'observation qui précède permettent d'affirmer que tout système d'équations linéaires se ramène (éventuellement par ajout d'inconnues et d'équations) à une équation différentielle vectorielle du type $Y' = A(x)Y$.

On dispose de méthodes matricielles pour la résolution de tels systèmes, passant notamment par la « diagonalisation » de la matrice $A(x)$, procédé que vous verrez l'année prochaine.

On étudie de façon directe le cas d'équations linéaires d'ordres 1 et 2.

## IV.3 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

### IV.3.1 Situation

Nous nous intéressons ici aux équations linéaires d'ordre 1 sur un intervalle $I$, dont la forme générale est : $a_1(x)y' + a_0(x)y = \beta(x)$. On se restreint ici au cas où la fonction $a_1$ ne s'annule pas sur l'intervalle $I$ considéré, et où les fonctions $a_1$, $a_0$ et $\beta$ sont continues, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Ainsi, en divisant par $a_1$ et en isolant le terme $y'$, on est ramené à une équation de la forme : $y' = a(x)y + b(x)$, où $a$ et $b$ sont continues à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Nous allons étudier l'ensemble des solutions d'une équation de ce type, à l'aide de deux « quadratures » (c'est-à-dire deux primitivations). Les méthodes mises en oeuvre sont à connaître, car ce sont elles qui vous permettront de résoudre explicitement une équation différentielle.

Au passage, cette étude nous permettra de constater que le théorème de Cauchy-Lispschitz est bien valide dans cette situation.

**Remarque 1.4.14**

Si $A_1$ s'annule sur l'intervalle $I$, on peut restreindre l'étude à des sous-intervalles sur lesquels $A_1$ ne s'annule pas, puis essayer de recoller les morceaux.

### IV.3.2 Structure de l'ensemble des solutions

Soit dans tout ce paragraphe l'équation différentielle $y' = a(x)y + b(x)$ définie sur un intervalle $I$, les fonctions $a$ et $b$ étant continues sur $I$.

**Théorème 1.4.15 (Structure de l'ensemble des solutions)**

*S'il est non vide, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation différentielle $y' = a(x)y + b(x)$ est un sous-espace affine de l'ensemble de toutes les fonctions de $I$ dans $\mathbb{K}$. Plus précisément,*

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + y_0 = \{z + y_0 \mid z \in \mathcal{S}_0\},$$

*où :*
- *$\mathcal{S}_0$ est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée $z' = a(x)z$ ; cet ensemble est stable par combinaisons linéaires.*
- *$y_0$ est une solution particulière.*

Ainsi, pour résoudre une équation différentielle linéaire, on est ramené aux deux étapes suivantes :
- Trouver les solutions de l'équation homogène associée
- Trouver une solution particulière.

### IV.3.3 Solutions de l'équation homogène

**Théorème 1.4.16 (Résolution de l'équation $y' = a(x)y$ ($a$ continue))**

*L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' = a(x)y$ est :*

$$\mathcal{S}_0 = \{y : x \mapsto C\mathrm{e}^{A(x)}\},$$

*où $A$ est une primitive de la fonction (continue) $a$, et $C$ est une constante.*

**Définition 1.4.17 (Dérivée logarithmique)**

Soit $f$ une fonction ne s'annulant pas sur un intervalle $I$. Alors, la dérivée logarithmique de $f$ est la dérivée de $\ln|f|$, à savoir $\frac{f'}{f}$.

**Méthode 1.4.18 (Résolution de $y' = a(x)$, cas réel)**

Si l'équation différentielle est à coefficients réels, et qu'on recherche les solutions réelles on peut procéder de la façon suivante :

1. Au brouillon : écrire l'équation sous la forme $\frac{y'}{y} = a(x)$.
2. Reconnaître la dérivée logarithmique de $y$ et en déduire $\ln|y|$ par primitivation.
3. En déduire l'expression de $y$
4. Cette méthode n'est pas bonne au propre, car elle présuppose que $y \neq 0$. Pour rédiger au propre, donner directement la solution (après tout, il y a un théorème du cours qui le dit !)

**Exemples 1.4.19**

1. Résolution de $y' = ay$ ($a$ constant)
2. Cas des circuits $RC$ en régime libre : $u' + \frac{u}{RC} = 0$.
3. Résolution de $y' = yx^\alpha$ sur $\mathbb{R}$ si $\alpha \geqslant 0$, sur $\mathbb{R}_+^*$ sinon.

#### IV.3.4 Recherche d'une solution particulière de $y' = a(x)y + b(x)$

Voici un résultat permettant de fractionner la recherche d'une solution particulière de $y' = a(x)y + b(x)$ dans le cas où $b$ s'exprime sous forme d'une somme de fonctions plus simples. On énonce le principe dans le cas d'une somme de deux termes. Il se généralise de façon immédiate (par récurrence) à une somme d'un nombre fini quelconque de termes.

**Proposition 1.4.20 (Principe de superposition)**

*Si $b = b_1+b_2$, pour trouver une solution particulière $y_0$ de l'équation $y' = a(x)y+b(x)$, il suffit de trouver une solution particulière $y_1$ de $y' = a(x)y + b_1(x)$ et une solution particulière $y_2$ de $y' = a(x)y + b_2(x)$. Alors $y_0 = y_1 + y_2$ est solution de $y' = a(x)y + b(x)$.*

Et voici une méthode efficace pour trouver une solution particulière (au moins sous forme intégrale) à partir d'une solution de l'équation homogène :

**Méthode 1.4.21 (Méthode de variation de la constante)**

1. Les solutions de l'équation homogène étant de la forme $x \mapsto C\mathrm{e}^{A(x)}$, on recherche une solution particulière de l'équation non homogène sous la forme $x \mapsto C(x)\mathrm{e}^{A(x)}$ (on rend la constante variable)
2. En remplaçant dans l'équation différentielle, $x \mapsto C(x)$ s'obtient par primitivation.

**Exemples 1.4.22**

1. Résoudre $y' = 2y + \sin(x) + \mathrm{e}^x + x$ sur $\mathbb{R}$
2. Résoudre $y' = -\frac{y}{x} + \mathrm{Arctan}(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$

On peut maintenant démontrer :

**Théorème 1.4.23 (Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations linéaires d'ordre 1)**

*Soit $a$ et $b$ deux fonctions continues sur un intervalle $I$, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{K}$ de l'équation $y' = a(x)y+b(x)$. Soit $x_0$ un élément de $I$. Alors l'application :*

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ y & \longmapsto & y(x_0) \end{array}$$

*est une bijection. En d'autres termes, pour tout $y_0 \in \mathbb{K}$, il existe une et une seule solution $y$ de l'équation différentielle telle que $y(x_0) = y_0$.*

**Remarque 1.4.24**

Il n'est pas toujours nécessaire d'employer la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière : parfois elle est suffisamment évidente pour être devinée.

**Exemples 1.4.25**

1. Si $a$ et $b$ sont constants, la fonction constante égale à $-\dfrac{b}{a}$ est solution.
2. La fonction $y : x \mapsto c\mathrm{e}^{\alpha x}$ est solution de $y' = ay + b\mathrm{e}^{\alpha x}$, où $c$ vérifie l'équation $\alpha c = ac + b$.

Grâce aux techniques développées dans ce paragraphe, nous sommes donc en mesure de trouver les solutions d'équations différentielles décrivant de certains circuits électroniques en régime forcé ou en régime transitoire.

**Exemples 1.4.26**

1. Circuit RC en régime transitoire : $u' + \dfrac{u}{RC} = \dfrac{e_0}{R_0C}$, de tension initiale $u_0 = 0$ en $t = 0$
2. Circuit RC en régime sinusoïdal forcé : $u' + \dfrac{u}{RC} = \dfrac{E}{RC}\cos(\omega t)$, de tension initiale $u_0 = 0$ en $t = 0$.

Du fait de son importance pratique, on isole dans le résultat suivant la résolution complète du cas d'une équation $y = ay + b$ dans le cas où $a$ et $b$ sont constants (réels ou complexes)

**Théorème 1.4.27 (Résolution d'une équation linéaire $y' = ay + b$ à coefficients constants)**
*Soit $a$ et $b$ deux éléments de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = ay+b$ est :*

$$\mathcal{S} = \left\{ y : x \mapsto C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}, \quad C \in \mathbb{K} \right\},$$

*En particulier, l'unique solution telle que $y(x_0) = y_0$ est :*

$$y : x \mapsto \left( \frac{b}{a} + y_0 \right) \mathrm{e}^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}.$$

## IV.4 Équations différentielles linéaires d'ordre 2

### IV.4.1 Position du problème

Une méthode générale d'étude *via* l'outil matriciel permet d'adapter sans peine le principe de résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 1 à la résolution des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur, en se ramenant d'abord à un système d'ordre 1, qu'on écrit matriciellement (voir plus haut).
Tant que nous ne disposons pas de cet outil, nous nous contentons d'une étude dans une cas beaucoup moins général, celui ou tous les coefficients de l'équation sont constants, dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Par commodité, on note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, selon le contexte dans lequel on se place, pour éviter d'avoir à distinguer les deux cas dans les énoncés.
Si le coefficient du terme en $y''$ est nul, on est ramené à l'étude d'une équation d'ordre 1. On peut donc supposer que ce coefficient est non nul, et en divisant l'équation par ce coefficient, on est ramené à l'étude d'une équation de la forme suivante :

$$y'' + ay' + by = f(x) \text{ où } a, b \in \mathbb{K} \text{ et } f \text{ continue à valeurs dans } \mathbb{K}.$$

Comme dans le cas des systèmes d'ordre 1, on a une décomposition des solutions :

**Théorème 1.4.28 (Structure de l'ensemble des solutions)**
*S'il est non vide, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation différentielle $y'' + ay + by = f(x)$ est un sous-espace affine de l'ensemble de toutes les fonctions de $I$ dans $\mathbb{K}$. Plus précisément,*

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + y_0 = \{z + y_0 \mid z \in \mathcal{S}_0\},$$

*où :*
- $\mathcal{S}_0$ *est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée* $z'' + az' + bz = 0$ *; cet ensemble est stable par combinaisons linéaires.*
- $y_0$ *est une solution particulière.*

### IV.4.2 Résolution de l'équation homogène

La méthode ci-dessous est importante en soi, même si l'utilisation directe du théorème qu'on en déduit est plus efficace. Cependant, le deuxième point de cette méthode se généralise au cas d'équations linéaires d'ordre 2 à coefficients non constants, à condition d'avoir réussi à trouver une solution particulière de l'équation homogène (ce qui constitue alors souvent le point délicat de la résolution).

**Méthode 1.4.29 (Recherche des solutions de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$)**

- Recherche une solution particulière sous la forme $y_0 : x \mapsto \mathrm{e}^{rx}$. Le réel $r$ vérifie alors l'équation $r^2 + ar + b = 0$ :
- Étant donné une solution particulière $y_0$ de l'équation homogène, effectuer le changement de variable $y = y_0 z$. On obtient l'équation :

$$2y_0'z' + y_0z'' + ay_0z' = 0, \qquad \text{puis:} \qquad z'' + (2r + a)z' = 0$$

- On résout cette équation de degré 1 en $z'$, puis on trouve $z$ par primitivation.
- On revient à la variable initiale en exprimant $y = y_0 z$. Cela nous donne toutes les solutions de l'équation différentielle.

On obtient, par application de cette méthode :

**Théorème 1.4.30**

*Soit $a$ et $b$ des nombres complexes. L'ensemble des solutions à valeurs complexes de l'équation $y'' + ay + b = 0$ est :*

$$\begin{cases} \mathcal{S}_0 = \{y : x \mapsto c\mathrm{e}^{r_1x} + d\mathrm{e}^{r_2x}\} & si\ \Delta \neq 0 \\ \mathcal{S}_0 = \{y : x \mapsto (c + dx)\mathrm{e}^{rx}\} & si\ \Delta = 0, \end{cases}$$

*où $\Delta$ est le discriminant du polynôme $X^2+aX+b$, et où $r_1$ et $r_2$ sont les racines (réelles ou complexes) de ce polynôme (notée simplement $r$, en cas de racine double).*

**Terminologie 1.4.31 (polynôme caractéristique)**

Le polynôme $X^2+aX+b$ est appelé *polynôme caractéristique* de l'équation différentielle $y''+ay'+b = 0$.

**Remarques 1.4.32**

1. La première étape de la méthode exposée pour trouver ces solutions nous fournissait déjà la totalité des solutions (puisqu'on pouvait choisir indifféremment $r_1$ ou $r_2$ et puisque l'ensemble des solutions est stable par combinaison linéaire). La deuxième étape sert dans ce cas seulement à prouver qu'il n'y a pas d'autre solution.
2. Dans le cas où $\Delta = 0$, la deuxième étape nous fournit une solution que la première étape ne nous permettait pas d'obtenir. La méthode trouve là toute sa pertinence.

Même si les coefficients $a$ et $b$ sont réels, il peut arriver que l'expression obtenue au bout fasse intervenir des exponentielles complexes (cas où $\Delta < 0$). La solution générale obtenue est alors une fonction à valeurs complexes. Parmi celles-ci, certaines sont à valeurs réelles. On est souvent intéressé par ces fonctions spécifiquement. Voici un résultat permettant de retrouver facilement l'ensemble des solutions à valeurs réelles

**Proposition 1.4.33 (Passer des solutions complexes aux solutions réelles)**
*Soit $y'' + ay' + b = 0$ une équation différentielle linéaire à coefficients constants réels. Soit $\mathcal{S}_\mathbb{C}$ l'ensemble de toutes ses solutions à valeurs complexes et $\mathcal{S}_\mathbb{R}$ l'ensemble des solutions à valeurs réelles. Alors :*

$$\mathcal{S}_\mathbb{R} = \{\mathrm{Re}(y) \mid y \in \mathcal{S}_\mathbb{C}\}.$$

On obtient alors :

**Théorème 1.4.34 (Expression des solutions réelles de $y'' + ay' + y = 0$)**
*Soit $\Delta$ le discriminant du polynôme caractéristique $X^2 + aX + b = 0$ et $r_1$ et $r_2$ ses racines réelles ou complexes ($r = r_1 = r_2$ si $\Delta = 0$). Alors, l'ensemble des solutions réelles est :*
- $\mathcal{S}_\mathbb{R} = \{x \mapsto c\mathrm{e}^{r_1 x} + d\mathrm{e}^{r_2 x} \mid (c, d) \in \mathbb{R}^2\}$ *si* $\Delta > 0$ ;
- $\mathcal{S}_\mathbb{R} = \{x \mapsto (cx + d)\mathrm{e}^{rx} \mid (c, d) \in \mathbb{R}^2\}$ *si* $\Delta = 0$ ;
- $\mathcal{S}_\mathbb{R} = \left\{x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x} \left(c \cos(\omega x) + d \sin(\omega x)\right) \mid (c, d) \in \mathbb{R}^2\right\}$ *si* $\Delta < 0$,
  *où $\alpha$ et $\omega$ sont tels que $r_1 = \alpha - \mathrm{i}\,\omega$ et $r_2 = \alpha + \mathrm{i}\,\omega$.*

Dans le cas où $\Delta < 0$, la valeur de $\alpha$ est unique, mais $\omega$ n'est unique qu'au signe près. On peut par exemple choisir :

$$\alpha = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad \omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}.$$

On peut aussi réexprimer les solutions en regroupant sin et cos :

$$\mathcal{S}_\mathbb{R} = \left\{x \mapsto A\mathrm{e}^{\alpha x} \cos(\omega x - \varphi) \mid (A, \varphi) \in \mathbb{R}^2\right\} \qquad (\Delta < 0).$$

Nous pouvons vérifier le théorème de Cauchy-Lipschitz dans cette situation particulière :

**Théorème 1.4.35 (Théorème de Cauchy-Lipschitz pour $y'' + ay' + by = 0$)**

1. ***Cas** $a, b \in \mathbb{C}$. Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $(y_0, y_1) \in \mathbb{C}^2$. Alors il existe une unique solution $y$ de l'équation $y'' + ay' + by$ telle que $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$. En d'autres termes :*

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ & y & \longmapsto & (y(x_0), y'(x_0)) \end{array}$$

   *est une bijection.*

2. ***Cas** $a, b \in \mathbb{R}$. Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$. Alors il existe une unique solution réelle $y$ de l'équation $y'' + ay' + by$ telle que $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$. En d'autres termes :*

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathcal{S}_\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & y & \longmapsto & (y(x_0), y'(x_0)) \end{array}$$

   *est une bijection.*

Nous terminons par l'étude d'un exemple tiré de la physique.

**Exemple 1.4.36**

Résolution de l'équation du pendule oscillant pour des petites oscillations. Dans ce cas $\sin\theta \simeq \theta$, on est donc ramené à l'équation : $\theta'' + \omega_0^2\theta = 0$

La résolution de l'équation associé au régime libre d'un circuit RCL est aussi du ressort de ce paragraphe. Suivant les paramètres, plusieurs situations peuvent de produire suivant le signe de $\Delta$ :

- $\Delta < 0$ : dipôle faiblement amorti, régime pseudo-périodique (des oscillations dues aux fonctions trigonométriques, amorties par l'exponentielle)
- $\Delta > 0$ : dipôle fortement amorti, pas d'oscillation.

#### IV.4.3 Solution générale du système non homogène

D'après le théorème de structure, les solutions de l'équation $y'' + ay' + by = f(x)$ s'obtiennent alors en ajoutant à la solution générique de l'équation homogène une solution particulière queconque. Au stade où on en est, la résolution complète se ramène donc à la recherche d'une valeur particulière. Comme dans le cas linéaire d'ordre 1, nous disposons d'un théorème de superposition permettant de fractionner la recherche de solutions particulières, dans le cas où le second membre se décompose en somme d'expressions plus simples.

**Proposition 1.4.37 (Principe de superposition pour $y'' + ay' = by = f(x)$)**

*Si $f = f_1 + f_2$, pour trouver une solution particulière $y_0$ de l'équation $y'' + ay' + by = f(x)$, il suffit de trouver une solution particulière $y_1$ de $y'' + ay' + by = f_1(x)$ et une solution particulière $y_2$ de $y'' + ay' + by = f_2(x)$. Alors $y_0 = y_1 + y_2$ est solution de $y' + ay' + by = f_1(x) + f_2(x) = f(x)$.*

Dans cette situation, comme dans le cas des équations d'ordre 1, il existe une méthode dite « de variation des constantes » pour trouver une solution particulière, mais elle est plus délicate à mettre en oeuvre. Comme elle n'est pas au programme, nous nous limitons à l'étude de cas particuliers intervenant souvent en physique.

**Exemples 1.4.38**

Recherche de solutions particulières de $y'' + ay' + by = f(x)$ lorsque :

1. $f(x) = A\mathrm{e}^{\lambda x}$
2. $f(x) = Ax^n\mathrm{e}^{\lambda x}$ (par exemple $n = 4$)
3. $f(x) = B\cos(\omega x)$ $(a, b \in \mathbb{R})$
4. $f(x) = B\sin(\omega x)$ $(a, b \in \mathbb{R})$

| $f(x)$ | domaine de définition | domaine de dérivabilité | $f'(x)$ |
|---|---|---|---|
| $c$ $(c \in \mathbb{R})$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $0$ |
| $x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $nx^{n-1}$ |
| $x^n$ $(n \in \mathbb{Z}_-^*)$ | $\mathbb{R}^*$ | $\mathbb{R}^*$ | $nx^{n-1}$ |
| $x^\alpha$ $(\ \alpha \in ]1, +\infty[\backslash \mathbb{N})$ | $\mathbb{R}_+$ | $\mathbb{R}_+$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ |
| $x^\alpha$ $(\ \alpha \in ]0, 1[)$<br>cas particulier $\sqrt{x}$ | $\mathbb{R}_+$<br>$\mathbb{R}_+$ | $\mathbb{R}_+^*$<br>$\mathbb{R}_+^*$ | $\alpha x^{\alpha-1}$<br>$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $x^\alpha$ $(a \in \mathbb{R}_-^*)$ | $\mathbb{R}_+^*$ | $\mathbb{R}_+^*$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ |
| $\mathrm{e}^x$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $\mathrm{e}^x$ |
| $\ln(x)$ | $\mathbb{R}_+^*$ | $\mathbb{R}_+^*$ | $\dfrac{1}{x}$ |
| $\log_b(x)$ $(b \in \mathbb{R}_+^*)$ | $\mathbb{R}_+^*$ | $\mathbb{R}_+^*$ | $\dfrac{1}{x \ln b}$ |
| $\sin(x)$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $\cos(x)$ |
| $\cos(x)$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $-\sin(x)$ |
| $\tan(x)$ | $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi,\quad n \in \mathbb{Z}\}$ | idem | $1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}.$ |
| $\mathrm{Arcsin}(x)$ | $[-1, 1]$ | $]-1, 1[$ | $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\mathrm{Arccos}(x)$ | $[-1, 1]$ | $]-1, 1[$ | $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\mathrm{Arctan}(x)$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $\dfrac{1}{1+x^2}$ |
| $\mathrm{sh}(x)$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $\mathrm{ch}(x)$ |
| $\mathrm{ch}(x)$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $\mathrm{sh}(x)$ |
| $\mathrm{th}(x)$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $1 - \mathrm{th}^2(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$ |

Figure 1.14 – Tableau des dérivées à connaître

| $f(x)$ | $F(x)$ | intervalle | g | G |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $\mathbb{R}$ | $0$ | $0$ |
| $a$ | $ax$ | $\mathbb{R}$ | $au'$ | $au$ |
| $x^p \ (p \neq -1)$ | $\dfrac{x^{p+1}}{p+1}$ | $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+$ suivant $p$ | $u'u^p$ | $\dfrac{u^{p+1}}{p+1}$ |
| $\dfrac{1}{x}$ | $\ln\lvert x\rvert$ | $\mathbb{R}^*$ | $\dfrac{u'}{u}$ | $\ln\lvert u\rvert$ |
| $\mathrm{e}^x$ | $\mathrm{e}^x$ | $\mathbb{R}$ | $u'\mathrm{e}^u$ | $\mathrm{e}^u$ |
| $\sin(x)$ | $-\cos(x)$ | $\mathbb{R}$ | $u'\sin(u)$ | $-\cos(u)$ |
| $\cos(x)$ | $\sin(x)$ | $\mathbb{R}$ | $u'\cos(u)$ | $\sin(u)$ |
| $\tan(x)$ | $-\ln\lvert\cos(x)\rvert$ | $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+n\pi, \quad n\in\mathbb{Z}\}$ | $u'\tan(u)$ | $-\ln\lvert cos(u)\rvert$ |
| $\dfrac{1}{\cos^2(x)}$ | $\tan(x)$ | $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+n\pi, \quad n\in\mathbb{Z}\}$ | $\dfrac{u'}{\cos^2(u)}$ | $\tan(u)$ |
| $1+\tan^2(x)$ | $\tan(x)$ | $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+n\pi, \quad n\in\mathbb{Z}\}$ | $u'+u'\tan^2(u)$ | $\tan(u)$ |
| $\dfrac{1}{1+x^2}$ | $\mathrm{Arctan}(x)$ | $\mathbb{R}$ | $\dfrac{u'}{1+u^2}$ | $\mathrm{Arctan}(u).$ |
| $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\mathrm{Arcsin}(x)$ ou $-\mathrm{Arccos}(x)$ | $]-1,1[$ | $\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ | $\mathrm{Arcsin}(u)$ |
| $\mathrm{sh}(x)$ | $\mathrm{ch}(x)$ | $\mathbb{R}$ | $u'\mathrm{sh}(u)$ | $\mathrm{ch}(u)$ |
| $\mathrm{ch}(x)$ | $\mathrm{sh}(x)$ | $\mathbb{R}$ | $u'\mathrm{ch}(u)$ | $\mathrm{sh}(u)$ |
| $\mathrm{th}(x)$ | $\ln(ch(x))$ | $\mathbb{R}$ | $u'\mathrm{th}(u)$ | $\ln(\mathrm{ch}(u))$ |
| $\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$ | $\mathrm{th}(x)$ | $\mathbb{R}$ | $\dfrac{u'}{\mathrm{ch}^2(u)}$ | $\mathrm{th}(u)$ |
| $1-\mathrm{th}^2(x)$ | $\mathrm{th}(x)$ | $\mathbb{R}$ | $u'-u'\mathrm{th}^2(u)$ | $\mathrm{th}(u)$ |

FIGURE 1.15 – Tableau des primitives à connaître

# 2

# Suites numériques

Nous rappelons :

**Définition 2.0.39 (Suite numérique)**
Une suite numérique (réelle ou complexe) est une famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ indexée sur $\mathbb{N}$ (parfois sur $\mathbb{N}^*$, ou sur $\mathbb{N}\setminus\{0,\dots,n_0-1\}$). Il s'agit donc d'une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## I Convergence de suites

### I.1 Un peu d'histoire

**Note Historique 2.1.1**

- L'appréhension de la notion de limite d'une suite est ancienne. On trouve déjà dans les *Éléments* d'Euclide (300 avant J.-C.) :

  > « Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et que l'on fait toujours la même chose, il restera une grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées. »

  En langage mathématique, pour tout $(\varepsilon,a)\in\mathbb{R}_+^*$ (une grandeur est toujours strictement positive pour les grecs), si $(u_n)$ est une suite (strictement positive pour la même raison) telle que pour tout $n$, $u_{n+1}\leqslant\frac{u_n}{2}$, alors (en sous-entendant « à un moment, il restera... »), il existe $N$ tel que pour tout $n\geqslant N$, $u_n<\varepsilon$.
  C'est exactement dire (en langage moderne) que la suite $(u_n)$ (qui est sous-géométrique de raison 2) converge vers 0...
- Archimède également utilise intuitivement une limite, lorsqu'il calcule une valeur approchée de $\pi$ en approchant le cercle par des polygônes réguliers dont il calcule la circonférence.
- Au 17-ième siècle, même si la notion de limite semble assez claire, elle n'est pas bien définie, et tous les arguments de convergence sont expliqués qualitativement, avec assez peu de rigueur. Par exemple, Leibniz, en 1682, écrit, pour justifier le bien fondé l'égalité $\pi=4\left[1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots\right]$ :

  > « L'ensemble de la série renferme donc en bloc toutes les approximations, c'est-à-dire les valeurs immédiatement supérieures et inférieures, car, à mesure qu'on la considère de plus en plus loin, l'erreur sera moindre que toute grandeur donnée ».
- Il faut attendre Augustin Louis baron Cauchy pour avoir une définition précise (mais pas encore énoncée mathématiquement) de la limite, donnée dans son *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* (1821) :

  > « Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur finie, de manière à en différer aussi peu qu'on voudra, cette dernière est appelée limite de toutes les autres »

Cauchy définit également ce qu'on appelle maintenant les suites de Cauchy, permettant d'étudier (dans $\mathbb{R}$) la convergence de suites sans en connaître la limite.
Le *Cours d'Analyse* a été pour Cauchy l'occasion d'apporter rigueur et clarification à un grand nombre de notions jusque-là utilisées intuitivement. Dans ce sens, cet ouvrage a eu une importance capitale dans l'évolution de l'analyse.

- Il faut attendre la deuxième moitié du $19^{\text{e}}$ siècle pour voir naître la définition moderne (énoncée mathématiquement) de la limite, grâce à Karl Weierstrass, à qui on doit également toutes les définitions similaires relatives aux limites et à la continuité des fonctions.

## I.2 Définition de la limite d'une suite

Intuitivement, une suite admet une limite $\ell$ si ses termes s'en approchent aussi près qu'on veut, sans plus s'en éloigner, donc si, quitte à prendre $n$ suffisamment grand, $u_n$ est une approximation aussi fine que l'on souhaite de $\ell$. Nous formalisons cette définition de la sorte :

**Définition 2.1.2 (limite d'une suite, convergence, divergence)**

- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{K}$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \in B(\ell, \varepsilon).$$

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{K}$, on dit qu'elle est convergente.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet aucun $\ell$ de $\mathbb{K}$ comme limite, alors on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente (dans $\mathbb{K}$).

Cette définition est valable dans un contexte plus général : elle permet de définir la convergence d'une suite à valeurs dans n'importe quel espace métrique (ensemble muni d'une distance).

**Proposition 2.1.3 (Diverses caractérisations de la convergence)**

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

*(i)* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $\ell$ *;*

*(ii)* $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N, |u_n - \ell| < \varepsilon$ *;*

*(iii) pour tout voisinage $V$ de $\ell$, il existe $N$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \in V$.*

Nous nous plaçons désormais, par pure commodité, dans le cas de suites réelles. La plupart des résultats se généralisent au cas de suites complexes.
Dans le cas d'une suite réelle, on peut également définir une convergence vers les deux infinis :

**Définition 2.1.4 (Limite $+\infty$ ou $-\infty$ d'une suite réelle)**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet la limite $+\infty$ si et seulement si :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N, u_n > A.$$

2. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet la limite $-\infty$ si et seulement si :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N, u_n < A.$$

On remarquera que (en admettant ici l'unicité de la limite) une suite tendant vers $+\infty$ est divergente dans $\mathbb{R}$, mais convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$. Ainsi, suivant le point de vue, on pourra parler de divergence ou de convergence. En particulier, on rencontre aussi bien l'expression « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$ » que

« $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ ». Pour éviter toute controverse, on peut se contenter de dire : « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ », ou encore « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet la limite $+\infty$ ».

**Avertissement 2.1.5**

Il existe des suites n'admettant pas de limite, même dans $\overline{\mathbb{R}}$ ! Par exemple $(-1)^n$.

L'intérêt de la caractérisation par les voisinages, c'est qu'elle permet d'unifier les définitions de limite dans les cas fini et infini pour des suites réelles. En effet, on dit que $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $+\infty$ s'il existe $a$ tel que $]a, +\infty[\subset V$. Dans ces conditions, on obtient :

**Proposition 2.1.6 (Caractérisation par voisinage pour les limites dans $\overline{\mathbb{R}}$)**

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet la limite $\ell$ si et seulement si pour tout voisinage $V$ de $\ell$, il existe $N$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \in V$.*

Cette unification du fini et de l'infini permet souvent d'éviter de faire des distinctions de cas dans des démonstrations théoriques.

## I.3 Unicité de la limite et exemples

**Lemme 2.1.7 (lemme de séparation)**

*Soit $\ell$ et $\ell'$ (finis ou infinis) tels que $\ell \neq \ell'$. Alors il existe un voisinage $U$ de $\ell$ et un voisinage $V$ de $\ell'$ tels que $U \cap V = \varnothing$.*

**Théorème 2.1.8 (Unicité de la limite)**

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite (réelle ou complexe). Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite (dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$), alors cette limite est unique.*

**Notation 2.1.9 (Limite)**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. On désigne par $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, ou plus simplement par $\lim u_n$ l'unique limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ (si cette limite existe).

On rencontre aussi parfois la notation $u_n \to \ell$.

**Avertissement 2.1.10**

Faites attention à ne pas utiliser la notation $\lim u_n$ avant de vous être assuré de l'existence de la limite. En particulier, généralement, le symbole lim ne doit pas être employé dès le début d'un calcul de limite. On travaille d'abord sur la suite elle-même, et on passe à la limite le plus tard possible, et en tout cas, pas avant d'avoir pu justifier l'existence de la limite.

**Avertissement 2.1.11**

Ne confondez pas limite et « valeur d'adhérence ». Ainsi, $-1$ et $1$ ne sont pas des limites de $(-1)^n$, même s'il existe des valeurs de $n$ aussi grandes qu'on veut telles que $u_n$ soit proche de l'une ou l'autre de ces valeurs (et même égale ici). On dit que $1$ et $-1$ sont valeurs d'adhérence de la suite. Comme le montre cet exemple, on n'a pas unicité des valeurs d'adhérence. On en reparlera un peu plus loin.

**Exemples 2.1.12**

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0\,;$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^a} = 0$ pour $a > 0\,;$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^a = +\infty$ pour $a > 0\,;$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$ si $|a| < 1\,;$
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$ si $a > 1\,;$
6. $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite si $a \leqslant -1$.

## I.4 Premières propriétés des suites convergentes

Une propriété bien utile, notamment pour l'étude de suites récurrentes :

**Proposition 2.1.13 (Limite d'un translaté)**

*Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\ell$, alors $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ aussi.*

Plus généralement, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(u_{n+k})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{n-k})_{n\geqslant k}$ convergent alors vers $\ell$.

**Proposition 2.1.14**

*Toute suite convergente (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, mais pas $\overline{\mathbb{R}}$) est bornée.*

Enfin, en ne considérant que la moitié des inégalités présentes dans la définition, on obtient, dans le cas de suites réelles, la propriété suivante parfois plus simple à utiliser que la définition. Attention, comme on oublie ici la moitié des inégalités, chaque point de cette propriété est moins fort que la définition. La conjonction des deux points équivaut à la définition.

**Proposition 2.1.15 (Comparaison de $(u_n)$ à un minorant strict de sa limite)**

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors :*
- *Pour tout $\ell' < \ell$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n > \ell'$.*
- *Pour tout $\ell'' > \ell$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n < \ell''$.*

Ainsi, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\ell$, alors $(u_n)$ finit par dépasser n'importe quelle valeur $\ell' < \ell$, et de même, $(u_n)$ finit par passer sous n'importe quelle valeur $\ell'' > \ell$.

**Avertissement 2.1.16**

Ce n'est évidemment pas vrai si $\ell' = \ell$. Une suite n'est pas forcément majoré (ou minoré) par sa limite. Elle peut tendre vers sa limite en faisant de petites oscillations, comme la suite $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par exemple.

## I.5 Suites de Cauchy (hors-programme)

L'étude de la convergence d'une suite par l'utilisation de la définition de la limite nécessite la connaissance préalable de la limite $\ell$. Dans certaine situation, on ne peut pas accéder à cette connaissance. Augustin Cauchy, dans son *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* donne un critère de convergence n'utilisant pas la valeur de la limite.

**Définition 2.1.17 (Suite de Cauchy)**

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *de Cauchy* si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad p \geqslant n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - u_p| < \varepsilon.$$

**Théorème 2.1.18 (Complétude de $\mathbb{R}$)**

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement elle est de Cauchy.*

**Note Historique 2.1.19**

Initialement, Cauchy donne cette définition de la convergence. Mais elle n'est pas satisfaisante, car si elle convient dans $\mathbb{R}$ (et également dans $\mathbb{C}$), elle n'est pas correcte dans $\mathbb{Q}$ (voir proposition ci-dessous). C'est pour cela qu'à la fin du $19^{\text{e}}$ siècle, on a adopté la définition actuelle, due à Weierstass.

**Proposition 2.1.20 ($\mathbb{Q}$ n'est pas complet)**

*Il existe des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels qui sont de Cauchy, mais non convergentes dans $\mathbb{Q}$.*

Cela motive la définition suivante :

**Définition 2.1.21 (Espace complet)**

Soit $E$ un espace métrique (sur lequel on peut donc définir une notion de convergence, et également une notion de suites de Cauchy). On dit que $E$ est complet si et seulement si toutes les suites de Cauchy sont convergentes dans $E$ (la réciproque étant toujours vraie).

Ainsi, ce qui précède montre que $\mathbb{R}$ est complet, alors que $\mathbb{Q}$ n'est pas complet. C'est même là une façon de construire $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$, sans doute la plus employée : on « complète » $\mathbb{Q}$ en lui ajoutant des limites fictives de toutes ses suites de Cauchy. On dit que $\mathbb{R}$ est la complétion de $\mathbb{Q}$. On y reviendra un peu plus loin.

## I.6 Convergence des suites complexes

Nous avons vu que la définition et les principales propriétés s'adaptent très bien au cas des suites à valeurs complexes. Il est cependant parfois plus commode de ramener l'étude d'une suite complexe à l'étude de deux suites réelles. C'est ce que permet le résultat suivant.

**Proposition 2.1.22 (Caractérisation de la convergence d'une suite complexe)**

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{C}$ si et seulement si $(\mathrm{Re}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent dans $\mathbb{R}$, et dans ce cas :*

$$\lim u_n = \lim \mathrm{Re}(u_n) + \mathrm{i} \lim \mathrm{Im}(u_n).$$

Cette propriété se généralise sans problème au cas de suites à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ (muni de la distance euclidienne) :

**Proposition 2.1.23 (Caractérisation de la convergence d'une suite de vecteurs)**
*Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de vecteurs de* $\mathbb{R}^p$. *On note pour tout* $n$, $\begin{pmatrix} u_{n,1} \\ \vdots \\ u_{n,p} \end{pmatrix}$ *les coordonnées de* $u_n$.
*Alors* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge dans* $\mathbb{R}^p$ *si et seulement si pour tout* $k \in [\![1,p]\!]$, $(u_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge dans* $\mathbb{R}$. *Dans ce cas :*

$$\lim u_n = \begin{pmatrix} \lim u_{n,1} \\ \vdots \\ \lim u_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la convergence d'un vecteur équivaut à la convergence coordonnée par coordonnée.

# II Propriétés des suites liées à la convergence

## II.1 Opérations sur les limites

**Théorème 2.2.1 (Opérations sur les limites finies)**
*Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles ou complexes convergentes, et* $\lambda$ *et* $\mu$ *deux scalaires (réels ou complexes). Alors :*

1. $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente, et* $\lim |u_n| = |\lim u_n|$ ;
2. $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente, et* $\lim(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \lim u_n + \mu \lim v_n$ ;
3. $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente, et* $\lim(u_n v_n) = \lim u_n \cdot \lim v_n$ ;
4. *si* $\lim v_n \neq 0$, *alors* $v_n \neq 0$ *à partir d'un certain rang ; ainsi,* $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ *est définie à partir d'un certain rang, est convergente, et* $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{\lim u_n}{\lim v_n}$.

**Théorème 2.2.2 (Opérations impliquant des limites infinies)**
*Dans le cas où* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont des suites réelles, les résultats ci-dessus restent vrais si la limite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et/ou de* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est infinie, avec les règles arithmétiques suivantes (règles usuelles dans* $\overline{\mathbb{R}}$*) :*

$$a + \infty = +\infty; \qquad +\infty + \infty = +\infty; \qquad a \cdot (+\infty) = (\mathrm{sg}(a))\infty; \qquad (\pm\infty)\cdot(\pm\infty) = \pm\infty; \qquad \frac{1}{\pm\infty} = 0.$$

**Avertissement 2.2.3 (Formes indéterminées)**
En revanche, les opérations arithmétiques suivantes ne sont pas définies, et donnent des formes indéterminées (ayez des exemples en tête) :

$$\infty - \infty; \qquad 0 \cdot \infty; \qquad \frac{\infty}{\infty}; \qquad \frac{0}{0}$$

Aux règles précédentes, nous ajoutons la suivante :

**Proposition 2.2.4 (Produit 0× borné)**

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles ou complexes telles que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers 0 et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Alors $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.*

Enfin, pour pouvoir établir les règles relatives à l'exponentiation, nous devons étudier le passage à la limite sous l'exponentielle et le logarithme, ce qui découle d'un résultat plus général, que nous admettons ici (c'est un corollaire de la caractérisation séquentielle de la continuité) :

**Théorème 2.2.5 (passage à la limite sous une fonction continue, admis provisoirement)**

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite (réelle ou complexe) convergeant vers $\ell$. Soit $f$ une fonction* continue *en $\ell$. Alors la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$.*

**Proposition 2.2.6 (Passage à la limite pour les puissances)**

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergeant vers des réels $\ell > 0$ et $\ell'$. Alors $(u_n^{v_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell^{\ell'}$.*

**Avertissement 2.2.7 (Formes indéterminées pour les puissances)**

On notera les deux formes indéterminées relatives aux exponentiations :

$$0^0 \qquad \text{et} \qquad 1^\infty.$$

On verra une autre application du théorème 2.2.5 pour la recherche de la limite d'une suite définie par une récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f$ est continue. La limite, si elle existe, vérifie alors $\ell = f(\ell)$.

## II.2 Limites et inégalités

Les suites considérées dans cette section sont réelles. Pour les suites complexes, l'utilisation de résultats de ce type nécessite de séparer les études de la partie réelle et de la partie imaginaire.

**Théorème 2.2.8 (Conservation des inégalités larges)**

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles, et $N \in \mathbb{N}$ tels que : $\forall n \geqslant N,\ u_n \leqslant v_n$. Alors, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettent des limites dans $\overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.*

**Remarque 2.2.9**

Avant de passer à la limite dans une inégalité, il faut avoir justifié soigneusement l'existence des limites.

**Avertissement 2.2.10**

Les inégalités strictes ne se conservent pas !

**Exemple 2.2.11**

Pour tout $n \geqslant 1$, $0 < \frac{1}{n}$. Passez à la limite...

**Théorème 2.2.12 (théorème de convergence par encadrement)**

*Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *trois suites réelles, et* $N \in \mathbb{N}$, *tels que :* $\forall n \geqslant N,\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent toutes deux vers une même limite finie, alors* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge aussi, et*

$$\lim v_n = \lim u_n = \lim w_n.$$

Dans le cas d'une limite infinie, on n'a pas besoin d'un encadrement. Suivant l'infini, une majoration ou une minoration suffit (pas besoin de contrôler le côté infini !) :

**Théorème 2.2.13 (théorème de divergence par minoration ou majoration)**

*Soit* $(u_n)n \in \mathbb{N}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $N \in \mathbb{N}$ *tels que pour tout* $n \geqslant N$, $u_n \leqslant v_n$.

1. *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $+\infty$, *alors* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $+\infty$.
2. *Si* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $-\infty$, *alors* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $-\infty$.

**Remarque 2.2.14**

Les deux théorèmes ci-dessus donnent l'*existence* de la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il n'est pas utile de l'avoir justifiée avant. Mais notamment pour le théorème de convergence par encadrement, il faut faire attention à la rédaction, et bien faire ressortir le fait que le théorème donne l'existence de la limite, avant d'écrire l'égalité sur les limites.

**Avertissement 2.2.15**

Ne surtout jamais présenter le théorème de convergence par encadrement comme un double passage à la limite dans les inégalités (à l'extrême rigueur si on connait déjà l'existence de toutes les limites, mais c'est maladoit)

**Méthode 2.2.16 (Méthode de calcul de limites par majoration/minoration :)**

- Si on parvient à trouver une majoration : $\forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant v_n$, où $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de limite nulle, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\ell$.
- Si on parvient à minorer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par une suite de limite $+\infty$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
- Si on parvient à majorer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par une suite de limite $-\infty$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.

**Exemples 2.2.17**

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n \ln n} = 0$ ; $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin \dfrac{1}{n} = 0$ ;
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^b a^n = +\infty$ si $a > 1$ ; $\lim\limits_{n\to+\infty} n^b a^n = 0$ si $|a| < 1$ ;
3. $\lim \dfrac{a^n}{n!} = 0$ ;
4. $\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$

Dans deux des exemples ci-dessus apparait la méthode suivante :

**Méthode 2.2.18 (Comparaison à une suite géométrique)**

- Étudier l'existence et le cas échéant la valeur de $\lim \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$.

- En cas d'existence, notons $\ell = \lim \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$.
  - ∗ Si $\ell < 1$, on peut majorer à partir d'un certain rang $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ par une suite géométrique de raison $r \in ]\ell, 1[$, et on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
  - ∗ Si $\ell > 1$, on peut minorer à partir d'un certain rang $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ par une suite géométrique de raison $r \in ]1, \ell[$, donc $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Si $(u_n)$ est de signe constant pour $n$ assez grand, on en déduit sa convergence vers un des deux infinis, sinon, la suite ne converge pas dans $\overline{\mathbb{R}}$.
  - ∗ Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

**Exemple 2.2.19**

L'indétermination du cas $\ell = 1$ peut être illustré par les suites $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, ou par n'importe quelle suite convergeant vers une limite finie non nulle.

## II.3 Suites monotones

On rappelle les définitions suivantes :

**Définition 2.2.20 (Suites croissantes, décroissantes, monotones)**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante) si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$ (resp. $u_{n+1} \leqslant u_n$)
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante (resp. strictement décroissante) si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$ (resp. $u_{n+1} < u_n$)
- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone si elle est croissante ou décroissante.
- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

On parlera de suite croissante à partir du rang $N$ si les inégalités ne sont vérifiées qu'à partir du rang $N$, et de même pour la décroissance.
Une propriété importante des suites monotones, c'est qu'elles sont toujours convergentes dans $\overline{\mathbb{R}}$. Plus précisément :

**Théorème 2.2.21 (Théorème de la convergence monotone)**

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.*

1. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.*
2. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et non majorée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.*
3. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.*
4. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et non minorée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $-\infty$*

**Remarque 2.2.22**

Ce théorème est faux si on se place dans $\mathbb{Q}$. Il est donc spécifique à $\mathbb{R}$. Il pourrait en fait être pris comme axiome de la construction de $\mathbb{R}$ à la place de la propriété de la borne supérieure.

**Remarque 2.2.23**

Ce théorème est particulièrement utile pour établir la convergence de suites définies par une récurrence de type $u_{n+1} = f(u_n)$ ; la valeur de la limite est ensuite obtenue en résolvant $\ell = f(\ell)$.

**Exemple 2.2.24**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$. Étudier la convergence de $(u_n)$.

## II.4 Suites adjacentes

**Définition 2.2.25 (Suites adjacentes)**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit qu'elles sont adjacentes si et seulement si :

1. l'une est croissante et l'autre décroissante ;
2. $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

**Proposition 2.2.26 (Comparaison de deux suites adjacentes)**

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes (avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante). Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$.*

**Théorème 2.2.27 (Théorème des suites adjacentes)**

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles adjacentes. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.*

**Corollaire 2.2.28 (Théorème des intervalles emboîtés)**

*Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'intervalles fermés bornés telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \subset I_n$, et telle que la longueur des intervalles $I_n$ tend vers 0. Alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est un singleton.*

Le théorème des suites adjacentes est notamment utile pour l'étude des « séries alternées », c'est à dire de la limite de sommes $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$, où $(a_k)$ est décroissante de limite nulle :

**Méthode 2.2.29 (Étude des séries alternées)**

Soit $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$, avec $(a_n)$ décroissante de limite nulle.

- Montrer que $(S_{2n})$ et $(S_{2n+1})$ sont adjacentes.
- En déduire qu'elles ont même limite $S$
- On verra un peu plus loin que cela implique que $(S_n)$ tend vers $S$.

Cette méthode fournit la convergence, mais pas la valeur. Le résultat obtenu par cette méthode s'appelle « critère spécial de convergence des séries alternées »

**Remarque 2.2.30**

Le théorème des suites adjacentes n'est pas vrai si on se place dans $\mathbb{Q}$. Encore une fois, on aurait pu choisir ce résultat comme axiome de la construction de $\mathbb{R}$.

### II.5 Digression sur la construction de $\mathbb{R}$

Au cours de ce chapitre et des précédents, nous avons croisé un certain nombre de propriétés dont nous avons dit qu'elles auraient pu être prises comme axiome de $\mathbb{R}$. Voici un petit bilan.
Supposons que nous sachions définir l'ensemble $\mathbb{R}$, mais que nous ne connaissions aucune propriété de $\mathbb{R}$. Alors, on pourrait établir :

**Théorème 2.2.31**
*Les résultats suivants sont équivalents :*
(i) *La description des intervalles de $\mathbb{R}$*
(ii) *La propriété de la borne supérieure*
(iii) *Le théorème de convergence monotone*
(iv) *Le théorème des suites adjacentes*
(v) *La convergence de toutes les suites de Cauchy.*

Pour pouvoir construire $\mathbb{R}$, il faut s'imposer l'une de ces propriétés, les autres en découlent. Nous avons admis la propriété de la borne supérieure, mais nous aurions pu faire un autre choix.

**Note Historique 2.2.32**
La construction la plus répandue est celle utilisant les suites de Cauchy, construction établie par Charles Méray en 1869, son point de départ étant de prouver rigoureusement la convergence des suites de Cauchy, résultat jusque-là plus ou moins admis, faute d'une construction correcte de $\mathbb{R}$. Cantor fait la même construction à peu près à la même époque.

## III Suites extraites

### III.1 Définitions

**Définition 2.3.1 (Suite extraite, fonction extractrice)**
1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Une *suite extraite* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$.
2. La fonction $\varphi$ est appelée *fonction extractrice* de la suite extraite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ainsi formellement, une suite extraite de $(u_n)$ est une composée de $u_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ par une fonction strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. En pratique, cela signifie que $(v_n)$ est constitué de termes de $(u_n)$, dans l'ordre, et sans répétition d'indice.

**Exemples 2.3.2**
1. Les deux suites extraites des termes d'indice pair et des termes d'indice impair : $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
2. $(u_{n^2})$
3. Pas $(u_{n(n-1)})$

La beauté poétique de la démonstration du lemme suivant nous laisse rêveurs :

**Lemme 2.3.3 (Lemme des pics)**

*De toute suite réelle on peut extraire une suite monotone.*

## III.2 Suites extraites et convergence

Le comportement des suites extraites à l'infini donne des indications quant au comportement de la suite initiale. Si le comportement de la suite initiale determine le comportement d'une suite extraite, il est beaucoup plus délicat de faire chemin arrière, une suite extraite ne pouvant fournir qu'une information partielle sur la suite totale.

**Théorème 2.3.4 (Théorème de convergence des suites extraites)**

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou dans $\mathbb{C}$. Alors toutes les suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, de même limite que $(u_n)$.*

**Théorème 2.3.5 (Caractérisation de la convergence par les suites extraites, HP)**

*Réciproquement, étant donné une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si toutes les suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et de même limite, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers cette limite commune.*

**Remarque 2.3.6**

Dans cet énoncé, on peut se dispenser de l'hypothèse « de même limite », qui découle de l'hypothèse de convergence de toutes les suites extraites.

**Avertissement 2.3.7**

La convergence d'une ou plusieurs suites extraites n'est en général pas suffisante. On peut souvent s'affranchir de la vérification de la convergence de toutes les suites extraites, mais il y a des conditions à donner sur l'ensemble des suites extraites auxquelles on se restreint.

Le cas le plus important est la possibilité de récupérer la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide des deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ :

**Proposition 2.3.8**

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ si et seulement si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite $\ell$, et dans ce cas, $\lim u_n = \ell$.*

**Avertissement 2.3.9**

Contrairement à ce qu'il se passe dans le théorème général, et du fait qu'on se contente d'étudier deux suites extraites, il est ici indispensable de vérifier l'égalité des limites de $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$.

Nous pouvons bien sûr adapter la proposition précédente au cas des suites extraites $(u_{3n})$, $(u_{3n+1})$ et $(u_{3n+2})$, etc.

On peut formuler un théorème plus général. Intuitivement, pour contrôler tous les termes de $(u_n)$, il faut que les images des fonctions extractrices des suites extraites auxquelles on limite notre étude recouvrent $\mathbb{N}$ entier (sauf éventuellement un nombre fini de terme). A cela, pour des raisons techniques, il faut rajouter une hypothèse de finitude. Nous renvoyons aux exercices pour plus de précisions.

La notion de suite extraite est intimement liée à celle de valeur d'adhérence :

**Définition 2.3.10 (valeur d'adhérence, HP)**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels (ou complexes). On dit que le réel (ou complexe) $x$ est une *valeur d'adhérence* de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une suite extraite $(v_n)$ de $(u_n)$ telle que $\lim v_n = x$.

Ainsi, l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'ensemble de toutes les limites (finies) des suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Avertissement 2.3.11**

Une suite peut ne pas avoir de valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}$.

C'est le cas par exemple d'une suite convergeant vers $+\infty$.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell$, ses suites extraites aussi ; ainsi, $\ell$ est dans ce cas l'unique valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Avertissement 2.3.12**

La réciproque est fausse : il existe des suites n'ayant qu'une valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}$ et qui ne sont pas convergentes.

**Exemple 2.3.13**

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n + (-1)^n n.$

Le problème se situe dans ce cas toujours aux infinis : certaines suites extraites peuvent tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$, empêchant la convergence de la suite. Ce problème incite à considérer les valeurs d'adhérence dans $\overline{\mathbb{R}}$ : de façon similaire au cas de valeurs d'adhérences finies, on dira que $+\infty$ est valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une suite extraite de limite $+\infty$, ou, de façon équivalente, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée. De même pour $-\infty$. On obtient alors les deux résultats importants suivants.

**Théorème 2.3.14 (Existence d'une valeur d'adhérence, HP)**

*Toute suite réelle admet au moins une valeur d'adhérence dans $\overline{\mathbb{R}}$.*

**Théorème 2.3.15 (Caractérisation de la convergence par les valeurs d'adhérence, HP)**

*Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels est convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si elle admet une seule valeur d'adhérence.*

## III.3 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Le théorème suivant est important, car il donne l'existence d'une valeur d'adhérence non infinie.

**Théorème 2.3.16 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)**

*De toute suite bornée on peut extraire une suite convergente.*

Remarquez que c'est une conséquence directe du théorème 2.3.14. Nous en donnons une démonstration directe pour une suite réelle, par dichotomie, n'utilisant pas le lemme des pics.
Le cas d'une suite complexe se déduit du cas réel en deux étapes : on extrait une première suite telle que la partie réelle converge, puis de cette suite extraite on extrait une deuxième suite pour assurer la convergence de la partie imaginaire.

**Note Historique 2.3.17**

Le théorème de Bolzano-Weierstrass a été énoncé par Bolzano en 1830, et démontré par Weierstrass en 1860. Weierstrass connaissait-il l'énoncé de Bolzano ? Ce n'est pas certain, car ce dernier est interdit de publication par l'empire austro-hongrois, car trop critique vis-à-vis de l'ordre établi. Il en résulte que ses résultats ont été très peu diffusés.

**Corollaire 2.3.18**

*Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. Alors de toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $I$ on peut extraire une suite convergeant vers un réel $\ell \in I$.*

Cette propriété définit la notion d'ensemble *compact*

**Définition 2.3.19 (Sous-ensemble compact, HP)**

Soit $E$ un espace métrique et $K \subset E$. On dit que $K$ est *compact* si de toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on peut extraire une suite convergeant vers un élément de $K$.

Ainsi, les intervalles fermés bornés de $\mathbb{R}$ sont des sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}$. On peut montrer plus généralement que les sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}$ sont exactement les sous-ensembles fermés et bornés de $\mathbb{R}$ (ce qui inclut en particulier les intervalles fermés bornés).

# IV Caractérisations séquentielles

Un certain nombre de propriétés analytiques, qui ne sont pas directement exprimées à l'aide de suite, peuvent se caractériser par une propriété portant sur des suites. c'est ce qu'on appelle une caractérisation séquentielle.

## IV.1 Densité

On rappelle :

**Définition 2.4.1 (Densité d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$)**

Soit $X$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que $X$ est dense dans $\mathbb{R}$ si pour tout $(x, y)$ de $\mathbb{R}$ tel que $x < y$, il existe $z \in X$ tel que $x < z < y$.

On peut étendre cette définition à tout espace métrique $E$, en imposant qu'il existe un élément de $X$ dans toute boule ouverte de $E$.
On a déjà justifié par exemple que $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $\mathbb{D}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

**Théorème 2.4.2 (Caractérisation séquentielle de la densité)**

*Soit $X$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. L'ensemble $X$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $X$ tels que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x$.*

La démonstration montre qu'on peut choisir une suite dont tous les termes sont supérieurs à $x$, ou de façon symétrique, dont tous les termes sont inférieurs à $x$. le lemme des pics (ou une démonstration directe) permet alors d'obtenir une propriété utile dans certaines situations :

**Proposition 2.4.3**

*Soit $X$ un sous-ensemble dense de $\mathbb{R}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite croissante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $X$ tels que $\lim u_n = x$. On peut trouver de même une suite décroissante.*

## IV.2 Limites et continuité

Nous admettons la caractérisation suivante de l'existence et de la valeur d'une limite d'une fonction définie sur un domaine réel.

**Théorème 2.4.4 (Caractérisation séquentielle de la limite, admis ici)**

*Soit $f$ une fonction définie sur un domaine $D$, constitué d'une union d'intervalles. Soit $x_0$ un point de $D$, ou un point de $\mathbb{R}$ tel que tout intervalle ouvert contenant $x_0$ intersecte $D$.*
*Alors $f$ admet une limite $\ell$ en $x_0$ si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $D$ convergeant vers $x_0$, $f(u_n)$ tend vers $\ell$.*

Ce théorème est surtout utilisé :
- soit pour tranférer les propriétés générales des limites de suites aux limites de fonctions ;
- soit pour prouver la non existence d'une limite.

**Exemple 2.4.5**

1. La fonction $x \mapsto \sin x$ n'admet pas de limite en $+\infty$.
2. La fonction $x \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'admet de limite en aucun point de $\mathbb{R}$.

Le théorème de caractérisation séquentiel de la limite de fonctions peut se généraliser au cas de fonctions de plusieurs variables ; la seule difficulté réside en une définition plus générale de la notion de « bord » du domaine de définition (dans le cas réel, nous avons décrit ce bord à l'aide des extrémités des intervalles constituant le domaine).

**Exemple 2.4.6**

La fonction $x \mapsto \frac{xy}{x+y}$ n'admet pas de limite en $(0, 0)$.

Enfin, en revenant au cas d'une fonction d'une variable réelle, le critère séquentiel peut s'adapter à la caractérisation des limites à droite et des limites à gauche. Pour cela, il est évidemment nécessaire de se restreindre aux suites restant d'un même côté du point en lequel on considère la limite. On peut même se restreindre un peu plus.

**Proposition 2.4.7 (Caractérisation séquentielle de la limite à gauche)**

*Soit $f$ une fonction définie sur un domaine $D$. Soit $x_0$ un point de $D$, ou tel que tout intervalle $]a, x_0[$ intersecte $D$. Alors $f$ admet une limite à gauche $\ell$ en $x_0$ si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $D$, strictement croissante et convergeant vers $x_0$, $f(u_n)$ tend vers $\ell$.*

Cette proposition s'adapte sans peine aux limites à droite.

**Avertissement 2.4.8**

Remarquez au passage que contrairement au cas d'une limite globale en $a$, l'existence d'une limite à gauche $\ell$ en $a \in D$ n'implique pas $\ell = f(a)$.

La continuité d'une fonction $f$ en un point $a$ de son domaine $D$ se définissant simplement par l'existence d'une limite en $a$, on obtient le critère séquentiel de la continuité d'une fonction, critère dont nous avons déjà évoqué le sens direct.

**Théorème 2.4.9 (Critère séquentiel pour la continuité)**

*Soit $f$ une fonction définie sur un domaine $D$ de $\mathbb{R}$, et $a \in D$. La fonction $f$ est continue en $D$ si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $D$ convergeant vers $a$, $f(u_n)$ converge vers $f(a)$.*

**Exemples 2.4.10**

1. La fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point.
2. La fonction $x \mapsto \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ n'est pas continue en 0.

## IV.3 Ensembles fermés

Une autre propriété qui se caractérise bien par les suites est le caractère fermé d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (donc par complémentation le caractère ouvert). Ainsi, la « topologie » ( *i.e.* la donnée des ouverts) de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ou plus généralement d'un espace « topologique » (muni d'une topologie) se caractérise par la convergence de ses suites (c'est même une équivalence, la convergence des suites étant définie par la topologie de l'ensemble). Nous nous contentons du cas simple suivant :

**Théorème 2.4.11 (Caractérisation séquentielle des fermés de $\mathbb{R}$, HP)**

*Soit $F$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Alors $F$ est fermé si et seulement si la limite de toute suite convergente d'éléments de $F$ est un élément de $F$*

Comme souvent, la caractérisation séquentielle est surtout utile pour infirmer la propriété.

**Exemples 2.4.12**

1. L'ensemble $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$ n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$.
2. L'ensemble $\mathbb{Q}$ n'est ni fermé ni ouvert dans $\mathbb{R}$.

## IV.4 Borne supérieure

Nous terminons par une dernière propriété s'exprimant (ici seulement partiellement) à l'aide de convergence de suites. Il ne s'agit pas à proprement parler d'une caractérisation, puisqu'ici il ne s'agit pas d'une équivalence.

**Théorème 2.4.13 (Suites et $\sup(X)$)**

*Soit $X$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ admettant une borne supérieure* $\sup(X)$.

1. *Il existe une suite d'éléments de $X$ convergeant vers* $\sup(X)$.
2. *Il existe une suite croissante d'éléments de $X$ convergeant vers* $\sup(X)$.
3. *Si* $\sup(X) \notin X$, *ou si* $\sup(X) = \sup(X \setminus \{\sup(X)\})$, *alors il existe une suite strictement croissante d'éléments de $X$ convergeant vers* $\sup(X)$.

Adaptation évidente pour la borne inférieure !!

# V Suites particulières

Nous étudions dans cette section un certain nombre de suites d'un type qu'on rencontre souvent, et qu'il faut savoir étudier.

## V.1 Suites définies par une récurrence affine

Nous étudions ici les suites définies par une relation $u_{n+1} = au_n + b$. Une telle suite est entièrement déterminée par la donnée de cette relation, et la donnée de son terme initial $u_0$ (ou éventuellement $u_N$, si la suite ne débute pas au rang 0).
Les suites arithmétiques et les suites géométriques en sont des cas particuliers, par lesquels nous commencerons cette étude.

**Définition 2.5.1 (Suite arithmétique)**
Une *suite arithmétique* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+1} = u_n + b$.

**Propriétés 2.5.2 (Propriétés des suites arithmétiques)**
*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique, vérifiant la relation $u_{n+1} = u_n + b$.*

1. *Explicitation :*
   - *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nb$.*
   - *Plus généralement, pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, $u_n = u_m + (n - m)b$,*
   - *ou encore, pour tout $(m, k) \in \mathbb{N}^2$, $u_{m+k} = u_m + kb$.*
2. *Limites :*
   - $\lim u_n = +\infty$ *si* $b > 0$ *;*
   - $\lim u_n = -\infty$ *si* $b < 0$ *;*
   - $\lim u_n = u_0$ *si* $b = 0$ *;*
3. *Sommes :*
   - $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0 + b \cdot \frac{n(n+1)}{2}$
   - *Plus généralement, pour tout $m < n$,* $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} u_k = (n-m+1)u_0 + b\frac{(n+m)(n-m+1)}{2}$.

**Définition 2.5.3 (Suites géométriques)**
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une *suite géométrique* si et seulement elle vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation du type $u_{n+1} = au_n$.

**Propriétés 2.5.4 (Propriétés des suites géométriques)**
*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique, vérifiant la relation $u_{n+1} = au_n$.*

1. *Explicitation :*
   - $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \cdot a^n$ *;*
   - *plus généralement, pour tout $m < n$, $u_n = u_m a^{n-m+1}$,*
   - *ou encore, pour tout $(m, k) \in \mathbb{N}^2$, $u_{m+k} = u_m a^k$.*
2. *Limites :*
   - $\lim u_n = 0$ *si* $|a| < 1$ *;*
   - $\lim u_n = +\infty$ *si* $a > 1$ *;*
   - $\lim u_n = u_0$ *si* $a = 1$ *;*
   - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'a pas de limite si* $a \leqslant -1$ *et* $u_0 \neq 0$.

*3. Sommes :*

- *Si* $a \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \cdot \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ *; en particulier,* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$
- *Si* $a = 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0$.
- *Si* $|a| < 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1}{1-a}$, *ce qu'on note :* $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$.
- *Si* $a \geqslant 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a^k = +\infty$, *ce qu'on note :* $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a^k = +\infty$.
- *Si* $a \leqslant -1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k$ *n'admet pas de limite.*

Et voici le cas général (à l'exclusion des suites arithmétiques) :

**Définition 2.5.5 (Suites arithmético-géométriques)**

Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *arithmético-géométrique* si elle vérifie une relation du type $u_{n+1} = au_n + b$, avec $a \neq 1$.

**Méthode 2.5.6 (Explicitation des suites arithmético-géométriques)**

- Rechercher une constante $c$ telle que $(u_n - c)_{n\in\mathbb{N}}$ soit géométrique. Pour cela, former une relation de récurrence pour $v_n = u_n - c$, et poser $c$ de sorte que cette relation de récurrence soit celle d'une suite géométrique.
- Expliciter la suite géométrique $(v_n)$ et revenir ensuite à $(u_n)$.

Cette méthode est aussi importante (pour les multiples adaptations qu'on peut en faire) que le résultat qu'on en déduit :

**Proposition 2.5.7 (Explicitation des suites arithmético-géométriques)**

*Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite arithmético-géométrique, de relation* $u_{n+1} = au_n + b$, *et* $c$ *le point fixe de la relation, à savoir l'unique réel vérifiant* $c = ac + b$. *Alors :*

1. *La suite* $(u_n - c)_{n\in\mathbb{N}}$ *est géométrique*
2. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = a^n(u_0 - c) + c$.

*Via* cette explicitation, toutes les propriétés relatives aux limites et aux sommes s'obtiennent grâce aux propriétés similaires des suites géométriques. Nous nous dispensons d'en faire une étude générale, sans grand intérêt.

**Exemple 2.5.8**

Expliciter la suite $(u_n)$ telle que $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 3u_n - 2$.

**Méthode 2.5.9 (Explicitation de $u_{n+1} = au_n + P(n)$)**

La méthode d'explicitation peut s'adapter au cas de suites telles que $u_{n+1} = au_n + P(n)$, où $P$ est un polynôme de degré $d$. Dans ce cas, chercher $c$ non pas constant, mais sous forme d'un polynôme de degré $d$.

**Exemple 2.5.10**
$u_0 = 2$, $u_{n+1} = 2u_n + 3n - 2$

## V.2 Suites définies par une relation linéaire d'ordre $k$

**Définition 2.5.11 (Suites récurrence linaire d'ordre $k$)**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On dit que $(u_n)$ est une *suite récurrente linéaire d'ordre* $k$ si $(u_n)$ vérifie une relation du type :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+k} = a_{k-1}u_{n+k-1} + \cdots + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n.$$

où $(a_0, \ldots, a_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$.

Une suite récurrente d'ordre $k$ est entièrement déterminée par sa relation de récurrence et la donnée de ses $k$ premiers termes.

**Exemple 2.5.12 (Suites de Fibonacci, de Lucas et de Gibonacci)**

1. La suite de Fibonacci est la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Il s'agit donc d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
2. La suite de Lucas $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la même relation que la suite de Fibonacci, avec l'initialisation $L_0 = 2$ et $L_1 = 1$
3. Une suite de Gibonacci (nom évidemment dérivé de Fibonacci) est une suite $(G_n)$ vérifiant la même relation, et telle que $G_0 \geqslant 0$ et $G_1 \geqslant 0$. Ainsi, les suites de Fibonacci et de Lucas sont des cas particuliers de suites de Gibonacci.

**Note Historique 2.5.13**
Leonardo Fibonacci (1175-1250), aussi appelé Leonardo Pisano, ou en français, Léonard de Pise, est un mathématicien italien, dont l'enfance passée en Kabylie a contribué à l'introduction en Europe des chiffres arabes. Il a écrit plusieurs recueils de problèmes numériques. Sa contribution aux mathématiques la plus célèbre reste la suite portant son nom. Elle aurait été introduite par Fibonacci en vue de dénombrer les lapins de son élevage en fonction du nombre de lapins des saisons précédentes. C'est la première vraie formule de récursion de l'histoire des mathématiques.
« Fibonacci » n'est pas son vrai nom. Littéralement, cela signifie « fils de Bonacci », son père s'appelant Guilielmo Bonacci. Le nom « Fibonacci » lui a été donné à titre posthume.

**Définition 2.5.14 (Polynôme caractéristique d'une récurrence linéaire)**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire, de relation

$$u_{n+k} = a_{k-1}u_{n+k-1} + \cdots + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n \qquad \text{soit:} \qquad u_{n+k} - a_{k-1}u_{n+k-1} - \cdots - a_1 u_{n+1} - a_0 u_n = 0$$

Le *polynôme caractéristique* associé à la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est le polynôme

$$P(X) = X^k - a_{k-1}X^{k-1} - \cdots - a_1 X - a_0.$$

**Exemple 2.5.15**
Toutes les suites de Gibonacci (donc les suites de Fibonacci et de Lucas également) ont le même polynôme caractéristique $P(X) = X^2 - X - 1$.

La recherche des racines du polynôme caractéristique permet d'expliciter les suites récurrentes linéaires. Nous nous contentons d'énoncer et démontrer le cas de récurrences linéaires d'ordre 2, et d'énoncer sans démonstration un cas particulier pour les récurrences d'ordre $k > 2$.

**Théorème 2.5.16 (Explicitation des suites récurrentes linéaires d'ordre 2)**
*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2, et $P$ son polynôme cractéristique, de degré 2.*

1. *Si $P$ admet deux racines distinctes (réelles ou complexes) $r$ et $s$, alors il existe des scalaires (réels ou complexes) $\lambda$ et $\mu$ tels que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r^n + \mu s^n.$$

2. *Si $P$ admet une racine double $r$, alors il existe des scalaires (réels ou complexes) $\lambda$ et $\mu$ tels que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda + \mu n) r^n.$$

**Méthode 2.5.17 (Explicitation d'une récurrence d'ordre 2)**

- Déterminer le polynôme caractéristique, et rechercher ses racines.
- Suivant la situation, donner la forme de l'explicitation, avec les paramètres $\lambda$ et $\mu$
- Écrire la relation obtenue pour les deux termes initiaux (généralement $n = 0$ et $n = 1$). cela fournit un système de deux équations à deux inconnues $\lambda$ et $\mu$.
- Résoudre ce système pour trouver les valeurs de $\lambda$ et $\mu$.

**Théorème 2.5.18 (Explicitation des suites récurrentes linéaires, cas particulier)**
*Si $P$ admet exactement $k$ racines distinctes 2 à 2 (réelles ou complexes) $r_1, \dots, r_k$, alors il existe des complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tels que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = \lambda_1 r_1^n + \cdots + \lambda_k r_k^n = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i r_i^k.$$

*Les complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sont déterminés par les conditions initiales, par la résolution d'un système de $k$ équations à $k$ inconnes.*

On verra la formule générale plus tard. Approximativement, on peut attribuer une notion de multiplicité à chaque racine (le nombre de fois qu'elles apparaissent comme racine du polynôme). Ainsi, lorsqu'un polynôme de degré 2 a une racine double $r$, sa multiplicité est 2. La forme générale de $u_n$ est alors obtenue en multipliant la suite géométrique associée à chaque racine par un polynôme de degré 1 de moins que la multiplicité de la racine, et de faire la somme de toutes ces expressions.

## V.3 Suites définies par une récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

Enfin, nous donnons quelques méthodes d'étude de suites récurrentes d'ordre 1 non linéaires, c'est-à-dire de suites définies par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$, pour une certaine fonction $f$. Nous dirons dans ce paragraphe simplement « suite récurrente » pour désigner une telle suite. Remarquez qu'une telle suite n'est pas toujours bien définie : il peut arriver qu'un terme $u_n$ sorte du domaine de définition de $f$, et qu'on ne puisse plus appliquer la relation de récurrence. Une des premières tâches est souvent de vérifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
Nous nous intéressons en particulier à la limite de $(u_n)$. La recherche de la limite d'une suite récurrente s'opère toujours sur le même principe.

**Méthode 2.5.19 (Étude de la limite d'une suite récurrente)**

- Étudier l'existence de la limite :
  * s'assurer que la suite est bien définie,
  * étudier sa monotonie, et obtenir l'existence de la limite à l'aide par exemple du théorème de la limite monotone.
- une fois assuré de l'existence de la limite, déterminer les valeurs possibles de cette limite $\ell$ en passant à la limite dans la relation de récurrence :

  **Si $f$ est continue**, soit $\ell$ vérifie $f(\ell) = \ell$, soit $\ell$ est un bord ouvert du domaine de $f$.
- Déterminer, parmi l'ensemble des valeurs possibles de $\ell$ laquelle est la bonne.
- Déterminer les points fixes de $f$ peut déjà s'avérer utile pour la première étape (aide à la recherche d'intervalles stables, de majorants et de minorants). Commencer par cela peut être efficace.

Nous donnons quelques techniques utiles pour la première étape de cette méthode.

**Définition 2.5.20 (Intervalle stable)**

On dit qu'un intervalle $I$ est stable par $f$ si $f$ est définie sur $I$ et $f(I) \subset I$.

**Théorème 2.5.21 (CS pour que $(u_n)$ soit bien définie)**

*Si $I$ est un intervalle stable par $f$, et si $u_0 \in I$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.*

Évidemment, si on parvient à trouver un indice $N$ tel que $u_N$ soit dans un intervalle stable, on parvient à la même conclusion.

**Remarque 2.5.22**

Si la fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}$, il n'y a évidemment pas de problème de définition ! Cela se retrouve en considérant l'intervalle stable $\mathbb{R}$.

Les intervalles stables permettent aussi souvent d'étudier les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Le résultat lui-même étant hors-programme, nous présentons cette démarche sous forme d'une méthode à connaître et développer à chaque fois (sauf en cas de manque de temps).

**Méthode 2.5.23 (Étude des variations lorsque $f$ est croissante)**

Supposons $f$ croissante sur un intervalle stable $I$, et $u_0 \in I$ (peut s'adapter si on n'a pas cette inclusion dès le rang initial).

- Comparer $u_0$ et $u_1$.
- Propager l'inégalité trouvée par une petite récurrence : la croissance de $f$ permet de passer d'un rang au suivant.

**Méthode 2.5.24 (Étude des variations lorsque $f$ est décroissante)**

Supposons $f$ décroissante sur un intervalle stable $I$, et $u_0 \in I$ (peut s'adapter si on n'a pas cette inclusion dès le rang initial).

- Adapter la méthode précédente pour l'étude de $(u_{2n})$ :
  * $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ sont récurrentes, de fonction associée $f \circ f$.
  * Comparer $u_0$ et $u_2$, et en déduire les variations de $(u_{2n})$ par la méthode précédente.
- En appliquant $f$ décroissante à la suite $(u_{2n})$, on prouve la monotonie (de variation opposée) de $(u_{2n+1})$.

Ainsi, si $f$ est décroissante sur un intervalle stable, les deux suites extraites $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ sont monotones de sens de variation opposés. cela ne suffit pas pour prouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Pour cela, il faut encore s'assurer que $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ ont même limite. Les limites de ces deux suites sont à rechercher parmi les points fixes de $f \circ f$.

**Remarque 2.5.25**

La connaissance des points fixes de $f$ peut aider à trouver des majorants. En effet, si $f$ est croissante, et $c$ un point fixe tel que $u_0 \leqslant c$, on peut propager cette inégalité aux rangs suivants.

**Exemple 2.5.26**

Étude de la suite $u_0 \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = u_n^2 - u_n$.

# VI Étude asymptotique

## VI.1 Domination, négligeabilité

**Définition 2.6.1 (Domination)**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que $(u_n)$ est *négligeable* devant $(v_n)$ si et seulement s'il existe un réel $M$ tel que à partir d'un certain rang $n_0$, $|u_n| \leqslant M|v_n|$, soit, formellement :

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n| \leqslant M|v_n|.$$

Ainsi, $(u_n)$ est dominée par $(v_n)$ si et seulement si l'ordre de grandeur de $(u_n)$ ne dépasse pas celui de $(v_n)$, à une constante multiplicative près.

**Définition 2.6.2 (Négligeabilité)**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que $(u_n)$ est *négligeable* devant $(v_n)$ s'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un entier $n_0$ tels que :

$$\forall n \geqslant n_0,\quad u_n = \varepsilon_n v_n \qquad \text{et} \qquad \lim \varepsilon_n = 0.$$

Il est souvent plus pratique d'utiliser, lorsque c'est possible, les caractérisations suivantes de la domination et de la négligeabilité

**Proposition 2.6.3**

*Si $(v_n)$ ne s'annule pas (à partir d'un certain rang au moins), alors :*

1. *$(u_n)$ est dominée par $(v_n)$ si et seulement si $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée ;*
2. *$(u_n)$ est négligeable devant $(v_n)$ si et seulement si* $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 0$

Enfin, pour pouvoir gérer facilement des relations de domination ou de négligeabilité, ou pour pouvoir écrire des approximations de façon commode, on utilise les notations suivantes :

**Notation 2.6.4 (Notations de Bachmann et de Landau)**

1. Si $(u_n)$ est dominée par $(v_n)$, on note $u_n = O(v_n)$
2. Si $(u_n)$ est négligeable devant $(v_n)$, on note $u_n = o(v_n)$

L'intérêt de cette notation est qu'on peut l'utiliser dans les calculs. On peut par exemple considérer $u_n = v_n + o(w_n)$. C'est notamment pratique pour formaliser des approximations. Ainsi, dire que

$$u_n = 2 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

signifie que pour $n$ assez grand, $u_n$ est à peut près égal à $2 + \dfrac{3}{n} - \dfrac{5}{n^2}$, et que l'erreur faire en approchant $u_n$ par cette expression est négligeable devant le plus petit terme de cette expression polynomiale. Il s'agit d'une bonne approximation par une expression polynomiale en $\frac{1}{n}$ à l'ordre 2. Il s'agit même de la meilleure.

**Avertissement 2.6.5**

Attention à l'abus de notation que l'on fait en écrivant cette égalité. Il ne s'agit pas vraiment d'une égalité, et c'est à prendre plus dans le sens d'une appartenance ($(u_n)$ appartient à l'ensemble des suites dominées par $(v_n)$). Si on garde en tête l'idée qu'il s'agit d'une appartenance, on évite un certain nombre d'erreurs que peut véhiculer la notation. Par exemple :

- $u_n = o(v_n)$ et $u'_n = o(v_n)$ n'implique pas $u_n = u'_n$, ce qui est assez troublant formellement pour une égalité.
- on ne peut pas simplifier des $o$ : $u_n + o(w_n) = v_n + o(w_n)$ n'implique pas $u_n = v_n$

**Note Historique 2.6.6**

- La notation $O$ pour la dominance a été introduite par le mathématicien allemand Paul Bachmann dans son livre *Die analytische Zahlentheorie* (1894)
- Le mathématicien allemand Edmond Landau, spécialiste de la théorie des nombres, introduit la notation $o$ dans son *Handbuch der Lehrer von der Verteilung der Primzahlen* (1909)
- Le britannique Godfrey Harold Hardy d'une part et le russe Ivan Vinogradov d'autre part, introduisent d'autres notations pour la dominance et la négligeabilité. Les notations de Hardy ne sont plus utilisées, celles de Vinogradov restent parfois utilisées en théorie des nombres.
- Hardy introduit également la notation $\Omega$ pour désigner la négation de la négligeabilité.
- L'informaticien Donald Knuth (spécialiste de l'informatique théorique, et créateur du célèbre logiciel TeX, référence encore aujourd'hui pour la composition de documents mathématiques professionnels, notamment sous sa forme dérivée LaTeX) sème la confusion en redéfinissant (en toute connaissance de cause) la notation $\Omega(u_n)$ dans un article de 1976 (*Big Omicron and Big Omega and Big Theta*) :

  $$v_n = \Omega(u_n) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists C > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \quad v_n \geqslant C u_n.$$

  Il définit également la notation $\Theta(u_n)$ :

  $$v_n = \Omega(u_n) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists C, C' > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \quad C' u_n \leqslant v_n \leqslant C u_n.$$

  Ces notations sont plus adaptées que $o$ et $O$ pour l'étude de la complexité des algorithmes : une minoration de la complexité permet de mieux cerner les limitations d'un algorithme !

**Exemple 2.6.7 (Reexpression des croissances comparées)**

1. $\ln n = o(n^\alpha)$ $(\alpha > 0)$
2. $n^\alpha = o(\mathrm{e}^n)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.
3. $n! = o(n^n)$.
4. $a^n = o(n!)$ $(a \in \mathbb{R})$
5. $n^a = o(n^b)$ si $a < b$

**Proposition 2.6.8**

*Soit* $(u_n)$ *une suite réelle.*

1. $u_n = O(1)$ *si et seulement si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée.*
2. $u_n = o(1)$ *si et seulement si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $0$.
3. $\lim u_n = \ell$ *si et seulement si* $u_n = \ell + o(1)$.

À part qu'elle n'est pas anti-symétrique, la relation de domination (resp. de négligeabilité) se comporte à peu près comme une relation d'ordre large (resp. stricte), ce qu'expriment les propriétés suivantes. Dans ces énoncés, $(u_n)$, $(v_n)$, $(w_n)$ et $(x_n)$ désignent des suites réelles.

**Propriétés 2.6.9 (Transitivités strictes et larges de $o$ et $O$)**

1. *Si* $u_n = O(v_n)$ *et* $v_n = O(w_n)$, *alors* $u_n = O(w_n)$.
2. *Si* $u_n = o(v_n)$ *et* $v_n = o(w_n)$, *alors* $u_n = o(w_n)$.
3. *Si* $u_n = o(v_n)$ *et* $v_n = O(w_n)$, *alors* $u_n = o(w_n)$.
4. *Si* $u_n = O(v_n)$ *et* $v_n = o(w_n)$, *alors* $u_n = o(w_n)$.

**Propriétés 2.6.10 (sommes de $o$ et $O$)**

1. *Si* $u_n = o(w_n)$ *et* $v_n = o(w_n)$, *alors* $u_n + v_n = o(w_n)$.
2. *Si* $u_n = O(w_n)$ *et* $v_n = O(w_n)$, *alors* $u_n + v_n = O(w_n)$.
3. *Si* $u_n = o(w_n)$ *et* $v_n = O(w_n)$, *alors* $u_n + v_n = O(w_n)$.
4. *Si* $u_n = O(w_n)$ *et* $v_n = o(w_n)$, *alors* $u_n + v_n = O(w_n)$.

**Propriétés 2.6.11 (produits de $o$ et $O$)**

1. *Si* $u_n = o(w_n)$ *et* $v_n = o(x_n)$, *alors* $u_n v_n = o(w_n x_n)$.
2. *Si* $u_n = O(w_n)$ *et* $v_n = o(x_n)$, *alors* $u_n v_n = o(w_n x_n)$.
3. *Si* $u_n = o(w_n)$ *et* $v_n = O(x_n)$, *alors* $u_n v_n = o(w_n x_n)$.
4. *Si* $u_n = O(w_n)$ *et* $v_n = O(x_n)$, *alors* $u_n v_n = O(w_n x_n)$.
5. *En particulier,* $w_n o(x_n) = o(w_n x_n)$ *et* $w_n O(x_n) = O(w_n x_n)$
   *(Les* $o$ *et* $O$ *sont multiplicatifs : on peut rentrer ou sortir un facteur multiplicatif).*

**Remarque 2.6.12 (Intérêt des $o$ et $O$)**

On se sert souvent des $o$ et $O$ pour estimer (ou borner) la vitesse de convergence d'une suite vers sa limite, en étudiant $u_n - \ell$. On compare ainsi souvent la différence $u_n - \ell$ à une suite de référence de limite nulle, ou $u_n$ à une suite de référence de limite $+\infty$. Par exemple, une suite telle que $|u_n - \ell| = o(\mathrm{e}^{-n})$ aura une convergence rapide (exponentielle), alors que l'information $|u_n - \ell| = o\left(\frac{1}{\ln n}\right)$ ne permet pas de contrôler aussi bien la convergence (mais une telle égalité n'empêche pas que la convergence puisse être rapide).

## VI.2 Équivalents

**Définition 2.6.13 (Équivalence)**
Deux suites réelles $(u_n)$ et $(v_n)$ sont dites *équivalentes* s'il existe une suite $(\alpha_n)$ et un entier $n_0$ tels que

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_n = \alpha_n v_n \qquad \text{et} \qquad \lim \alpha_n = 1.$$

**Notation 2.6.14**
Si $(u_n)$ et $(v_n)$ sont équivalentes, on note $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, ou simplement $u_n \sim v_n$.

De la définition découle le résultat important suivant :

**Proposition 2.6.15 (Caractérisation de l'équivalence par la négligeabilité)**
$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Longleftrightarrow u_n = v_n + o(v_n)$.

Cette propriété implique notamment qu'une somme de terme est équivalente à son terme prépondérant (celui devant lequel tous les autres sont négligeables). La recherche de l'équivalent d'une somme passe de fait souvent par l'étude des négligeabilités des termes les uns par rapport aux autres. On en déduit par exemple :

**Proposition 2.6.16 (équivalent d'un polynôme)**
*Soit $P$ un polynôme de monôme dominant $a_d X^d$. Alors $P(n) \sim a_d n^d$.*

Par exemple, $2n^2 + n - 1 \sim 2n^2$.
Comme pour la négligeabilité et la dominance, on a une version commode lorsque $(v_n)$ ne s'annule pas

**Proposition 2.6.17**
*Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites telles que $(v_n)$ ne s'annule pas (au moins à partir d'un certain rang). Alors*
$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Longleftrightarrow \lim \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

**Remarque 2.6.18**
Dans les trois notations $u_n = O(v_n)$, $u_n = o(v_n)$ et $u_n \sim v_n$, les égalités s'appliquent bien aux termes $u_n$ et $v_n$, et non aux suites. Cependant on ne quantifie pas les expressions dans lesquelles interviennent des $o$, $O$ ou des équivalents : il s'agit d'une égalité au voisinage de $+\infty$, comme les limites.

**Proposition 2.6.19**
*La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites réelles.*

**Théorème 2.6.20 (Conservation des limites par équivalence)**
*Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et sa limite est $\ell$.*

**Avertissement 2.6.21**

La réciproque est fausse en général. Elle est vraie en cas de limite non nulle et non infinie, mais en revanche, deux suites de même limite nulle ou infinie ne sont pas nécessairement équivalentes

**Exemples 2.6.22**

1. $(n)$ et $(n^2)$ ne sont pas équivalentes
2. $(\mathrm{e}^{-n})$ et $(\mathrm{e}^{-2n})$ ne sont pas équivalentes.

Ainsi, la notion d'équivalent n'a vraiment d'intérêt que pour des suites de limite nulle ou infinie. Dans ce cas, la recherche d'un équivalent permet d'estimer la vitesse de convergence. On recherche pour cela un équivalent sous une forme simple et bien connue, par exemple $n^a$, ou $n^a \ln^b n$ etc. On peut ainsi comparer la vitesse de convergence de deux suites.

**Proposition 2.6.23 (Conservation du signe)**

*Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites équivalentes. Alors il existe $n_0$ tels que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n$ et $v_n$ soient de même signe.*

**Avertissement 2.6.24**

Attention, cela ne signifie pas qu'à partir du rang $n$, $(u_n)$ et $(v_n)$ sont de signe constant ! Le signe peut varier, mais de la même manière pour les deux suites.

On peut faire un peu mieux, et obtenir une conservation stricte : il existe $n_0$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n$ et $v_n$ sont soit tous les deux nuls, soit strictement de même signe.
Comme les $o$ et $O$, les équivalents se comportent bien vis-à-vis des produits et des quotients :

**Proposition 2.6.25 (Équivalents de produits, quotients, puissances)**

*Soit $(u_n)$, $(v_n)$, $(u'_n)$ et $(v'_n)$ quatre suites réelles.*

1. *Si $u_n \sim u'_n$ et $v_n \sim v'_n$, alors $u_n v_n \sim u'_n v'_n$.*
2. *Si de plus $v_n$ est non nulle à partir d'un certain rang, alors $\dfrac{u_n}{v_n} \sim \dfrac{u'_n}{v'_n}$.*
3. *Si $u_n \sim u'_n$ et si $a$ est un réel fixé, alors $(u_n)^a \sim (u'_n)^a$.*

En revanche, le passage à une puissance dépendant de $n$ requiert de la prudence (revenir à la notation exponentielle).
Lors de l'étude des fonctions usuelles, nous avons rencontré un certain nombre de limites remarquables, qui en fait s'expriment sous forme d'un équivalent, et sont généralement plus commodes à utiliser sous cette forme.

**Proposition 2.6.26 (Équivalents classiques, à connaître sur le bout des doigts)**

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite* ***de limite nulle****. Alors :*

1. $\ln(1+u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$ ;
2. $\mathrm{e}^{u_n} - 1 \underset{+\infty}{\sim} u_n$ ;
3. $\sin(u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$ ;
4. $\cos(u_n) - 1 \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{u_n^2}{2}$ ;

5. $\tan(u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$ ;
6. $\mathrm{sh}(u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$ ;
7. $\mathrm{ch}(u_n) - 1 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{u_n^2}{2}$ ;
8. $\mathrm{th}(u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$ ;
9. $\mathrm{Arcsin}(u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$ ;
10. $\mathrm{Arccos}(u_n) - \dfrac{\pi}{2} \underset{+\infty}{\sim} -u_n$ ;
11. $\mathrm{Arctan}(u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$ ;
12. $(1 + u_n)^a - 1 \underset{+\infty}{\sim} au_n \quad (a \neq 0)$ ;

Nous n'avons pas vu de règle pour sommer des équivalents. C'est normal. C'est interdit.

**Avertissement 2.6.27 (Sommes d'équivalents)**

**Ne pas sommer des équivalents.**

Si les parties principales se compensent, on s'expose à des erreurs.

**Exemple 2.6.28**

$u_n = \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$, $v_n = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} \sim -\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}$ ; Faites la somme des deux.

**Méthode 2.6.29 (Pour contourner le problème des sommes d'équivalents)**

- Étudier les négligeabilités entre les termes de la somme, pour ne garder que les termes d'ordre prépondérant.
- Écrire les équivalents avec un $o$ et effectuer la somme sous cette forme.
- Si les parties principales ne se compensent pas, on peut revenir à un équivalent.
- Sinon, on ne peut pas conclure directement. Il faut étudier l'ordre de grandeur de ce qu'il reste après simplification des parties principales, et pour cela, il faut avoir une meilleure approximation de chaque terme (la connaissance de l'équivalent ne suffit pas). On peut par exemple utiliser un développement limité (voir chapitre correspondant).

**Exemple 2.6.30**

Déterminer un équivalent de $\sin\left(\frac{2}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

**Avertissement 2.6.31 (Composition d'équivalents)**

**Ne composez pas un équivalent pas une fonction.**

En général, $u_n \sim v_n$ n'implique pas $f(u_n) \sim f(v_n)$. Même avec des fonctions « gentilles » comme le logarithme ou l'exponentielle, ça peut être faux.

**Exemples 2.6.32**

1. Est-ce que $\mathrm{e}^n \sim \mathrm{e}^{n+1}$ ?
2. Est-ce que $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ ?

**Méthode 2.6.33 (Composer un équivalent par ln ou exp)**

1. Composer par ln lorsque $(u_n)$ et $(v_n)$ ne tendent pas vers 1 :
   - Appliquer ln à $\frac{u_n}{v_n}$.
   - En déduire $\ln u_n \left(1 - \frac{\ln u_n}{\ln v_n}\right) \to 1$
   - En déduire $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.
2. Composer par exp lorsque $(u_n)$ et $(v_n)$ ne tendent pas vers $+\infty$ ou $-\infty$.
   - Former le quotient $\frac{\mathrm{e}^{u_n}}{\mathrm{e}^{v_n}} = \mathrm{e}^{\left(\frac{u_n}{v_n} - 1\right) v_n}$
   - Conclure.

# 3 Limites et continuité

Soit $X$ un sous-ensemble de $\overline{\mathbb{R}}$. On désigne par $\overline{X}$ l'*adhérence* de $X$, c'est-à-dire l'ensemble des points $x$ de $\overline{\mathbb{R}}$ (pas forcément dans $X$), pour lesquels il existe des points de $X$ aussi proche qu'on veut de $x$. Ainsi :
• $\overline{X} \cap \mathbb{R} = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon > 0, \exists y \in X, |y - x| < \varepsilon\}$,
• $+\infty \in \overline{X}$ si et seulement si $X$ n'est pas majoré,
• $-\infty \in \overline{X}$ si et seulement si $X$ n'est pas minoré.
Si $x \in \overline{X}$, on dit que $x$ est un point adhérent à l'ensemble $X$.
Par exemple :
• si $X = ]0, 1[$, $\overline{X} = [0, 1]$ ;
• si $X = [0, 2]1$, $\overline{X} = [0, 2]$ ;
• si $X = [0, +\infty[$, $\overline{X} = [0, +\infty]$ ;
On a toujours $X \subset \overline{X}$.
En pratique, dans la suite de ce chapitre, $X$ sera souvent un intervalle non réduit à un point. Dans ce cas, $\overline{X}$ est l'intervalle fermé de mêmes extrémités. Il arrivera également que $X$ soit une réunion d'intervalles. Dans ce cas, $\overline{X}$ est la réunion des intervalles fermés correspondants.
Toutes les notions sont vues pour des fonctions réelles à valeurs dans $\mathbb{R}$. Tout comme pour les suites, elles peuvent être généralisées (tant qu'il n'est pas question d'infini) pour des fonctions d'une variable réelle, à valeurs dans $\mathbb{C}$, les définition étant obtenues en considérant des modules en lieu et place des valeurs absolues. Il convient alors de remarquer que, comme dans le cas des suites, l'existence d'une limite, ou la continuité d'une fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$ équivaut à l'existence d'une limite, ou à la continuité, de sa partie réelle et de sa partie imaginaire.

## I Limites

Dans toute cette partie, $X$ désigne un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, et $f$ une fonction de $X$ dans $\mathbb{R}$.

### I.1 Définitions

**Définition 3.1.1 (Limites en un point fini)**
Soit $a \in \overline{X} \cap \mathbb{R}$.
• Soit $b \in \mathbb{R}$. On dit que $f(x)$ tend vers $b$ lorsque $x$ tend vers $a$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \ \forall x \in X,\ |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - b| \leqslant \varepsilon.$$

• On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $x$ tend vers $a$ (ou bien $f$ admet $b$ comme limite en $a$) si :

$$\forall A > 0,\ \exists \eta > 0,\ \ \forall x \in X,\ |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant A.$$

• On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $x$ tend vers $a$ si :

$$\forall A > 0,\ \exists \eta > 0,\quad \forall x \in X,\ |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \leqslant -A.$$

Décortiquons l'expression dans le cas d'une limite finie :
• $\forall \varepsilon > 0$ : « Quelle que soit la marge d'erreur $\varepsilon$ qu'on se donne, aussi petite soit-elle ... »
• $\exists \eta > 0$ : « ... il existe une petite boule de rayon $\eta$ centrée en $a$, quitte à prendre $\eta$ très petit ... »
• $\forall x \in X,\ |x - a| < \eta \Longrightarrow \dots$ : « ... tel que si $x$ est à la fois dans $X$ et dans cette boule ... »
• $\dots \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$ : « alors $f(x)$ est proche à $\varepsilon$ près de $b$. »
Autrement dit : « Si $x \in X$ est suffisamment proche de $a$, alors $f(x)$ est aussi proche qu'on veut de $b$ ».

**Remarques 3.1.2**

1. L'hypothèse $a \in \overline{X}$ est nécessaire pour pouvoir considérer des points aussi proches qu'on veut de $a$.
2. Si $a \in X$, et si $f(x)$ tend vers $b$ lorsque $x$ tend vers $a$, alors $f(a) = b$. En effet, si ce n'est pas le cas, le choix de $\varepsilon = \frac{|b-a|}{2}$ et de $x = b$ amène, pour tout $\eta > 0$, une contradiction à la définition de la limite.
3. Dans la plupart des cas, on considère donc la limite en une valeur $a$ adhérente stricte à $X$, c'est-à-dire n'appartenant pas à $X$ : par exemple en l'extrémité d'un intervalle ouvert, ou en un point $a$ tel que $X = Y \setminus \{a\}$ (par exemple en 1 avec $X = [0, 2] \setminus \{1\}$).
4. Si $a$ est un point *isolé* de $X$ (il n'existe pas de point de $A$ infiniment proche de $a$ autre que $a$), alors $f$ admet une limite en $a$, valant $f(a)$.
5. Les définitions sont données avec des inégalités larges $|x - a| \leqslant \eta$ et $|f(x) - b| \leqslant \varepsilon$. On pourrait tout aussi bien mettre des inégalités strictes, pour $|x-a| < \eta$ (qui peut le plus peut le moins !) et pour $|f(x)-b| < \varepsilon$ (la propriété étant vraie pour tout $\varepsilon$, on peut décider de prendre initialement $\frac{\varepsilon}{2}$, ce qui nous donne après choix convenable de $\eta$, et quantifications adéquates, $|f(x) - b| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.)

**Proposition 3.1.3 (Limite en un point du domaine)**
*Si $a \in X$, et si $f(x)$ admet une limite en $a$, alors $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$.*

Nous voyons maintenant comment définir la limite d'une fonction en un points infini. La longueur de ces définitions est due au nombre de cas à étudier.

**Définition 3.1.4 (Limite en $+\infty$)**
On suppose que $+\infty$ est adhérent à $X$.
• Soit $b \in \mathbb{R}$. On dit que $f(x)$ tend vers $b$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists B \in \mathbb{R},\quad \forall x \in X,\ x \geqslant B \Longrightarrow |f(x) - b| \leqslant \varepsilon.$$

• On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A \geqslant 0,\ \exists B \in \mathbb{R},\quad \forall x \in X,\ x \geqslant B \Longrightarrow f(x) \geqslant A.$$

• On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A \geqslant 0,\ \exists B \in \mathbb{R},\quad \forall x \in X,\ x \geqslant B \Longrightarrow f(x) \leqslant -A.$$

**Définition 3.1.5 (Limite en $-\infty$)**
On suppose que $-\infty$ est adhérent à $X$.
• Soit $b \in \mathbb{R}$. On dit que $f(x)$ tend vers $b$ lorsque $x$ tend vers $-\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists B \in \mathbb{R},\ \ \forall x \in X,\ x \leqslant -B \Longrightarrow |f(x) - b| \leqslant \varepsilon.$$

• On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A > 0,\ \exists B \in \mathbb{R},\ \ \forall x \in X,\ x \leqslant -B \Longrightarrow f(x) \geqslant A.$$

• On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A > 0,\ \exists B \in \mathbb{R},\ \ \forall x \in X,\ x \leqslant -B \Longrightarrow f(x) \leqslant -A.$$

**Remarque 3.1.6**
Lorsqu'on prend $X = \mathbb{N}$, on retrouve la définition de la limite des suites.

Comme on peut le constater, la distinction entre un point fini et les deux infinis, à faire à la source et à l'arrivée, amène à distinguer 9 cas différents dans la définition des limites. Pour les études pratiques, ce n'est pas gênant : il suffit de considérer le cas qui nous concerne. Pour des études plus théorique, notamment pour établir des propriétés générales, il peut être plus commode d'avoir une description plus uniforme, évitant d'avoir à distinguer entre un grand nombre de cas.

## I.2 Définition synthétique

On peut donner une définition globale à l'aide de la notion de voisinage. Rappelons que $U$ est un voisinage (sous-entendu : dans $\mathbb{R}$) de $a \in \mathbb{R}$ si $U$ contient une boule ouverte centrée en $a$, donc si

$$\exists \varepsilon > 0,\ \ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - a| < \varepsilon \Longrightarrow x \in U.$$

On a vu qu'on peut généraliser cette notion au cas d'un voisinage de $\pm\infty$ de la manière suivante :
• $U$ est un voisinage de $+\infty$ s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $]A, +\infty[ \subset U$ ;
• $U$ est un voisinage de $-\infty$ s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $] - \infty, A[ \subset U$.
On obtient alors une définition équivalente de la limite d'une fonction en un point :

**Théorème 3.1.7 (Définition des limites par voisinages)**
*Soit $a \in \overline{X}$ (fini ou infini) et $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*
*(i) $f$ admet une limite $b$ lorsque $x$ tend vers $a$*
*(ii) pour tout voisinage $V$ de $b$, il existe un voisinage $U$ de $a$ tel que $f(U \cap X) \subset V$, c'est-à-dire :*

$$\forall x \in U \cap X, \quad f(x) \in V.$$

Nous dirons qu'une fonction $f$ admet une propriété $\mathcal{P}$ au voisinage d'un point $a \in \overline{X}$, s'il existe un voisinage $V$ de $a$ dans $\mathbb{R}$ (au sens étendu ci-dessus pour $a$ infini) tel que la propriété $\mathcal{P}$ soit vérifiée par $f$ sur l'ensemble $V \cap X$.
La notion de limite permet alors de « contrôler » une fonction au voisinage d'un point. Ainsi, on obtient par exemple :

**Proposition 3.1.8**

*Soit $f$ une fonction admettant une limite finie en un point $a$ de $\overline{X}$. Alors, $f$ est bornée au voisinage de $a$.*

**Définition 3.1.9 (Coïncidence de deux fonctions)**

Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $X$ et $Y$ et $a$ tel que $a \in \overline{X}$ et $a \in \overline{Y}$. On dit que $f$ et $g$ coincident au voisinage de $a$ si et seulement s'il existe un voisinage $V$ de $a$ dans $\mathbb{R}$ tel que $X \cap V = Y \cap V$ et que

$$\forall x \in X \cap V, \quad f(x) = g(x).$$

**Proposition 3.1.10 (Comparaison des limites de deux fonctions coïncidant au vois. de $a$)**

*Soit $f$ et $g$ deux fonctions coïncidant au voisinage d'un point $a$. Alors, si $f$ admet une limite (finie ou infinie) en $a$, alors $g$ aussi, et*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to b} f(x).$$

Remarquez que cela impose l'existence d'un intervalle ouvert $]b, c[$ contenant $a$, tel que $f$ et $g$ coïncident sur $]b, c[$. En aucun cas, une telle règle ne peut se généraliser si $a$ est au bord d'un intervalle de coïncidence, car, si $a$ est par exemple le bord gauche, on ne contrôle pas les deux fonctions à gauche de $a$.

## I.3 Unicité de la limite

On rappelle le lemme suivant, déjà utilisé pour démontrer l'unicité de la limite des suites :

**Lemme 3.1.11 (Lemme de séparation)**

*Soit $(x, y) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tels que $x \neq y$. Alors il existe des voisinages $U$ de $x$ et $V$ de $y$ tels que $U \cap V = \varnothing$.*

**Théorème 3.1.12 (Unicité de la limite)**

*Soit $a \in \overline{X}$. Sous réserve d'existence, la limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers $a$ est unique.*

**Notation 3.1.13**

En cas d'existence de la limite en $a$, cette notation étant maintenant non ambiguë, on note $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ LA limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers $a$.

## I.4 Limites à droite, limites à gauche

**Notation 3.1.14**

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note $X_{<a} = \{x \in X \mid x < a\}$ et $X_{>a} = \{x \in X \mid x > a\}$

**Définition 3.1.15 (Limites à droite et à gauche)**

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $a \in \overline{X_{<a}}$. On dit que $f$ admet une limite à gauche en $a$, égale à $b$, si la restriction $f_{|X_{<a}}$ de $f$ à $X_{<a}$ admet $b$ pour limite en $a$. On note cette limite $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$, ou encore $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $a \in \overline{X_{>a}}$. On dit que $f$ admet une limite à droite en $a$, égale à $b$, si la restriction $f_{|X_{>a}}$ de $f$ à $X_{>a}$ admet $b$ pour limite en $a$. On note cette limite $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$, ou encore $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.

**Exemples 3.1.16**

1. $f : x \mapsto \frac{x}{|x|}$ en $a = 0$ ;
2. $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ en $a = 0$ ;
3. $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ en $a \in \mathbb{Z}$.

**Proposition 3.1.17 (Caractérisation de la limite par les limites à droite et à gauche)**

*Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $a \in \overline{X_{<a}}$ et $a \in \overline{X_{>a}}$. Alors :*

- *si $a \in X$, $f$ admet une limite en $a$ si et seulement si $f$ admet des limites à gauche et à droite en $a$, et si : $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ ;*
- *si $a \notin X$, $f$ admet une limite en $a$ si et seulement si $f$ admet des limites à gauche et à droite en $a$, et si : $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.*

## I.5 Caractérisation séquentielle d'une limite

La plupart des résultats élémentaires sur les limites étant similaire à ceux qu'on a pour les suites, il peut être commode d'avoir un moyen de se ramener à cette situation, afin d'éviter d'avoir à refaire toutes les preuves. On peut le faire grâce au théorème suivant.

**Théorème 3.1.18 (Caractérisation séquentielle d'une limite)**

*Soit $a \in \overline{X}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

*(i) $f(x)$ tend vers $b$ lorsque $x$ tend vers $a$ ;*

*(ii) pour tout suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $X$ et tendant vers $a$, la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $b$.*

**Utilité :** Importer tous les résultats qu'on a établis pour les suites, ou démontrer la non-existence d'une limite.

**Exemples 3.1.19**

1. La fonction $x \mapsto \sin x$ n'admet pas de limite en $+\infty$.
2. La fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'admet de limite en aucun point de $\overline{\mathbb{R}}$.

Pour le cas de limites à droite et à gauche, on a bien entendu une caractérisation similaire par des suites tendant vers $a$ par valeurs inférieures ou supérieures (du fait que les limites à gauche et à droite sont définies par restriction du domaine). Cependant, on peut avoir une caractérisation plus fine, utile dans certaines occasions, notamment pour des propriétés liées à la monotonie.

**Théorème 3.1.20 (Caractérisation séquentielle des limites à droite ou à gauche)**

*Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $a \in \overline{X_{<a}}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

*(i) $f$ admet une limite à gauche en $a$, égale à $b$ ;*

*(ii) pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $X$ et strictement inférieures à $a$, tendant vers $a$, $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $b$ ;*

*(iii) pour toute suite strictement croissante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $X$ tendant vers $a$, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $b$.*

*On a un énoncé similaire pour les limites à droite.*

## I.6 Arithmétique des limites

Les résultats suivants sont énoncés pour des limites globales, mais sont bien entendu aussi valables pour des limites à gauche et à droite, ces dernières étant obtenus comme limites globales de fonctions restreintes.

**Théorème 3.1.21 (Limites de sommes et produits)**

*Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $X \subset \mathbb{R}$, et $a \in \overline{X}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $f$ et $g$ admettent une limite dans $\mathbb{R}$ en $a$, alors $f+g$, $\lambda f$, $fg$ et $|f|$ aussi, et :*

1. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$ ;
2. $\lim\limits_{x\to a} \lambda f(x) = \lambda \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$ ;
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$ ;
4. $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |\lim\limits_{x\to a} f(x)|$.

**Théorème 3.1.22 (Limites de quotients)**

*Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $X \subset \mathbb{R}$, et $a \in \overline{X}$. Si $f$ et $g$ admettent une limite en $a$, et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, alors alors $\frac{f}{g}$ admet une limite en $a$, et : $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$.*

**Théorème 3.1.23 (Limites de compositions)**

*Soit $X$ et $Y$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Soit $f : X \to Y$ et $g : Y \to \mathbb{R}$ deux fonctions, et $a \in \overline{X}$. On suppose que $f(x)$ tend vers $b \in \mathbb{R}$ lorsque $x$ tend vers $a$. Alors :*

1. $b \in \overline{Y}$ ;
2. *si $g(y)$ tend vers $c$ lorsque $y$ tend vers $b$, alors $g \circ f(x)$ tend vers $c$ lorsque $x$ tend vers $a$.*

*Autrement dit : $\lim\limits_{x\to a}(g \circ f(x)) = \lim\limits_{y\to \lim_a f(x)} g(y)$.*

**Théorème 3.1.24 (Opérations sur des limites infinies)**

*Les règles précédentes restent vraies (avec les règles opératoires de $\overline{\mathbb{R}}$) dans toutes les situations n'amenant pas une des formes indéterminées suivantes :*

$$0 \times \infty, \qquad \infty - \infty, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad \frac{0}{0}.$$

## I.7 Passage à la limite dans une inégalité

On énonce les propriétés suivantes pour une limite globale ; elles se généralisent pour les limites à droite ou à gauche.

**Proposition 3.1.25 (Prolongement des inégalités, ou conservation des inégalités larges)**
*Soit $X \subset \mathbb{R}$, et $f, g : X \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in X$, $f(x) \leqslant g(x)$. Soit $a \in \overline{X}$. Alors,* si $f$ et $g$ admettent une limite en $a$, *ces limites vérifient :*

$$\lim_{x \to a} f(x) \leqslant \lim_{x \to a} g(x).$$

**Remarques 3.1.26**

1. Cela reste vrai si l'inégalité initiale n'est vraie qu'au *voisinage* de $a$.
2. À n'utiliser qu'en cas d'*existence des limites* (à justifier au préalable).
3. Les inégalités *strictes* ne se conservent pas !
4. On parle parfois de *stabilité* des inégalités larges par passage à la limite.

**Théorème 3.1.27 (Théorème d'encadrement)**
*Soit $X \subset \mathbb{R}$, et $f, g, h : X \to \mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{X}$. On suppose que :*

1. *$\forall x \in X,\ f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ (ou au moins sur un voisinage de $a$) ;*
2. *$f$ et $h$ admettent des limites finies en $a$ telles que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x)$.*

*Alors $g$ admet une limite finie en $a$, et : $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x)$.*

**Exemples 3.1.28**

1. On a déjà utilisé ce théorème pour obtenir $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (démonstration géométrique).
2. On en déduit : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$.
3. Ainsi que : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$.

Le théorème d'encadrement s'adapte de la façon suivante dans le cas de limites infinies :

**Théorème 3.1.29 (Théorème de majoration)**
*Soit $X \subset \mathbb{R}$, et $f, g : X \to \mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{X}$. On suppose que :*

1. *$\forall x \in X,\ f(x) \leqslant g(x)$ (ou au moins sur un voisinage de $a$) ;*
2. *$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.*

*Alors $g$ admet une limite en $a$ égale à $+\infty$ : $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$.*

**Théorème 3.1.30 (Théorème de minoration)**
*Soit $X \subset \mathbb{R}$, et $f, g : X \to \mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{X}$. On suppose que :*

1. *$\forall x \in X,\ f(x) \leqslant g(x)$ (ou au moins sur un voisinage de $a$) ;*
2. *$\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$.*

*Alors $f$ admet une limite en $a$ égale à $-\infty$ : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.*

**Remarque 3.1.31**

Il est important de remarquer que le théorème d'encadrement et les théorèmes de minoration et majoration fournissent en premier lieu l'existence des limites. Il s'agit donc de bien plus qu'un simple passage à la limite dans des inégalités.

### I.8 Fonctions monotones

**Théorème 3.1.32 (Théorème de limite monotone)**

*Soit $f$ une fonction croissante sur $X$. Alors, en tout point $a$ où ces limites peuvent être envisagées :*

1. *$f$ admet une limite à gauche $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, et si $a \in X$, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \leqslant f(a)$ ;*
2. *$f$ admet une limite à droite $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, et si $a \in X$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) \geqslant f(a)$.*

*De plus, si au point $a$, les limites à droite et à gauche peuvent être envisagées, on a :*

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \leqslant \lim_{x\to a^+} f(x),$$

*et si $f$ est définie en ce point $a$ :*

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \leqslant f(a) \leqslant \lim_{x\to a^+} f(x),$$

**Corollaire 3.1.33**

*Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $+\infty$ soit adhérent à $X$. Alors $f$ admet une limite en $+\infty$, et cette limite est finie si et seulement si $f$ est majorée. De même, si $-\infty$ est adhérent à $X$, $f$ admet une limite en $-\infty$, et cette limite est finie si et seulement si $f$ est minorée.*

Ces deux énoncés ont bien sûr un équivalent pour les fonctions décroissantes.

## II Comparaison locale de fonctions

Dans cette section, nous adaptons au cas des fonctions les notions de comparaison étudiées pour les suites (équivalent, négligeabilité etc.) Dans le cas des fonctions, ces comparaisons ne se feront plus uniquement en $+\infty$, mais au voisinage de n'importe quel point.

### II.1 Petit $o$, grand $O$

Dans toute cette section $X$ désigne un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, et $f$ et $g$ (éventuellement indexées) deux fonctions de $X$ dans $\mathbb{R}$.

**Définition 3.2.1 (Domination, $O$)**

Soit $a \in \overline{X}$. On dit que $f$ est *dominée par $g$ au voisinage de $a$* s'il existe un voisinage $U$ de $a$ et un réel $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall x \in U \cap X,\ |f(x)| \leqslant k|g(t)|.$$

On note $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$, ou $f \underset{a}{=} O(g)$, ou, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la valeur de $a$, $f(x) = O(g(x))$. Dans cette notation, $x$ est une variable muette, qu'il ne faut donc pas quantifier.

**Proposition 3.2.2 (Réexpression de la dominance)**

1. *si $a$ est fini, $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$ si et seulement si :*

$$\exists \eta > 0,\ \exists k \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in X,\ |x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x)| \leqslant k|g(x)|.$$

2. *si $a = +\infty$, $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$ si et seulement si :*

$$\exists B > 0,\ \exists k \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in X,\ x > B \Longrightarrow |f(x)| \leqslant k|g(x)|.$$

3. *Si $g$ ne s'annule pas au voisinage de $a$, $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$ si et seulement si $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de $a$.*

**Définition 3.2.3 (Négligeabilité, $o$)**

Soit $a \in \overline{X}$. On dit que $f$ est *négligeable devant $g$ au voisinage de $a$* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $U$ de $a$ tel que :

$$\forall x \in U \cap X,\ |f(x)| \leqslant \varepsilon |g(t)|.$$

On note $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$, ou $f \underset{a}{=} o(g)$ ou, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la valeur de $a$, $f(x) = o(g(x))$. Dans cette notation, $x$ est une variable muette, qu'il ne faut donc pas quantifier.

**Proposition 3.2.4 (Réexpressions de la négligeabilité)**

1. *si $a$ est fini, $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in X,\ |x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x)| \leqslant \varepsilon|g(x)|.$$

2. *si $a = +\infty$, $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in X,\ x > B \Longrightarrow |f(x)| \leqslant \varepsilon|g(x)|.$$

3. *Si $g$ ne s'annule pas au voisinage de $a$, $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.*

Pour transférer toutes les propriétés connues des $o$ et $O$ pour les suites, on peut, comme pour les limites, utiliser un critère séquentiel :

**Théorème 3.2.5 (Critère séquentiel pour les $o$ et $O$)**

*Soit $f$ et $g$ définies sur un ensemble $X$ et $a \in \overline{X}$. Alors $f \underset{a}{=} O(g)$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $X$ tendant vers $a$, $f(x_n) = O(g(x_n))$. Un énoncé similaire tient pour la négligeabilité.*

**Propriétés 3.2.6 (Règles opératoires sur les $o$ et $O$)**

*Soit $a \in \overline{X}$.*

1. *Si $f \underset{a}{=} o(g)$, alors $f \underset{a}{=} O(g)$.*
2. *Si $f_1 \underset{a}{=} O(g)$ et $f_2 \underset{a}{=} O(g)$, alors $f_1 + f_2 \underset{a}{=} O(g)$.*
3. *Si $f_1 \underset{a}{=} o(g)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g)$, alors $f_1 + f_2 \underset{a}{=} o(g)$.*
4. *Si $f_1 \underset{a}{=} O(g_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} O(g_2)$, alors $f_1 f_2 \underset{a}{=} O(g_1 g_2)$.*
5. *Si $f_1 \underset{a}{=} O(g_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g_2)$, alors $f_1 f_2 \underset{a}{=} o(g_1 g_2)$.*

6. *Si* $f_1 \underset{a}{=} o(g_1)$ *et* $f_2 \underset{a}{=} o(g_2)$*, alors* $f_1 f_2 \underset{a}{=} o(g_1 g_2)$.
7. *Si* $f \underset{a}{=} O(g)$ *et* $g \underset{a}{=} O(h)$*, alors* $f \underset{a}{=} o(h)$.
8. *Si* $f \underset{a}{=} o(g)$ *et* $g =_a O(h)$*, alors* $f \underset{a}{=} o(h)$.
9. *Si* $f \underset{a}{=} O(g)$ *et* $g =_a o(h)$*, alors* $f \underset{a}{=} o(h)$.
10. *Si* $f \underset{a}{=} o(g)$ *et* $g =_a o(h)$*, alors* $f \underset{a}{=} o(h)$.
11. $f \underset{a}{=} g \cdot o(h)$ *si et seulement si* $f \underset{a}{=} o(gh)$.

*Soit* $Y \subset \mathbb{R}$*,* $h : Y \to X$ *et* $b \in \overline{Y}$ *tel que* $\lim_{y \to b} h(y) = a$.

12. *Si* $f \underset{a}{=} O(g)$*, alors* $f \circ h \underset{b}{=} O(g \circ h)$.
13. *Si* $f \underset{a}{=} o(g)$*, alors* $f \circ h \underset{b}{=} o(g \circ h)$.

Il faut donc garder en tête qu'à bien des points de vue, $o$ et $O$ se comportent comme des inégalités strictes et larges.
Enfin, comme pour les suites, on peut réexprimer les théorèmes de croissance comparée sous forme de négligeabilité.

**Théorème 3.2.7 (Croissances comparées)**
*On a :*

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall \beta \in \mathbb{R}_+^*,\quad \ln^\alpha(x) \underset{x \to +\infty}{=} o(x^\beta)$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall \beta \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall \gamma \in \mathbb{R}_+^*,\ x^\alpha \underset{x \to +\infty}{=} o(\exp(\gamma x^\beta))$.
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall \beta \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln^b(x) \underset{x \to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$
4. $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R},\ \alpha < \beta \Longrightarrow x^\alpha \underset{x \to +\infty}{=} o(x^\beta)$
5. $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R},\ \alpha < \beta \Longrightarrow x^\beta \underset{x \to 0}{=} x^\alpha$

## II.2 Équivalents

**Définition 3.2.8 (Équivalence)**
Soit $a \in \overline{X}$. On dit que $f$ est *équivalent à $g$ au voisinage de $a$* si $|f - g| \underset{a}{=} o(g)$.
On note $f \underset{a}{\sim} g$, ou $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$. Dans cette notation, $x$ est une variable muette, qu'il ne faut donc pas quantifier.

**Proposition 3.2.9**
*La relation* $\underset{a}{\sim}$ *est une relation d'équivalence.*

**Proposition 3.2.10 (Réexpression de l'équivalence)**
*Si $g$ ne s'annule pas sur un voisinage de $a$,* $f \underset{a}{\sim} g$ *si et seulement si* $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Comme pour la dominance et la négligeabilité, on peut se ramener au cas des suites par la propriété suivante :

**Théorème 3.2.11 (Critère séquentiel pour les équivalents)**

*Soit $f$ et $g$ définies sur un ensemble $X$, et $a \in \overline{X}$. Alors $f \underset{a}{\sim} g$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $X$ et tendant vers $a$, on a $f(x_n) \sim g(x_n)$.*

**Propriétés 3.2.12 (Règles opératoires sur les équivalents)**

1. *Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$, alors $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$.*
2. *Si $f \underset{a}{\sim} g$, et si $f$ ne s'annule pas sur un voisinage de $a$, alors $g$ non plus, et $\dfrac{1}{f} \underset{a}{\sim} \dfrac{1}{g}$.*
3. *Soit $h : Y \to X$ et $b \in \overline{Y}$ tel que $\lim\limits_{y\to b} h(y) = a$. Alors, si $f \underset{a}{\sim} g$, on a aussi $f \circ h \underset{b}{\sim} g \circ h$.*

**Avertissement 3.2.13**

1. **On ne somme pas des équivalents**.
2. **On ne compose pas par la gauche un équivalent**.

**Proposition 3.2.14 (Équivalents et limites)**

1. *Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors, si $f$ admet une limite, $g$ aussi, et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to b} g(x)$.*
2. *L'implication ci-dessus est une équivalence, sauf si $\lim\limits_{x\to a} f(x) \in \{0, -\infty, +\infty\}$.*

**Proposition 3.2.15 (Conservation du signe)**

*Si $f \equiv_a g$, alors $f$ et $g$ ont même signe au voisinage de $a$*

**Proposition 3.2.16 (Équivalents classiques)**

*Les équivalents suivants sont à connaire parfaitement.*

1. $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(x+a)^n \underset{x\to\pm\infty}{\sim} x^n$.
2. $\forall (a_0, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ *tel que* $a_d \neq 0$, $\quad a_d x^d + \cdots + a_0 \underset{x\to\pm\infty}{\sim} a_d x^d$.
3. $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$
4. $\mathrm{e}^x - 1 \underset{0}{\sim} x$
5. $\sin x \underset{0}{\sim} x$.
6. $\tan x \underset{0}{\sim} x$.
7. $\cos x - 1 \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$.
8. $\mathrm{Arcsin} x \underset{0}{\sim} x$
9. $\mathrm{Arctan}\, x \underset{0}{\sim} x$
10. $\dfrac{\pi}{2} - \mathrm{Arccos} x \underset{0}{\sim} x$
11. $\mathrm{sh}(x) \underset{0}{\sim} x$
12. $\mathrm{th}(x) \underset{0}{\sim} x$
13. $\mathrm{ch}(x) - 1 \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$
14. *Si* $a \neq 0$, $(1+x)^a - 1 \underset{0}{\sim} ax$.

De façon plus anectodique, mais pouvant parfois être utile (il faut surtout être capable de les retrouver) :

**Proposition 3.2.17 (D'autres équivalents)**

*1.* $\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$

*2.* $\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(x) \underset{1}{\sim} \sqrt{2(1-x)}$

*3.* $\operatorname{Arccos}(x) \underset{1}{\sim} \sqrt{2(1-x)}$.

# III Continuité en un point

## III.1 Définitions

Dans ce paragraphe, $f$ désigne une fonction de $X$ dans $\mathbb{R}$.

**Proposition/Définition 3.3.1 (Définition de la continuité par propositions équivalentes)**

Soit $a \in X$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $f$ admet une limite en $a$ (forcément égale à $f(a)$) ;

(ii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in X,\quad |x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ ;

(iii) pour tout voisinage $V$ de $f(a)$, il existe un voisinage $U$ de $a$ tel que $f(U) \subset V$.

(iv) pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $X$ tendant vers $a$, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $f(a)$.

Si l'une de ces propriétés est vérifiée, on dit que $f$ est continue en $a$.

**Proposition 3.3.2 (Restriction de l'ensemble source)**

*Si $f$ et $g$ coïncide sur un* voisinage *de $a$, $f$ est continue en $a$ si et seulement si $g$ est continue en $a$.*

**Avertissement 3.3.3**

Si $f$ et $g$ coïncident sur un intervalle $[a, b]$, la continuité de $f$ en $a$ ne suffit pas à obtenir la continuité de $g$ en $a$. Il est nécessaire que le domaine de coïncidence contienne un *ouvert* auquel appartient $a$.

**Exemples 3.3.4**

1. $f : x \mapsto c$ est continue en tout $a \in \mathbb{R}$.
2. $f : x \mapsto x$ est continue en tout $a \in \mathbb{R}$.
3. $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue en tout $a \in \mathbb{R}^*$.
4. $f : x \mapsto \sin x$ est continue en tout $a \in \mathbb{R}$.
5. $f : x \mapsto \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est discontinue en 0.

## III.2 Arithmétique de la continuité

Les règles usuelles sur les limites amènent directement :

**Proposition 3.3.5 (Opérations sur les fonctions continues)**

*Soit $f$ et $g$ deux fonctions de $X$ dans $\mathbb{R}$, et $a \in X$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.*

1. *Si $f$ est continue en $a$, alors $\lambda f$ est continue en $a$.*
2. *Si $f$ et $g$ sont continues en $a$, alors aussi $f + g$.*
3. *Si $f$ et $g$ sont continues en $a$, alors aussi $fg$.*
4. *Si $f$ et $g$ sont continues en $a$, et $g(a) \neq 0$, alors $g$ ne s'annule pas sur un voisinage de $a$, et $\frac{f}{g}$ est continue en $a$.*

**Proposition 3.3.6 (Composition de fonctions continues)**

*Soit $X, Y \subset \mathbb{R}$, et $f : X \to Y$, $g : Y \to \mathbb{R}$. Soit $a \in X$. Si $f$ est continue en $a$, et si $g$ est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en $a$.*

### III.3 D'autres exemples

1. $f : x \to x^n$ est continue en tout $a \in \mathbb{R}$.
2. $f : x \to x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ est continue en tout $a \in \mathbb{R}_+^*$.
3. $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en tout $a \in \mathbb{R}_+$.
4. $f : x \mapsto \cos x$ est continue en tout $a \in \mathbb{R}$.
5. $f : x \mapsto \tan x$ est continue en tout $a \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

## IV Continuité sur un intervalle

**Définition 3.4.1**

Soit $Y \subset X$ On dit que $f$ est continue sur $Y$ si $f$ est continue en tout point de $Y$.

### IV.1 Fonctions majorées, minorées ; extrema

**Définition 3.4.2**

Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction majorée. La borne supérieure de $f$ est le plus petit des majorants, qui existe d'après la propriété fondamentale de $\mathbb{R}$. On note $\sup\limits_{x \in X} f(x)$. De même pour la borne inférieur $\inf\limits_{x \in X} f(x)$.

**Définition 3.4.3**

1. On dit que $f$ admet un maximum absolu en $a \in X$ si $f(a) = \sup\limits_{x \in X} f(x)$ ; autrement dit, $f$ atteint sa borne supérieure en $a$.
2. On dit que $f$ admet un minimum absolu en $a \in X$ si $f(a) = \inf\limits_{x \in X} f(x)$.
3. $f$ admet un maximum (minimum) strict en $a$ si c'est le seul maximum (minimum) absolu de $f$.

**Définition 3.4.4**

On dit que $f$ admet un maximum local, ou relatif en $a$ s'il existe un voisinage $U$ de $a$ tel que $f_{|U}$ admette un maximum absolu en $a$. Autrement dit :

$$\exists \eta > 0, \quad \forall x \in X, \quad |x - a| < \eta \Longrightarrow f(x) \leqslant f(a).$$

On a une notion similaire de minimum local.

## IV.2 Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Dans ce qui suit, par convention, et dans un soucis d'unification des énoncés, $f(+\infty)$ désigne $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ dans le cas où cette limite existe, et de même pour $f(-\infty)$.

**Théorème 3.4.5 (TVI, version 1 : existence d'un zéro)**

*Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ d'extrémités $a$ et $b$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ (avec existence des limites dans le cas de bornes infinies). Alors, si $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$ (ou l'inverse), il existe $c \in ]a, b[$ tel que $f(c) = 0$*

**Avertissement 3.4.6**

Attention, $c$ n'a aucune raison d'être unique !

**Théorème 3.4.7 (TVI, version 2 : réalisation des valeurs intermédiaires)**

*Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$, et soit $M = \sup\limits_{x\in I} f(x)$ et $m = \inf\limits_{x\in X} f(x)$. Alors $f$ prend toutes les valeurs de l'intervalle $]m, M[$ : $\forall x_0 \in ]m, M[,\ \exists c \in I, f(c) = x_0$.*

**Théorème 3.4.8 (TVI, version 3 : image d'un intervalle)**

*L'image d'un intervalle quelconque par une fonction continue est un intervalle.*

## IV.3 Extrema des fonctions continues sur un intervalle fermé borné

**Théorème 3.4.9 (Fonction continue sur un segment)**

*Soit $I = [a, b]$ un segment (c'est-à-dire un intervalle* fermé borné*), et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $I$. Alors $f$ est bornée, et atteint ses bornes.*

**Corollaire 3.4.10**

*L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.*

## IV.4 Autour des fonctions monotones – Théorème de la bijection

**Théorème 3.4.11**

*Soit $I$ un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $f$ est injective si et seulement si $f$ est strictement monotone.*

**Théorème 3.4.12**

*Soit $I$ un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$ monotone. Si $f(I)$ est un intervalle, alors $f$ est continue*

Ce théorème constitue une réciproque du théorème des valeurs intermédiaires dans le cas où $f$ est monotone.

**Avertissement 3.4.13**

Le résultat peut être mis en défaut si $f$ n'est pas monotone, par exemple en considérant $x \mapsto f = x\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x) + (1-x)\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$.

**Définition 3.4.14**

Soit $A, B \subset \mathbb{R}$. Un homéomorphisme $f : A \to B$ est une application continue bijective dont la réciproque est continue.

**Théorème 3.4.15**

*(théorème de la bijection) Soit $I$ un intervalle d'extrémités $a$ et $b$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ strictement monotone et continue. Soit :*

$$\alpha = \lim_{x\to a} f(x) \qquad \text{et} \qquad \beta = \lim_{x\to b} f(x)$$

*(exitent car $f$ est monotone). Alors $f(I)$ est un intervalle d'extrémités $\alpha$ et $\beta$, et $f$ est un homéomorphisme de $I$ sur $f(I)$.*
*Plus précisément, la borne $\alpha$ de $f(I)$ est ouverte si et seulement la borne $a$ de $I$ est ouverte, et de même pour $\beta$.*

On affirme en particulier que si $f$ et une fonction continue strictement monotone, elle induit une bijection sur son image, et sa réciproque est également continue.

# 4 Dérivabilité

## I Dérivabilité en un point

### I.1 Définitions

Dans ce qui suit, on se donne une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle $I$ non réduit à un point.

**Définition 4.1.1 (Dérivabilité en un point)**
Soit $x_0 \in I$. On dit que $f$ est dérivable en $x_0$ si l'expression $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, définie sur $I \setminus \{x_0\}$, admet une limite finie lorsque $x$ tend vers $x_0$. On note alors :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

et on appelle $f'(x_0)$ la *dérivée de $f$ en $x_0$*.

**Remarques 4.1.2**

1. La dérivation est une notion *locale* et *non ponctuelle* ($f$ doit être défini sur un voisinage de $x_0$).
2. La dérivation est une notion *locale* et non *globale* (ne dépend que d'un voisinage quelconque de $x_0$, quel qu'il soit).

**Remarque 4.1.3 (Interprétation géométrique)**
La dérivée en $x_0$ est la pente de la tangente à la courbe de $f$ en $x_0$. La tangente est obtenue comme limite, au sens géométrique, des cordes entre le point de la courbe d'abscisse $x_0$ et un point d'abscisse $x$, tendant vers $x_0$.

**Remarques 4.1.4**

1. Dans la définition ci-dessus, $x_0$ peut être une des bornes de l'intervalle $I$.
2. On peut étendre la définition à une fonction définie sur un domaine $X$, étudiée en un point $x_0$ tel qu'il existe un voisinage $V$ de $x_0$ tel que $V \cap X$ soit un intervalle. La condition imposée permet d'éviter des cas exotiques du type $X = \mathbb{R}_- \cup \bigcup [\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}]$, de sorte que $f$ est soit définie sur tout un voisinage de $x_0$, soit localement seulement d'un côté de $x_0$, mais pas du tout de l'autre.
3. Certains auteurs définissent la dérivabilité en se plaçant sur un intervalle ouvert, de sorte que $f$ doivent être définie sur tout un voisinage de $x_0$, et non seulement d'un côté.

**Proposition 4.1.5 (Interprétation en terme de développement limité)**
*La fonction $f$, de valeur $a_0$ en $x_0$, est dérivable en $x_0$ de dérivée $a_1$, si et seulement si*

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + o(x - x_0)$$

*Cette expression constitue le* développement limité de $f$ *à l'ordre 1 au voisinage de $x_0$.*

Remarquez que la continuité de $f$ s'exprime par $f(x) \underset{x \to x_0}{=} f(x_0) + o(1)$ ; c'est le développement limité à l'ordre 0.

**Théorème 4.1.6 (Dérivable donc continue)**
*Si $f$ est dérivable en $x_0$, alors $f$ est continue en $x_0$.* ***La réciproque est fausse !***

**Définition 4.1.7 (Dérivabilité sur un intervalle)**
Soit $J$ un intervalle tel que et $J \subset I$. On dit que $f$ est *dérivable* sur $J$ si $f$ est dérivable en tout point de $J$.

**Avertissement 4.1.8**
Attention, il n'est pas équivalent de dire que $f$ est dérivable sur $J$ et que la restriction de $f$ est dérivable sur $J$. Ainsi, par exemple, si $I = [0, 2]$ et $J = [0, 1]$, la dérivabilité de $f$ sur $J$ stipule la dérivabilité de $f$ en 1 (donc la dérivabilité à la fois à gauche et à droite), alors que la dérivabilité de la restriction de $f$ à $[0, 1]$ n'impose que la dérivabilité à gauche en 1. Remarquez que les problèmes ont toujours lieu en des bornes fermées de $J$, qui ne sont pas des bornes de $I$. Ainsi, on pourrait contourner le problème en se restreignant à la dérivabilité sur des intervalles du type $I \cap U$, où $U$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

On généralise bien entendu ceci au cas de la dérivabilité sur une union d'intervalles.

## I.2 Dérivées à droite et à gauche

**Définition 4.1.9 (Dérivées à droite et à gauche)**
Soit $x_0 \in I$. On dit que $f$ est dérivable à droite en $x_0$ si l'expression $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite à droite lorsque $x$ tend vers $x_0$. On note alors :

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

De même pour la dérivée à gauche : en cas d''existence,

$$f'_g(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Évidemment, la première condition pour que la dérivée à droite existe est que cette limite ait un sens, donc que $x_0$ ne soit pas la borne supérieure de $I$.

**Remarques 4.1.10**

1. Si $X = [a, b]$, la dérivabilité à droite en $a$ équivaut à la dérivabilité en $a$. De même pour la dérivabilité à gauche en $b$. Généralisation immédiate au cas ou $a$ est la borne inférieure d'un des intervalles définissant $X$.

2. De manière générale, la dérivabilité à droite en $x_0$ équivaut à la dérivabilité en $x_0$ de la restriction de $f$ à $I \cap [x_0, +\infty[$.

**Proposition 4.1.11 (Caractérisation de la dérivabilité par $f'_g$ et $f'_d$)**

*. Soit $x_0 \in I$, non égal à une des bornes de $I$. Alors $f$ est dérivable en $x_0$ si et seulement si $f$ est dérivable à gauche et à droite en $x_0$, et $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$. Dans ce cas, $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.*

**Exemples 4.1.12**

1. $x \mapsto |\sin(x)|$
2. $x \mapsto |x|^3$.
3. $x \mapsto \lfloor x \rfloor$.

## I.3 Dérivées d'ordre supérieur – Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

**Définition 4.1.13 (Dérivée $n$-ième en un point)**

Soit $x_0 \in I$. On définit les dérivées d'ordre supérieur par récurrence sur $n$. Soit $n \geqslant 2$. On dit que $f$ est $n$ fois dérivable en $x_0$ si $f$ est $n-1$ fois dérivable sur un voisinage $U$ de $x_0$ et si la fonction dérivée $(n-1)$-ième est dérivable en $x_0$. La dérivée $n$-ième de $f$ en $x_0$ est alors la dérivée de la dérivée $(n-1)$-ième en $x_0$. On note $f^{(n)}(x_0)$ cette dérivée $n$-ième. Ainsi : $f^{(n)}(x_0) = f^{(n-1)'}(x_0)$.

**Remarque 4.1.14**

Pour pouvoir définir la dérivée $n$-ième de $f$ en $x_0$, il faut pouvoir dériver $f^{(n-1)}$ en $x_0$, et il faut donc que $f^{(n-1)}$ soit définie sur tout un voisinage de $x_0$ et non seulement en $x_0$.

**Définition 4.1.15 (Fonction $n$ fois dérivable sur $J$)**

Soit $J \subset I$ un intervalle. On dit que $f$ est dérivable $n$ fois sur $J$ si $f$ est dérivable $n$ fois en tout point de $J$. Cela définit alors une fonction $f^{(n)} : J \to \mathbb{R}$

**Définition 4.1.16 (Fonction de classe $\mathcal{C}^n$)**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, où $I$ est un intervalle, $n \in \mathbb{N}$. On dit que $f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$ si $f$ est $n$ fois dérivable sur $I$ et si la dérivée $n$-ième $f^{(n)}$ est continue sur $I$.

**Notation 4.1.17 ($\mathcal{C}^n(I)$, $\mathcal{D}^n(I)$)**

Soit $I$ un intervalle et $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{D}^n(I)$ l'ensemble des fonctions définies sur $I$ et $n$ fois dérivables sur $I$. On note $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions $n$ fois dérivables sur $I$ et de dérivée $n$-ième continue.

En particulier, $\mathcal{D}^0(I)$ est l'ensemble de toutes les fonctions définies sur $I$, $\mathcal{C}^0(I)$ est l'ensemble de toutes les fonctions continues sur $I$.

**Proposition 4.1.18**

*On a une chaîne d'inclusions :*

$$\cdots \subset \mathcal{C}^n(I) \subset \mathcal{D}^n(I) \subset \mathcal{C}^{n-1}(I) \subset \mathcal{D}^{n-1}(I) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^1(I) \subset \mathcal{D}^1(I) \subset \mathcal{C}^0(I) \subset \mathcal{D}^0(I).$$

**Définition 4.1.19 (Fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$)**

On dit que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I$ si $f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc si $f$ est infiniment dérivable. On note $\mathcal{C}^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I$.

Il revient au même de dire que $f$ est dans $\mathcal{D}^n(I)$ pour tout $I$.

## I.4 Règles opératoires pour les dérivations d'ordre 1

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Nous rappelons (et nous démontrons) :

**Proposition 4.1.20 (Règles pour les fonctions dérivables en un point)**

*Soit $f$ et $g$ deux fonctions de $I$ dans $\mathbb{R}$, et $x_0 \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\lambda$ et $\mu$ deux réels.*

1. *Si $f$ est dérivable en $x_0$, alors $\lambda f$ aussi et $(\lambda f)(x_0) = \lambda f(x_0)$.*
2. *Si $f$ et $g$ sont dérivables en $x_0$, alors $f+g$ aussi et $(f+g)(x_0) = f(x_0) + g(x_0)$.*
3. *Si $f$ et $g$ sont dérivables en $x_0$, $fg$ aussi et $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$*

**Corollaire 4.1.21 (Dérivation d'un produit de $n$ termes)**

*Soit $f_1, \dots, f_n : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Si $f_1, \dots, f_n$ sont dérivables en $x_0$, alors leur produit aussi, et :*

$$(f_1 \cdots f_n)' = \sum_{k=1}^{n} f_k'(x_0) \prod_{i \in [\![1,n]\!] \setminus \{k\}} f_i(x_0).$$

**Proposition 4.1.22 (Dérivation d'une composition)**

*Soit $I$ et $J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$, et $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0)$. Si $f$ est dérivable en $x_0$ et $g$ dérivable en $y_0$, alors $g \circ f$ est dérivable en $x_0$, et :*

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)g'(y_0) = f'(x_0) \cdot g' \circ f(x_0).$$

Pour établir la dérivabilité d'un quotient, nous utilisons le lemme suivant :

**Lemme 4.1.23**

*Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ tels que $g$ et $fg$ soient dérivables en $x_0$. Alors, si $g(x_0) \neq 0$, $f$ est dérivable en $x_0$.*

**Exemples 4.1.24**

1. $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable en tout $x \in \mathbb{R}^*$, de dérivée $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$.
2. $x \mapsto \frac{1}{x^n}$.

**Corollaire 4.1.25 (Dérivation d'un inverse)**

*Soit $f : I \to \mathbb{R}$, et $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) \neq 0$ et $f$ dérivable en $x_0$. Alors $\dfrac{1}{f}$ est dérivable en $x_0$ et*

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = \frac{-f'(x_0)}{f^2(x_0)}.$$

**Corollaire 4.1.26 (Dérivation par quotient)**
*Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$, et $x_0 \in I$ tel que $g(x_0) \neq 0$ et $f$ et $g$ dérivables en $x_0$. Alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en $x_0$ et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'g - fg'}{f^2}(x_0).$$

La dernière règle de dérivation que nous voyons est le cas des fonctions réciproques.

**Théorème 4.1.27 (Dérivation des fonctions réciproques)**
*Soit $I$ et $J$ deux intervalles, et soit $f$ une application bijective continue de $I$ dans $J$. Soit $x_0 \in I$, et $y_0 = f(x_0)$. Alors, si $f$ est dérivable en $x_0$, et si $f'(x_0) \neq 0$, alors $f^{-1}$ est dérivable en $y_0$, et :*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

**Proposition 4.1.28 (Tangente au graphe d'une réciproque)**
*Soit $f$ une fonction bijective et continue de $I$ dans $J$, dérivable en $x_0$, telle que $f'(x_0) \neq 0$. Si la tangente en $x_0$ à la courbe de $f$ est d'équation $y = ax + b$, alors la tangente en $f(x_0)$ à la courbe de $f^{-1}$ est d'équation $x = ay + b$.*

Cela ne fait que traduire la symétrie par rapport à l'axe d'équation $y = x$ entre la courbe d'une fonction et celle de sa réciproque.

## I.5 Règles opératoires pour les dérivations multiples

**Proposition 4.1.29 (Règles pour les fonctions $n$ fois dérivables en un point)**
*Soit $f$ et $g$ deux fonctions de $I$ dans $\mathbb{R}$, et $x_0 \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\lambda$ et $\mu$ deux réels.*

1. *Si $f$ est $n$ fois dérivable en $x_0$, alors $\lambda f$ aussi et $(\lambda f^{(n)})(x_0) = \lambda f^{(n)}(x_0)$.*
2. *Si $f$ et $g$ sont $n$ fois dérivables en $x_0$, alors $f + g$ aussi et $(f + g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) + g^{(n)}(x_0)$.*
3. *Si $f$ et $g$ sont $n$ fois dérivables en $x_0$, $fg$ aussi et*

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0)$$

   *(formule de Leibniz)*
4. *Si $f$ et $g$ sont $n$ fois dérivables en $x_0$ et si $g$ ne s'annule pas en $x_0$, alors $\frac{f}{g}$ est $n$ fois dérivable en $x_0$ (pas de formule simple)*

**Proposition 4.1.30 (Composition de fonctions $n$ fois dérivables)**
*Soit $I$ et $J$ deux intervalles, et $f$ une fonction de $I$ dans $J$, $g$ une fonction de $J$ dans $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$. Si $f$ est $n$ fois dérivable en $I$ et $g$ est $n$ fois dérivable en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est $n$ fois dérivable en $x_0$.*

**Remarque 4.1.31 (Formule de Faà di Bruno)**

Il existe une formule explicite pour la dérivée d'ordre $n$ d'une composition (formule de Faà di Bruno), mais cette formule est fort complexe. Pour le plaisir, on énonce :

$$(g \circ f)^{(n)} = \sum_{\substack{(m_1,\dots,m_n)\in\mathbb{N}^n \\ 1m_1+2m_2+\cdots+nm_n=n}} \frac{1}{m_1!m_2!\cdots m_n!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{f^{(k)}}{k!}\right)^{m_k} \times g^{(m_1+\cdots+m_n)} \circ f.$$

Vérifiez que pour pout $n = 1$, on retombe sur la formule connue...

**Corollaire 4.1.32 (Règles de stabilité dans $\mathcal{D}^n(I)$)**

*Soit $n \in \mathbb{N}^*$*

1. *L'ensemble $\mathcal{D}^n(I)$ est stable par combinaisons linéaires, produit et quotient par une fonction ne s'annulant pas.*
2. *Soit $f \in \mathcal{D}^n(I)$ à valeurs dans un intervalle $J$, et $g \in \mathcal{D}^n(J)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{D}^n(I)$*
3. *Soit $f \in \mathcal{D}^n(I)$, bijective de $I$ dans $J$, et telle que $f'$ ne s'annule pas sur $I$. Alors $f^{-1} \in \mathcal{D}^n(J)$.*

On a les mêmes règles pour la classe $\mathcal{C}^n$ :

**Corollaire 4.1.33 (Règles de stabilité dans $\mathcal{C}^n(I)$)**

*Soit $n \in \mathbb{N}$, ou $n = +\infty$.*

1. *L'ensemble $\mathcal{C}^n(I)$ est stable par combinaisons linéaires, produit et quotient par une fonction ne s'annulant pas.*
2. *Soit $f \in \mathcal{C}^n(I)$ à valeurs dans un intervalle $J$, et $g \in \mathcal{C}^n(J)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{C}^n(I)$*
3. *Soit $f \in \mathcal{C}^n(I)$, bijective de $I$ dans $J$, et telle que, si $n \neq 0$, $f'$ ne s'annule pas sur $I$. Alors $f^{-1} \in \mathcal{C}^n(J)$.*

# II Propriétés des fonctions dérivables sur un intervalle

La dérivabilité d'une fonction est une hypothèse de régularité assez forte (la fonction ne peut pas être localement « hérissée »). La dérivabilité d'une fonction sur tout un intervalle a de ce fait des implications assez fortes. Tout d'abord, comme vous le savez déjà, la dérivabilité sur un intervalle permet une étude facile des variations des fonctions, et donc des extremas. Nous commençons par ce premier point, les rapports avec les variations nécessitant un peu plus de technique.

## II.1 Extremum d'une fonction

Soit $I$ un intervalle, $x_0 \in I$, et $f$ une fonction définie sur $I$.

**Définition 4.2.1 (Minimum, maximum global)**

1. On dit que $f$ admet un minimum global en $x_0$ si pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant f(x_0)$.
2. On dit que $f$ admet un maximum global en $x_0$ si pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant f(x_0)$.

**Définition 4.2.2 (Minimum, maximum global strict)**

1. On dit que $f$ admet un minimum global strict en $x_0$ si pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$, $f(x) > f(x_0)$.
2. On dit que $f$ admet un maximum global strict en $x_0$ si pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$, $f(x) < f(x_0)$.

Ainsi, $x_0$ est le seul point de $I$ en lequel $f$ admet son minimum (ou maximum)

**Définition 4.2.3 (Minimum, maximum local)**

1. On dit que $f$ admet un minimum local en $x_0$ s'il existe un voisinage $U$ de $x_0$ tel que pour tout $x \in I \cap U$, $f(x) \geqslant f(x_0)$.
2. On dit que $f$ admet un maximum local en $x_0$ s'il existe un voisinage $U$ de $x_0$ tel que pour tout $x \in I \cap U$, $f(x) \leqslant f(x_0)$.

Le premier résultat que nous donnons reliant les extrema et la dérivée est le suivant, donnant une condition pour avoir un extremum.

**Théorème 4.2.4 (CN du premier ordre pour l'existence d'un extremum)**

*Soit $I$ un intervalle* ouvert *et $x_0 \in I$. Si $f$ est dérivable en $x_0$ et admet un extremum local en $x_0$, alors $f'(x_0) = 0$.*

**Avertissement 4.2.5**

Ce n'est pas vrai si $I$ n'est pas ouvert et $x_0$ est une borne de $I$.

Le théorème précédent motive la définition suivante :

**Définition 4.2.6 (Point critique)**

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $I$ et $x_0 \in I$. On dit que $x_0$ est un point critique de $f$ si $f'(x_0) = 0$.

Ainsi, si une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $I$ admet en $x_0$ un extremum, alors $x_0$ est un point critique de $f$.

**Avertissement 4.2.7**

Il ne s'agit pas d'une condition suffisante, comme le montre l'exemple de ......

La notion de point critique nécessite de se placer sur un intervalle ouvert, ou tout au moins de considérer des points $x_0$ qui ne soient pas au bord de l'intervalle $I$. On parle de *point intérieur* de $I$. Plus généralement, l'intérieur d'un ensemble $X$ est l'ensemble des points de $X$ dont $X$ est un voisinage. Il s'agit du plus grand ouvert contenu dans $X$.

## II.2 Théorème de Rolle

Graphiquement, le théorème suivant est une évidence :

**Théorème 4.2.8 (Rolle)**

*Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors, si $f(a) = f(b)$, il existe $c \in ]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

On peut étendre le théorème de Rolle de plusieurs façons. Les résultats suivants sont des exercices classiques (à savoir démontrer à la demande, il ne s'agit pas de résultats du cours) :

**Corollaire 4.2.9 (Rolle sur un intervalle infini d'un côté, HP)**
*Soit* $f : [a, +\infty[ \to \mathbb{R}$ *continue, dérivable sur* $]a, +\infty[$, *et telle que* $f(a) = \lim_{x \to +\infty} f(x)$. *Alors il existe* $c \in ]a, +\infty[$ *tel que* $f'(c) = 0$.

**Corollaire 4.2.10 (Rolle sur $\mathbb{R}$, HP)**
*Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et telle que* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x)$. *Alors il existe* $c \in \mathbb{R}$ *tel que* $f'(c) = 0$.

**Corollaire 4.2.11 (Rolle en cascade, HP)**
*Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, *continue sur* $[a, b]$, $n$ *fois dérivable sur* $]a, b[$, *et telle qu'il existe* $n + 1$ *réels* $a \leqslant a_0 < a_1 < \cdots < a_n \leqslant b$ *tels que* $f(a_0) = f(a_1) = \cdots = f(a_n)$. *Alors il existe* $c \in ]a, b[$ *tel que* $f^{(n)}(c) = 0$.

**Note Historique 4.2.12**
- Michel Rolle (1659-1719) démontre une version purement algébrique de ce théorème dans le cadre des polynômes. Il ne possède même pas à ce moment-là de la notion de dérivée : il recherche des encadrements de racines d'un polynôme en constatant qu'elles sont séparées par les racines non nulles du polynôme obtenu en multipliant chaque monôme par son degré. Cette construction purement algébrique n'est rien d'autre, après simplification par $X$, que la dérivée du polynôme...
- Lagrange, puis Cauchy, démontrent le théorème de Rolle dans une version plus générale, en établissant d'abord le théorème des accroissements finis, puis en utilisant le TVI sur $f'$ : ils utilisent donc une hypothèse supplémentaire, la continuité de $f'$.
- C'est Pierre-Ossian Bonnet (1819-1892) qui propose le point de vue actuel, permettant de se dispenser de l'hypothèse de continuité, et simplifiant considérablement la preuve du théorème des accroissements finis, le voyant comme une conséquence du théorème de Rolle plutôt que l'inverse.

## II.3 Théorème des accroissements finis

Une première conséquence importante du théorème de Rolle est :

**Théorème 4.2.13 (Théorème des accroissements finis, TAF)**
*Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continue sur* $[a, b]$, *dérivable sur* $]a, b[$. *Alors il existe* $c \in ]a, b[$ *tel que :*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

**Remarque 4.2.14 (Interprétation géométrique)**
Il existe une tangente parallèle à la corde.

Remarquez que le TAF est une généralisation du théorème de Rolle. On a même une équivalence entre les deux propriétés, le TAF étant simplement obtenu du théorème de Rolle par rotation.

**Corollaire 4.2.15 (Inégalité des accroissements finis, IAF)**
*Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continue sur* $[a, b]$, *dérivable sur* $]a, b[$. *Soit* $M$ *un majorant de* $f'$ *sur* $]a, b[$, *et* $m$ *un minorant de* $f'$ *sur* $]a, b[$. *Alors :*

$$m(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b - a).$$

*En particulier, si $M$ est un majorant de $|f'|$, alors $|f(b) - f(a)| \leqslant M|b - a|$.*

Attention à bien considérer $a < b$ pour le premier encadrement, sans les valeurs absolues. En revanche, le rôle symétrique de $a$ et $b$ dans l'inégalité $|f(b) - f(a)| \leqslant M|b - a|$ nous dit qu'on peut s'affranchir de l'hypothèse $a < b$ pour utiliser cette inégalité.

L'inégalité des accroissements finis nous donne un lien entre des propriétés de dérivabilité et la propriété définissant les fonctions lipschitziennes :

**Définition 4.2.16 (Fonctions lipschitziennes)**

Soit $k \in \mathbb{R}_+$ et $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$. On dit que $f$ est $k$-lipschitzienne si pour tout $(x, y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$. On dit que $f$ est lipschitzienne s'il existe $k \geqslant 0$ telle que $f$ soit $k$-lipschitzienne.

**Corollaire 4.2.17**

*Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$. Si $f'$ est bornée sur $I$, alors $f$ est lipschitzienne sur $I$. Plus précisément, si $k$ est un majorant de $|f'|$, alors $f$ est $k$-lipschitzienne. La réciproque est vraie.*

En revanche, il peut exister des fonctions lipschitziennes non dérivables.

**Note Historique 4.2.18**

La terminologie provient du nom du mathématicien allemand Rudolf Lipschitz (1832-1903). Ces fonctions interviennent notamment dans les problèmes d'existence de solutions de certaines équations différentielles (théorème de Cauchy-Lipschitz).

Un type particulièrement important de fonction lipschitzienne est :

**Définition 4.2.19 (Fonction contratante)**

Une fonction contractante sur un intervalle $I$ est une fonction $f$ qui soit $k$-lipschitzienne, pour un réel $k \in [0, 1[$

Par exemple, les fonctions vérifiant $|f'| \leqslant M < 1$ sur $I$ sont contractante. En est-t-il de même si on a juste $|f'| < 1$ sur $I$ ? Donner une condition sur l'intervalle $I$ pour que ce soit le cas.

Les fonctions contractantes ont un rôle important dans l'étude des systèmes dynamiques discrets (*i.e.* les suites définies par une récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$). En effet :

**Théorème 4.2.20 (Systèmes dynamiques donnés par une fonction contractante, HP)**

*Soit $f$ une fonction définie sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, et $I$ un intervalle stable par $f$ tel que $f$ soit contractante sur $I$. Soit $(u_n)$ une suite vérifiant la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, et telle qu'il existe $n_0$ tel que $u_{n_0} \in I$. Alors $(u_n)$ converge dans $\mathbb{R}$.*

**Corollaire 4.2.21 (Convergence en un point fixe attractif, HP)**

*Soit $f$ une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un sous-ensemble $X$ de $\mathbb{R}$, et $c$ un point fixe de $f$, intérieur à $X$, tel que $|f'(c)| < 1$, et soit $(u_n)$ vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors il existe un voisinage $U$ de $c$ tel que s'il existe $n_0$ vérifiant $u_{n_0} \in U$, alors $(u_n)$ converge vers $c$. Un tel point fixe est appelé attractif.*

De façon opposée, si sous les mêmes conditions, on a $|f'(c)| > 1$, la suite $(u_n)$ ne peut converger vers $c$ que si elle est stationnaire (donc égale à $c$ à partir d'un certain rang). On parle de *point fixe répulsif.*

## II.4 Variations des fonctions dérivables

Le théorème suivant, que vous connaissez bien, est intuitivement évident, si on fait le rapprochement avec les pentes des tangentes. Son aspect local provient de façon immédiate de la définition de la dérivée. Le passage du local au global peut se faire par des moyens directs (mais c'est un peu fastidieux). Il découle de façon immédiate du théorème des accroissements finis.

**Théorème 4.2.22 (Caractérisation par la dérivée de la variation des fonctions)**
*Soit $f : X \to \mathbb{R}$, et $I$ un* intervalle *tel que $f$ est continue sur $I$ et dérivable sur $I \setminus X$ (où $X$ est fini). Alors :*

1. *$f$ est croissante sur $I$ si et seulement si pour tout $x \in I \setminus X$, $f'(x_0) \geqslant 0$.*
   *Si cette inégalité est stricte sauf en un nombre fini de points, alors $f$ est strictement croissante.*
2. *$f$ est décroissante sur $I$ si et seulement si pour tout $x \in I \setminus X$, $f'(x_0) \leqslant 0$.*
   *Si cette inégalité est stricte sauf en un nombre fini de points, alors $f$ est strictement décroissante.*

**Corollaire 4.2.23 (Caractérisation des fonctions constantes)**
*Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur $I$, dérivable sur $I \setminus X$ (où $X$ est fini). Alors $f$ est constante si et seulement si pour tout $x \in I \setminus X$, $f'(x) = 0$.*

## II.5 Application à l'étude des primitives

**Définition 4.2.24 (Primitive)**
Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, et $f : I \to \mathbb{R}$. Une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ est appelée *primitive de $f$* si et seulement si $F$ est dérivable sur $I$ et pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

**Théorème 4.2.25 (Unicité des primitives à constante d'intégration près)**
*Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$ admettant au moins une primitive. Alors, si $F_1$ et $F_2$ sont deux primitives de $f$, elles diffèrent d'une constante.*

**Corollaire 4.2.26**
*Soit $I$ un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ et $b \in \mathbb{R}$. Alors, si $f$ admet une primitive, $f$ admet une unique primitive $F$ telle que $F(a) = b$.*

En admettant provisoirement certaines propriétés des intégrales, qu'on établira plus tard, on montre le résultat suivant, à la base du calcul intégral :

**Théorème 4.2.27 (Dérivation d'une intégrale, ou expression intégrale d'une primitive)**
*Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $c \in I$, et Soit $f : I \to \mathbb{R}$, continue (donc intégrable) sur $I$. Posons :*

$$\forall x \in I, \quad g(x) = \int_c^x f(t)\ \mathrm{d}t.$$

*Alors $g$ est bien définie et dérivable sur $I$, et pour tout $x \in I$, $g'(x) = f(x)$.*

**Corollaire 4.2.28 (Existence des primitives des fonctions continues)**
*Soit $I$ un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $I$. Alors $f$ admet au moins une primitive sur $I$.*

On déduit notamment du théorème précédent le théorème fondamental du calcul des intégrales, théorème que nous avions donné sans preuve dans un chapitre antérieur :

**Théorème 4.2.29 (Théorème fondamental du calcul des intégrales, Newton)**
*Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et $F$ une primitive de $f$ sur $[a, b]$. Alors*

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Appliqué à $f'$, donc une primitive est $f$, on obtient en particulier le résultat suivant, qui a parfois son utilité :

**Corollaire 4.2.30 (Expression intégrale de $f$)**
*Soit $f$ une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $I$, et soit $c \in I$. Alors*

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(c) + \int_c^x f'(t)\ \mathrm{d}t.$$

Remarquez que ce résultat est vrai pour tout type d'intervalle $I$.

## II.6 Limites de dérivées et prolongements de fonctions dérivables

Une conséquence importante du théorème des accroissements finis est :

**Théorème 4.2.31 (Théorème de la limite de la dérivée)**
*Soit $f$ une fonction définie sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b]$. Si $f'$ admet (dans $\overline{\mathbb{R}}$) une limite en $a$ alors*

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^+} f'(x).$$

*En particulier, si $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x)$ est finie, $f$ est dérivable en $a$ et $f'(a) = \lim\limits_{x \to a^+} f'(x)$.*

Adaptation immédiate pour la borne $b$ !

**Théorème 4.2.32 (Théorème de la classe $\mathcal{C}^n$ par prolongement)**
*Soit $I$ un intervalle et $x_0 \in I$. Soit $f$ une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I \setminus \{x_0\}$. Si pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f^{(k)}$ admet une limite finie en $x_0$, alors $f$ peut être prolongée sur $I$ en une fonction $\tilde{f}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$. De plus, on aura alors :*

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \tilde{f}^{(k)}(x_0) = \lim_{x \to x_0} f^{(k)}(x).$$

On a en fait même beaucoup mieux que cela (mais ce n'est pas au programme semble-t-il...)

**Théorème 4.2.33 (Théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$, HP)**
*Soit $I$ un intervalle et $x_0 \in I$. Soit $f$ une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I \setminus \{x_0\}$. Si $f^{(n)}$ admet une limite finie en $x_0$, alors $f$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$.*

## III Dérivabilités de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$

Les définitions (par les limites) des dérivées (totales, à gauche, à droite) s'adaptent pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, les limites ayant été définies dans ce cadre. Les différentes règles de calcul s'adaptent également. Attention cependant à la composition (on peut composer par une fonction de la variable complexe, mais on n'a pas défini de notion de dérivée dans ce cadre) : seul le cas de la composition par l'exponentielle complexe est à connaître (voir un chapitre antérieur).
Il est important de se souvenir de la caractérisation suivante :

**Théorème 4.3.1 (Caractérisation de la dérivabilité par les parties réelles et imaginaires)**
*Soit $f : I \to \mathbb{C}$, où $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f_1$ et $f_2$ de $I$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f = f_1 + \mathrm{i}\, f_2$. Alors $f$ est dérivable sur $I$ si et seulement si $f_1$ et $f_2$ le sont, et dans ce cas,*

$$f' = f_1' + \mathrm{i}\, f_2'.$$

Autrement dit, la linéarité de la dérivation vaut aussi pour des combinaisons linéaires à coefficients complexes.
Certains résultats relatifs aux fonctions dérivables sur un intervalle se généralisent également au cas de fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, mais pas tous cependant. Ainsi, par exemple les résultats liés à l'étude d'extrema ou de variations n'ont pas de sens dans ce cadre, car ils nécessiteraient la donnée d'une relation d'ordre sur $\mathbb{C}$. En particulier :

- Le théorème de Rolle, dont la démonstration repose sur l'existence d'un extremum, n'a pas d'équivalent pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$. On pourra en revanche, sous les conditions idoines, l'appliquer à la partie réelle $f_1$ et à la partie imaginaire $f_2$, trouvant ainsi deux réels $c_1$ et $c_2$ tels que $f_1'(c_1) = 0$ et $f_2'(c_2) = 0$, mais comme $c_1$ et $c_2$ n'ont aucune raison d'être égaux, on ne pourra pas en conclure l'existence d'un réel $c$ tel que $f'(c) = 0$. Pensez à une fonction décrivant, à vitesse homogène, un cercle dans $\mathbb{C}$ ; la dérivée sera un vecteur de norme constante, tangent au cercle, donc ne s'annulant pas. Pourtant, si entre $a$ et $b$, on fait un tour complet, on aura $f(a) = f(b)$.
- Le théorème des accroissements finis, dont la démonstration repose sur le théorème de Rolle, entre également en défaut. D'ailleurs, le théorème de Rolle n'est qu'un cas particulier du théorème des accroissements finis. Là encore, sous les conditions idoines, on pourra trouver des réels $c_1$ et $c_2$ tels que $(f_1(b) - f_1(a)) = f_1'(c_1)(b - a)$ (pour la partie réelle) et $(f_2(b) - f_2(a)) = f_2'(c_1)(b - a)$ (pour la partie imaginaire), mais $c_1$ et $c_2$ étant en général distincts, on ne pourra, sauf cas exceptionnels, pas trouver de réel $c$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

De façon remarquable cependant, l'inégalité des accroissements finis reste vraie :

**Théorème 4.3.2 (IAF pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$)**
*Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, et $M$ un réel tel que $|f'| \leqslant M$ sur $]a, b[$. Alors*

$$|f(b) - f(a)| \leqslant M|b - a|.$$

En particulier, les théorèmes de prolongement restent vrais.

# IV Fonctions convexes (Hors-programme)

## IV.1 Notion de convexité

**Définition 4.4.1 (Fonctions convexes et concaves, définition générale)**
Soit $I$ un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que $f$ est *convexe* sur $I$ si :

$$\forall (x,y) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0,1],\quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

On dit que $f$ est *concave* sur $I$ si :

$$\forall (x,y) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0,1],\quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Interprétation géométrique : $f$ est convexe si la courbe reste sous les cordes.

## IV.2 Étude de la dérivabilité des fonctions convexes

**Proposition 4.4.2 (Caractérisation de la convexité par le taux d'accroissement)**
*Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et pour tout $u \in I$, soit $F_u : I \setminus \{u\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :*

$$\forall t \in I \setminus \{u\},\quad F_u(t) = \frac{f(t) - f(u)}{t - u}.$$

*Alors, $f$ est convexe si et seulement si pour tout $u \in I$, la fonction $F_u$ est croissante.*

**Théorème 4.4.3 (Dérivabilité des fonctions convexes)**
*Soit $I$ un intervalle* ouvert, *et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors $f$ est dérivable à droite et à gauche en tout point de $I$, et :*

1. $\forall x \in I,\quad f'_g(x) \leqslant f'_d(x).$ ;
2. $\forall (x,y) \in I^2,\ x < y \Longrightarrow f'_d(x) \leqslant f'_g(y)$ ;
3. *$f'_g$ et $f'_d$ sont croissantes sur $I$*

**Corollaire 4.4.4 (Continuité des fonctions convexes)**
*Soit $I$ un intervalle ouvert, et $f$ convexe sur $I$. Alors $f$ est continue sur $I$.*

**Remarque 4.4.5**
Le théorème et son corollaire sont faux si on ne suppose pas que $I$ est ouvert.

**Proposition 4.4.6 (Position de la courbe par rapport aux tangentes)**
*Soit $I$ un intervalle ouvert et $x_0 \in I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe sur $I$. Puisque $f$ est dérivable à gauche et à droite, sa courbe admet une tangente à gauche et une tangente à droite en $x_0$. Alors la courbe de $f$ est au-dessus de sa tangente à gauche, et au-dessus de sa tangente à droite.*

**Remarque 4.4.7**
Les résultats ci-dessus se transcrivent évidemment au cas de fonctions concaves. Dans ce cas, les dérivées à droite et à gauche sont décroissantes.

## IV.3 Caractérisation de la convexité par les dérivées

**Théorème 4.4.8 (Caractérisation des fonctions convexes dérivables)**
*Soit $I$ un intervalle ouvert, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $I$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

*(i) $f$ est convexe ;*

*(ii) $f'$ est croissante ;*

*(iii) la courbe de $f$ se trouve au-dessus de toutes ses tangentes.*

**Corollaire 4.4.9 (Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables)**
*Soit $I$ un intervalle ouvert, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $I$. Alors $f$ est convexe si et seulement si pour tout $x \in I$, $f''(x) \geqslant 0$.*

**Exemples 4.4.10**

1. $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$ ;
2. $x \mapsto \ln x$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ ;
3. $x \mapsto \sin x$ est concave sur chacun des intervalles $]2k\pi, (2k+1)\pi[$ et convexe sur chacun des intervalles $](2k-1)\pi, 2k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$.

On déduit de ces exemples les inégalités suivantes, obtenues en considérant la position des courbes par rapport à leur tangente en 0 :

**Exemples 4.4.11**

1. $\forall x \in ]-1, +\infty[,\ \ln(1+x) \leqslant x$ ;
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$ ;
3. $\forall x \geqslant 0, \sin x \leqslant x$ et $\forall x \leqslant 0, \sin x \geqslant x$.

# 5

# Approximations polynomiales

## I Formules de Taylor

Dans toute cette section, $f$ désigne une fonction d'un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, et $x_0 \in I$.

### I.1 Développement de Taylor

But : étant donné $n$, définir un polynôme $P$ de degré $n$ qui approche au mieux $f$ au voisinage d'un point $x_0 \in I$. Tout d'abord, la valeur au point doit être la même : $P(x_0) = f(x_0)$. Ensuite, les deux courbes doivent être tangentes, ce qui impose que $P'(x_0) = f'(x_0)$. La variation des tangentes au voisinage de $x_0$ doit ensuite être la plus proche possible, ce qui impose que $P''(x_0) = f''(x_0)$. Intuitivement, on en déduit que le meilleur polynôme de degré $n$ approchant la courbe au voisinage de $x_0$ vérifie donc les conditions :

$$P(x_0) = f(x_0) \qquad P'(x_0) = f'(x_0) \qquad \dots \qquad P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0),$$

à condition bien sûr que ces dérivées de $f$ soient définies. On dit que les courbes de $P$ et $f$ sont *tangentes à l'ordre $n$* en $x_0$.

**Définition 5.1.1 (Développement de Taylor de $f$)**

Soit $f$ une fonction admettant en $x_0$ une dérivée d'ordre $n$. Alors un *développement de Taylor* de $f$ en $x_0$ à l'ordre $n$ est un polynôme $P$ de degré au plus $n$ vérifiant les conditions :

$$P(x_0) = f(x_0), \quad P'(x_0) = f'(x_0), \quad \dots\ , \quad P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

donc un polynôme dont la courbe est tangente à l'ordre $n$ à celle de $f$ en $x_0$.

**Théorème 5.1.2 (Existence, unicité et expression du développement de Taylor de $f$)**

*Soit $f$ une fonction $n$ fois dérivable en $x_0$. Alors le développement de Taylor de $f$ en $x_0$ à l'ordre $n$ existe, est unique, et est donné explicitement par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{k!} \cdot f^{(k)}(x_0).$$

**Remarque 5.1.3**

Le développement de Taylor à l'ordre 1 au voisinage de $x_0$ n'est autre que l'expression de la droite tangente à la courbe de $f$ en $x_0$. Les développements de Taylor sont donc à voir comme une généralisation polynomiale de la droite tangente, aux ordres supérieurs.

**Définition 5.1.4 (Reste de Taylor à l'ordre $n$)**

Si $f$ admet en $x_0$ une dérivée d'ordre $n$, on note $R_n$ la différence entre $f$ et son développement de Taylor :

$$\forall x \in I, \quad R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \cdot f^{(k)}(x_0).$$

$R_n$ est appelé *reste de Taylor à l'ordre $n$ de $f$ au point $x_0$*.
On note parfois $R(x, x_0)$ pour indiquer la dépendance vis-à-vis du point $x_0$.

L'objet des formules de Taylor est d'étudier ce reste. Cela a pour but d'estimer l'erreur faite en approchant $f$ par son développement de Taylor. Notamment, si $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I$, est-ce qu'en faisant tendre $n$ vers $+\infty$, le développement de Taylor tend vers $f$ ?

**Proposition/Définition 5.1.5 (Fonction développable en série de Taylor)**

Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I$. Si pour tout $x \in I$, $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$, alors :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

Dans ce cas, on dit que $f$ *est développable en série de Taylor au point $x_0$*.

**Exemples 5.1.6**

1. Dans la suite, nous donnons les développements des fonctions usuelles en séries de Taylor au voisinage de points particuliers. On pourrait montrer qu'elles sont développables en séries de Taylor (au moins localement) au voisinage de tout point.
2. Il existe des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage d'un point $x_0$, qui ne sont développables en série de Taylor sur aucun voisinage de $x_0$, par exemple la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}}$, prolongée en 0 par $f(0) = 0$, étudiée au voisinage de 0.

Les trois formules suivantes donnent trois évaluations du reste de Taylor, plus ou moins précises suivant que les hypothèses sont plus ou moins fortes. On commence par la moins précise des formules de Taylor, aussi celle qui demande le moins d'hypothèses.

## I.2 Formule de Taylor-Young

**Théorème 5.1.7 (Formule de Taylor-Young à l'ordre $n$ au point $x_0$)**

*Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f^{(n)}(x_0)$ existe. Alors, au voisinage de $x_0$ :*

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n).$$

Pour démontrer ce théorème, nous utilisons le lemme suivant :

**Lemme 5.1.8 (Primitivation d'un $o$)**

*Soit $g$ une fonction définie et dérivable au voisinage de $x_0$, telle que au voisinage de $x_0$, $g'(x) = o((x-x_0)^{n-1})$. Alors, au voisinage de $x_0$, $g(x) - g(x_0) \underset{x\to x_0}{=} o((x-x_0)^n)$.*

**Remarques 5.1.9**

1. La formule de Taylor-Young ne nous donne qu'une information locale, au voisinage de $x_0$. En aucun cas elle ne peut être utilisée pour une étude globale.
2. L'hypothèse donnée est minimaliste (pas plus que la simple existence du développement de Taylor). Cependant, l'hypothèse officiellement au programme est un peu plus forte ($f$ de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de $x_0$)
3. La formule de Taylor-Young fournit ce qu'on appelle le *développement limité de* $f$ au voisinage de $x_0$ à l'ordre $n$.

La formule suivante, contrairement à la formule de Taylor-Young, donne une information globale, mais dépendant d'une inconnue $c$ que l'on contrôle mal. L'information est donc plus précise que dans la formule de Taylor-Young, puisqu'elle est globale. En contrepartie, on a besoin d'hypothèses plus fortes.

## I.3 Formule de Taylor-Lagrange

**Théorème 5.1.10 (Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n$ au point $a$, évaluée en $b$, HP)**

*Soit $a < b$ deux réels, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$, et $n + 1$ fois dérivable sur $]a, b[$. Alors :*

$$\exists c \in ]a, b[, \quad f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Cette formule s'adapte au cas où $b < a$ sans changement d'expression.

**Remarque 5.1.11**

La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 0 est exactement la formule des accroissements finis.

**Corollaire 5.1.12 (Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $n$ au point $a$)**

*Sous les mêmes hypothèses, et l'hypothèse supplémentaire que $m \leqslant f^{(n+1)} \leqslant M$ sur $]a, b[$, on a (pour $a < b$) :*

$$\frac{m(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \leqslant \frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

*En particulier, si $|f^{(n+1)}| \leqslant M$ sur $]a, b[$, on a :*

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leqslant \frac{M|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

*Cette dernière inégalité est également vraie si $b < a$.*

**Remarque 5.1.13**

1. La formule de Taylor-Lagrange (et même uniquement l'inégalité) implique la formule de Taylor-Young sous les hypothèses plus restrictives données dans ce paragraphe.
2. Seule l'inégalité de Taylor-Lagrange est au programme, sous des hypothèses plus fortes ($f$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$). Sous cette hypothèse, elle est conséquence de la formule de Taylor avec reste intégrale ci-dessous.

La dernière formule de Taylor donne une expression exacte du reste, ne dépendant d'aucun paramètre existentiel. Étant la plus précise, c'est également celle qui nécessite les hypothèses les plus fortes. Comme la formule de Taylor-Lagrange, et contrairement à la formule de Taylor-Young, c'est une formule globale et non locale.

### I.4 Formule de Taylor avec reste intégral

Nous avons déjà démontré, avec le théorème d'intégration par parties itérées, la dernière des formules de Taylor :

**Théorème 5.1.14 (Formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $n$ au point $a$)**
*Soit $a < b$, et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$. Alors :*

$$\forall t \in [a,b], \quad f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(t-a)^k}{k!} \cdot f^{(k)}(a) + \int_0^t \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) \, \mathrm{d}x.$$

Cette formule se généralise bien entendu au cas où $b < a$ ; il n'y a dans ce cas qu'à inverser les bornes des intervalles.

**Remarque 5.1.15**
L'inégalité de Taylor-Lagrange (pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^{n+1}$) est conséquence immdiate de la formule avec reste intégrale. Donc également la formule de Taylor-Young.

## II Formules de Taylor pour les fonctions usuelles

### II.1 Exponentielle

**Proposition 5.2.1 (Développement limité de l'exponentielle)**
*La formule de Taylor-Young à l'ordre $n$ au point $0$ de l'exponentielle donne l'égalité suivante, au voisinage de $0$ :*

$$\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

L'inégalité de Taylor-Lagrange permet de montrer :

**Théorème 5.2.2 (Développement en série de l'exponentielle)**
*La fonction exponentielle est développable en série de Taylor au point $0$ sur $\mathbb{R}$, et :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

*On désigne cette série sous le nom de série exponentielle.*

### II.2 Logarithme

**Proposition 5.2.3 (Développement limité du logarithme)**
*La formule de Taylor-Young à l'ordre $n$ au point $0$ de $x \mapsto \ln(1+x)$ donne l'égalité suivante, au voisinage de $0$ :*

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} + o(x^n).$$

La formule de Taylor avec reste intégral permet d'obtenir :

**Proposition 5.2.4 (Développement en série du logarithme)**
*La fonction logarithme $x \mapsto \ln(1+x)$ est développable en série de Taylor au point $0$ sur l'intervalle $]-1,1]$, et :*

$$\forall x \in ]-1,1], \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}.$$

## II.3 Fonctions trigonométriques

**Proposition 5.2.5 (Développement limité de sin et cos)**
*Les formules de Taylor-Young au point $0$ pour le sinus (à l'ordre $2n+2$) et pour le cosinus (à l'ordre $2n+1$) donnent, au voisinage de $0$ :*

$$\sin x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \qquad \text{et} \qquad \cos x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}).$$

**Proposition 5.2.6 (Développement en série de sin et cos)**
*Le sinus et le cosinus sont développables en séries de Taylor en $0$, sur $\mathbb{R}$, et :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{et} \qquad \cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

**Remarque 5.2.7**
On en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{\mathrm{i}\,x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\mathrm{i}\,x)^n}{n!},$$

ainsi la série exponentielle converge aussi vers l'exponentielle pour un paramètre imaginaire pur.

On pourrait alors en déduire (par exemple à l'aide d'un produit de Cauchy, voir cours sur les séries) :

**Théorème 5.2.8 (Série exponentielle complexe, admis)**
*Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$*

## II.4 Fonctions hyperboliques

**Proposition 5.2.9 (Développement limité de sh et ch)**

*Les formules de Taylor-Young au point* 0 *pour le sinus hyperbolique (à l'ordre* $2n+2$*) et pour le cosinus hyperbolique (à l'ordre* $2n+1$*) donnent, au voisinage de* 0 *:*

$$\mathrm{sh} x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{ch} x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}).$$

Ces formules traduisent le fait que sh et ch sont les parties impaires et paires respectivement de l'exponentielle.

**Proposition 5.2.10 (Développement en série de sh et ch)**

*Le sinus hyperbolique et le cosinus hyperbolique sont développables en séries de Taylor en* 0*, sur* $\mathbb{R}$*, et :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{ch} x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

**Remarque 5.2.11**

Il est fréquent d'étendre la définition de cos, sin, ch et sh à $\mathbb{C}$ tout entier, en les définissant comme somme des séries corespondantes. On a alors les identités suivantes :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \sin(z) = \mathrm{sh}(\mathrm{i}\, z) \qquad \text{et} \qquad \cos(z) = \mathrm{ch}(\mathrm{i}\, z),$$

donc :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{sh}(z) = \sin(-\mathrm{i}\, z) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{ch}(z) = \cos(-\mathrm{i}\, z).$$

Les formules d'Euler restent valables :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \cos(z) = \frac{e^{\mathrm{i}\, z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, z}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{e^{\mathrm{i}\, z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, z}}{2\,\mathrm{i}} \quad \mathrm{ch}(z) = \frac{e^{z} + \mathrm{e}^{-z}}{2}, \quad \mathrm{sh}(z) = \frac{e^{z} - \mathrm{e}^{-z}}{2}.$$

Les formules de trigonométrie usuelles pouvant être toutes démontrées à partir des formules d'Euler, on en déduit qu'elles restent vraies dans le cas complexe. En particulier, en utilisant la correspondance complexe entre sh et sin, et entre ch et cos, on peut déduire des formules de trigonométrie circulaire toutes les formules de trigonométrie hyperbolique similaires.

## II.5 Fonctions puissances

La formule générale est :

**Proposition 5.2.12 (Développement limité de $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$)**

*Au voisinage de* 0*,* $(1+x)^{\alpha} \underset{x\to 0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n).$

Cas particuliers importants :

1. Pour $a \in \mathbb{N}$, on retrouve le début du développement du binôme.
2. Au voisinage de 0,

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n).$$

On reconnait une troncature de série géométrique

À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, on montre :

**Proposition 5.2.13 (Développement en série des fonctions puissances)**

*La fonction* $x \mapsto (1+x)^\alpha$ *($\alpha \in \mathbb{R}$) est développable en série de Taylor en* $0$ *sur l'intervalle* $]-1,1[$, *et :*

$$\forall x \in ]-1,1[, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

**Remarques 5.2.14**

1. Pour $a \in \mathbb{N}$, on retrouve la formule du binôme
2. Pour $a \in \mathbb{Z}_-^*$, on obtient ce qu'on appelle la formule du binôme négatif, qu'on peut réexprimer de la sorte (pour $n \in \mathbb{N}$) :

$$\forall x \in ]-1,1[, \quad \sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)x^{k-n} = \sum_{k=0}^{+\infty}(k+n)\cdots(k+1)x^n = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

   Cette formule ne dit rien de plus que le fait qu'on peut dériver terme à terme une série géométrique. On peut encore l'exprimer plus synthétiquement de la sorte :

$$\forall x \in ]-1,1[, \quad \frac{1}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k}{n} x^n.$$

**Avertissement 5.2.15**

En général, on ne peut pas dériver terme à terme une série de fonctions. Vous montrerez l'année prochaine qu'on peut le faire pour les séries entières, c'est-à-dire s'exprimant sous la forme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_n x^n$. Le cas ci-dessus de la série géométrique est donc un cas particulier de cette règle plus générale.

## II.6 Polynômes

Soit $P$ un polynôme de degré $n$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors $P^{(n+1)} = 0$. Ainsi, d'après la formule de Taylor avec reste intégral, applicable car $P$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, le reste de Taylor au point $x_0$ est nul. On en déduit :

**Théorème 5.2.16 (Formule de Taylor pour les polynômes)**

*Soit* $P$ *un polynôme de degré au plus* $n$. *Alors :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Ce théorème peut bien entendu être démontré de manière purement algébrique.

**Remarque 5.2.17**

Remarquez qu'il s'agit d'un changement de variable, ou plutôt d'indéterminée : on exprime le polynôme $P$ comme combinaison linéaire de monômes $(X-x_0)^n$. Dans le langage de l'algèbre linéaire, on dira qu'on a décomposé $P$ sur la base $((X-x_0)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$.

# III Généralités sur les développements limités

## III.1 Définition, exemples

Dans cette section, on se donne $x_0 \in \mathbb{R}$.

**Définition 5.3.1 (Développement limité (DL) au voisinage d'un point)**

Soit $f$ une fonction définie sur un voisinage de $x_0$. On dit que le polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ est un développement limité à l'ordre $n$ de $f$ en $x_0$ si, au voisinage de $x_0$ :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} P_n(x) + o((x - x_0)^n).$$

**Remarque 5.3.2**

On exprime généralement $P_n$ dans la base $(1, X-x_0, (X-x_0)^2, \dots, (X-x_0)^n)$. Ainsi, un développement limité à l'ordre $n$ sera la donnée de réels $a_0, \dots, a_n$ tels que, au voisinage de $x_0$,

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Le développement limité est donc une approximation polynomiale locale au voisinage d'un point. Il s'agit de la meilleure approximation par un polynôme de degré au plus $n$, au voisinage d'un point donné.
La formule de Taylor-Young donne de façon immédiate :

**Théorème 5.3.3 (Existence du DL de fonctions $n$ fois dérivables)**

*Si $f$ est $n$ fois dérivable en $x_0$, alors $f$ admet un développement limité à l'ordre $n$ au voisinage de $x_0$, égal au développement de Taylor-Young de $f$ à l'ordre $n$.*

**Théorème 5.3.4 (Unicité du DL)**

*Si $f$ admet un développement limité à l'ordre $n$ au voisinage de $x_0$, alors ce développement est unique.*

On en déduit en particulier :

**Proposition 5.3.5 (DL de fonctions paires ou impaires)**

*Soit $f$ une fonction admettant un DL à l'ordre $n$ au voisinage de $0$.*

1. *Si $f$ est paire, son DL n'est constitué que de monômes de degré pair ;*
2. *Si $f$ est impaire, son DL n'est constitué que de monômes de degré impair.*

**Remarques 5.3.6**

1. Toutes les fonctions n'admettent pas un DL en un point $x_0$. Certaines fonctions peuvent admettre des DL jusqu'à un certain ordre $n_0$ et plus ensuite.
2. **Attention !** L'existence d'un DL à l'ordre $n$ en $x_0$ n'implique pas l'existence de la dérivée $n$-ième de $f$ en $x_0$. Ainsi, tous les DL ne sont pas obtenus par la formule de Taylor-Young.
3. Cependant, pour les petits ordres :

- Si $f$ admet un DL à l'ordre 0 en $x_0$, $f$ est continue en $x_0$ ;
- Si $f$ admet un DL à l'ordre 1 en $x_0$, $f$ est dérivable en $x_0$ ;
- **et ça s'arrête là !**

**Exemples 5.3.7**

1. $x \mapsto \sqrt{|x|}$ n'admet pas de DL à l'ordre 1 au voisinage de 0
2. La fonction $f : t \mapsto \cos(t) + t^3 \sin \frac{1}{t}$, prolongée en 0 par $f(0) = 1$, admet-elle un développement limité à l'ordre 2 en 0 ? Est-elle 2 fois dérivable en 0 ?

On peut renforcer un peu la définition des DL :

**Définition 5.3.8 (DL au sens fort)**

Soit $f$ une fonction définie sur un voisinage de $x_0$. On dit que le polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ est un développement limité au sens fort à l'ordre $n$ de $f$ en $x_0$ si, au voisinage de $x_0$ :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} P_n(x) + O((x - x_0)^{n+1}).$$

Cette définition est plus restrictive que la première, car il impose qu'il n'y ait pas, dans un développement à un ordre supérieur de $f$, de termes d'ordre non entier $(x-x_0)^\alpha$, $a \in ]n, n+1[$, ni de terme logarithmique du type $(x - x_0)^n \ln(x - x_0)$, etc.
La propriété d'unicité reste vraie, ainsi que l'existence (si $f$ est $n+1$ fois dérivable en $x_0$, notez l'hypothèse plus forte !)
De la formule de Taylor-Young, nous déduisons donc les DL des fonctions usuelles. Ces DL, rappelés en fin de chapitre, serviont de briques pour la plupart des calculs de DL que nous effectuerons, grâce aux règles de calculs que nous établirons dans la suite de ce chapitre.

## III.2 Restriction

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus $n$. D'après la formule de Taylor pour les polynômes, tout polynôme $P$ de $\mathbb{R}_n[X]$ peut s'écrire sous la forme

$$P(X) = a_0 + a_1(X - x_0) + \cdots + a_n(X - x_0)^n.$$

Cette écriture est unique (cela provient du fait qu'on justifiera plus tard que $(1, X - x_0, \ldots, (X - x_0)^n)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$, mais peut aussi se voir comme une conséquence de l'unicité du développement limité à l'ordre $n$ au voisinage de $x_0$). On peut alors définir :

**Définition 5.3.9 (Troncature)**

Soit $P = a_0 + a_1(X - x_0) + \cdots + a_n(X - x_0)^n$ un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $m \leqslant n$. La troncature de $P$ à l'ordre $m$ au voisinage de $x_0$ est le polynôme $T_{m,x_0}(P)$ défini par :

$$T_{m,x_0}(P) = a_0 + a_1(X - x_0) + \cdots + a_m(X - x_0)^m.$$

**Proposition 5.3.10 (Restriction)**

*Si $f$ admet un DL à l'ordre $n$ au point $x_0$, alors $f$ admet des DL à tous ordres $m \leqslant n$, obtenus en tronquant le DL à l'ordre $n$ à la puissance $m$-ième en $(x - x_0)^m$ : autrement dit, si $m \leqslant n$,*

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} P(x) + o((x - x_0)^n) \Longrightarrow f(x) \underset{x \to x_0}{=} T_{m,x_0}(P)(x) + o((x - x_0)^m).$$

**Remarque 5.3.11**

Si $f$ n'admet pas de DL à l'ordre $n_0$ en $x_0$, elle n'en admet pas non plus aux ordres supérieurs.

**Exemple 5.3.12**

Pour quels ordres $x \mapsto t^n \ln|t|$ admet-elle un DL au voisinage de 0 ?

## III.3 Forme normalisée et partie principale

Pour faciliter la recherche des ordres minimaux de développement nécessaires lors de certaines opérations sur les DL, nous introduisons la forme normalisée d'un DL.

**Proposition/Définition 5.3.13 (Forme normalisée d'un DL au voisinage de 0)**

Soit $f$ une fonction définie au voisinage de $x_0$, admettant à l'ordre $n$ un DL non nul. Alors il existe un unique entier $m \leqslant n$ tel que, pour $h$ au voisinage de 0, on ait :

$$f(x_0+h) \underset{h\to 0}{=} h^m(a_0 + a_1 h + \cdots + a_{n-m}h^{n-m} + o(h^{n-m})),$$

avec $a_0 \neq 0$. Il s'agit de la forme normalisée du DL à l'ordre $n$ de $f$ au voisinage de $x_0$.

**Remarques 5.3.14**

- La forme normalisée inclut le changement de variable $h = x - x_0$. Dans la pratique, ce changement de variable est effectué de manière quasi-systématique, car il permet d'utiliser les DL des fonctions usuelles, tous donnés au voisinage de 0.
- $m$ est l'ordre minimal pour lequel $\frac{f(x_0+h)}{h^m}$ ne tende pas vers 0 lorsque $h$ tend vers 0. Plus précisément, $h \mapsto \frac{f(x_0+h)}{h^m}$ est prolongeable par continuité en une fonction $g$, non nulle en 0, et $g$ admet un développement limité à l'ordre $n - m$ en 0, égal à

$$g(h) \underset{h\to 0}{=} a_0 + a_1 h + \cdots + a_{n-m}h^{n-m} + o(h^{n-m}).$$

La forme normalisée d'un DL permet notamment d'obtenir un équivalent de $f$.

**Proposition 5.3.15 (Équivalent déduit d'un DL)**

*Soit $f$ une fonction définie au voisinage de $x_0$, telle que*

$$f(x_0+h) \underset{h\to 0}{=} h^m(a_0 + a_1 h + \cdots + a_{n-m}h^{n-m} + o(h^{n-m})), \quad a_0 \neq 0.$$

*Alors $f(x_0+h) \underset{h\to 0}{\sim} a_0 h^m$, c'est-à-dire $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} a_0(x-x_0)^{n-m}$.*

Ainsi, le développement limité est à voir comme une généralisation et un affinement des équivalents : l'ordre le plus grossier d'un DL non trivial fournit l'équivalent, les termes suivants du DL permettent d'affiner l'approximation donnée par l'équivalent : ces termes ne sont pas accessibles directement par le calcul d'équivalent.

**Définition 5.3.16 (Partie principale)**

Soit $f$ une fonction admettant, à un certain ordre $n$ au voisinage de $x_0$, un développement limité non trivial, s'écrivant sous forme normalisée :

$$f(x_0+h) \underset{h\to 0}{=} h^m(a_0 + a_1 h + \cdots + a_{n-m}h^{n-m} + o(h^{n-m})), \quad a_0 \neq 0.$$

La partie principale de $f$ (sur l'échelle polynomiale) est la fonction $x \mapsto a_0(x-x_0)^m$. On dira dans cette situation que $f$ admet une partie principale d'ordre $m$.

# IV Opérations sur les développements limités

On se limite dans tout ce paragraphe à des développements limités en 0 ; les fonctions usuelles étant développées en ce point, on se ramènera en pratique systématiquement à ce cas par un changement de variable.
Pour simplifier, on note simplement $T_n$ pour l'application linéaire $T_{n,0}$ définie ci-dessus. $T_n(P)$ est donc obtenu de $P$ en ne gardant que les monômes de degré inférieur ou égal à $n$ dans l'écriture de $P$ dans la base $(1, X, \dots, X^k, \dots)$.

## IV.1 Somme de DL

La règle la plus simple concerne la somme.

**Proposition 5.4.1 (Somme de DL)**
*Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies au voisinage de 0, et $P$ et $Q$ deux polynômes de degré au plus $n$. Si au voisinage de 0,*

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} P(x) + o(x^n) \qquad \text{et} \qquad g(x) \underset{x\to 0}{=} Q(x) + o(x^n),$$

*alors $(f+g)(x) \underset{x\to 0}{=} P(x) + Q(x) + o(x^n)$.*
*Autrement dit, si $f$ et $g$ admettent des DL à l'ordre $n$ en 0, leur somme aussi, et ce DL est obtenu en sommant les DL de $f$ et $g$.*

## IV.2 Produit de DL

**Proposition 5.4.2 (Produit de DL)**
*Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies au voisinage de 0, et $P$ et $Q$ deux polynômes de degré au plus $n$. Si au voisinage de 0,*

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} P(x) + o(x^n) \qquad \text{et} \qquad g(x) \underset{x\to 0}{=} Q(x) + o(x^n),$$

*alors $(fg)(x) \underset{x\to 0}{=} T_n(PQ)(x) + o(x^n)$.*
*Autrement dit, si $f$ et $g$ admettent des DL à l'ordre $n$ en 0, leur produit aussi, et ce DL est obtenu en faisant le produit des DL de $f$ et $g$, et en ne gardant que les monômes de degré inférieur ou égal à $n$.*

**Exemples 5.4.3**

1. $\dfrac{\cos(x)}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{2} + o(x^3)$.
2. $(\mathrm{e}^x)^2 \underset{x\to 0}{=} 1 + 2x + 2x^2 + \dfrac{4}{3}x^3 + o(x^3)$.
3. $\ln(1+x)^2 \underset{x\to 0}{=} x^2 - x^3 + \dfrac{11}{12}x^4 + o(x^4)$.

**Remarque 5.4.4**

- Dans le second exemple ci-dessus, les termes d'ordre 4 du DL de $\ln(1+x)$ n'interviennent pas dans le résultat final. Ceci était prévisible, car la partie principale de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0 est d'ordre

1, donc le terme $x^4$ est au moins multiplié par un terme d'ordre 1, donc fournit dans le produit des termes d'ordre au moins égal à 5.

- De façon plus générale, si $f$ et $g$ admettent des DL sous forme normalisée en 0 donnés par :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} x^\alpha(a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k + o(x^k)) \qquad \text{et} \qquad g(x) \underset{x\to 0}{=} x^\beta(a_0 + a_1 x + \cdots + a_\ell x^\ell + o(x^\ell)),$$

alors on obtient un DL à l'ordre $\min(\alpha+\ell, \beta+k)$ en effectuant le produit.

À la lumière de cette remarque, on peut donc affiner un peu la règle du produit des DL :

**Proposition 5.4.5 (Produit optimisé de DL)**

*Soit $f$ et $g$ des fonctions admettant en 0 des parties principales d'ordre respectif $v_f$ et $v_g$. Alors, pour obtenir le DL de $fg$ à l'ordre $n$ au voisinage de 0, il suffit d'effectuer le produit du DL d'ordre $n - v_g$ de $f$ et du DL d'ordre $n - v_f$ de $g$.*

**Exemple 5.4.6**

$(\sin(x) - x)(\cos(x) - 1) \underset{x\to 0}{=} -\dfrac{x^5}{12} + \dfrac{x^7}{90} + o(x^8).$

Cette règle peut être utilisée itérativement pour un produit d'un plus grand nombre de termes. On obtient :

**Proposition 5.4.7 (Produit optimisé de $k$ DL)**

*Soit $f_1, \dots, f_k$ admettant en 0 des parties principales d'ordres respectifs $v_1, \dots, v_k$. Alors, pour obtenir le DL à l'ordre $n$ de $f$ en 0, il suffit de faire le produit des DL des $f_i$, pris aux ordres respectifs $n + v_i - v$, où $v = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} v_j$.*

En particulier, dans le cas d'une puissance :

**Corollaire 5.4.8 (Puissance optimisée d'un DL)**

*Soit $f$ une fonction admettant en 0 une partie principale d'ordre $v$, et $n, k \in \mathbb{N}^*$. Pour obtenir un DL à l'ordre $n$ de $f^k$, il suffit d'élever à la puissance $n$ un DL à l'ordre $n - (k-1)v$ de $f$.*

**Exemple 5.4.9**

$\sin(x)^6 \underset{x\to 0}{=} x^6 - x^8 + o(x^9).$

## IV.3 Composition de DL

**Proposition 5.4.10 (Composition de DL)**

*Soit $f$ et $g$ des fonctions définies au voisinage de 0 telles que $f(0) = 0$. Si $P$ et $Q$ sont des développements limités de $f$ et $g$ en 0 à l'ordre $n$, alors $T_n(Q \circ P)$ est un DL en 0 à l'ordre $n$ de $g \circ f$ :*

$$\Big(f(x) \underset{x\to 0}{=} P(x) + o(x^n) \text{ et } g(x) \underset{x\to 0}{=} Q(x) + o(x^n)\Big) \implies g\circ f(x) \underset{x\to 0}{=} T_n(Q\circ P)(x) + o(x^n).$$

**Exemples 5.4.11**

1. $e^{\sin(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$.
2. $e^{\cos(x)-1} \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{7}{24}x^4 + o(x^4)$

Encore une fois, il n'est pas toujours nécessaire d'aller jusqu'à l'ordre $n$ pour les deux fonctions. Ainsi, dans l'exemple précédent, les termes d'ordre 2 du DL de l'exponentielle ne servent pas. Plus généralement, si $f$ et $g$ admettent des DL écrits sous forme normalisée :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} x^{\alpha}(a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k + o(x^k)) \qquad \text{et} \qquad g(x) \underset{x\to 0}{=} x^{\beta}(b_0 + b_1 x + \cdots + b_k x^{\ell} + o(x^{\ell})),$$

avec $\alpha \geqslant 1$ alors, en posant $\tilde{P} = a_0 + a_1 X + \cdots + a_k X^k$ et $\tilde{Q} = b_0 + b_1 X + \cdots + b_{\ell} X^{\ell}$

$$g \circ f(x) \underset{x\to 0}{=} T_n\left(X^{\alpha\beta}\tilde{P}^{\beta}\left(b_0 + b_1 X^{\alpha}\tilde{P} + b_2 X^{2\alpha}\tilde{P}^2 + \cdots + b_k \tilde{P}^k\right)\right)(x) + o(x^n),$$

où $n = \min(\alpha(\beta + \ell), \alpha\beta + k)$.
On obtient la règle suivante :

**Proposition 5.4.12 (Composition optimisée de DL)**

1. *Si $f$ admet au voisinage de 0 une partie principale d'ordre $v_f \geqslant 1$, pour obtenir un DL à l'ordre $n$ de $g \circ f$, il suffit de considérer un DL à l'ordre $n$ de $f$ et un DL* ***au sens fort*** *à l'ordre $\left\lfloor \dfrac{n}{v_f} \right\rfloor$ de $g$.*

*Si de plus $g$ admet une partie principale d'ordre $v_g \geqslant 2$, alors on peut se contenter de calculer un DL de $f$ à l'ordre $n - (v_g - 1)v_f$.*

Un DL à l'ordre fractionnaire $\dfrac{n}{v_f}$ est suffisant (c'est-à-dire, en fait un développemet asymptotique qur l'échelle $(x^{\alpha})_{\alpha\in\mathbb{R}}$ dans le sens défini plus loin), en revanche, un DL à l'ordre $\left\lfloor \dfrac{n}{v_f} \right\rfloor$ n'est pas suffisant pour contrôler les termes d'ordre compris entre $v_f \left\lfloor \dfrac{n}{v_f} \right\rfloor + 1$ et $\dfrac{n}{v_f}$.

**Exemples 5.4.13**

1. $\ln(\cos(x)) \underset{x\to 0}{=} -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)$.
2. $\tan(\text{sh}(x)) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^7}{7!} + o(x^8)$.
3. DL à tout ordre en 0 de $\dfrac{1}{1+x^k}$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^k}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^k}}$.
4. $\sin\left(\dfrac{x^2}{1+x^2}\right) - \dfrac{x^2}{1+x^2} = \dfrac{x^6}{6} - \dfrac{x^8}{2} + o(x^9)$.

**Méthode 5.4.14 (DL d'une réciproque)**

Soit $f$ une fonction bijective (au moins injective au voisinage de 0). On peut trouver un DL de la réciproque $f^{-1}$ de $f$ au voisinage de 0, en identifiant les DL :

$$x = f^{-1} \circ f(x) + o(x^n),$$

fournissant $n + 1$ équations dont les inconnues sont les coefficients du DL de $f^{-1}$. L'identification est possible du fait de l'unicité du DL.

**Exemple 5.4.15**

Montrer que $f : x \mapsto x\cos(x)$ est injective sur un voisinage de 0, et trouver le DL à l'ordre 3 d'une réciproque locale (réponse $f^{-1}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{2} + o(x^3)$).

**Remarque 5.4.16**

1. Pourquoi considérer $f^{-1} \circ f$ plutôt de $f \circ f^{-1}$ ?
2. Trouver une CN sur l'ordre de la partie principale de $f$ pour que $f^{-1}$ admette un DL en 0 au même ordre que $f$.

## IV.4 Quotient de DL

**Proposition 5.4.17 (DL d'un inverse)**

*Soit $g$ une fonction définie sur un voisinage de 0, et ne s'annulant pas en 0. Si $g$ admet un DL donné par le polynôme $P$ en 0 à l'ordre $n$, alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{1}{P}$ aussi, et les DL à l'ordre $n$ en 0 de $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{1}{P}$ sont les mêmes. Autrement dit, si $P$ et $Q$ sont deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, alors :*

$$\big(g(0) \neq 0 \text{ et } g(x) \underset{x\to 0}{=} P(x) + o(x^n)\big) \Longrightarrow \Big(\frac{1}{g(x)} \underset{x\to 0}{=} Q(x) + o(x^n) \Longleftrightarrow \frac{1}{P(x)} \underset{x\to 0}{=} Q(x) + o(x^n)\Big).$$

Ainsi, si $g(0) \neq 0$, pour trouver un DL de $\dfrac{1}{g}$ à l'ordre $n$, il suffit d'inverser un DL à l'ordre $n$ de $g$.

**Méthode 5.4.18 (Calcul pratique du DL d'un quotient)**

Soit $g$ une fonction admettant un DL à l'ordre $n$ au voisinage de 0, et telle que $g(0) \neq 0$. Soit $P$ un polynôme de degré au plus $n$ tel que au voisinage de 0, $g(x) = P(x) + o(x^n)$. Comme $g(0) \neq 0$, on a également $P(0) \neq 0$. Par conséquent, en mettant le terme constant non nul $a$ de $P$ en facteur, il existe un polynôme $R$ de degré au plus $n$ et s'annulant en 0, tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a(1 + R(x)).$$

On a alors, au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{P(x)} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + R(x)} \underset{x\to 0}{=} T_n(1 - R + R^2 + \cdots + (-1)^n R^n)(x) + o(x^n),$$

d'après la formule de composition appliquée à $h \circ R$, où $h$ est la fonction $y \mapsto \frac{1}{1+y}$. On obtient donc, au voisinage de 0, d'après la proposition précédente :

$$\frac{1}{g(x)} = T_n(1 - R + R^2 + \cdots + (-1)^n R^n)(x) + o(x^n).$$

Il peut parfois être plus judicieux d'écrire $P = a(1 - R)$, car la formule de DL de $y \mapsto \frac{1}{1-y}$ est encore plus simple.

**Exemples 5.4.19 (Exemples archiclassiques, à savoir refaire jusqu'à l'ordre 5)**

1. $\dfrac{1}{\cos x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^4}{24} + \dfrac{61x^6}{720} + o(x^7)$.
2. $\tan x \underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + \dfrac{17x^7}{315} + \dfrac{62x^9}{2835} + o(x^{10})$.

**Remarque 5.4.20**

Si $g(0) = 0$, et si $g$ admet une partie principe d'ordre $v$, on peut mettre $x^v$ en facteur. Dans ce cas, on est ramené à une fonction $x \mapsto \frac{g(x)}{x^v}$ se prolongeant en une fonction $h$ ne s'annulant pas en 0 : au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{x^v} \cdot \frac{1}{h(x)}$$

Comme on divise par $x^v$, on obtiendra en fait un développement contenant également des puissances négatives de $x$. Ce n'est donc pas un DL. C'est ce qu'on appelle un développement asymptotique. On en reparlera un peu plus loin.

**Exemple 5.4.21**

$$\frac{1}{x^2 \cos(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} + \frac{5}{24}x^2 + o(x^2)$$

Il existe des techniques plus efficaces que la composition pour faire le quotient de deux DL, notamment pour des ordres importants, en particulier une adaptation de la division euclidienne des polynômes, faite en inversant l'ordre (et le rôle) des monômes. C'est ce qu'on appelle la division suivant les puissances croissantes. Cette méthode est hors-programme. Pour les petits ordres, la technique exposée ci-dessus est amplement suffisante.

## IV.5 Primitivation d'un DL

**Proposition 5.4.22 (Primitivation d'un DL)**

*Soit $f$ une fonction dérivable au voisinage de 0, dont la dérivée admet un DL à l'ordre $n-1$ au voisinage de 0, donné par :*

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + o(x^{n-1}).$$

*Alors $f$ admet au voisinage de 0 un DL à l'ordre $n$, donné par :*

$$f(x) = f(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + o(x^n).$$

**Méthode 5.4.23**

Pour primitiver terme à terme un DL, ne pas oublier :
- de primitiver également le $o(x^{n-1})$ ;
- de préciser le terme constant (constante d'intégration), égal à $f(0)$.

**Exemples 5.4.24**

1. DL de $\operatorname{Arctan} x$, $\operatorname{Arcsin}(x)$ et $\operatorname{Arccos}(x)$ en 0 à tous ordres.
2. Du même accabit, mais hors-programme : Argth, Argsh, Argch.
3. $\operatorname{Arctan}\left(\frac{x^2+1}{x-2}\right) \underset{x\to 0}{=} -\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{5}x - \frac{12}{25}x^2 - \frac{56}{375}x^3 + o(x^3).$

**Remarque 5.4.25**

Dans le cas de fonctions dérivables $n$ fois en 0, la formule de primitivation de DL peut être vue comme une conséquence immédiate de la formule de Taylor-Young.

### IV.6 Dérivation

La dérivation de DL se passe moins bien que l'intégration. En effet, contrôler l'intégrale d'un $o$ se fait bien, par majoration : si un terme est petit, son intégrale aussi, sur un intervalle donné. En revanche, un terme peut être petit, mais avoir de très fortes variations locales (petites oscillations très pentues). Ainsi, la dérivation d'un $o$ n'est en général pas contrôlable. Il faut de ce fait des hypothèses fortes pour pouvoir dériver un DL, en revenant à la formule de Taylor-Young.

**Proposition 5.4.26 (Dérivation d'un DL)**
*Soit $f$ une fonction $f$ dérivable $n$ fois en $0$, admettant (donc) un DL à l'ordre $n$ au voisinage de $0$ :*

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n).$$

*Alors $f'$ admet un DL à l'ordre $n-1$ en $0$, égal à*

$$f'(x) \underset{x\to 0}{=} a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + o(x^{n-1}).$$

## V Développements asymptotiques

On peut également définir des « développements limités » en la variable $x$ au voisinage de $+\infty$ : dans ce cas, on se ramène à 0 par un changement de variables $y = \frac{1}{x}$. Ainsi, un DL en $+\infty$ est un polynôme en la variable $\frac{1}{x}$. On parle plutôt dans ce cas de développement asymptotique.

**Exemple 5.5.1**
$$\frac{x^2-1}{x^2+x+1} \underset{x\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Un développement limité permet de comparer localement une fonction à une fonction polynomiale, donc à situer la fonction sur une échelle de comparaison constituée de fonctions $x \mapsto (x-x_0)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Dans le cas de fonctions non bornées au voisinage d'un point, on peut être amené à introduire des puissances négatives de $(x - x_0)$, afin de mesurer la divergence locale. On parlera là encore de développement limité (ou asymptotique) d'ordre $n$ une approximation du type

$$f(t) = \sum_{k=n_0}^{n} a_k (x-x_0)^k,$$

l'entier $n_0$ étant dans $\mathbb{Z}$.

**Exemple 5.5.2**
$$\frac{1}{\mathrm{sh}(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x} - \frac{x}{6} + \frac{7}{360}x^3 + o(x^4).$$

Remarquez que les conditions suffisantes pour obtenir les règles optimisées pour les DL deviennent ici des conditions nécessaires : il faut augmenter l'ordre des DL intermédiaires pour obtenir un DL d'ordre suffisant (du fait qu'on est amené à diviser par $x$, ce qui diminue l'ordre). Il peut être intéressant de revenir aux formes normalisées, pour déterminer à quels ordres il sera nécessaire d'effectuer certains DL.

**Exemples 5.5.3**

1. $\dfrac{e^x - 1}{\cos(x) - 1} \underset{x\to 0}{=} -\dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8}x + o(x)$
2. $\dfrac{\sin(x) - x}{\ln(1+x) - x} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x}{12} + \dfrac{x^2}{18} + o(x^2).$

On peut être amené à affiner la comparaison, en insérant des fonctions intermédiaires entre les puissances entières $x^n$. La notion essentielle permettant de définir correctement des développements asymptotiques est la notion d'échelle de comparaison. Les définitions que nous allons voir généralisent toutes celles données jusqu'à présent.

**Définition 5.5.4 (Échelle de comparaison, HP)**

Une échelle de comparaison au voisinage de $t_0$ est une famille $\mathcal{E}$ de fonctions, définies et non identiquement nulles au voisinage de $t_0$, et telles que pour tout $f$ et tout $g$ de $\mathcal{E}$, on ait soit $f = o(g)$, soit $g = o(f)$.

Autrement dit, les fonctions de l'échelle de comparaison peuvent toutes se classer les unes par rapport aux autres, par ordre de prépondérance. Cette situation est à comparer au cas d'un ensemble totalement ordonné. On peut en fait se ramener à cette situation en considérant la relation d'ordre définie sur l'ensemble des fonctions non identiquement nulles au voisinage de 0 par $f \leqslant g$ si et seulement si $f = o(g)$ ou $f = g$. On pourrait aussi définir cette relation sur un ensemble quotient de l'ensemble des fonctions définies au voisinages de $x_0$ par la relation d'équivalence définie par $f \equiv g$ si et seulement si $f$ et $g$ coincident sur un voisinage de $x_0$ (on parle de germes de fonctions).

**Exemples 5.5.5 (Échelles de comparaison)**

1. $x \mapsto (x - x_0)^n$, $n \in \mathbb{N}$, au voisinage de $x_0$ (échelle polynomiale).
2. $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, au voisinage de 0.
3. $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, au voisinage de 0 ou $+\infty$.
4. $x \mapsto x^\alpha \ln^\beta(x)$ au voisinage de 0 ou de $+\infty$.
5. $x \mapsto x^\alpha (\ln(x))^\beta (\ln(\ln(x)))^\gamma$ au voisinage de $+\infty$, etc.
6. $x \mapsto x^\alpha \mathrm{e}^{P(x)}$, $P$ polynôme sans terme constant

On définit alors :

**Définition 5.5.6 (Développement asymptotique)**

Un développement asymptotique d'une fonction $f$ sur une échelle de comparaison $\mathcal{E}$ au voisinage de $x_0$ à la précision $\varphi \in \mathcal{E}$ est la donnée d'une approximation de $f$ de la forme :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} \sum_{\substack{\psi \in \mathcal{E} \\ \psi = o(\varphi) \text{ ou } \psi = \varphi}} a_\psi \psi(x) + o(\varphi(x)).$$

Ainsi, un développement limité à l'ordre $n$ n'est rien d'autre qu'un développement asymptotique sur l'échelle $(x \mapsto (x - x_0)^k)_{k \in \mathbb{N}}$, avec la précision $x \mapsto (x - x_0)^n$.

**Exemples 5.5.7**

1. $\dfrac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{x}}} \underset{x \to 0}{=} 1 - \dfrac{1}{2}\sqrt{x} + \dfrac{3}{8}x - \dfrac{5}{16}x\sqrt{x} + \dfrac{35}{128}x^2 + o(x^2)$.
2. $\dfrac{\sin(x)}{1 + x\sqrt{x} \cdot \ln(x)} \underset{x \to 0}{=} x - x^2\sqrt{x}\ln(x) - \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)$.

La plupart des techniques précédentes s'adaptent. Il faut bien sûr être très vigilant sur la manipulation des $o$. On peut remarquer que la notion de partie principale se généralise aussi, mais dépend de l'échelle de comparaison choisie :

**Définition 5.5.8 (Partie principale relativement à une échelle de comparaison)**
Soit $f$ une fonction admettant sur une échelle de comparaison $\mathcal{E}$ un développement asymptotique :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} \sum_{\substack{\psi\in\mathcal{E} \\ \psi=o(\varphi) \text{ ou } \psi=\varphi}} a_\psi \psi(x) + o(\varphi(x)).$$

Soit $\psi_0$ tel que $a_{\psi_0} \neq 0$, et tel que $a_\psi = 0$ pour tout $\psi$ de $\mathcal{E}$ vérifiant $\psi_0 = o(\psi)$. Alors la partie principale de $f$ relativement à l'échelle de comparaison $\mathcal{E}$ est la fonction $a_{\psi_0}\psi_0$.

Il s'agit donc de la partie prépondérante d'un développement asymptotique non trivial de $f$ sur cettee échelle.

**Exemples 5.5.9**

1. $\sqrt{x} + x^2 + x^3$ sur l'échelle $(x^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$, au voisinage de 0
2. $\sqrt{x} + x^2 + x^3$ sur l'échelle $(x^\alpha(1+x))_{\alpha\in\mathbb{R}}$, au voisinage de 0.

# VI Applications

## VI.1 Courbes polynomiales asymptotes à une courbe

**Méthode 5.6.1 (Recherche de courbes polynomiales asymptotes)**
Pour trouver les courbes polynomiales (par exemple les droites) asymptotes à la courbe de $f$ en $+\infty$, il suffit de faire un DA à l'ordre 0 de $f$ en $+\infty$. En effet, les termes de degré négatifs de ce DA forment une partie polynomiale. On obtient donc (en cas d'existence d'un tel DA), pour un certain $m \in \mathbb{N}$ :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} a_m \left(\frac{1}{x}\right)^{-m} + \cdots + a_0 + o(1) \underset{x\to+\infty}{=} a_m x^m + \cdots + a_0 + o(1).$$

Cela signifie que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (a_m x^m + \cdots + a_0) = 0$. Par définition, cela revient à dire que la courbe polynomiale d'équation $y = a_m x^m + \cdots + a_0$ est asymptote à la courbe de $f$ en $+\infty$.

**Méthode 5.6.2 (Position de la courbe par rapport à une courbe asymptote)**
Pour trouver la position de la courbe de $f$ par rapport à une courbe polynomiale asymptote (par exemple une droite asymptote), il suffit d'étudier le signe du terme de plus petit exposant strictement positif) dans le DA. Par exemple, si ce terme est le terme de degré 1, on va obtenir, au voisinage de $+\infty$ :

$$f(x) = a_m x^m + \cdots + a_0 + \frac{b}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{donc:} \qquad f(x) - (a_m x^m + \cdots + a_0) \underset{+\infty}{\sim} \frac{b}{x}.$$

Ainsi, $f(x) - (a_m x^m + \cdots + a_0)$ est du signe de $\frac{b}{x}$ au voisinage de $+\infty$, donc du signe de $b$ ; cela fournit la position, au voisinage de $+\infty$ de la courbe de $f$ par rapport à la courbe polynomiale asymptote $x \mapsto a_m x^m + \cdots + a_0$.

**Exemple 5.6.3**
Montrer que la parabole d'équation $y = \mathrm{e}x^2 + \frac{\mathrm{e}}{2}x - \frac{\mathrm{e}}{24}$ est asymptote à la courbe de $f : x \mapsto x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1+x}$, et que la courbe de $f$ est au-dessus de l'asymptote (le terme d'ordre 1 est $\frac{\mathrm{e}}{48x}$).

### VI.2 Extréma et points d'inflexion

Supposons que $f$ admet un DL à un certain ordre $k \geqslant 1$ au voisinage de $x_0$, de la forme : $f(x) = a_0 + a_k(x-x_0)^k + o((x-x_0)^k)$, avec $a_k \neq 0$. Alors

- $f$ admet un point critique en $x_0$ si et seulement si $k > 1$
- la courbe de $f$ présente alors un extremum en $x_0$ si et seulement si $k$ est pair ; il s'agit d'un maximum si $a_k < 0$ et d'un minimum di $a_k > 0$.

En d'autres termes :

**Proposition 5.6.4 (Étude d'un point critique)**

*Soit $f$ admettant en $x_0$ un point critique. Alors :*
- *$f$ admet un extremum en $x_0$ si et seulement si la partie principale de $x \mapsto f(x) - f(x_0)$ au voisinage de $x_0$ est d'ordre pair ;*
- *dans ce cas, si $ax^\alpha$ désigne cette partie principale, $f$ admet un minimum local en $x_0$ si $a > 0$ et un maximum local si $a < 0$.*

Ainsi, pour savoir si $f$ admet un extremum local en un point critique $x_0$, il suffit de trouver le premier terme non nul de degré strictement positif du DL de $f$ en $x_0$

On peut procéder de la même façon à l'étude des points d'inflexion, points en lesquels la tangente change de côté de la courbe. Une condition nécessaire est que $f''(x_0) = 0$, mais il ne s'agit pas d'une condition suffisante.

**Proposition 5.6.5 (Étude des points d'inflexion)**

*Soit $f$ tel que $f(x) \underset{x\to x_0}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + o(x-x_0)$, et telle que $f''(x_0) = 0$. Alors la courbe de $f$ présente en $x_0$ un point d'inflexion si et seulement si la partie principale de $x \mapsto f(x) - a_0 - a_1(x-x_0)$ au voisinage de $0$ est d'ordre impair.*

Ainsi, pour savoir si la courbe d'une fonction $f$ présente un point d'inflexion en $x_0$, il suffit de déterminer le premier terme non nul de degré strictement supérieur à 1 du DL de $f$ en $x_0$.

## VII Développements limités des fonctions usuelles

Les développements limités suivants sont à bien connaître. Les dernières lignes sont les cas particuliers les plus fréquents de la formule du DL de $(1+x)^\alpha$.

**Théorème 5.7.1 (DL des fonctions classiques)**

1. $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$
2. $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} + o(x^n)$.
3. $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1})$.
4. $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$.
5. $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + o(x^5)$.
6. $\mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})$

7. $\operatorname{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}x^{2k} + o(x^{2n+1}).$

8. $\operatorname{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}x^{2k+1} + o(x^{2n+2}).$

9. $\operatorname{th}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).$

10. $$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$
$$\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + o(x^n).$$

11. $\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n).$

12. $\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n).$

13. $\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{48}x^3 + o(x^3)$

14. $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3)$

# 6 Intégration

Le but de ce chapitre est de donner un fondement rigoureux à la théorie de l'intégration. Il existe plusieurs constructions de l'intégrale. Celle que nous donnons est historiquement la première complètement formalisée, et est due à Bernhard Riemann (1826-1866)

**Note Historique 6.0.2**

La notion d'intégration est ancienne, mais la théorie de l'intégration n'a vraiment été fondée que par Leibniz à la fin du 17-ième siècle. C'est lui qui introduit le symbolisme permettant de faire le lien entre dérivation et intégration. C'est à lui également qu'on doit le signe $\int$, représentant un S pour somme.
Il faut attendre toute la théorisation de la notion de fonction et des notions relatives à la continuité pour une formalisation rigoureuse. Il s'agit tout d'abord de la construction de l'intégrale de Riemann (1854), puis de l'intégrale de Lebesgue (1902). D'autres variantes existent.

Nous nous intéressons donc à l'approche de Riemann. L'idée sous-jacente à la construction est l'interprétation de l'intégrale comme l'aire sous la courbe. Cette aire est facile à déterminer pour des fonctions en escalier : il s'agit de la somme d'aires de rectangles. On commence donc par définir l'intégrale de fonctions en escalier, puis on définit plus généralement l'intégrale d'une fonction en l'approchant par des fonctions en escalier. La question qui se pose au passage est de savoir quelles sont les fonctions pour lesquelles cette construction est possible (fonctions intégrables au sens de Riemann), donc quelles sont les fonctions qui peuvent être approchées d'assez près par des fonctions en escalier, (et au passage, quel sens donner à cette affirmation ?).
On commence donc par étudier les fonctions en escalier, puis on définit leur intégrale, et on étudie leurs propriétés. Seulement après, on définit la notion d'intégrabilité au sens de Riemann, et on vérifie que les propriétés sur les fonctions en escalier se transmettent au cas général. On montre que les fonctions continues par morceaux sont intégrables au sens de Riemann, donc en particulier les fonctions continues. Enfin, on termine en reprécisant le lien entre primitive et intégrale. L'aspect pratique et calculatoire ayant déjà été vu dans un chapitre antérieur, nous nous contentons d'un petit complément sur la primitivation des fractions raationnelles, par l'utilisation de la décomposition en éléments simples.

## I Intégrale des fonctions en escalier

Une fonction en escalier est une fonction constante par morceaux. Pour définir correctement les morceaux de l'intervalle $[a, b]$ sur lesquels $f$ est constante, on introduit la notion de subdivision.

### I.1 Notion de subdivision d'un intervalle

**Définition 6.1.1 (subdivision d'un intervalle)**

- Une *subdivision* $\sigma$ de l'intervalle $[a, b]$ est une suite finie strictement croissante

$$\sigma = (a = \sigma_0 < \cdots < \sigma_n = b).$$

- L'entier $n$ est le nombre de parts de la subdivision.
- Les intervalles $[\sigma_i, \sigma_{i+1}]$, $i \in [\![0, n-1]\!]$ sont appelés *intervalles de la subdivision.*
- Le *pas* $p(\sigma)$ de la subdivision est la longueur du plus grand intervalle :

$$p(\sigma) = \max_{i \in [\![0,n-1]\!]} (\sigma_{i+1} - \sigma_i).$$

On assimiliera souvent une subdivision $\sigma$ à l'ensemble $\{\sigma_0, \dots, \sigma_n\}$ ; ainsi, on s'autorisera à parler d'appartenance, d'inclusion, d'union et d'intersection de subdivisions. Quitte à réordonner les éléments, une union de subdivisions est encore une subdivision ; de même pour une intersection de subdivisions.

**Définition 6.1.2 (Relation de raffinement)**

Soit $\sigma$ et $\tau$ deux subdivisions de $[a, b]$. On dit que $\sigma$ est plus fine que $\tau$, et on note $\sigma \leqslant \tau$ si $\tau \subset \sigma$ (autrement dit, la subdivision $\sigma$ est obtenue de $\tau$ en rajoutant des points)

**Théorème 6.1.3 (Le raffinement définit un ordre)**

*La relation $\leqslant$ sur les subdivisions est une relation d'ordre.*

**Théorème 6.1.4 (Existence des bornes supérieures et inférieures)**

1. *Soit $(\sigma_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de subdivisions de $[a, b]$. Cette famille admet une borne supérieure pour la relation de raffinement, et :*

$$\sup_{i \in I} \sigma_i = \bigcap_{i \in I} \sigma_i.$$

2. *Soit $(\sigma_i)_{i \in I}$ une famille* finie *de subdivisions de $[a, b]$. Cette famille admet une borne inférieure pour la relation de raffinement, et :*

$$\inf_{i \in I} \sigma_i = \bigcup_{i \in I} \sigma_i.$$

## I.2 Fonctions en escalier

En vue de construire l'intégrale par approximations, en commençant par un cas simple, nous introduisons les fonctions en escalier. Nous nous contentons dans un premier temps de l'étude des fonctions d'un intervalle $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Nous généraliserons plus loin les résultats obtenus pour des fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$.

**Définition 6.1.5 (Fonctions en escalier)**

Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite *en escalier* s'il existe une subdivision $\sigma = (\alpha = \sigma_0 < \cdots < \sigma_n = b)$ de $[a, b]$ telle que $f$ soit constante sur chacun des intervalles $]\sigma_i, \sigma_{i+1}[$, $i \in [\![0, n-1]\!]$.

**Définition 6.1.6 (Subdivision associée)**

Soit $f$ une fonction en escalier. Une subdivision $\sigma$ telle que dans la définition 6.1.5 est appelée *subdivision associée à $f$.*

**Remarque 6.1.7**

Il n'existe pas une unique subdivision associée à une fonction en escalier $f$. On peut toujours en trouver une infinité. En effet, toute subdivision plus fine qu'une subdivision associée à $f$ sera encore associée à $f$.

**Proposition 6.1.8 (Image d'une fonction en escalier)**

*L'image d'une fonction en escalier est un ensemble fini. En particulier, une fonction en escalier est bornée.*

**Proposition 6.1.9 (subdivision optimale)**

*Soit $f$ une fonction en escalier sur $[a, b]$. Il existe une subdivision moins fine que toutes les autres associée à $f$. Il s'agit de l'intersection de toutes les subdivisions associées à $f$.*

**Théorème 6.1.10 (Structure de l'ensemble des fonctions en escalier)**

*L'ensemble $\mathrm{Esc}([a, b])$ des fonctions en escalier sur $[a, b]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{[a,b]}$.*

## I.3 Intégrale d'une fonction en escalier

Dans cette section, les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

**Définition 6.1.11**

Soit $f$ une fonction en escalier, et $\sigma$ une subdivision associée à $f$. On définit :

$$I(f, \sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(\sigma_{i+1} - \sigma_i),$$

où, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $f_i$ désigne la valeur constante de $f$ sur l'intervalle $]\sigma_i, \sigma_{i+1}[$.

**Remarque 6.1.12**

$I(f, \sigma)$ est la somme de l'aire signée des rectangles situés entre l'axe des abscisses et les valeurs constantes de $f$ sur chacun des intervalles $]\sigma_i, \sigma_{i+1}[$. C'est donc l'aire entre l'axe et la courbe.

**Théorème 6.1.13**

*Pour toutes subdivisions $\sigma$ et $\tau$ associées à $f$, $I(f, \sigma) = I(f, \tau)$. Autrement dit, la quantité $I(f, \sigma)$ est indépendante du choix de la subdivision associée $\sigma$.*

**Définition 6.1.14 (Intégrale d'une fonction en escalier)**
On définit l'intégrale de la fonction en escalier $f$ sur $[a,b]$ comme étant la valeur commune des $I(f,\sigma)$, pour les subdivisions associées $\sigma$. On note cette quantité $\displaystyle\int_{[a,b]} f(x)\ \mathrm{d}x$, ou, plus souvent, $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$.
Ainsi, si $\sigma$ est une subdivision quelconque associée à la fonction en escalier $f$, on a :

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(\sigma_{i+1}-\sigma_i).$$

De la définition et d'un bon choix de subdivision découle immédiatement :

**Proposition 6.1.15 (Intégrale d'une fonction nulle presque partout)**
*Si $f$ est nulle sauf en un nombre fini de points, son intégrale est nulle.*

## I.4 Propriétés des intégrales de fonctions en escalier

Nous supposons toujours les fonctions à valeurs réelles.

**Proposition 6.1.16 (Additivité par rapport aux bornes – relation de Chasles)**
*Soit $f$ une fonction en escalier sur $[a,b]$, et soit $c \in ]a,b[$. Alors $f$ est en escalier sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$, et :*

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

**Proposition 6.1.17 (Linéarité)**
$\int_{[a,b]} : \mathrm{Esc}([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une forme linéaire sur l'espace vectoriel* $\mathrm{Esc}([a,b])$. *Autrement dit, pour toutes fonctions en escalier $f$ et $g$, et tout réel $\lambda$, on a :*

$$\int_a^b (f(x)+\lambda g(x))\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) + \lambda \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

En particulier, de la nullité de l'intégrale d'une fonction nulle presque partout, il découle :

**Proposition 6.1.18 (Intégrale de deux fonctions en escalier égales presque partout)**
*Si deux fonctions en escalier ne diffèrent qu'en un nombre fini de points, alors leurs intégrales sont égales.*

**Proposition 6.1.19 (Positivité, ou croissance, de l'intégrale)**
*Soit $f$ et $g$ deux fonctions en escalier sur $[a,b]$ telles que pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$. Alors :*

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

*En particulier, si $f$ est en escalier sur $[a,b]$ et* positive, $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \geqslant 0$.

**Proposition 6.1.20 (Inégalité triangulaire intégrale)**
*Soit $f$ une fonction en escalier sur $[a,b]$, à valeurs réelles. Alors $|f|$ est en escalier sur $[a,b]$, et :*

$$\left|\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x.$$

**Définition 6.1.21 (extension de la notation intégrale)**
Par convention on pose $\displaystyle\int_a^a f(x)\ \mathrm{d}x = 0$, et, si $a < b$, $\displaystyle\int_b^a f(x)\ \mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$.

Alors, la relation de Chasles est vraie pour toute valeur de $c$, qu'elle soit ou non dans $]a,b[$, à condition que la fonction soit en escalier sur tous les intervalles considérés.

# II Construction de l'intégrale de Riemann

L'idée de la construction est d'encadrer une fonction donnée le plus finement possible par des fonctions en escalier, dans l'espoir de définir l'intégrale par ces approximations. Dans un premier temps, on reste dans le cadre de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.

## II.1 Fonctions intégrables

Dans toute cette section, $f$ désigne une fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

**Notation 6.2.1**
On définit :

1. $\mathrm{Esc}_-(f) = \{g \in \mathrm{Esc}([a,b]) \mid \forall x \in [a,b],\ g(x) \leqslant f(x)\}$
2. $\mathrm{Esc}_+(f) = \{g \in \mathrm{Esc}([a,b]) \mid \forall x \in [a,b],\ g(x) \geqslant f(x)\}$

Ainsi, $\mathrm{Esc}_-(f)$ est l'ensemble des fonctions en escalier minorant $f$ et $\mathrm{Esc}_+(f)$ est l'ensemble des fonctions en escalier majorant $f$.
Remarquez que $\mathrm{Esc}_-(f)$ et $\mathrm{Esc}_+(f)$ peuvent être vide, par exemple si $f$ n'est pas bornée.

**Définition 6.2.2 (Intégrabilité au sens de Riemann)**
On dit que $f$ est intégrable (au sens de Riemann) sur $[a,b]$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\quad \exists g \in \mathrm{Esc}_-(f),\quad \exists h \in \mathrm{Esc}_+(f),\quad \int_a^b (h(x) - g(x))\ \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

Remarquez que cette intégrale est forcément positive.

**Proposition 6.2.3 (CN d'intégrabilité)**
*Pour que $f$ soit intégrable sur $[a,b]$, il est nécessaire que $f$ soit bornée.*

On définit :

$$A_-(f) = \left\{\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x \mid g \in \mathrm{Esc}_-(f)\right\}, \qquad \text{et} \qquad A_+(f) = \left\{\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x \mid g \in \mathrm{Esc}_+(f)\right\}.$$

On note, sous réserve d'existence :

$$I_-(f) = \sup A_-(f) \qquad \text{et} \qquad I_+(f) = \inf A_+(f).$$

**Théorème 6.2.4**

*$f$ est intégrable si et seulement si $I_-(f)$ et $I_+(f)$ existent, et si $I_-(f) = I_+(f)$.*

**Définition 6.2.5 (Intégrale de Riemann)**

Si $f$ est intégrable, on définit son intégrale comme étant la valeur commune de $I_+(f)$ et $I_-(f)$ :

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = I_-(f) = I_+(f).$$

**Proposition 6.2.6 (Critère d'intégrabilité)**

*Une fonction $f$ définie sur $[a,b]$ est intégrable si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier $\varphi$ et $\theta$ telles que*

$$\forall x \in [a,b], \quad \varphi(x) - \theta(x) \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x) + \theta(x),$$

*et $\displaystyle\int_a^b \theta(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \varepsilon$. Dans ce cas, on obtient :*

$$\left| \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x - \int_a^b \varphi(x)\ \mathrm{d}x \right| \leqslant \varepsilon.$$

**Proposition 6.2.7 (Critère séquentiel d'intégrabilité)**

*Une fonction $f$ définie sur $[a,b]$ est intégrable si et seulement s'il existe deux suites de fonctions en escalier $(\varphi_n)$ et $(\theta_n)$ telles que*

$$\forall x \in [a,b],\ |f(x) - \varphi_n(x)| \leqslant \theta_n(x),$$

*et $\displaystyle\int_a^b \theta_n(x)\ \mathrm{d}x \longrightarrow 0$. Dans ce cas, $\displaystyle\int_a^b \varphi_n(x)\ \mathrm{d}x$ admet une limite et*

$$\int_a^b \varphi_n(x)\ \mathrm{d}x \longrightarrow \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Intuitivement, l'intégrale d'une fonction $f$ représente donc l'aire sous la courbe, obtenue par approximation. Cette aire sous la courbe peut être vue comme l'aire d'un rectangle de base $[a,b]$, de hauteur égale à la valeur moyenne de $f$ sur $[a,b]$. Cela motive la définition suivante :

**Définition 6.2.8 (Moyenne de $f$)**

Soit $f$ une fonction intégrable sur $[a,b]$. La moyenne de $f$ sur $[a,b]$. est la quantité définie par l'intégrale

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Le théorème des sommes de Riemann que nous verrons un peu plus loin précise cette notion de moyenne : il s'agit en fait d'une limite de la moyenne des valeurs prises par $f$ en $n$ points régulièrement répartis sur $[a, b]$, limite prise lorsque le nombre de points $n$ tend vers $+\infty$.

## II.2 Exemples importants de fonctions intégrables

Voici une classe importante de fonctions intégrables :

**Théorème 6.2.9 (Intégrabilité des fonctions monotones)**
*Soit $f$ une fonction monotone sur $[a, b]$. Alors $f$ est intégrable sur $[a, b]$.*

Des arguments un peu plus fins, nécessitant l'utilisation du théorème de Heine (donc de la compacité), amène l'intégrabilité de cette seconde classe de fonctions :

**Théorème 6.2.10 (Intégrabilité des fonctions continues)**
*Soit $f$ continue sur $[a, b]$. Alors $f$ est intégrable sur $[a, b]$.*

Nous verrons un peu plus loin que cela reste vrai pour les fonctions continues par morceaux. Mais auparavant, nous devons établir un certain nombre de propriétés de l'intégrale de Riemann.
Avant de quitter cette section, nous donnons un exemple de fonction bornée mais non intégrable :

**Exemple 6.2.11**
Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [0, 1]$ par $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Alors $f$ est bornée, mais n'est pas intégrable. Plus précisément, $I_-(f) = 0$ et $I_+(f) = 1$.

## II.3 Propriétés de l'intégrale

**Proposition 6.2.12 (Additivité par rapport aux bornes – relation de Chasles)**
*Soit $f$ une fonction intégrable sur $[a, b]$ et $c \in ]a, b[$. Alors $f$ est intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$, et :*

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

**Proposition 6.2.13 (Structure de l'ensemble des fonctions intégrables)**
*L'ensemble $\mathrm{Int}([a, b])$ des fonctions intégrables sur $[a, b]$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*

**Proposition 6.2.14 (Linéarité de l'intégrale)**
*L'intégrale $\int_{[a,b]} : \mathrm{Int}([a, b]) \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire sur l'espace vectoriel $\mathrm{Int}([a, b])$. Autrement dit, pour toutes fonctions intégrables $f$ et $g$, et tout réel $\lambda$, on a :*

$$\int_a^b (f(x) + \lambda g(x))\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) + \lambda \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

**Proposition 6.2.15 (Croissance et positivité de l'intégrale)**

*Soit $f$ et $g$ deux fonctions intégrables sur $[a,b]$ telles que pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$. Alors :*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

*En particulier, si $f$ est intégrable sur $[a,b]$ et* positive, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

**Corollaire 6.2.16 (Inégalité de la moyenne)**

*Soit $f$ une fonction intégrable sur $[a,b]$ telle que $m \leqslant f \leqslant M$. Alors :*

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M.$$

**Proposition 6.2.17 (Inégalité triangulaire intégrale)**

*Soit $f$ une fonction intégrable sur $[a,b]$. Alors $|f|$ est intégrable sur $[a,b]$, et :*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

**Avertissement 6.2.18**

Il est important dans cette inégalité de bien respecter l'ordre des bornes : l'inégalité triangulaire n'est valable que lorsque $a < b$.

**Proposition 6.2.19 (Intégrabilité d'un produit)**

*Soit $f$ et $g$ deux fonctions intégrables sur $[a,b]$. Alors le produit $fg$ est intégrable sur $[a,b]$.*

## II.4 Intégrales des fonctions continues par morceaux

**Définition 6.2.20 (Fonctions continues par morceaux sur un segment)**

Soit $f$ une fonction définie sur un segment $[a,b]$. On dit que $f$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $a = \sigma_0 < \cdots < \sigma_n = b$ de $[a,b]$ telle que $f$ soit continue sur tous les intervalles ouverts $]\sigma_i, \sigma_{i+1}[$ $(i \in [\![0, n-1]\!])$, et admette des limites finies à droite en $\sigma_0 = a$, à droite et à gauche (pas nécessairement égales) en $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ et à gauche en $\sigma_n = b$.

On définit plus généralement la notion de fonction continue par morceaux sur un intervalle quelconque, même si nous n'aurons pas à nous servir de cette notion dans l'immédiat.

**Définition 6.2.21 (Fonction continue par morceaux sur un intervalle)**

Une fonction $f$ définie sur un intervalle $I$ est continue par morceaux sur cet intervalle si elle est continue par morceaux sur tout segment inclus dans l'intervalle $I$.

**Théorème 6.2.22 (Intégrabilité des fonctions continues par morceaux)**
*Toute fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ est intégrable.*

## II.5 Sommes de Riemann

**Théorème 6.2.23 (Sommes de Riemann)**
*Soit $f$ une fonction intégrable sur $[a,b]$. Alors :*

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$$

On utilise souvent ce théorème sur l'intervalle $[0,1]$ : cela s'écrit alors :

$$\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Seul le cas d'une fonction $f$ continue est au programme, cas dans lequel la démonstration se simplifie notablement, en utilisant la continuité uniforme de $f$.

## II.6 Extension des résultats aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Étant donnée une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, on peut décomposer $f$ en $f = f_1 + \mathrm{i}\, f_2$, où $f_1$ et $f_2$ sont à valeurs réelles. On définit alors :

**Définition 6.2.24 (Intégrale d'une fonction à valeurs complexes)**
Soit $f = f_1 + \mathrm{i}\, f_2$. On dit que la fonction $f$ est intégrable si et seulement si $f_1$ et $f_2$ le sont, et dans ce cas,

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b f_1(t)\ \mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b f_2(t)\ \mathrm{d}t.$$

On montre sans difficulté que l'ensemble des fonctions intégrables de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel, et que l'intégrale est une forme linéaire. On vérifie également sans peine la relation de Chasles, ainsi que l'intégrabilité d'un produit de fonctions intégrables, en exprimant sa partie réelle et sa partie imaginaire à l'aide des parties réelles et iméginaires des deux fonctions initiales.
Par ailleurs, une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ étant continue si et seulement sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont, on récupère également de la sorte l'intégrabilité des fonctions continues par morceaux à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Le seul résultat qu'il ne soit pas complètement immédiat de généraliser est l'inégalité triangulaire, qu'on peut déduire du cas réel par un argument de rotation :

**Théorème 6.2.25 (Inégalité triangulaire intégrale dans $\mathbb{C}$)**
*Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ intégrable. Alors $|f|$ est aussi intégrable, et*

$$\left|\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t.$$

# III Primitives et intégration

## III.1 Rappels

Nous renvoyons au chapitre sur la dérivabilité pour le théorème fondamental du calcul des intégrales :

**Théorème 6.3.1 (Expression intégrale d'une primitive)**
*Soit $I$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Alors $f$ admet une primitive sur $I$. De plus, soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. L'unique primitive $F$ de $f$ telle que $F(x_0) = y_0$ est :*

$$\forall x \in I, \quad F(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t.$$

*En particulier, l'unique primitive $F$ telle que $F(x_0) = 0$ est :*

$$\forall x \in I, \quad F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t.$$

**Corollaire 6.3.2 (Théorème fondamental du calcul des intégrales)**
*Soit $f$ continue sur $[a, b]$. Soit $F$ une primitive de $f$. Alors :*

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Nous renvoyons au chapitre initial *Outils analytiques* pour le tableau récapitulatif des primitives à connaître impérativement sur le bout des doigts, ainsi que pour tous les théorèmes essentiels issus du théorème fondamental, en particulier :
- Dérivation d'une intégrale dépendant de ses bornes
- Intégration par parties
- Changement de variable

Nous rappelons aussi à l'occasion que la formule de Taylor avec reste intégral est obtenu par une intégration par partie itérée.

Nous terminons ce chapitre par l'étude de la primitivation des fractions rationnelles.

## III.2 Primitivation des fractions rationnelles

Le fait important à retenir est qu'on sait primitiver toutes les fractions rationnelles, à condition de connaître explicitement ses pôles. Ce fait est souvent un phare guidant les naufragés du calcul intégral vers des rivages cléments, grâce à cette idée fixe : « se ramener à l'intégrale d'une fraction rationnelle ».

**Méthode 6.3.3 (Primitivation d'une fraction rationnelle $F$)**

1. Trouver la décomposition en éléments simples de $F$ dans $\mathbb{R}(X)$.
2. La partie polynomiale se primitive facilement.
3. Les termes en $\dfrac{1}{(x-a)^\alpha}$ se primitivent en $\dfrac{1}{(1-\alpha)(x-a)^{\alpha-1}}$ si $\alpha \neq 1$, et $\ln|x-a|$ si $\alpha = 1$.
4. Pour les facteurs irréductibles de degré 2, faire une mise sous forme canonique du dénominateur et factoriser par le terme constant restant, ce qui ramène à :

$$\int \frac{cx+d}{((ax+b)^2+1)^\alpha}\ \mathrm{d}x.$$

Le changement de variable $y = ax + b$ nous ramène alors à

$$\int \frac{sy+t}{(y^2+1)^\alpha}\,\mathrm{d}y.$$

Le terme $\dfrac{y}{(y^2+1)^\alpha}$ se primitive en $\dfrac{1}{2}\ln(y^2+1)$ si $\alpha = 1$ et en $\dfrac{1}{2(1-\alpha)(y^2+1)^{\alpha-1}}$ sinon. On est donc ramené à $\displaystyle\int \frac{1}{(y^2+1)^\alpha}\,\mathrm{d}y$.

Avec un peu d'habitude, on peu se débarasser du terme $cx$ avant la mise sous forme canonique, en le faisant partir dans une primitivation du type $\dfrac{u'}{u^\alpha}$.

5. Le calcul de $\displaystyle\int \frac{1}{(y^2+1)^\alpha}\,\mathrm{d}y$ se fait par réduction du degré $\alpha$ par intégrations par partie successives, jusqu'à se ramener au cas $\alpha = 1$, pour lequel la primitivation se fait en $\operatorname{Arctan} y$.

# 7

# Séries numériques

Qu'est-ce qu'une série ? Répondre à cette question pose un certain nombre de problèmes. Intuitivement, ainsi que nous l'avons vu, une série est un objet collectant les différentes sommes des premiers termes d'une suite. Autrement dit, il s'agit d'un point de vue sur les suites, différent du point de vue usuel, puisqu'il s'agit ici de considérer les suites au travers de leurs sommes partielles. Mais comment définir de façon spécifique un objet qui existe déjà, et dont on veut simplement modifier le point de vue ?
Définir une série comme un objet $\sum u_n$ de sommes de termes $(u_n)$ nécessite de s'être donné une suite $(u_n)$, et de considérer les sommes partielles $S_n$ associées à cette suite. Ainsi, une définition correcte d'une série serait de la définir couple un couple $((u_n),(S_n))$ de deux suites, la seconde correspondant à la somme partielle de la première. De la sorte, on définit la suite $(u_n)$ ($u_n$ est le terme général de la série) ainsi que le point de vue (le fait que l'on considère les sommes partielles). Certains auteurs se contente de définir une série comme la suite des sommes partielles d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mais cette définition sous-entend la donnée initiale d'une suite $(u_n)$ et ne diffère donc par réellement de la définition formelle sous forme d'un couple. Même si cette définition est formellement moins rigoureuse, c'est celle-ci que nous retiendrons, afin de ne pas trop mystifier un objet somme toute assez simple à appréhender.

## I Notion de série et de convergence

### I.1 Définitions

**Définition 7.1.1 (Série)**

(i) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels ou complexes. La série de terme général $u_n$, notée $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$, ou plus simplement $\sum u_n$, est, avec l'abus mentionné dans l'introduction du chapitre, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de la suite $(u_n)$, à savoir :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

(ii) $S_n$ est appelé somme partielle (d'ordre $n$) de la série $\sum u_n$, et $u_n$ est appelé terme général de la série $\sum u_n$.

**Remarques 7.1.2**

1. La donnée de la suite $(S_n)$ des sommes partielles de $\sum u_n$ permet de retrouver le terme général $u_n$ de la série, puisque

$$u_0 = S_0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad u_n = S_n - S_{n-1}.$$

2. La définition se généralise de façon évidente pour des séries dont le premier terme est $u_{n_0}$, $n_0 \in \mathbb{N}$ (ou même $n_0 \in \mathbb{Z}$).

**Avertissement 7.1.3**

Attention à ne pas confondre suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et série de terme général $u_n$.

**Définition 7.1.4 (Convergence d'une série)**

(i) On dit que la série $\sum u_n$ de terme général $u_n$ *converge* si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles admet une limite finie. On note alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n.$$

Cette quantité est appelée *somme* de la série de terme général $u_n$.

(ii) Une série non convergente est dite *divergente*.

(iii) Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série convergente, et soit $n \in \mathbb{N}$. Le $n$-ième *reste* de la série est :

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n.$$

(iv) La *nature* de la série $\sum u_n$ est le fait d'être convergente ou divergente.

**Remarque 7.1.5**

Par convention, afin de ne pas avoir d'ambiguïté dans la terminologie, nous parlerons de série divergente également lorsque nous adopterons un point de vue dans $\overline{\mathbb{R}}$, dans le cas d'une série dont les sommes partielles tendent vers $+\infty$ ou $-\infty$. Nous nous autoriserons cependant parfois dans cette situation à écrire l'égalité suivante, valable dans $\overline{\mathbb{R}}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty \qquad \text{ou} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = -\infty.$$

**Avertissement 7.1.6**

Toute série divergente ne diverge pas vers $+\infty$ ou $-\infty$ !

**Exemple 7.1.7**

$\sum(-1)^n$

Nous verrons plus loin qu'une façon efficace de montrer la convergence d'une série est de la comparer à une autre série dont on connaît les propriétés de convergence. Pour cette raison, il est important de connaître les propriétés de convergence d'un certain nombre de séries de référence. De l'importance du théorème suivant !

**Théorème 7.1.8 (Séries géométriques)**

*Soit $a \in \mathbb{C}$. La série $\sum a^n$ converge si et seulement si $|a| < 1$ ; dans ce cas,* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.

L'exemple suivant est également d'une grande importance (peut-être encore plus que les séries géométriques). Nous nous contentons de l'indiquer en exemple pour le moment : nous énoncerons un théorème plus général un peu plus tard.

**Exemple 7.1.9 (Série de Riemann de paramètre 1)**
La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est divergente. Cette série est appelée *série harmonique*

La comparaison à des séries de référence permettra d'obtenir des critères efficaces de convergence, rendant en général l'étude de la convergence des séries beaucoup plus aisée que celle des suites. Pour cette raison, il est souvent intéressant de pouvoir ramener l'étude de la convergence d'une suite à celle d'une série.

**Méthode 7.1.10 (Comment étudier la convergence d'une suite *via* les séries)**
La convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ équivaut à la convergence de la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$. C'est un moyen pratique de démontrer la convergence de certaines suites, en utilisant les techniques spécifiques et performantes des séries.

## I.2 Propriétés liées à la convergence

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

**Proposition 7.1.11**
*Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne diffèrent que d'un nombre fini de termes, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.*

**Théorème 7.1.12 (CN de convergence portant sur le terme général)**
*Si $\sum u_n$ converge, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. De manière équivalente, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, alors $\sum u_n$ diverge.*

**Définition 7.1.13 (Divergence grossière)**
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, on dit que $\sum u_n$ diverge *grossièrement*.

**Avertissement 7.1.14**
**La réciproque est fausse.** Une série dont le terme général est de limite nulle peut diverger. C'est le cas par exemple de $\sum \frac{1}{n}$. Ainsi, il existe des séries divergentes sans être grossièrement divergente.

**Proposition 7.1.15 (Linéarité)**
*Soit $\lambda$ et $\mu$ deux complexes.*

1. *Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge, et :*
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$
2. *Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge.*
3. *Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, on ne peut rien conclure sur $\sum u_n + v_n$.*

### I.3 Types de convergence

Comme nous le verrons, l'étude des séries à termes positifs est plus simple que l'étude générale des séries à termes quelconques, car nous disposons dans ce cadre de résultats de comparaison efficaces. Pour cela, il est souvent utile de pouvoir se ramener à cette situation, ce que l'on fait *via* la notion de convergence absolue.

**Définition 7.1.16 (Convergence absolue)**
On dit que $\sum u_n$ converge *absolument* si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Comme l'indique bien la terminologie, nous avons :

**Théorème 7.1.17 (Convergence absolue entraîne convergence)**
*Toute série réelle ou complexe absolument convergente est convergente.*

C'est cette propriété qui permet bien souvent de ramener l'étude d'une série quelconque à l'étude d'une série à termes positifs. Ce n'est malheureusement pas toujours possible :

**Avertissement 7.1.18**
La réciproque est fausse. Il existe des séries convergentes, mais pas absolument convergentes.

**Exemple 7.1.19**
La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, mais pas absolument convergente. On montre sa convergence en montrant que les deux suites extraites $(S_{2n})$ et $(S_{2n+1})$ de la suite de ses sommes partielles sont adjacentes.

**Définition 7.1.20 (Série semi-convergente)**
Si $\sum u_n$ est convergente sans être absolument convergente, on dit que la série est semi-convergente.

### I.4 Démarche générale d'étude d'une série

Nous obtenons ainsi la démarche générale d'étude, démarche que nous affinerons dans la suite du chapitre.

**Méthode 7.1.21 (démarche générale pour l'étude des séries)**

1. Calculer si cela ne présente pas une difficulté excessive la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour étudier l'éventuelle divergence grossière. Cette étape peut souvent se faire de tête.
2. Étudier la convergence de $\sum |u_n|$, c'est-à-dire la convergence absolue de $\sum u_n$.
3. Si $\sum |u_n|$ diverge, essayer d'obtenir la convergence (ou la divergence) par d'autres méthodes, plus spécifiques aux séries à termes quelconques (par exemple par la méthode des séries alternées).

## II Séries à termes positifs

Dans tout ce paragraphe, sauf indication contraire, on considère des séries $\sum u_n$, à termes positifs, c'est-à-dire telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$. On peut transcrire facilement tout ce qui suit :

- au cas où : $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \geqslant 0$ ($(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive à partir d'un certain rang) : en effet deux séries ne différant que d'un nombre fini de termes ont même nature ;
- au cas d'une série à termes tous négatifs puisque $\sum a_n$ et $\sum(-a_n)$ ont même nature.

## II.1 Comparaisons entre séries à termes positifs

La plupart des règles rendant l'étude des séries à terme positifs plutôt aisée résultent du résultat suivant, scholie du théorème de convergence monotone des suites.

**Proposition 7.2.1 (Convergence dans $\overline{\mathbb{R}}$ d'une série à termes positifs)**
*Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Alors soit $\sum u_n$ converge, soit elle diverge vers $+\infty$.*

En particulier, on en déduit le premier résultat de comparaison des séries, duquel découle tous les autres :

**Théorème 7.2.2 (Théorème de comparaison des séries à termes positifs, TCSTP)**
*Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$. Alors :*

1. *si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ converge aussi ;*
2. *si $\sum u_n$ diverge, $\sum v_n$ diverge aussi.*
   *De plus, si la divergence est grossière pour $\sum u_n$, elle l'est aussi pour $\sum v_n$.*

Le deuxième point (si on omet le cas de divergence grossière) n'est évidemment rien de plus que la contraposée du premier.
Il faut bien comprendre qu'une série $\sum u_n$ est la somme de plein de $u_n$ : si les $u_n$ (positifs) sont suffisamment petits la somme ne grossit pas trop vite et converge ; si les $u_n$ ne deviennent pas assez vite petits, en revanche, la somme grossit trop vite et diverge.
Ainsi, une inégalité du type $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ permet de contrôler la taille des éléments que l'on somme. Si $\sum v_n$ converge, cela signifie que les $v_n$ restent assez petits, donc les $u_n$ aussi. Inversement, si $\sum u_n$ diverge, cela signifie que les $u_n$ ne deviennent pas petits assez vite, donc les $v_n$ non plus !
On voit donc qu'en fait, ce qui importe, c'est la vitesse de convergence de $u_n$ vers 0 : plus $u_n$ converge vite vers 0, plus la série a de chances d'être convergente. Ceci se traduit bien par des propriétés de dominance ou de négligeabilité, fournissant notre deuxième critère de convergence.

**Corollaire 7.2.3 (Comparaison des séries par dominance ou négligeabilité)**
*Soit $\sum u_n$ une série à termes quelconque, et $\sum v_n$ une série à termes positifs telles que $u_n = O(v_n)$ (ou $u_n = o(v_n)$). Alors :*
- *la convergence de $\sum v_n$ entraîne la convergence absolue de $\sum u_n$.*
- *la divergence de $\sum u_n$ (celle de $\sum |u_n|$ suffit) entraîne la divergence de $\sum v_n$.*

Il paraît alors raisonnable de se dire que deux séries dont les termes généraux se comportent sensiblement de la même façon en $+\infty$ sont de même nature. Cela constitue notre troisième critère de comparaison pour les séries à termes positifs.

**Théorème 7.2.4 (Théorème de comparaison de séries à termes positifs par équivalence)**
*Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries* à termes positifs. *Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.*

**Avertissement 7.2.5**
Ce résultat est faux si on ne suppose pas la positivité des séries !

**Exemple 7.2.6**
Contre-exemple dans le cas de séries à termes quelconques : $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge et $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ diverge. Pourtant : $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

## II.2 Comparaison entre une série et une intégrale

Dans ce paragraphe, nous donnons un théorème de comparaison d'une nature un peu différente, qui permettra d'obtenir la nature de certaines séries de référence. Pour énoncer le théorème, il nous faut introduire la notion d'intégrale convergente sur un domaine infini (c'est un cas particulier de l'étude plus générale des intégrales impropres)

**Définition 7.2.7 (Intégrale convergente en $+\infty$)**
Soit $f$ une fonction continue de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

- On dit que $\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque $x$ tend vers $+\infty$. On note alors :
$$\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t.$$
- Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ est divergente.
- La nature d'une intégrale est le fait d'être convergente ou divergente.

**Théorème 7.2.8 (Théorème de comparaison entre série et intégrale)**
*Soit $a \in \mathbb{R}_+$ et soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue décroissante et positive. Alors $\sum_{n\geqslant a} f(n)$ converge si et seulement si $\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge.*

En d'autres termes, sous les hypothèses du théorème, la série $\sum_{n\geqslant a} f(n)$ et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ sont de même nature.
La méthode d'encadrement développée dans la preuve du théorème de comparaison entre séries et intégrales est à savoir mettre en pratique, car elle est utile dans d'autres circonstances, par exemple pour obtenir des équivalents de sommes partielles (en cas de divergence) ou de restes (en cas de convergence).

## II.3 Séries de référence

Pour pouvoir utiliser efficacement les théorèmes de comparaison, il faut disposer d'un certain nombre de séries de référence, dont on connaît bien le comportement, et auxquelles nous pourrons comparer les autres séries. Nous avons déjà vu les séries géométriques :

**Théorème 7.2.9 (Nature des séries géométriques)**

*La série $\sum x^n$ converge si et seulement si $|x| < 1$. La convergence est alors absolue, tandis que la divergence est grossière.*

On peut en déduire des propriétés de convergence d'autres séries du même type :

**Exemple 7.2.10**

Soit $P$ un polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$. La série $\sum P(n)x^n$ converge absolument si $|x| < 1$ et diverge grossièrement si $|x| \geqslant 1$.

**Théorème 7.2.11 (Nature des séries exponentielles)**

*La série exponentielle $\displaystyle\sum \frac{x^n}{n!}$ est absolument convergente, pour toute valeur de $x$ (sa somme étant $\mathrm{e}^x$).*

Comme pour les série géométriques, on obtient plus généralement :

**Exemple 7.2.12**

Soit $P$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. La série $\displaystyle\sum P(n)\frac{x^n}{n!}$ est convergente.

Enfin, la troisième famille de séries de référence est constituée des séries de Riemann.

**Définition 7.2.13 (Série de Riemann)**

La série de Riemann de paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ est la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$.

Du théorème de comparaison entre séries et intégrales, on déduit :

**Théorème 7.2.14 (Nature des séries de Riemann)**

*Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

Voici une autre famille, généralisant les séries de Riemann, souvent prise en référence, mais hors-programme (à savoir réétudier rapidement) :

**Proposition 7.2.15 (Nature des séries de Bertrand)**

*La série de Bertrand de paramètre $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, définie par $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$, est convergente si et seulement si $(\alpha,\beta) > (1,1)$ pour l'ordre lexicographique.*

Le cas limite $\alpha = 1$ s'obtient par comparaison série-intégrale. Les autres cas s'obtiennent par comparaison à une série de Riemann, et seront développés en exemple d'application des critères de comparaison donnés dans le paragraphe suivant.

**Remarque 7.2.16**

L'ordre de grandeur de la limite entre convergence et divergence, égal à $\frac{1}{n}$ sur l'échelle $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ donnée par les séries de Riemann, peut être affinée en $\frac{1}{n\ln(n)}$ sur l'échelle donnée par les séries de Bertrand.

Les séries de Bertrand peuvent en fait être généralisées en ajoutant au dénominateur d'autres termes, puissances de composées successives du logarithme. On peut montrer que la limite de convergence s'obtient, comme plus haut, pour l'ordre lexicographique, pour tous les exposants égaux à 1. Par exemple $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n) \ln^\gamma(\ln n) \ln^\delta(\ln(\ln(n)))}$ converge si et seulement si $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) > (1, 1, 1, 1)$.

### II.4 Comparaison avec une série de Riemann

Des comparaisons avec les séries de référence, on déduit un certain nombre de critères de convergence assez efficaces. Ces critères n'étant pas explicitement au programme, il convient de bien se souvenir de la manière de les obtenir rapidement à partir des résultats généraux de comparaison. Connaître ces critères hors-programme permet toutefois de savoir rapidement comment diriger son raisonnement.

**Théorème 7.2.17 (Règle de Riemann, ou règle « $n^\alpha u_n$ », HP)**

*Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.*

1. *S'il existe $\alpha > 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (par exemple si elle admet une limite nulle), alors $\sum u_n$ converge.*
2. *Si $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée à partir d'un certain rang par un réel $k > 0$ (par exemple si $(nu_n)$ admet une limite infinie), alors $\sum u_n$ diverge.*

**Exemple 7.2.18**

Séries de Bertrand

### II.5 Comparaison avec une série géométrique

**Théorème 7.2.19 (Règle de d'Alembert, HP)**

*Soit $\sum u_n$ une série à termes quelconques. On suppose que $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)$ admet une limite $\ell$. Alors :*

1. *Si $0 \leqslant \ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge absolument.*
2. *Si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.*
3. *Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure par cette méthode.*

**Exemples 7.2.20**

1. On peut retrouver de manière élémentaire, et sans référence à la fonction exponentielle, la convergence de $\sum \frac{z^n}{n!}$
2. Plus généralement, ce critère est souvent très efficace pour l'étude des séries du type $\sum a_n z^n$ (séries entières). Par exemple $\sum n \ln(n) z^n$.

## III Étude de la semi-convergence

Aucun résultat théorique n'est à connaître concernant l'étude de la semi-convergence. Les résultats et méthodes développés dans ce paragraphe sont théoriquement hors-programmes, mais il est bien utile en pratique de les connaître, ainsi que la démarche permettant d'y parvenir.

## III.1 Séries alternées

Le premier cas simple de semi-convergence facile à étudier est le cas de toutes les séries s'étudiant de la même façon que $\sum \frac{(-1)^n}{n}$. En étudiant de plus près la preuve de la convergence de cette série, on se rend compte que les propriétés nécessaires à établir cette convergence sont celles rassemblées dans le définition suivante :

**Définition 7.3.1 (Série alternée)**
On dit qu'une série $\sum u_n$ est alternée s'il existe une suite positive décroissante de limite nulle $(a_n)$ telle que $u_n = (-1)^n a_n$.

Nous obtenons alors, par la même technique que pour $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ (à développer à chaque fois) :

**Théorème 7.3.2 (Théorème spécial de convergence des séries alternées, TSCSA, HP)**
*Toute série alternée est convergente.*

**Avertissement 7.3.3**
N'oubliez pas l'hypothèse de décroissance dans la définition des séries alternées. Sans cette hypothèse, le TSCSA entre en défaut.

**Exemple 7.3.4**
$\sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ est une série dont le terme général tend vers 0 et a un signe qui alterne. Cependant elle est divergente. C'est la série que nous avons déjà utilisée pour contredire le théorème de comparaison par équivalents pour des séries à termes quelconques.

## III.2 Critère d'Abel

Le critère d'Abel généralise le TSCSA, permettant par exemple de remplacer le signe $(-1)^n$ par un terme $\cos(\alpha n)$ ou $\sin(\alpha n)$, ou par une exponentielle complexe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha n}$. En particulier, contrairement au cas des séries alternées, il est utilisable dans le cas complexe.

**Théorème 7.3.5 (Critère d'Abel, HP)**

1. *Soit $\sum a_n b_n$ une série telle que $(a_n)$ soit réelle positive décroissante de limite nulle, et telle que la suite $(B_n)$ des sommes partielles de $\sum b_n$ soit bornée. Alors $\sum a_n b_n$ converge.*
2. *Les suites $(b_n)$ définies par $b_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\alpha}$, $\cos(\mathrm{i}\,n\alpha)$ et $\sin(\mathrm{i}\,n\alpha)$ remplissent les conditions requises, lorsque $\alpha \not\equiv 0\ [2\pi]$.*

**Exemples 7.3.6**

1. La convergence des séries alternées peut être vu comme un cas particulier de ce théorème
2. $\sum \frac{\cos n}{\sqrt{n}}$ converge
3. $\sum \frac{z^n}{n}$ converge si et seulement si $|z| \leqslant 1$ et $z \neq 1$.

# IV Calcul de sommes

Il est possible de calculer la somme d'un certain nombre de séries. Ces calculs s'avèrent en particulier très utiles en probabilités, par exemple pour le calcul d'espérances et de variances de variables aléatoires réelles discrètes.
La plupart de ces sommes peuvent être obtenues sur $\mathbb{R}$ par les formules de Taylor. Nous avons déjà eu l'occasion d'en voir certaines lors de l'étude des formules de Taylor.

## IV.1 Séries exponentielles et logarithmiques

Nous avons déjà eu l'occasion de justifier les résultats suivants :

**Proposition 7.4.1 (Séries exponentielles)**
*Pour tout* $z \in \mathbb{C}$, $\quad \mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

**Proposition 7.4.2 (Séries logarithmiques)**
*Pour tout* $x \in ]-1,1[$, $\quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1)^{n+1}x^n}{n}$.

De la première somme découle une méthode de calcul de toutes les sommes du type $\sum \frac{P(n)x^n}{n!}$, $P$ étant un polynôme.

**Méthode 7.4.3 (Calcul de $\sum \frac{P(n)x^n}{n!}$)**
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $x \in \mathbb{Z}$. Soit $d = \deg(P)$.

- La famille $(1, X, X(X-1), \dots, X(X-1)\dots(X-d+1))$ est une base de $\mathbb{C}_d[X]$. On décompose $P$ dans cette base :
  - soit par ajustements successifs des coefficients dominants et compensations (en partant des plus hauts degrés)
  - soit par divisions euclidiennes successives par $X$, $X-1, \dots, X-d+1$.
- On est ramené à des sommes $\sum_{n \geqslant 0} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n!} x^n$ :
  - Supprimer les termes initiaux qui sont nuls (la somme peut commencer à $n = k$)
  - Simplifier les termes $n(n-1)\dots(n-k+1)$ avec les termes supérieurs de la factorielle (il reste $(n-k)!$)
  - Faire un changement de variable, nous ramenant à $\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^{n+k}}{n!} = x^k \mathrm{e}^x$.

## IV.2 Séries géométriques

Nous avons déjà obtenu la formule $\sum x^n = \frac{1}{1-x}$, lorsque $|x| < 1$. Nous obtenons de façon plus générale

**Définition 7.4.4 (Formule du binôme généralisée, Newton)**
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ La série $\sum \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$ est absolument convergente pour tout $|x| < 1$, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = (1+x)^\alpha.$$

En particulier, pour $\alpha = -(r+1)$, où $r \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in ]-1,1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(r+1)(r+2)\cdots(r+n)}{n!} x^n = \frac{1}{(1-x)^{r+1}},$$

ou encore :

**Corollaire 7.4.5 (Formule du binôme négatif)**

*Soit $r \in \mathbb{N}$. On a :*

$$\forall x \in ]-1,1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{r+n}{n} x^n = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}.$$

En passant une factorielle de l'autre côté, on obtient :

$$\forall x \in ]-1,1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (n+r)(n+r-1)\cdots(n+1)x^n = \frac{r!}{(1-x)^{r+1}}.$$

La formule du binôme négatif dit donc très exactement qu'on peut dériver terme à terme la série géométrique.

**Avertissement 7.4.6**

En général on ne peut pas dériver terme à terme une série $\sum f_n(x)$ de fonctions. Certains théorèmes que vous verrez l'année prochaine permettent de le faire sous certaines hypothèses.

**Méthode 7.4.7 (Calcul de $\sum P(n)x^n$.)**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$.

- Soit $d$ le degré de $P$. La famille $(1, X+1, (X+1)(X+2), \ldots, (X+1)(X+2)\ldots(X+d)$ est une base de $\mathbb{C}_d[X]$. On décompose $P$ dans cette base. Cela peut se faire
  - soit par compensations successives en partant du plus haut degré, de sorte à adapter les coefficients dominants (efficace surtout en petits degrés)
  - soit par divisions euclidiennes successives par $X+1$, $X+2, \ldots, X+d$.
- On est alors ramené au calcul de sommes du type $\sum (n+1)\cdots(n+k)x^n$, ce qui se fait par la formule du binôme négatif.
- On peut aussi décomposer $P$ sur la base $(1, X, (X-1), \ldots, (X-d+1)$ et se ramener aux sommes $\sum n(n-1)\ldots(n-k+1)x^{n-k}$, relevant également des sommes du binôme négatif par changement d'indice.

# V Problèmes de commutativité

Nous terminons ce chapitre par le problème du changement de l'ordre de sommation dans une série.

**Avertissement 7.5.1**

Il est improtant de retenir qu'en général, changer l'ordre des termes dans une série peut modifier la somme (et même la nature) d'une série. On peut par exemple montrer qu'à partir d'une série semi-convergente quelconque, on peut obtenir, simplement en changeant l'ordre de sommation, une série convergeant vers n'importe quelle valeur fixée à l'avance, une série divergeant vers $+\infty$ ou $-\infty$, ainsi qu'une série divergeant dans $\overline{\mathbb{R}}$. Changer l'ordre de sommation modifie donc en profondeur les propriétés d'une série en général.

Notre but est d'établir qu'en se donnant des hypothèses plus fortes, on peut changer l'ordre de sommation.

**Lemme 7.5.2 (changement de l'ordre dans une série à termes positifs)**

*Soit* $\sum a_n$ *une série à termes positifs et* $\sigma$ *une permutation de* $\mathbb{N}$. *Alors* $\sum a_{\sigma(n)}$ *est de même nature que* $\sum a_n$ *et en cas de convergence,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

**Théorème 7.5.3 (changement de l'ordre dans une série absolument convergente)**

*Soit* $\sum a_n$ *une série absolument convergente, et* $\sigma$ *une permutation de* $\mathbb{N}$. *Alors* $\sum a_{\sigma(n)}$ *est absolument convergente, et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Comme on l'a évoqué, ce résultat entre en défaut dès lors que l'hypothèse de convergence absolue n'est plus vérifiée.

**Remarque 7.5.4**

Ce théorème (et surtout le fait qu'il ne soit pas vérifié lorsque la convergence absolue n'est pas assurée) explique la nécessité d'imposer la convergence absolue dans la définition de l'espérance d'une variable aléatoire réelle discrète $X$. En effet, l'ordre de sommation des termes définissant l'espérance provient d'un choix arbitraire d'une numérotation des valeurs possibles prises par $X$. Pour que l'espérance soit bien définie, il faut que cette somme soit indépendante du choix de cette numérotation, donc de l'ordre de sommation.