Lycée Louis-Le-Grand, Paris 2013/2014
MPSI 4 – Informatique pour tous
J.-P. Becirspahic, A. Troesch

TP n° 10 : Résolutions de systèmes

Exercice 1 – Pivot de Gauss pour des matrices inversibles

1. Écrire une fonction `gauss` prenant en arguments deux matrices A et B, et résolvant le système $AX = B$, si la matrice A est inversible. On fera une recherche du pivot de valeur absolue maximale. Si on ne trouve pas de pivot non nul, on renverra un message d'erreur « `Matrice non inversible` »

   On isolera dans des fonctions annexes toutes les opérations de manipulation de lignes, ainsi que la recherche du pivot.

2. Tester la fonction `gauss` sur le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Commenter et résoudre le problème rencontré.

3. En utilisant la fonction `clock` du module `time`, mesurer le temps de résolution d'un système 100×100 dont les coefficients sont choisis aléatoirement entre 0 et 1000. De même pour un système 200×200. Commenter le rapport observé entre les 2 mesures.

4. Un cas d'instabilité numérique.
   Soit $H_n = \left(\dfrac{1}{i+j+1}\right)_{0 \leqslant i,j \leqslant n-1}$ la matrice de Hilbert d'ordre n, et C_n la colonne contituée de n coefficients égaux à 1.

   (a) Calculer $B = H_{10} \times C_{10}$

   (b) À l'aide de la fonction `gauss`, résoudre $H_{10}X = B$, recalculer $B' = H_{10}X$ et résoudre à nouveau $H_{10}Y = B'$. Afficher X et Y. Commenter le résultat obtenu.

Pour les comparaisons demandées dans la dernière question de l'exercice 2, on pourra utiliser les fonctions de l'exercice 1.

Exercice 2 – (Décomposition LU)

Soit A une matrice telle que toute sous-matrice principale (sous-matrice carrée calée dans le coin supérieur gauche) soit inversible. On peut montrer qu'alors la matrice A admet une décomposition $A = LU$, où L est une matrice triangulaire inférieure et U une matrice triangulaire supérieure. La matrice L est obtenue en appliquant à la matrice identité les opérations sur les colonnes correspondant aux inverses des matrices d'opérations sur les lignes permettant de trianguler A par la méthode de Gauss (sans échange de ligne).

L'intérêt réside dans le fait qu'on ramène la résolution de $AX = B$ à la résolution de 2 systèmes triangulaires. Ceci s'avère notamment intéressant lorsqu'on a plusieurs systèmes à résoudre associés à la même matrice A.

1. Écrire une fonction retournant les deux matrices L et U de la décomposition ci-dessus, pour une matrice A donnée. On isolera dans des fonctions annexes les opérations sur les lignes. On s'arrangera autant que possible pour éviter les calculs inutiles sur les coefficients qu'on sait être nuls.
2. Écrire une fonction de résolution d'un système triangulaire supérieur, en évitant tout calcul inutile.
3. Écrire une fonction de résolution d'un système triangulaire inférieur, en évitant tout calcul inutile.
4. Soit $A \in \mathcal{M}_{100}(\mathbb{R})$, choisie aléatoirement (les coefficients étant pris dans $[\![0, 1000]\!]$). Comparer :

- le temps de résolution de 25 systèmes associés à A, en calculant une fois pour toutes la décomposition LU de A, puis en résolvant 2 systèmes triangulaires pour chaque second membre B (les 50 seconds membres seront choisis aléatoirement)
- le temps de résolution de 25 systèmes associés à A, en reprenant un pivot complet pour chaque système
- le temps de résolution de 25 systèmes associés à A, en calculant A^{-1} par la méthode du pivot, une fois pour toutes puis en calculant $A^{-1}B$ pour chaque second membre.

5. Plus généralement, tracer, pour $k \in [\![1, 25]\!]$, les 2 courbes correspondant au temps de réponse pour la résolution de k systèmes associés à $A \in \mathcal{M}_{100}(\mathbb{R})$, par décomposition LU, et par calcul de A^{-1}. Commenter.

Pour l'exercice 3, on pourra partir des fonctions définies dans l'exercice 1 et les adapter.

Exercice 3 – Échelonnement d'une matrice et résolution d'un système

1. Écrire une fonction échelonnant une matrice A, et effectant les mêmes opérations sur une matrice B ayant le même nombre de lignes. On retournera une liste constituée des numéros de colonnes des pivots utilisés.
2. Écrire une fonction prenant en paramètre une matrice échelonnée A, une liste correspondant à la position des pivots, et une matrice B, et effetuant un pivot remontant sur la matrice A, ainsi que les mêmes opérations sur B.
3. Écrire une fonction calculant le rang d'une matrice
4. Écrire une fonction calculant l'inverse d'une matrice (et retournant un message d'erreur « `Matrice non inversible` » si la matrice n'est pas inversible)
5. Écrire une fonction résolvant le système $AX = B$, à savoir :
   - retournant un message d'erreur si le système n'a pas de solution
   - retournant un couple (X_0, B), où X_0 est une solution particulière, et B une liste de vecteurs formant une base de l'espace des solutions de l'équation homogène associée.

   On testera cette fonction avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}$, et

   - $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (pas de solution)
   - $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ (solution particulière $\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$, base de l'espace des solutions homogènes : $\left(\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ -1.5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$)