

Cours de mathématiques
Partie II – Analyse
MPSI 4

Alain TROESCH

Version du:

4 juin 2015

Table des matières

7 Études de fonctions	5
I Graphes, symétries, étude élémentaire de fonctions	6
I.1 Graphe	6
I.2 Symétries d'une fonction	7
I.3 Opérations algébriques sur les fonctions	10
I.4 Monotonie	10
I.5 Fonctions bornées	11
II Dérivation	11
II.1 Limites et continuité	12
II.2 Dérivation et tangente	13
II.3 Dérivées à droite et à gauche	15
II.4 Fonctions de classe \mathcal{C}^n	15
II.5 Règles de dérivation	17
II.6 Stabilité des propriétés de régularité	18
III Étude d'une fonction	19
III.1 Variation des fonctions	19
III.2 Comportement asymptotique	20
III.3 Convexité	21
III.4 Plan d'étude d'une fonction	22
IV Dérivations de fonctions réelles à valeurs dans \mathbb{C}	23
8 Les fonctions usuelles	25
I Exponentielle, logarithme, puissances	25
I.1 Logarithme	25
I.2 Exponentielle	26
I.3 Fonctions puissances	27
I.4 Croissances comparées	28
II Fonctions trigonométriques	29
II.1 Sinus	29
II.2 Cosinus	29
II.3 Tangente	30
III Réciproques des fonctions trigonométriques	30
III.1 Arctangente	30
III.2 Arcsinus	32
III.3 Arccosinus	33

IV	Fonctions hyperboliques	35
V	Réciproques des fonctions hyperboliques (HP)	37
VI	Tableau des dérivées des fonctions usuelles	37
9	Calcul intégral	39
I	Calcul intégral et primitivation	39
I.1	Résultats issus de la théorie	39
I.2	Techniques élémentaires de primitivation	41
II	Techniques de calcul intégral	43
II.1	Intégration par parties	44
II.2	Changements de variables	45
II.3	Conséquences pour les fonctions admettant des symétries	46
III	Équations différentielles linéaires	47
III.1	Généralités sur les équations différentielles	47
IV	Introduction rapide aux intégrales impropres	49
IV.1	Équations différentielles linéaires	49
IV.2	Équations différentielles linéaires d'ordre 1	51
IV.3	Résolution des EDL d'ordre 2 à coefficients constants	53
10	Suites numériques	57
I	Convergence de suites	57
I.1	Un peu d'histoire	57
I.2	Définition de la limite d'une suite	58
I.3	Unicité de la limite et exemples	59
I.4	Premières propriétés des suites convergentes	60
I.5	Suites de Cauchy (hors-programme)	60
I.6	Convergence des suites complexes	61
II	Propriétés des suites liées à la convergence	62
II.1	Opérations sur les limites	62
II.2	Limites et inégalités	63
II.3	Suites monotones	65
II.4	Suites adjacentes	65
II.5	Digression sur la construction de \mathbb{R}	66
III	Suites extraites	67
III.1	Définitions	67
III.2	Suites extraites et convergence	67
III.3	Théorème de Bolzano-Weierstrass	68
IV	Traductions séquentielles de certaines propriétés	69
IV.1	Densité	69
IV.2	Borne supérieure	70
IV.3	Autres caractérisations séquentielles	70
V	Suites particulières	70
V.1	Suites définies par une récurrence affine	70
V.2	Suites définies par une relation linéaire d'ordre k	72
V.3	Suites définies par une récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$	74
VI	Étude asymptotique	75
VI.1	Domination, négligeabilité	75
VI.2	Équivalents	78

11 Limites, continuité : étude locale	81
I Préliminaire topologique	81
II Limites	82
II.1 Définitions	82
II.2 Définition synthétique	84
II.3 Unicité de la limite	84
II.4 Limites à droite, limites à gauche	85
II.5 Caractérisation séquentielle d'une limite	85
II.6 Opérations sur les limites	86
II.7 Passage à la limite dans une inégalité	87
II.8 Fonctions monotones	88
III Comparaison locale de fonctions	88
III.1 Petit o , grand O	89
III.2 Équivalents	90
12 Dérivabilité, continuité	93
I Continuité	93
I.1 Fonction continue en un point	93
I.2 Opérations sur les fonctions continues	94
I.3 Fonctions continues et continues par morceaux	94
I.4 Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)	95
I.5 Continuité uniforme	95
I.6 Extrema des fonctions continues sur un intervalle fermé borné	96
I.7 Autour des fonctions monotones – Théorème de la bijection	96
II Dérivabilité	97
II.1 Extremum d'une fonction	97
II.2 Théorème de Rolle	99
II.3 Théorème des accroissements finis	100
II.4 Variations des fonctions dérivables	101
II.5 Dérivation et primitivation	101
II.6 Limites de dérivées et prolongements de fonctions dérivables	102
III Dérivabilités de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C}	103
13 Approximations polynomiales	105
I Formules de Taylor	105
I.1 Développement de Taylor	105
I.2 Formule de Taylor avec reste intégral	107
I.3 Formule de Taylor-Lagrange	107
I.4 Formule de Taylor-Young	108
II Formules de Taylor pour les fonctions usuelles	108
II.1 Exponentielle	108
II.2 Logarithme	109
II.3 Fonctions trigonométriques	109
II.4 Fonctions hyperboliques	110
II.5 Fonctions puissances	110
II.6 Polynômes	111
III Généralités sur les développements limités	112
III.1 Définition, exemples	112
III.2 Restriction	113
III.3 Forme normalisée et partie principale	114
IV Opérations sur les développements limités	115
IV.1 Somme de DL	115

IV.2	Produit de DL	115
IV.3	Composition de DL	116
IV.4	Quotient de DL	117
IV.5	Primitivation d'un DL	118
IV.6	Dérivation	119
V	Développements asymptotiques	119
VI	Applications	121
VI.1	Courbes polynomiales asymptotes à une courbe	121
VI.2	Extréma et points d'inflexion	122
VII	Développements limités des fonctions usuelles	123
14	Intégration	125
I	Intégrale des fonctions en escalier	126
I.1	Notion de subdivision d'un intervalle	126
I.2	Fonctions en escalier	126
I.3	Intégrale d'une fonction en escalier	127
I.4	Propriétés des intégrales de fonctions en escalier	128
II	Construction de l'intégrale de Riemann	129
II.1	Fonctions intégrables	129
II.2	Exemples importants de fonctions intégrables	131
II.3	Propriétés de l'intégrale	131
II.4	Intégrales des fonctions continues par morceaux	132
II.5	Sommes de Riemann	133
II.6	Extension des résultats aux fonctions à valeurs dans \mathbb{C}	133
III	Primitives et intégration	134
III.1	Rappels	134
III.2	Primitivation des fractions rationnelles	134
15	Séries numériques	137
I	Notion de série et de convergence	137
I.1	Définitions	137
I.2	Propriétés liées à la convergence	139
II	Séries à termes positifs	140
II.1	Comparaisons entre séries à termes positifs	140
II.2	Convergence absolue et semi-convergence	141
II.3	Comparaison entre une série et une intégrale	141
II.4	Séries de référence	142
II.5	Comparaison avec une série de Riemann	143
II.6	Comparaison avec une série géométrique	144
III	Étude de la semi-convergence	144
III.1	Séries alternées	144
III.2	Critère d'Abel	145
IV	Calcul de sommes	145
IV.1	Séries exponentielles et logarithmiques	145
IV.2	Séries géométriques	146
V	Problèmes de commutativité	147

Études de fonctions

Il faut donc « savoir calculer » avant que de prétendre accéder à l'Analyse moderne.

(Jean Dieudonné)

Maintenant je ne sais toujours pas pourquoi j'avais cru à cette inégalité, mais j'ai compris pourquoi elle est vraie ! C'est grâce à la formule de Faà di Bruno.

Il y a seize ans à l'École normale supérieure de Paris, notre professeur de géométrie différentielle nous avait présenté cette formule qui donne les dérivées successives des fonctions composées ; elle était si compliquée que nous l'avions accueillie avec hilarité et qu'il avait dû s'excuser, avec un air piteux et un brin d'autodérision : « Ne riez pas, c'est très utile »

Elle est effectivement utile cette formule, il avait raison ; c'est grâce à elle que mon inégalité mystérieuse est vraie !

(Cédric Villani)

Au fond, je suis dans l'air du temps : pendant que les enfants ouvrent leurs cadeaux de Noël avec excitation, je suspends des exposants aux fonctions comme des boules à des sapins, et j'aligne des factorielles comme autant de bougies renversées.

(Cédric Villani)

Introduction

Note Historique 7.0.1

Longtemps, les mathématiques se sont développés au service des autres sciences ; d'ailleurs, la séparation des différentes sciences est tardive, et nombreux ont été les mathématiciens à avoir également été des physiciens de renommés, comme Newton par exemple. Les mathématiques ont d'abord été vues comme un outil :

- au service de la mécanique et de l'ingénierie (Archimède)
- au service de l'astronomie (géométrie grecque, Ptolémée, écoles indienne et arabe)
- au service de toute étude nécessitant d'être chiffrée pour obtenir des ordres de grandeurs.

Du dernier point découle l'importance du développement du calcul numérique (calcul approché, en opposition au calcul algébrique). C'est ce point de vue qui est à la base des procédés d'approximation (méthode de Newton de recherche d'un zéro, méthodes approchées de calcul d'intégrales), aboutissant notamment à la notion de convergence (qui donne la validité de l'approximation à l'infini)

Ainsi, l'utilisation de l'outil est souvent à la base de sa définition, et a souvent précédé sa théorisation : les mathématiques ont évolué de façon empirique.

Dans ce chapitre et les deux suivants, nous introduisons certaines techniques d'analyse. Le but n'est pas d'introduire toute la théorie sous-jacente (cela sera fait plus tard), mais de donner très rapidement

des bases suffisantes pour pouvoir utiliser de façon effective ces techniques, soit pour d'autres domaines scientifiques, soit pour pouvoir illustrer de façon plus intéressante d'autres notions à venir.

Dans ce chapitre, nous développons les techniques d'étude de fonctions ; dans le suivant, nous étudions les fonctions usuelles, certaines déjà étudiées en Terminale, d'autres qui seront nouvelles pour vous. Nous rappellerons les différentes propriétés de ces fonctions. Ce chapitre sera essentiellement zoologique. Dans un troisième et dernier chapitre introductif, nous étudierons les techniques d'intégration et certaines équations différentielles.

I Graphes, symétries, étude élémentaire de fonctions

Nous avons déjà parlé de fonctions d'un ensemble E dans un ensemble F . Nous étudions plus particulièrement ici le cas de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , ou au moins, d'un sous-ensemble de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Nous ferons un peu plus loin une rapide incursion dans le monde des fonctions d'une variable réelle à valeurs dans \mathbb{C} (courbes dans \mathbb{C}).

I.1 Graphe

Nous rappelons que le domaine de définition d'une fonction f est le sous-ensemble D_f (de \mathbb{R} ici) constitué de l'ensemble des éléments x tel que $f(x)$ soit défini.

Dans le cas d'une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , le graphe, tel que nous l'avons défini dans un chapitre antérieur, correspond au sous-ensemble de \mathbb{R}^2 constitué des éléments $(x, f(x))$, pour $x \in D_f$.

Le graphe permet d'avoir une idée générale de la fonction étudiée. Un graphe précis (par approximations et interpolation à partir d'un grand nombre de points, obtenus par exemple par des expériences) permet d'obtenir facilement une première approximation de solutions de certaines équations ou inéquations (figure 7.1)

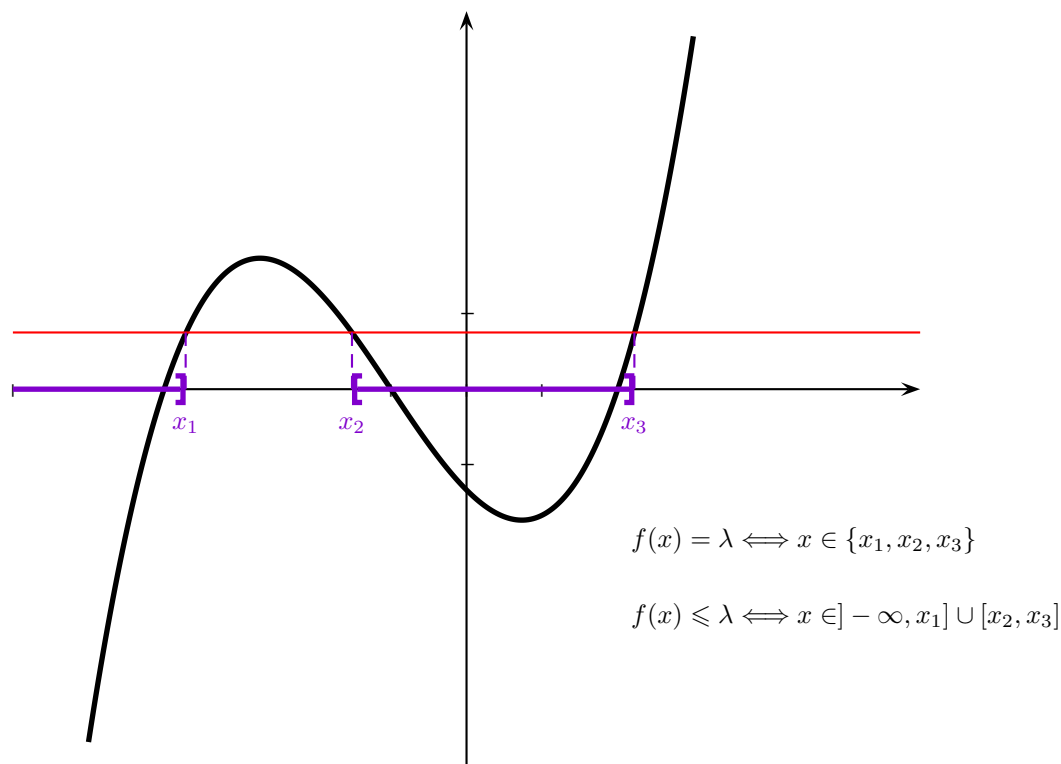


FIGURE 7.1 – Résolution graphique d'une équation $f(x) = \lambda$, ou d'une inéquation $f(x) \leq \lambda$

Évidemment, les résolutions graphiques ne peuvent fournir que des valeurs approchées grossières, mais elles sont souvent suffisantes pour trouver des ordres de grandeur.

On peut aussi utiliser le graphe comme aide visuelle à la résolution d'inéquations (non pas pour trouver les valeurs limites, mais pour comprendre comment se situe l'ensemble des solutions par rapport à ces valeurs limites).

Certaines opérations simples sur les fonctions se traduisent facilement sur le graphe.

Proposition 7.1.1 (Effet sur le graphe de certaines opérations simples, figure 7.2)

Soit f une fonction d'un sous-ensemble E de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , et $a \in \mathbb{R}$. On note (O, \vec{i}, \vec{j}) le repère dans lequel on représente les graphes.

1. Le graphe de $g : x \mapsto f(x - a)$ est obtenu du graphe de f par translation de vecteur $a \cdot \vec{i}$.
2. Le graphe de $h : x \mapsto f(ax)$ est obtenu du graphe de f par une affinité de rapport $\frac{1}{a}$ suivant la direction \vec{i} de centre O .
3. Le graphe de $k : x \mapsto af(x)$ est obtenu du graphe f par une affinité de rapport a suivant la direction \vec{j} de centre O .

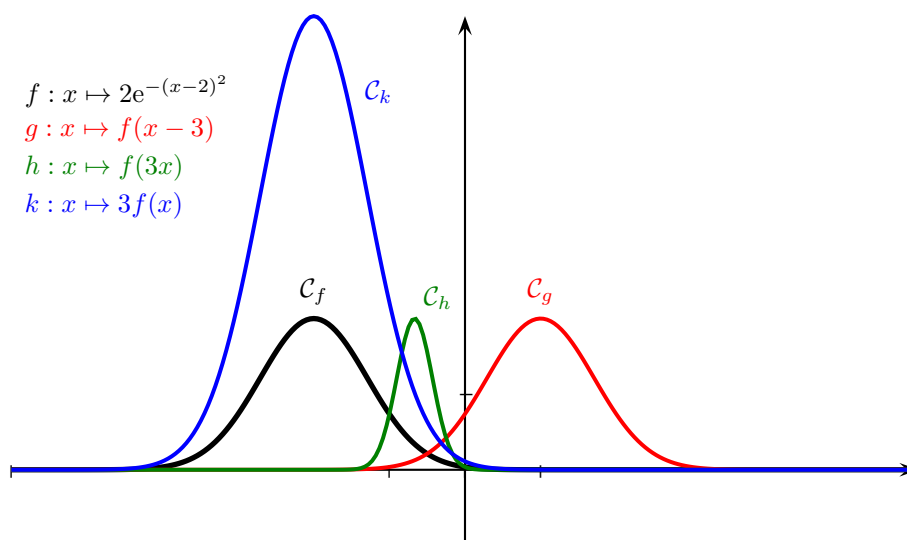


FIGURE 7.2 – Effet sur le graphe de certaines opérations

Exemple 7.1.2

Comment déduit-on du graphe de f celui de $x \mapsto 2f(4 - 2x)$?

Une autre opération se traduisant élégamment sur les graphes est la réciproque des fonctions bijectives.

Proposition 7.1.3 (Graphe d'une fonction réciproque, figure 7.3)

Soit $I, J \subset \mathbb{R}$, et $f : I \rightarrow J$ une bijection. Alors le graphe de f^{-1} est l'image du graphe de f par la symétrie d'axe D , où D est la droite d'équation $y = x$.

I.2 Symétries d'une fonction

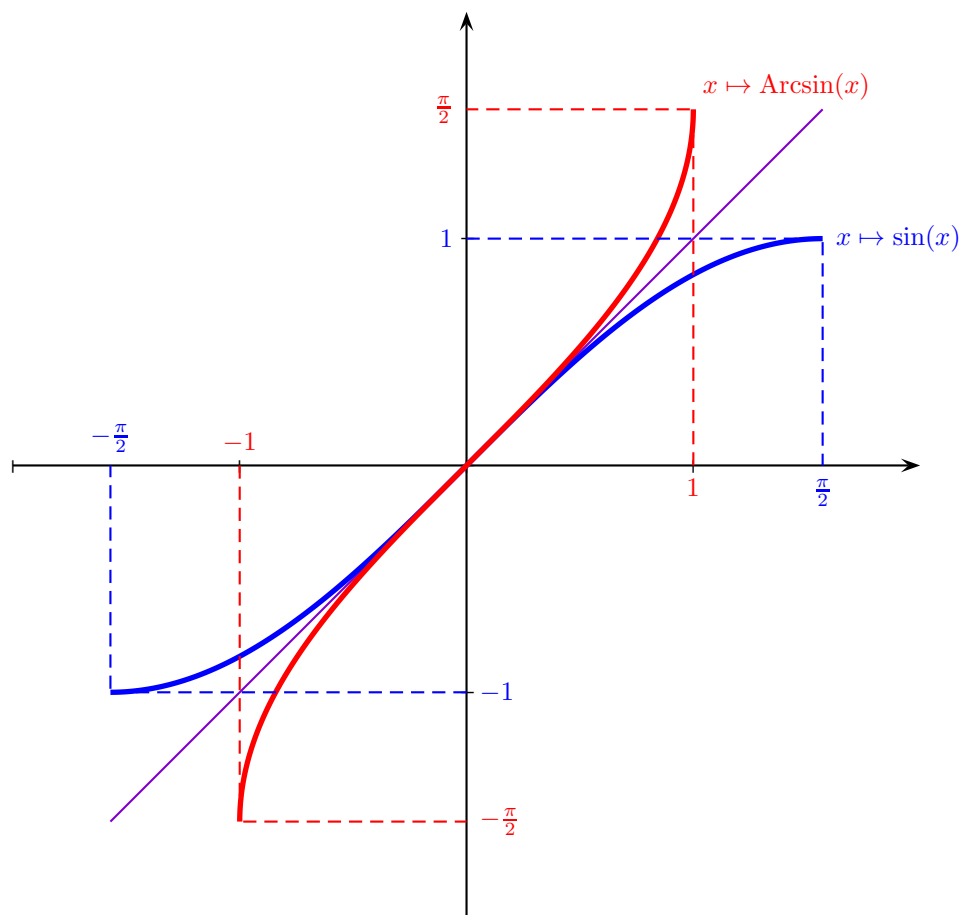


FIGURE 7.3 – Graphe d'une fonction réciproque

Définition 7.1.4 (fonctions paires, impaires, périodiques)

Soit f une fonction de domaine de définition $D_f \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans \mathbb{R} .

- On dit que f est *paire* si D_f est symétrique par rapport à 0 (donc $D_f = -D_f = \{-x, x \in D_f\}$), et

$$\forall x \in D_f, \quad f(-x) = f(x).$$

- On dit que f est *impaire* si D_f est symétrique par rapport à 0 et

$$\forall x \in D_f, \quad f(-x) = -f(x).$$

- On dit que f est *périodique* de période T si $D_f + T = D_f$ et

$$\forall x \in D_f, \quad f(x + T) = f(x).$$

Définition 7.1.5 (période minimale)

Soit f une fonction périodique, et soit \mathcal{T}^+ l'ensemble des périodes strictement positives de f . Si \mathcal{T}^+ admet un minimum T , alors T est appelée *période minimale* de f , ou *plus petite période* de f .

Proposition 7.1.6 (description des périodes en fonction de la période minimale)

Soit f une fonction périodique admettant une plus petite période T . Alors l'ensemble des périodes de f

est

$$\mathcal{T} = T\mathbb{Z} = \{nT, n \in \mathbb{Z}\}$$

Exemples 7.1.7

1. \cos et \sin sont périodiques de période 2π . Il s'agit de la période minimale.
2. \tan est également périodique de période 2π , mais ce n'est pas la période minimale. La période minimale est π .
3. Il existe des fonctions périodiques n'admettant pas de période minimale, par exemple $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$. Quelles sont ses périodes?

Proposition 7.1.8 (ensemble des périodes d'une fonction sans période minimale, HP)

Soit f une fonction périodique n'ayant pas de période minimale. Alors l'ensemble des périodes est dense dans \mathbb{R} .

On en déduira plus tard que toute fonction périodique continue et non constante admet une période minimale.

Proposition 7.1.9 (signification graphique de l'(im)parité et de la périodicité, figure 7.4)

Soit f une fonction d'un sous-ensemble E de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

1. Si f est paire, alors la courbe de f est invariante par la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
2. Si f est impaire, alors la courbe de f est invariante par rapport à la symétrie de centre 0. En particulier, $f(0) = 0$.
3. Si f est périodique de période T , la courbe de f est invariante par translation de vecteur $T \cdot \vec{i}$.

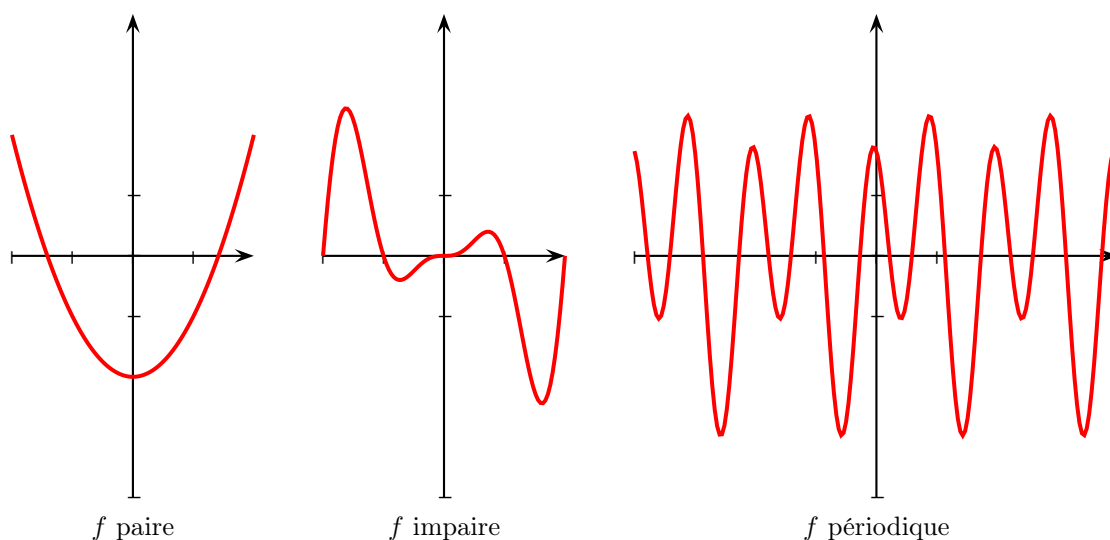


FIGURE 7.4 – Graphe d'une fonction paire, impaire, périodique

Exemple 7.1.10

Que dire des symétries du graphe d'une fonction vérifiant $f(4-x) = f(x)$? Même question si $f(4-x) = -f(x)$.

I.3 Opérations algébriques sur les fonctions

Puisque l'ensemble d'arrivée \mathbb{R} est muni d'une somme et d'un produit, on peut faire la somme et le produit de deux fonctions définies sur un même ensemble $E \subset \mathbb{R}$: par définition,

$$\forall x \in E, (f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad (fg)(x) = f(x)g(x).$$

Puisque l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée est le même (ou presque), on peut envisager de les composer. Soit :

- f une fonction définie sur $D_f \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans \mathbb{R}
- g une fonction définie sur $D_g \subset \mathbb{R}$

Alors $g \circ f$ est définie sur $f^{-1}(D_g)$ par

$$\forall x \in f^{-1}(D_g), g \circ f(x) = g(f(x)).$$

En particulier, si $f(D_f) \subset D_g$, alors $g \circ f$ est définie sur D_f .

Exemple 7.1.11

Sur quel domaine est défini $g \circ f$ lorsque $g = \ln$ et $f : x \mapsto \frac{x-1}{x+1}$?

I.4 Monotonie**Définition 7.1.12 (fonctions monotones)**

Soit f une fonction de $D_f \subset \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} . Soit $I \subset D_f$ un intervalle.

- f est *croissante* sur I si : $\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$;
- f est *strictement croissante* sur I si : $\forall (x, y) \in I^2, x < y \implies f(x) < f(y)$;
- f est *décroissante* sur I si : $\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$;
- f est *strictement décroissante* sur I si : $\forall (x, y) \in I^2, x < y \implies f(x) > f(y)$;
- f est *monotone* si f est croissante ou décroissante ;
- f est *strictement monotone* si f est strictement croissante ou strictement décroissante.

Avertissement 7.1.13

Si f est croissante (ou décroissante) sur deux intervalles I et J , elle n'est pas nécessairement croissante sur l'union $I \cup J$. Considérer par exemple $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $I =]-\infty, 0[$, $J =]0, +\infty[$.

Proposition 7.1.14 (monotonie et composition)

Soit f et g deux fonctions définies sur les sous-ensembles E et F de \mathbb{R} , et telles que $f(E) \subset F$. Alors :

- Si f et g sont croissantes, ou si f et g sont décroissantes, alors $g \circ f$ est croissante ;
 - Si f est croissante et g décroissante, ou si f est décroissante et g croissante, alors $g \circ f$ est décroissante.
- De plus, si la monotonie de f et g est stricte, celle de $g \circ f$ l'est également.

Ainsi, la monotonie suit, vis-à-vis de la composition, une règle similaire à la règle des signes.

Proposition 7.1.15 (monotonie et réciproque)

Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction bijective réelle définie sur un sous-ensemble I de \mathbb{R} . Si f est monotone (nécessairement strictement), alors f^{-1} est monotone, de même sens de monotonie que f .

Proposition 7.1.16 (monotonie et injectivité)

Une fonction strictement monotone sur un sous-ensemble de \mathbb{R} est injective sur ce sous-ensemble.

I.5 Fonctions bornées

On rappelle :

Définition 7.1.17 (fonctions majorées, minorées, bornées)

Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble E de \mathbb{R} .

- On dit que f est majorée si : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(x) \leq M$.
- On dit que f est minorée si : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(x) \geq M$.
- On dit que f est bornée si f est majorée et minorée.

Ainsi, f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.

Graphiquement (voir figure 7.5) :

- f est majorée si la courbe de f reste sous une droite horizontale ;
- f est minorée si la courbe de f reste au-dessus d'une droite horizontale ;
- f est bornée si la courbe de f reste coincée entre deux droites horizontales.

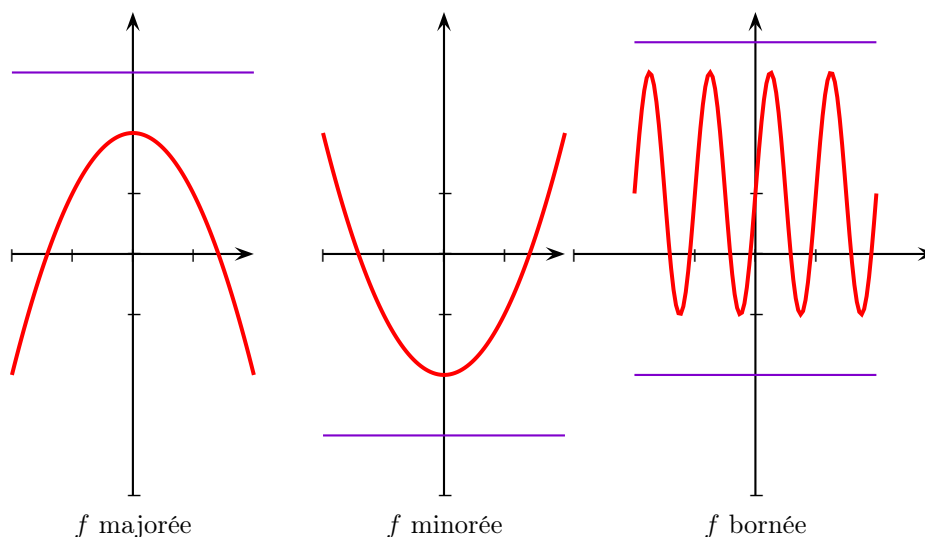


FIGURE 7.5 – Graphe d'une fonction majorée, minorée, bornée

II Dérivation

Une fonction peut être plus ou moins « régulière ». La régularité d'une fonction se mesure à l'aide des propriétés de continuité et de dérivabilité. Plus on peut dériver une fonction, plus celle-ci sera régulière. Intuitivement, plus une fonction est régulière, plus son graphe est lisse.

II.1 Limites et continuité

Définition 7.2.1 (Limite d'une fonction)

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I , et x_0 un point de I , ou une des deux bornes de I . Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet une limite finie ℓ en x_0 si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Ainsi, on peut forcer $f(x)$ à être aussi proche qu'on veut de ℓ à condition que x ne s'éloigne pas trop de x_0 .

Si de plus, f est définie en x_0 , on a nécessairement $\ell = f(x_0)$.

La définition de la limite est aussi valable pour une fonction à valeurs dans \mathbb{C} . Dans ce cas, la notion de module remplace la notion de valeur absolue. Dans le cas d'une fonction à valeurs dans \mathbb{C} , on peut étudier la limite à l'aide des parties réelle et imaginaire :

Proposition 7.2.2 (Limite d'une fonction à valeurs dans \mathbb{C})

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et x_0 un point de I ou se son bord. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes. Alors f admet une limite en x_0 si et seulement si les fonctions $x \mapsto \operatorname{Re}(f(x))$ et $x \mapsto \operatorname{Im}(f(x))$ admettent une limite en x_0 , et dans ce cas,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{Re}(f(x)) + i \lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{Im}(f(x)).$$

Un outil important pour établir l'existence et la valeur d'une limite dans \mathbb{R} est le théorème d'encadrement :

Théorème 7.2.3 (Théorème d'encadrement)

Soient f , g et h trois applications de I dans \mathbb{R} , I étant un intervalle de \mathbb{R} , et x_0 dans I , ou au bord de I . Alors, s'il existe un voisinage V de x_0 tel que pour tout $x \in V \cap I$, on ait $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, et si f et h admettent une limite commune ℓ en x_0 , alors g admet aussi une limite en x_0 , égale à ℓ .

On déduit en particulier de ce résultat les trois premières limites remarquables, obtenues géométriquement :

Proposition 7.2.4 (Limites remarquables sur les fonctions trigonométriques)

On a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1.$$

Définition 7.2.5 (continuité)

Soit f une fonction réelle définie sur I et $x_0 \in I$. On dit que f est continue en x_0 si f admet une limite (nécessairement égale à $f(x_0)$) en x_0 . Autrement dit, f est continue en x_0 si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Ainsi, si x ne s'éloigne pas trop de x_0 , $f(x)$ ne s'éloigne pas trop de $f(x_0)$.

Remarque 7.2.6

La continuité de f s'exprime par :

$$f(x) = f(x_0) + \varepsilon(x - x_0),$$

où ε tend vers 0 en 0. C'est le développement limité à l'ordre 0 de f . On écrit souvent

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} f(x_0) + o(1),$$

où la notation $o(1)$ (au voisinage de x_0) désigne n'importe quelle expression (qu'on n'a pas envie de spécifier) qui tend vers 0 en $+\infty$. Plus généralement, si f est non nulle au voisinage strict de 0, $o(f)$ (au voisinage de x_0) est une notation désignant une fonction g quelconque telle que $\frac{g}{f}$ soit de limite nulle en x_0 . On dit que g est négligeable devant f en x_0 .

Ici aussi, la notion de continuité se généralise aux fonctions d'une variable réelle et à valeurs complexes, et peut se voir au travers des propriétés de continuité de la partie réelle et de la partie imaginaire.

On aura l'occasion de revenir plus longuement sur ces notions dans un chapitre ultérieur. On admettra pour la suite de ce chapitre toutes les règles usuelles sur le calcul des limites (somme, produit, composition), et sur les propriétés de stabilité de la continuité par somme, produit, quotient, composition.

II.2 Dérivation et tangente

Dans ce paragraphe, les fonctions étudiées seront systématiquement des fonctions définies sur un intervalle ouvert de \mathbb{R} et à valeurs réelles.

Définition 7.2.7 (dérivabilité, dérivée)

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I , et $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable en x_0 si le taux d'accroissement $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ définie sur $I \setminus \{x_0\}$ admet une limite finie en x_0 . Dans ce cas, on définit la dérivée par :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Remarques 7.2.8

1. La dérivation est une notion *locale* et *non ponctuelle* (f doit être défini sur un voisinage de x_0).
2. La dérivation est une notion *locale* et *non globale* (ne dépend que de la description de f sur un voisinage de x_0 , quel qu'il soit, et non de sa description globale).

Exemples 7.2.9

1. $f : x \mapsto c$ la fonction constante.
2. $f : x \mapsto x$ la fonction identité.
3. $f : x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos(x)$.

Proposition 7.2.10 (Interprétation en terme de développement limité)

La fonction f , de valeur a_0 en x_0 , est dérivable en x_0 de dérivée a_1 , si et seulement si

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x - x_0),$$

où ε est de limite nulle en 0. Cette expression constitue le développement limité de f à l'ordre 1 au voisinage de x_0 . Avec la notation introduite plus haut, ceci peut aussi s'écrire :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + o((x - x_0)).$$

Remarque 7.2.11

Interprétation géométrique : la dérivée en x_0 est la pente de la tangente à la courbe de f en x_0 . La tangente est obtenue comme limite, au sens géométrique, des cordes entre le point de la courbe d'abscisse x_0 et un point d'abscisse x , tendant vers x_0 .

On en déduit :

Proposition 7.2.12 (équation de la tangente)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$. Alors la courbe de f admet une tangente en x_0 , d'équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Théorème 7.2.13

Si f est dérivable en x_0 , alors f est continue en x_0 . **La réciproque est fausse !**

Définition 7.2.14 (Dérivabilité sur un intervalle)

Soit J un intervalle non nécessairement ouvert, tel que $J \subset I$. On dit que f est *dérivable* sur J si f est dérivable en tout point de J .

Avertissement 7.2.15

Attention, il n'est pas équivalent de dire que f est dérivable sur J et que la restriction de f est dérivable sur J . Ainsi, par exemple, si $I = [0, 2]$ et $J = [0, 1]$, la dérivabilité de f sur J stipule la dérivabilité de f en 1 (donc la dérivabilité à la fois à gauche et à droite), alors que la dérivabilité de la restriction de f à $[0, 1]$ n'impose que la dérivabilité à gauche en 1. Remarquez que les problèmes ont toujours lieu en des bornes fermées de J , qui ne sont pas des bornes de I . Ainsi, on pourrait contourner le problème en se restreignant à la dérivabilité sur des intervalles du type $I \cap U$, où U est un intervalle ouvert de \mathbb{R} .

Note Historique 7.2.16

- La notion de dérivée tire son origine dans l'étude des tangentes, et en particulier de la pente des tangentes. Pierre de Fermat le premier (en 1636) constate que très souvent, la pente s'obtient en écrivant $\frac{f(a+e) - f(a)}{e}$, puis en « prenant » $e = 0$ (il ne dispose pas encore de la notion de limite). Il appelle e un « infiniment petit ».
- Newton, en 1669, introduit la notation $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, pour les dérivées des coordonnées d'un point, qu'il appelle « fluxions » des « fluentes » (x, y, z) , qu'il définit comme les vitesses dont les fluentes sont augmentées graduellement et indéfiniment. Sa notation est encore utilisée actuellement en physique.
- En 1674, Leibniz introduit la notation dx pour désigner une variation infinimésimale sur l'abscisse, et dy pour désigner une variation infinitésimale sur l'ordonnée. Si y dépend de x , $\frac{dy}{dx}$ désigne donc la variation infinitésimale de la fonction y rapportée à la variation infinitésimale de x qui l'a provoquée : il s'agit bel et bien de la définition de Fermat, et rien de plus : pas de nouvelle théorie, juste une nouvelle notation, encore largement utilisée aujourd'hui, notamment sous la forme non quotientée (pensez aux intégrales !)
- À la fin du 18-ième siècle, Joseph-Louis Lagrange introduit la terminologie « dérivée » et la notation f' .

- La formalisation rigoureuse est due à Karl Weierstrass dans la deuxième moitié du 19-ième siècle, s'appuyant sur une définition rigoureuse de la notion de limite et de continuité (dont il donne également pour la première fois une définition rigoureuse et précise)

II.3 Dérivées à droite et à gauche

On note I le domaine de définition de f

Définition 7.2.17 (Dérivées à droite et à gauche)

Soit $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable à droite en x_0 si l'expression $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite à droite lorsque x tend vers x_0 . On note alors :

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

De même pour la dérivée à gauche : en cas d'existence,

$$f'_g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Évidemment, la première condition pour que la dérivée à droite existe est que cette limite ait un sens, donc que x_0 ne soit pas la borne supérieure de I .

Définition 7.2.18 (Dérivabilité sur un intervalle fermé)

Soit f définie sur un intervalle fermé $[a, b]$. On dit que f est dérivable sur $[a, b]$ si f est dérivable sur $]a, b[$, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b . Adaptation immédiate à des intervalles semi-ouverts.

Remarque 7.2.19

La dérivabilité à droite en x_0 équivaut à la dérivabilité en x_0 de la restriction de f à $I \cap [x_0, +\infty[$.

Proposition 7.2.20 (Caractérisation de la dérivabilité par f'_g et f'_d)

. Soit $x_0 \in I$, non égal à une des bornes de I . Alors f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 , et $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$. Dans ce cas, $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Exemples 7.2.21

1. $x \mapsto |\sin(x)|$
2. $x \mapsto |x|^3$.
3. $x \mapsto \lfloor x \rfloor$.

II.4 Fonctions de classe C^n

Soit une fonction réelle f définie sur un intervalle I , et dérivable sur cet intervalle I . La fonction dérivée f' est alors définie sur I . On peut alors étudier les propriétés de dérivabilité de f' , et, en cas de dérivabilité, on obtient la dérivée seconde f'' (dérivée de la dérivée). On peut continuer de la sorte tant que c'est possible.

Définition 7.2.22 (dérivées d'ordre supérieur)

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . On dit que f est n -fois dérivable si on peut dériver f sur I , n fois de suite. Cela définit alors une fonction $f^{(n)}$.

Plus précisément, il s'agit d'une définition par récurrence, basé sur la formule suivante, en tout point où c'est possible :

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x).$$

Remarques 7.2.23

- N'oubliez pas les parenthèses autour de l'exposant, pour bien distinguer la dérivation de l'exponentiation.
- Pour $n = 1$ et $n = 2$, on utilise généralement les notations f' et f'' au lieu de $f^{(1)}$ et $f^{(2)}$. On rencontre aussi parfois f''' pour $f^{(3)}$ (« f tierce »). De plus, la notation $f^{(0)}$ désigne la fonction f elle-même.
- Pour pouvoir définir la dérivée n -ième de f en x_0 , il faut pouvoir dériver $f^{(n-1)}$ en x_0 , et il faut donc que $f^{(n-1)}$ soit définie sur tout un voisinage de x_0 et non seulement en x_0 .

Définition 7.2.24 (fonctions de classe \mathcal{C}^n)

Une fonction f est dite de classe \mathcal{C}^n sur un intervalle I si elle est n fois dérivable sur I et que $f^{(n)}$ est continue.

Ainsi, une fonction est de classe \mathcal{C}^0 si elle est continue. Elle est de classe \mathcal{C}^1 si elle est dérivable (donc continue) et de dérivée continue, etc. Remarquez que la dérivabilité ne suffit pas à obtenir la classe \mathcal{C}^1 .

Exemple 7.2.25

$f : x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$, prolongée par continuité en 0.

Notation 7.2.26 ($\mathcal{C}^n(I)$, $\mathcal{D}^n(I)$)

Soit I un intervalle et $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{D}^n(I)$ l'ensemble des fonctions définies sur I et n fois dérivables sur I . On note $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions n fois dérivables sur I et de dérivée n -ième continue.

En particulier, $\mathcal{D}^0(I)$ est l'ensemble de toutes les fonctions définies sur I , $\mathcal{C}^0(I)$ est l'ensemble de toutes les fonctions continues sur I .

Proposition 7.2.27

On a une chaîne d'inclusions :

$$\dots \subset \mathcal{C}^n(I) \subset \mathcal{D}^n(I) \subset \mathcal{C}^{n-1}(I) \subset \mathcal{D}^{n-1}(I) \subset \dots \subset \mathcal{C}^1(I) \subset \mathcal{D}^1(I) \subset \mathcal{C}^0(I) \subset \mathcal{D}^0(I).$$

Définition 7.2.28 (Fonctions de classe \mathcal{C}^∞)

On dit que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur I si f est de classe \mathcal{C}^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc si f est infiniment dérivable. On note $\mathcal{C}^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sur I .

Il revient au même de dire que f est dans $\mathcal{D}^n(I)$ pour tout I .

II.5 Règles de dérivation

Il est important d'avoir une bonne maîtrise des règles de calcul suivantes, permettant de dériver toutes les fonctions construites à partir des fonctions usuelles, à condition de connaître les dérivées de ces fonctions usuelles. Dans tout ce paragraphe, I désigne un intervalle ouvert de \mathbb{R} .

Proposition 7.2.29 (dérivée d'une somme, d'un produit)

Soit f et g deux fonctions de I dans \mathbb{R} , et $x \in I$. Soit λ un réel.

1. Si f est dérivable en x , alors λf aussi et $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$.
2. Si f et g sont dérivables en x , alors $f + g$ aussi et $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
3. Si f et g sont dérivables en x , fg aussi et $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
4. Si g est dérivable en x et $g(x) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ aussi et $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$.
5. Si f et g sont dérivables en x et $g(x) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ aussi et $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Exemples 7.2.30

- Dérivée de $x \mapsto x^2$
- Dérivée de $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Corollaire 7.2.31 (dérivée d'un produit de n termes)

Soit $f_1, \dots, f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Si f_1, \dots, f_n sont dérivables en x_0 , alors leur produit aussi, et :

$$(f_1 \cdots f_n)'(x_0) = \sum_{k=1}^n f_k'(x_0) \prod_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{k\}} f_i(x_0).$$

Exemples 7.2.32

- Dérivée de $f : x \mapsto x^n$.
- Dérivée d'un polynôme.

Proposition 7.2.33 (Dérivées successives des puissances)

Soit $f : x \mapsto x^n$, et $k \in \mathbb{N}$.

- Si $k \leq n$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$.
- Si $k > n$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(k)}(x) = 0$.

Proposition 7.2.34 (Dérivation d'une composition)

Soit I et J deux intervalles ouverts de \mathbb{R} , et $f : I \rightarrow J$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $x \in I$. Si f est dérivable en x et g dérivable en $y = f(x)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x , et :

$$(g \circ f)'(x) = f'(x)g'(y) = f'(x) \cdot g' \circ f(x).$$

La dernière règle de dérivation que nous voyons est la règle de dérivation des fonctions réciproques.

Théorème 7.2.35 (Dérivation des fonctions réciproques)

Soit I et J deux intervalles, et soit f une application bijective continue de I dans J . Soit $t_0 \in I$, et $x_0 = f(t_0)$. Alors, si f est dérivable en t_0 , et si $f'(t_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en x_0 , et :

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(t_0)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x_0)}.$$

Exemple 7.2.36

- Dérivée de $x \mapsto e^x$, définie comme réciproque de \ln , elle-même définie comme primitive sur \mathbb{R}_+^* de $x \mapsto \frac{1}{x}$ s'annulant en 1.
- Dérivée de $x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$ sur \mathbb{R}_+^* .

L'utilisation de la définition de la dérivée par taux d'accroissement permet alors d'obtenir un certain nombre de limites remarquables, pour les fonctions pour lesquels on a trouvé l'expression de la dérivée par des moyens autres que l'utilisation directe du taux d'accroissement :

Proposition 7.2.37 (Limites remarquables pour exp, ln, les puissances)

On a (pour $\alpha \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha.$$

Avec la notation o introduite plus haut, les limites remarquables s'écrivent aussi, au voisinage de 0 :

- $\sin(x) = x + o(x)$
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
- $\tan(x) = x + o(x)$
- $\ln(1+x) = x + o(x)$
- $e^x = 1 + x + o(x)$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$.

Il s'agit du début des développements limités en 0 de ces fonctions. Nous étudierons les développements limités de façon plus générale dans un chapitre ultérieur.

II.6 Stabilité des propriétés de régularité

Les propriétés s'établissent facilement par récurrence à partir des propriétés similaires au rang 1.

Proposition 7.2.38 (Règles pour les fonctions n fois dérivables en un point)

Soit f et g deux fonctions de I dans \mathbb{R} , et $x_0 \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit λ et μ deux réels.

1. Si f est n fois dérivable en x_0 , alors λf aussi et $(\lambda f)^{(n)}(x_0) = \lambda f^{(n)}(x_0)$.
2. Si f et g sont n fois dérivables en x_0 , alors $f + g$ aussi et $(f + g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) + g^{(n)}(x_0)$.
3. (**Formule de Leibniz**) Si f et g sont n fois dérivables en x_0 , fg aussi et :

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0).$$

4. Si f et g sont n fois dérivables en x_0 et si g ne s'annule pas en x_0 , alors $\frac{f}{g}$ est n fois dérivable en x_0 (pas de formule simple)

Exemple 7.2.39

Dérivée n -ième de $x \mapsto xe^x$.

Proposition 7.2.40 (Composition de fonctions n fois dérivables)

Soit I et J deux intervalles, et f une fonction de I dans J , g une fonction de J dans \mathbb{R} . Soit $x_0 \in I$. Si f est n fois dérivable en x_0 et g est n fois dérivable en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est n fois dérivable en x_0 .

Remarque 7.2.41 (Formule de Faà di Bruno, HP)

Il existe une formule explicite pour la dérivée d'ordre n d'une composition (formule de Faà di Bruno), mais cette formule est fort complexe. Pour le plaisir, on énonce, sans démonstration :

$$(g \circ f)^{(n)} = \sum_{\substack{(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n \\ 1m_1 + 2m_2 + \dots + nm_n = n}} \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_n!} \prod_{k=1}^n \left(\frac{f^{(k)}}{k!} \right)^{m_k} \times g^{(m_1 + \dots + m_n)} \circ f.$$

Vérifiez que pour $n = 1$, on retombe sur la formule connue...

Corollaire 7.2.42 (Règles de stabilité dans $\mathcal{D}^n(I)$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1. L'ensemble $\mathcal{D}^n(I)$ est stable par combinaisons linéaires, produit et quotient par une fonction ne s'annulant pas.
2. Soit $f \in \mathcal{D}^n(I)$ à valeurs dans un intervalle J , et $g \in \mathcal{D}^n(J)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{D}^n(I)$
3. Soit $f \in \mathcal{D}^n(I)$, bijective de I dans J , et telle que f' ne s'annule pas sur I . Alors $f^{-1} \in \mathcal{D}^n(J)$.

On a les mêmes règles pour la classe \mathcal{C}^n :

Corollaire 7.2.43 (Règles de stabilité dans $\mathcal{C}^n(I)$)

Soit $n \in \mathbb{N}$, ou $n = +\infty$.

1. L'ensemble $\mathcal{C}^n(I)$ est stable par combinaisons linéaires, produit et quotient par une fonction ne s'annulant pas.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^n(I)$ à valeurs dans un intervalle J , et $g \in \mathcal{C}^n(J)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{C}^n(I)$
3. Soit $f \in \mathcal{C}^n(I)$, bijective de I dans J , et telle que, si $n \neq 0$, f' ne s'annule pas sur I . Alors $f^{-1} \in \mathcal{C}^n(J)$.

III Étude d'une fonction

III.1 Variation des fonctions

Nous commençons par un rappel de certaines propriétés (admisses pour le moment) permettant une étude efficace d'une fonction d'une variable, puis nous rappelons le schéma général d'étude d'une fonction.

Théorème 7.3.1 (variations des fonctions dérivables, admis provisoirement)

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, et I un intervalle ouvert tel que f est dérivable sur I . Alors :

1. f est croissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$.
Si cette inégalité est stricte sauf en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante.

2. f est décroissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$.
Si cette inégalité est stricte sauf en un nombre fini de points, alors f est strictement décroissante.

Corollaire 7.3.2 (caractérisation des fonctions constantes sur un intervalle)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur un intervalle ouvert I . Alors f est constante si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.

Définition 7.3.3 (point critique)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I , et $x \in I$. On dit que x est un point critique de f si $f'(x) = 0$.

Théorème 7.3.4 (condition nécessaire pour un extrémum)

Soit f dérivable sur un intervalle ouvert I . Si f admet en x un extrémum local (minimum ou maximum), alors $f'(x) = 0$.

Cette condition n'est pas suffisante, comme le montre l'exemple de $x \mapsto x^3$ en 0. Il faut faire une étude locale.

Définition 7.3.5 (point critique)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I , et $x \in I$. On dit que x est un point critique de f si $f'(x) = 0$.

Ainsi, une CN pour que f présente un extrémum local en $x \in I$ est que x soit un point critique. Attention, c'est évidemment faux si I n'est pas ouvert (cas d'un extrémum sur le bord).

III.2 Comportement asymptotique

Le comportement à l'infini (comportement asymptotique) peut aussi aider à cerner l'allure de la courbe. On définit pour cela la notion de droite asymptote : il s'agit d'une droite qui approche d'aussi près qu'on veut une portion de la courbe lorsqu'on s'éloigne vers l'infini dans l'une des deux directions. Plus précisément :

Définition 7.3.6 (asymptotes)

- asymptote verticale en a : droite d'équation $x = a$ en a telle que $\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \pm\infty$;
- asymptote horizontale au voisinage de $\pm\infty$: droite d'équation $y = b$ telle que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$.
- Plus généralement, la droite D d'équation $y = ax + b$ est dite asymptote à la courbe \mathcal{C} de f en $+\infty$ si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

On définit évidemment une notion similaire en $-\infty$.

Méthode 7.3.7 (Déterminer une droite asymptote (non verticale))

Tant qu'on ne dispose pas de méthode plus sophistiquée, le principe est le suivant (pour une asymptote en $+\infty$) :

- Étudier la limite de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$:

- * Si cette limite n'existe pas, ou si elle est infinie, la courbe de f n'a pas d'asymptote en $+\infty$.
- * Si cette limite est finie, de valeur a , on dit que la droite $y = ax$ est direction asymptotique de la courbe en $+\infty$.
- On étudie la limite de $f(x) - ax$:
 - * Si elle n'existe pas, ou si elle est infinie, la courbe de f n'a pas d'asymptote en $+\infty$.
 - * Si cette limite est finie, de valeur b , alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

Nous verrons plus tard comment on peut obtenir a sans former le quotient, à l'aide d'équivalents, ou même comment obtenir simultanément a et b à l'aide d'un « développement limité ».

Exemples 7.3.8

1. Déterminer les asymptotes de la courbe de $f : x \mapsto \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 + 1}$.
2. Montrer que $x \mapsto x + \sin x$ admet une direction asymptotique en $-\infty$ et $+\infty$, mais pas d'asymptote.

On peut aussi définir des paraboles asymptotes, avec la condition

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax^2 - bx - c = 0,$$

ou même trouver plus généralement une courbe polynomiale asymptote.

III.3 Convexité

Enfin, l'allure de la courbe va dépendre fortement de « l'orientation de la courbure », c'est-à-dire de savoir si le « creux » de la courbe est orienté vers le haut ou vers le bas. C'est ce qu'on appelle la convexité de la courbe. Intuitivement, si le creux de la courbe est orienté vers le haut, la pente de la tangente est de plus en plus forte, donc f' est croissante. Cela amène la définition suivante :

Définition 7.3.9 (fonction convexe, concave, figure 7.6)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I .

- On dit que f est convexe sur I si f' est croissante sur I ; si f est deux fois dérivable, cela équivaut à : $f'' \geq 0$ sur I .
- On dit que f est concave sur I si f' est décroissante sur I ; si f est deux fois dérivable, cela équivaut à : $f'' \leq 0$ sur I .

Exemples 7.3.10

1. $x \mapsto e^x$ est convexe sur \mathbb{R} ;
2. $x \mapsto \ln x$ est concave sur \mathbb{R}_+^*

L'étude générale des fonctions convexes et concave est au programme de Spé. Vous définirez les fonctions convexes dans un contexte plus général (sans hypothèse de dérivabilité) par la position des cordes par rapport à la courbe. La propriété de croissance de f' sera alors une caractérisation pour les fonctions dérivables.

Définition 7.3.11 (point d'inflexion)

Un point d'inflexion de la courbe de f est un point en lequel f change de convexité.

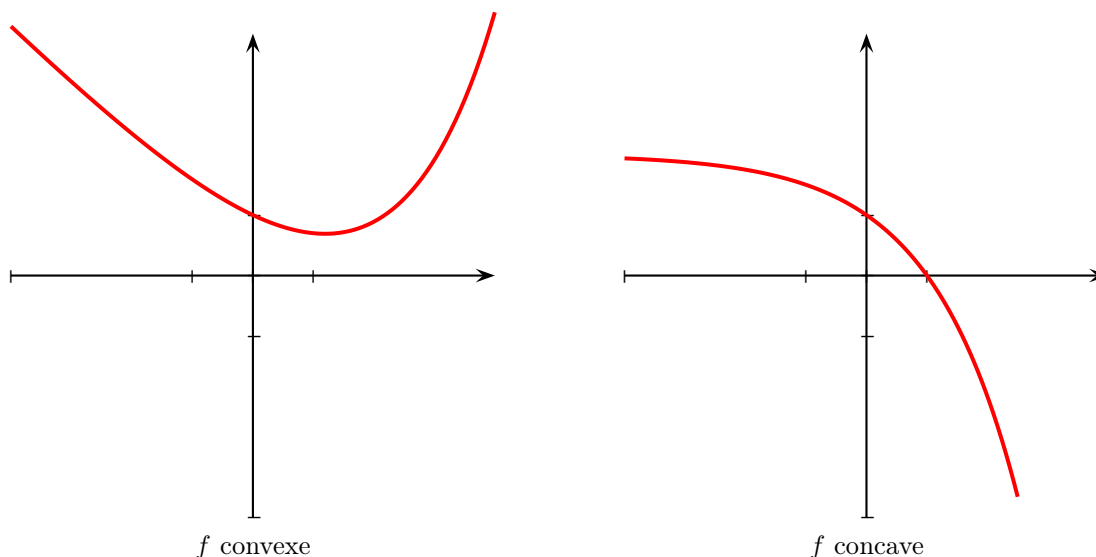


FIGURE 7.6 – Graphe d'une fonction convexe, concave

Proposition 7.3.12 (condition nécessaire de point d'inflexion)

Si f est deux fois dérivable sur l'intervalle ouvert I , si la courbe de f admet un point d'inflexion en x_0 alors $f''(x_0) = 0$.

Ce n'est pas une condition suffisante, comme le montre l'exemple de $x \mapsto x^4$ en 0. Il faut étudier le signe de f'' à gauche et à droite de x_0 : si f'' change de signe en x_0 alors la courbe admet en x_0 un point d'inflexion.

III.4 Plan d'étude d'une fonction

On peut maintenant donner le plan d'étude d'une fonction.

Méthode 7.3.13 (plan d'étude d'une fonction)

1. Recherche du domaine de définition.
2. Étude des symétries (parité, imparité, périodicité...), qui permet une restriction du domaine d'étude. Ces symétries seront à reporter sur le graphe de façon aussi satisfaisante que possible.
3. Calcul des limites aux bords du domaine.
4. **Étude des variations** : dérivabilité, expression de la dérivée f' , points critiques, tableau de signe de f' et tableau de variation de f .
Préciser dans le tableau les valeurs de f aux points critiques.
L'étude du signe de f' peut nécessiter l'étude d'une ou plusieurs fonctions auxiliaires.
5. Recherche des asymptotes (verticales, horizontales, obliques)
6. Calcul de f'' , recherche du signe de f'' et des points d'inflexion. Convexité de la courbe entre les points d'inflexion.
7. Pour aider au tracé : recherche de l'équation de certaines tangentes :
 - demi-tangente aux bords du domaine, si f est défini en ce point (le bord d'un intervalle fermé par-exemple), ou si f se prolonge par continuité en ce point ;
 - tangentes aux points d'inflexion : en ces points, la courbe passe d'un côté à l'autre de la tangente (admis pour l'instant)

8. Tracé de la courbe, en s'aidant des points particuliers, des asymptotes, et des tangentes qu'on a déterminées, à reporter aussi précisément que possible sur le graphe.

Exemple 7.3.14

Étude aussi précise que possible de $f : x \mapsto \frac{x^2 + 1}{x + 1}$.

Souvent, suivant ce que l'on recherche, une étude aussi complète n'est pas nécessaire. Les études de fonctions sont par exemple souvent utilisées pour déterminer des inégalités, mais dans ce cas, l'étude des variations est suffisante.

Exemple 7.3.15

Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x$.

Le bon point de vue pour établir cet encadrement n'est en fait pas une étude de fonction : Il est en fait une conséquence immédiate de la concavité de \sin sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (position de la courbe par rapport à ses tangentes et à ses cordes)

IV Dérivations de fonctions réelles à valeurs dans \mathbb{C}

Nous élargissons dans ce paragraphe la notion de dérivation au cas de fonctions complexes, ou plus précisément, de fonctions d'une variable réelle, à valeurs dans \mathbb{C} .

Définition 7.4.1 (Dérivation d'une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C})

Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert de \mathbb{R} ($a, b \in \overline{\mathbb{R}}$) et $x_0 \in I$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes. On dit que f est dérivable en x_0 si l'expression $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ admet une limite dans \mathbb{C} lorsque le réel h tend vers 0, c'est-à-dire s'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \ell \right| = 0.$$

Dans ce cas, on définit la dérivée de f en x_0 par :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

La dérivation d'une fonction à valeurs dans \mathbb{C} se ramène en fait à la dérivation de deux fonctions à valeurs dans \mathbb{R} (la partie réelle et la partie imaginaire) :

Proposition 7.4.2 (Dérivation des parties réelles et imaginaires)

Soit, avec les mêmes notations, $f : I \rightarrow \mathbb{C}$, et définissons les fonctions f_r et f_i de I dans \mathbb{C} par :

$$\forall x \in I, \quad f_r(x) = \operatorname{Re}(f(x)) \quad \text{et} \quad f_i(x) = \operatorname{Im}(f(x)).$$

Alors f est dérivable en x_0 si et seulement si f_r et f_i le sont, et dans ce cas,

$$f'(x_0) = f'_r(x_0) + i f'_i(x_0).$$

Les règles de dérivation des fonctions à valeurs dans \mathbb{C} sont les mêmes que pour les fonctions à valeurs réelles :

Proposition 7.4.3 (principales règles de dérivation des fonctions complexes)

Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions complexes définie sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} et dérivables en $x_0 \in I$. Alors :

- (i) $f + g$ est dérivable en x_0 et $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;
- (ii) pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, αf est dérivable en x_0 et $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$;
- (iii) fg est dérivable en x_0 et $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$;
- (iv) si $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.

On ne donne pas de règle générale de dérivation de compositions : composer à la source par une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ne pose pas de problème en considérant partie réelle et partie imaginaire. Composer à l'arrivée est plus délicat, car cela implique des fonctions dont la variable est complexe ; la notion de dérivation de fonctions d'une variable complexe existe (fonctions holomorphes), mais c'est une autre histoire. Nous nous contentons du cas particulier de la composition par l'exponentielle complexe, très utile en physique :

Proposition 7.4.4 (Dérivée de $t \mapsto e^{\varphi(t)}$)

Soit $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes définie sur un intervalle I ouvert de \mathbb{R} et soit $x_0 \in I$. Soit $\psi : x \mapsto e^{\varphi(x)}$.

Si φ est dérivable en x_0 , alors ψ aussi, et

$$\psi'(x_0) = \varphi'(x_0)e^{\varphi(x_0)}.$$

Exemples 7.4.5

1. Calculer la dérivée de $x \mapsto e^{ix}$ sur \mathbb{R} .
2. Calculer la dérivée de $x \mapsto e^{ix^2}$ sur \mathbb{R} .
3. Calculer la dérivée de $x \mapsto e^{e^{ix}}$ sur \mathbb{R} .

En identifiant \mathbb{C} à \mathbb{R}^2 , la dérivée de φ correspond à un vecteur tangent (dans un sens que nous ne définissons pas) à la courbe paramétrée par φ au point $\varphi(x_0)$ (voir l'exemple de $x \mapsto e^{ix}$: la tangente au cercle trigonométrique est orthogonal au rayon, donc obtenu par multiplication par un imaginaire pur, ce qui correspond bien au facteur i qu'on obtient dans la dérivation)

Les fonctions usuelles

L'invention des logarithmes, en réduisant le temps passé aux calculs de quelques mois à quelques jours, double pour ainsi dire, la vie des astronomes.

(Pierre-Simon Laplace)

Le logarithme d'un sinus donné est le nombre qui a progressé arithmétiquement avec la même vitesse avec laquelle le rayon a diminué géométriquement jusqu'au sinus donné.

(John Napier, connu sous le nom de Jean Néper)

Comme pour trois sinus en proportion continue le carré du moyen est égal au produit des extrêmes, ainsi pour leurs logarithmes, le double du moyen est égal à la somme des deux extrêmes

(John Napier)

Ce chapitre est un catalogue des fonctions usuelles au programme de Math Sup. On y trouve bien entendu le logarithme et l'exponentielle, et les fonctions trigonométriques, mais également les réciproques (partielles) de celles-ci (Arcsin, Arccos et Arctan), et les fonctions hyperboliques (ch, sh, et th), mais sans leurs fonctions réciproques Argch, Argsh et Argth qui ne sont pas au programme.

I Exponentielle, logarithme, puissances

I.1 Logarithme

Définition 8.1.1 (fonction logarithme (népérien) \ln , courbe figure 8.1)

La fonction \ln est l'unique primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ s'annulant en 1

Propriétés 8.1.2 (propriétés de \ln)

Soit $f : x \mapsto \ln(x)$.

- Domaine de définition : $]0, +\infty[$.
- Dérivation : f est de classe $C^{+\infty}$ sur $]0, +\infty[$,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{1}{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

- Variations : \ln est croissante sur son domaine.
- Propriétés de convexité : \ln est **concave** sur \mathbb{R}_+^*
- Inégalité classique : $\forall x \in]-1, \infty[$, $\ln(1+x) \leq x$

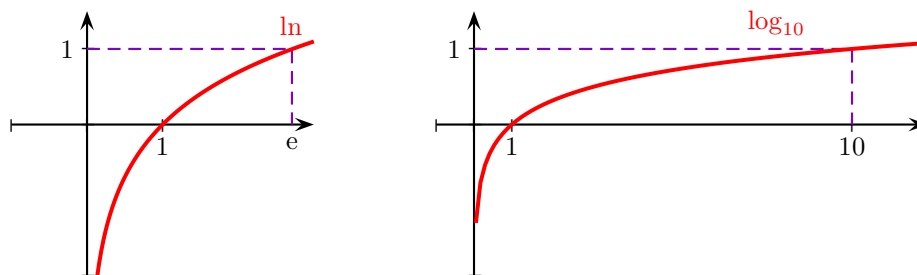
- Valeurs remarquables et limites :

- * $\ln(1) = 0$
- * $\ln(e) = 1$ (c'est la définition de e)
- * $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$
- * $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.

- Limite remarquable : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

- Autres propriétés remarquables :

- * $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ si $a, b > 0$.
- * $\ln(a^x) = x \ln(a)$
- * $\ln(e^x) = x$, $e^{\ln x} = x$

FIGURE 8.1 – Graphes de \ln et \log_{10}

I.2 Exponentielle

Définition 8.1.3 (fonction exponentielle \exp , courbe figure 8.2)

La fonction \exp est la réciproque de \ln (bijective de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R}). Elle est indifféremment notée $x \mapsto \exp(x)$ ou $x \mapsto e^x$.

Propriétés 8.1.4 (propriétés de la fonction \exp)

Soit $f : x \mapsto e^x$.

- Domaine de définition : \mathbb{R} .
- Dérivation : f est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur \mathbb{R} ,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, f^{(n)}(x) = e^x.$$

- Variations : f est croissante sur \mathbb{R} .
- Propriétés de convexité : f est convexe sur \mathbb{R}_+^*
- Inégalité classique : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$
- Valeurs remarquables et limites :

- * $e^0 = 1$
- * $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
- * $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

- Limite remarquable : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

- Autres propriétés remarquables :

- * $e^{a+b} = e^a e^b$
- * $(e^a)^b = e^{ab}$
- * $\ln(e^x) = x$, $e^{\ln x} = x$

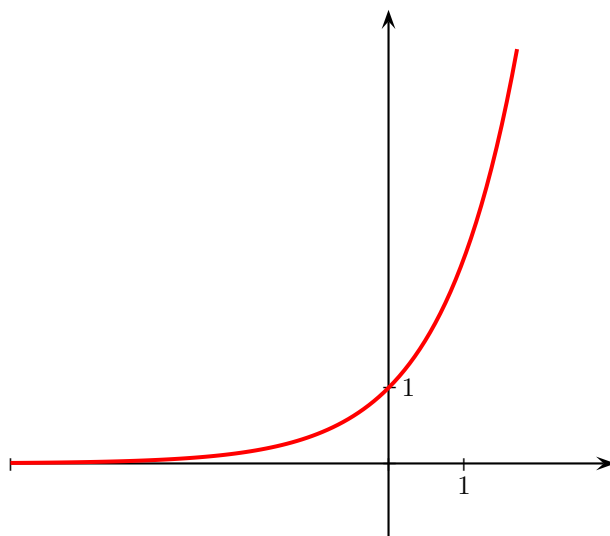


FIGURE 8.2 – Courbe de la fonction exp

I.3 Fonctions puissances

Définition 8.1.5 (puissance, ou exponentiation)

Pour tout $x > 0$ et tout $y \in \mathbb{R}$, on définit $x^y = e^{y \ln x}$.

Si $y = n \in \mathbb{Z}$, cela correspond à la puissance x^n obtenue par itération du produit. Remarquez que dans ce cas (et uniquement dans ce cas), on peut étendre, par itération du produit, la définition de la puissance x^y pour $x \leq 0$, mais prenez garde à ne pas écrire cette puissance sous forme exponentielle : cela n'a pas de sens. On pose aussi par convention :

Convention 8.1.6 (puissances de 0)

Soit $y \in \mathbb{R}$, on pose :

$$0^y = \begin{cases} 0 & \text{si } y > 0 \\ 1 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

On a alors les règles suivantes :

Propriétés 8.1.7 (règles d'exponentiation)

Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- $x^{a+b} = x^a x^b$
- $(x^a)^b = x^{ab}$
- $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$
- Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$
- $x^a y^a = (xy)^a$
- $\ln(x^a) = a \ln x$.

Vous remarquerez que l'exponentielle n'est dans ce contexte rien d'autre que l'exponentiation du réel $e = \exp(1)$, unique réel tel que $\ln(e) = 1$. Cela justifie la notation e^x pour l'exponentielle et la règle annoncée plus haut pour $(e^a)^b$.

Définition 8.1.8 (logarithme de base $b > 0$)

Soit $b > 0$, le logarithme de base b est la fonction réciproque de $x \mapsto b^x$, bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R}_+^* . Elle est notée \log_b . Ainsi, $x \in \mathbb{R}$, $\log_b(b^x) = x$, et en particulier, $\log_b(b) = 1$.

Par exemple, on utilise beaucoup en physique le logarithme en base 10, défini par la relation $\log_{10}(10^x) = 10$. Le logarithme en base 10 est souvent notée simplement \log au lieu de \log_{10} . Il n'est pas très utilisé en mathématiques.

En informatique, c'est le logarithme en base 2 qui est le plus fréquemment utilisé. On le note souvent \lg .

Proposition 8.1.9 (expression de \log_b en fonction de \ln)

Pour tout $x > 0$, $\log_b(x) = \frac{\ln x}{\ln b}$.

Ainsi, la courbe de \log_b (donnée en figure 8.1 pour $b = 10$) s'obtient de celle de \ln par affinité verticale de rapport $\frac{1}{\ln b}$. On en déduit notamment la croissance, la concavité, les limites, l'égalité $\log_b(1) = 0$, l'expression de la dérivée :

$$\forall x > 0, \log'_b(x) = \frac{1}{x \ln b},$$

ainsi que l'identité remarquable $\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$.

Remarquons pour terminer que le logarithme népérien n'est rien d'autre que le logarithme en base e .

I.4 Croissances comparées

Les fonctions exponentielle, logarithme, puissances sont souvent utilisées pour donner des ordres de grandeur au voisinage de 0 ou vers l'infini. Il est donc important de pouvoir comparer entre elles ces fonctions, au moins pour les très grandes ou très petites (en valeurs absolues) valeurs.

Théorème 8.1.10 (théorème des croissances comparées en $+\infty$)

1. Pour tout $\alpha > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$.
2. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$.

Ce théorème affirme que la fonction \ln est très petite à l'infini (= « négligeable ») devant les fonctions puissances (d'exposant fixe), elles mêmes très petites devant l'exponentielle. Aussi dit-on souvent « l'exponentielle l'emporte sur les puissances, qui l'emportent sur le \ln ».

Dans les situations plus complexes, on peut toujours se ramener à ces situations, en écrivant les puissances sous forme exponentielle, et en étudiant la limite de l'exposant.

Exemple 8.1.11

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x}$
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\ln x} e^{-\sqrt{x}}$
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-\sqrt{\ln x}}$.

Théorème 8.1.12 (théorème des croissances comparées en 0)

Pour tout $\alpha > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0$

Ainsi, $\ln x$ est « négligeable » devant les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$, ce qui signifie que ces dernières tendent vers $-\infty$ beaucoup plus vite que \ln .

II Fonctions trigonométriques

Nous avons déjà défini et fait une étude sommaire des fonctions trigonométriques \sin , \cos et \tan . Nous complétons un peu cette étude, notamment avec l'expression des dérivées, que nous n'avions pas données à ce moment-là.

II.1 Sinus

Propriétés 8.2.1 (propriétés de \sin)

Soit $f : x \mapsto \sin x$.

- Domaine de définition : \mathbb{R} .
- Symétries : \sin est 2π -périodique et impaire.
- Dérivation : f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} ,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N}^*, f^{(N)}(x) = \sin\left(x + \frac{N\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^n \sin(x) & \text{si } N = 2n \\ (-1)^n \cos(x) & \text{si } N = 2n+1 \end{cases}$$

- Variations : Voir le chapitre sur les nombres complexes
- Valeurs particulières : Voir le chapitre sur les nombres complexes
- Limites : Pas de limite en $+\infty$ et $-\infty$.
- Propriétés de convexité : \sin est convexe sur les intervalles $[-\pi, 0] + 2k\pi$ et concave sur les intervalles $[0, \pi] + 2k\pi$
- Inégalités classiques
 - * $\forall x \in \mathbb{R}_+, \sin x \leq x$
 - * $\forall x \in \mathbb{R}_-, \sin x \geq x$
 - * $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \sin x \geq \frac{2x}{\pi}$.
- Limite remarquable : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
- Autres propriétés remarquables :
 - * $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin(x) \leq 1$
 - * **Toutes les formules de trigonométrie** (Voir le chapitre sur les nombres complexes)

II.2 Cosinus

Propriétés 8.2.2 (propriétés du cosinus \cos)

Soit $f : x \mapsto \cos x$.

- Domaine de définition : \mathbb{R} .
- Symétries : \cos est 2π -périodique et paire.
- Dérivation : f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} ,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\sin(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N}^*, f^{(N)}(x) = \cos\left(x + \frac{N\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^n \cos(x) & \text{si } N = 2n \\ (-1)^{n+1} \sin(x) & \text{si } N = 2n+1 \end{cases}$$

- Variations : Voir le chapitre sur les nombres complexes
- Valeurs particulières : Voir le chapitre sur les nombres complexes
- Limites : Pas de limite en $+\infty$ et $-\infty$.
- Propriétés de convexité : \cos est convexe sur les intervalles $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] + 2k\pi$ et concave sur les intervalles $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] + 2k\pi$
- Inégalités classiques : $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \cos x \geq 1 - \frac{2x}{\pi}$
- Limite remarquable : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.
- Autres propriétés remarquables :

- * $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos(x) \leq 1$
- * **Toutes les formules de trigonométrie** (Voir le chapitre sur les nombres complexes)

II.3 Tangente

Propriétés 8.2.3 (propriétés de la tangente tan)

Soit $f : x \mapsto \tan x$.

- Domaine de définition : $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- Symétries : tan est π -périodique et impaire.
- Dérivation : tan est de classe C^∞ sur son domaine,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2(x)$$

- Variations : Voir le chapitre sur les nombres complexes
- Valeurs particulières : Voir le chapitre sur les nombres complexes
- Propriétés de convexité :
tan est convexe sur les intervalles $[0, \frac{\pi}{2}[+ k\pi$ et concave sur les intervalles $]-\frac{\pi}{2}, 0] + k\pi$
- Inégalités classiques :
* $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, \tan(x) \geq x$ (comparaison à la tangente en 0)
* $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, 0], \tan(x) \leq x$.
- Limite remarquable : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
- Autres propriétés remarquables : **Toutes les formules de trigonométrie**

Les deux expressions de la dérivée de tan sont à connaître, car suivant les situations, on peut avoir intérêt à utiliser l'une ou l'autre.

Les courbes des fonctions trigonométriques sont représentées dans le chapitre sur les nombres complexes.

III Réciproques des fonctions trigonométriques

Les fonctions trigonométriques ne sont pas bijectives ni même injectives (elles ne peuvent pas l'être puisqu'elles sont périodiques). Même sur une période, on n'a pas l'injectivité (sauf pour la tangente). Mais en restreignant davantage le domaine de définition, on obtient des fonctions injectives, surjectives sur leur image. Cela permet de considérer leurs fonctions réciproques. Le graphe de ces fonctions s'obtient alors en utilisant la proposition 7.1.3, par symétrie par rapport à la première bissectrice.

III.1 Arctangente

La plus importante des fonctions réciproques de fonctions trigonométriques est probablement l'arctangente. Nous commençons donc par elle.

Définition 8.3.1 (arctangente, Arctan, courbe figure 8.3)

La fonction tan se restreint en une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur \mathbb{R} .

La fonction arctangente, notée Arctan, est par définition la réciproque de tan restreinte à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Le théorème de dérivation des fonctions réciproques permet d'obtenir le résultat important suivant :

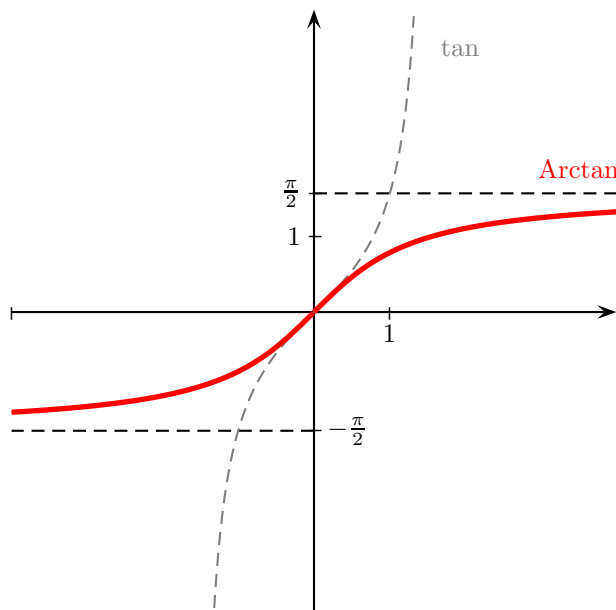


FIGURE 8.3 – Courbe de Arctan

Théorème 8.3.2 (Dérivée de Arctan)

La fonction $f = \text{Arctan}$ est définie et de classe C^∞ sur \mathbb{R} , et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Ainsi, il faut toujours garder en tête les deux facettes de l'Arctan :

- définition comme fonction réciproque de la tangente
- l'arctangente se « dérive bien » (en une fraction rationnelle) ; autrement dit, Arctan est une primitive d'une fonction rationnelle simple (à retenir, on s'en sert très souvent dans des calculs d'intégrales)

Une fois l'expression de la dérivée obtenue, le reste de l'étude de la fonction Arctan est classique.

Propriétés 8.3.3 (propriétés de Arctan)

Soit $f : x \mapsto \text{Arctan}(x)$

- Domaine de définition : \mathbb{R} .
- Dérivation : f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} , et : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- Symétries : Arctan est impaire.
- Variations : Arctan est croissante sur \mathbb{R} .
- Valeurs remarquables :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arctan}(x) = -\frac{\pi}{2}$;	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$
$\text{Arctan}(0) = 0$	
$\text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$;	$\text{Arctan}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$
$\text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$;	$\text{Arctan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$
$\text{Arctan}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$	$\text{Arctan}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$
- Propriétés de convexité : Arctan est convexe sur \mathbb{R}_- et concave sur \mathbb{R}_+ .
- Inégalités classiques :
 - * $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \text{Arctan}(x) \leq x$ (comparaison à la tangente en 0)
 - * $\forall x \in \mathbb{R}_-, \quad \text{Arctan}(x) \geq x$.

- Limite remarquables : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arctan } x}{x} = 1$.
- Autres propriétés remarquables :
 - * $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan(\text{Arctan}(x)) = x$
 - * $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad \text{Arctan}(\tan(x)) = x$
 - * $\forall x \in]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[, \quad \text{Arctan}(\tan(x)) = x - k\pi$.
 - * $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \text{Arctan } x + \text{Arctan} \frac{1}{x} = \varepsilon(x) \frac{\pi}{2}$, où $\varepsilon(x)$ est le signe de x .
 - * $\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\frac{\pi}{2} < \text{Arctan } x < \frac{\pi}{2}$.

III.2 Arcsinus

Définition 8.3.4 (fonction arcsinus, Arcsin, courbe figure 8.4)

La fonction sin induit par restriction une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dans $[-1, 1]$. La réciproque de cette fonction est appelée arcsinus, notée Arcsin : $[-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

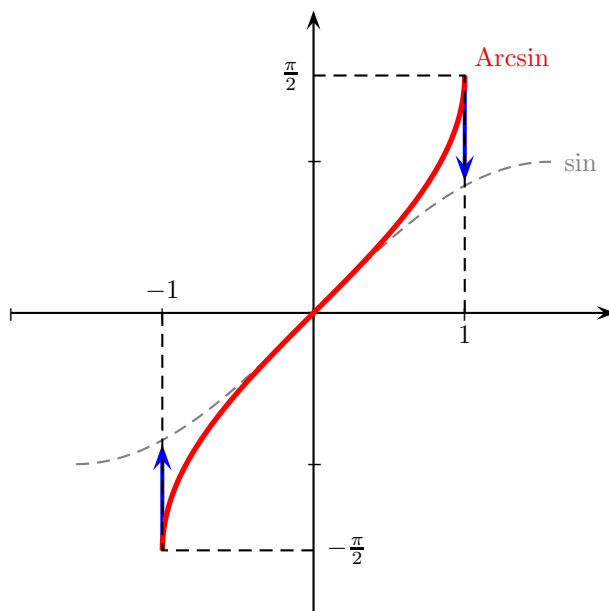


FIGURE 8.4 – Graphe de Arcsin

Comme pour la fonction Arctan, la première étape de l'étude est l'obtention de l'expression de la dérivée. Là encore, on obtient une dérivée très simple; ainsi, Arcsin est à voir comme primitive d'une certaine expression, qui n'est pas une fraction rationnelle cette fois, mais qu'on rencontre tout de même assez souvent dans des calculs d'intégrales.

Théorème 8.3.5 (Dérivée de Arcsin)

La fonction $f = \text{Arcsin}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1, 1[$, et

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

En revanche, elle n'est pas dérivable en -1 et 1 , et la courbe présente en ces points des tangentes verticales.

Propriétés 8.3.6 (propriétés de Arcsin)

Soit $f : x \mapsto \text{Arcsin}(x)$

- Domaine de définition : $[-1, 1]$.
- Dérivation : f est de classe C^∞ sur $] -1, 1[$, et $\forall x \in] -1, 1[$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- Symétries : Arcsin est impaire.
- Variations : Arcsin est croissante sur \mathbb{R} .
- Valeurs remarquables : voir tableau figure 8.6
- Propriétés de convexité : Arcsin est concave sur $[-1, 0]$ et convexe sur $[0, 1]$
- Inégalités classiques :
 - * $\forall x \in [0, 1]$, $\text{Arcsin}(x) \geq x$ (comparaison à la tangente en 0)
 - * $\forall x \in [-1, 0]$, $\text{Arcsin}(x) \leq x$.
- Limite remarquables : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arcsin} x}{x} = 1$.
- Autres propriétés remarquables :
 - * $\forall x \in [-1, 1]$, $\sin(\text{Arcsin}(x)) = x$
 - * $\forall x \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\text{Arcsin}(\sin(x)) = x$
 - * $\forall x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, $\text{Arcsin}(\sin(x)) = \pi - x$
 - * Les autres valeurs de $\text{Arcsin}(\sin(x))$ s'obtiennent en se ramenant à un de ces deux intervalles par périodicité, comme dans le cas de l'arctangente.

III.3 Arccosinus

L'étude de l'arccosinus, réciproque de cos sur un intervalle adéquat, est très similaire à celle de l'arcsin.

Définition 8.3.7 (fonction arccosinus, Arccos, courbe figure 8.5)

La fonction cos induit par restriction une bijection de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$. La réciproque de cette fonction est appelée arccosinus, notée Arccos : $[-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$.

De par les symétries existant entre sin et cos, les courbes de Arccos et Arcsin peuvent se déduire l'une de l'autre par des symétries (qu'on explicite dans les propriétés ci-dessous). On obtient donc sans surprise :

Théorème 8.3.8 (Dérivée de Arccos)

La fonction $f = \text{Arccos}$ est de classe C^∞ sur $] -1, 1[$, et

$$\forall x \in] -1, 1[\quad f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

En revanche, elle n'est pas dérivable en -1 et 1 , et la courbe présente en ces points des tangentes verticales.

Propriétés 8.3.9 (propriétés de Arccos)

Soit $f : x \mapsto \text{Arccos}(x)$

- Domaine de définition : $[-1, 1]$.
- Dérivation : f est de classe C^∞ sur $] -1, 1[$, et $\forall x \in] -1, 1[$, $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- Symétries : Arccos $-\frac{\pi}{2}$ est impaire.
- Variations : Arccos est décroissante sur $[-1, 1]$.
- Valeurs remarquables : voir tableau figure 8.6
- Propriétés de convexité : Arccos est convexe sur $[-1, 0]$ et concave sur $[0, 1]$
- Inégalités classiques :

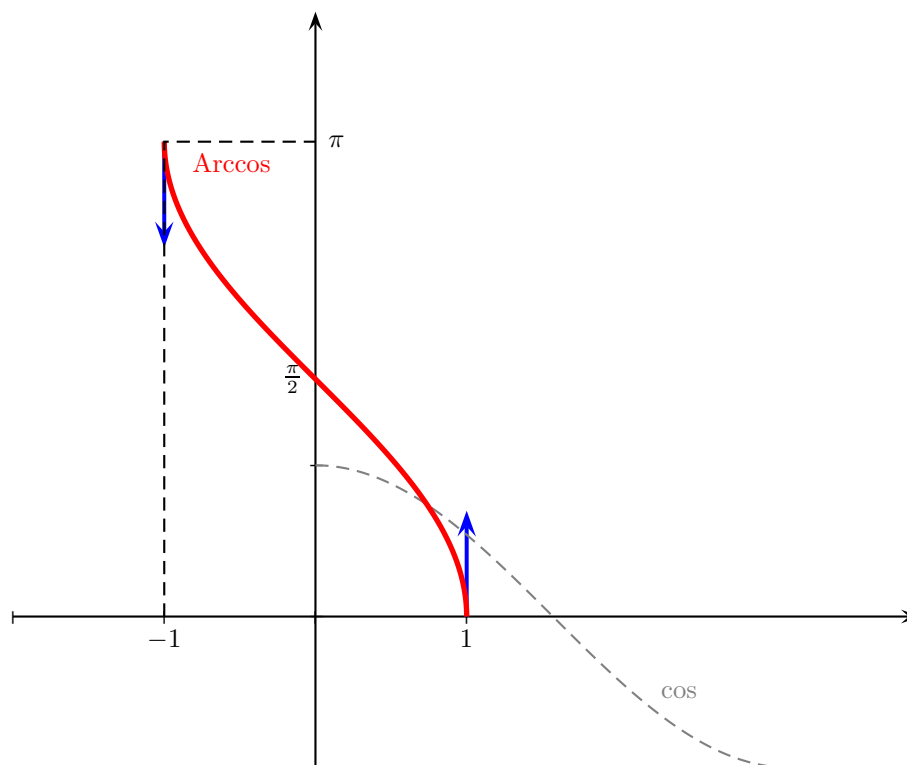


FIGURE 8.5 – Graphe de Arccos

- * $\forall x \in [0, 1], \text{Arccos}(x) \leq \frac{\pi}{2} - x$ (comparaison à la tangente en 0)
- * $\forall x \in [-1, 0], \text{Arccos}(x) \geq \frac{\pi}{2} - x$.
- Limite remarquables : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{2} - \text{Arccos}(x)}{x} = 1$.
- Autres propriétés remarquables :
 - * $\forall x \in [-1, 1], \cos(\text{Arccos}(x)) = x$
 - * $\forall x \in [0, \pi], \text{Arccos}(\cos(x)) = x$
 - * $\forall x \in [-\pi, 0], \text{Arccos}(\cos(x)) = -x$
 - * Les autres valeurs de $\text{Arccos}(\cos(x))$ s'obtiennent en se ramenant à un de ces deux intervalles par périodicité.
 - * $\text{Arccos}(x) + \text{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}$ (symétrie entre Arccos et Arcsin)

	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$
Arctan	0		$\frac{\pi}{6}$			$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
Arcsin	0	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	
Arccos	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	

FIGURE 8.6 – Tableau des valeurs particulières de Arctan, Arcsin, Arccos.

IV Fonctions hyperboliques

D'autres fonctions qu'on rencontre fréquemment en physique, et qui sont bien utiles en mathématiques, notamment pour le calcul de certaines intégrales, sont les fonctions hyperboliques, qui sont obtenues à l'aide de l'exponentielle réelle par des formules ressemblant aux formules d'Euler, liant les fonctions trigonométriques et l'exponentielle complexe. Cette analogie forte avec les fonctions trigonométriques motive la terminologie utilisée (sinus hyperbolique, cosinus hyperbolique...), et explique pourquoi la plupart des formules de trigonométrie ont un analogue hyperbolique.

Définition 8.4.1 (sinus, cosinus, tangente hyperboliques, figure 8.7)

Les fonctions « sinus hyperbolique », « cosinus hyperbolique » et « tangente hyperbolique », notées respectivement sh, ch et th, sont les fonctions définies par les formules :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}.$$

Vous pouvez constater que sh et ch sont en fait, de par leur définition même, la partie impaire et la partie paire de la fonction exponentielle. Ainsi, sh est impaire, ch est paire, et $\text{sh} + \text{ch} = \exp$.

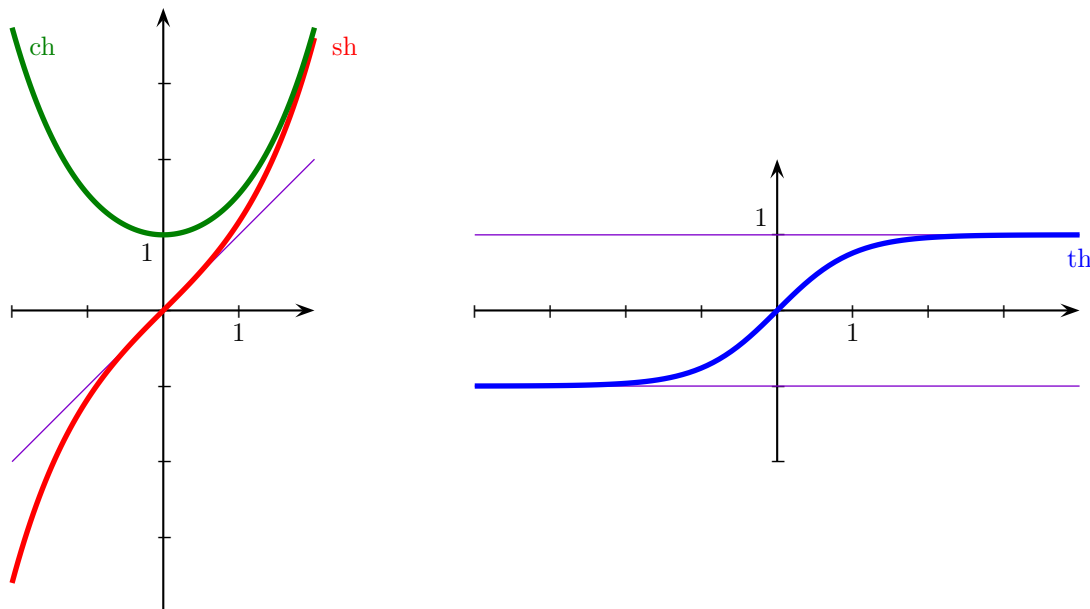


FIGURE 8.7 – Graphes des fonctions hyperboliques

Propriétés 8.4.2 (propriétés de sh)

Soit $f : x \mapsto \text{sh}(x)$

- Domaine de définition : \mathbb{R} .
- Dérivation : f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} , et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \text{ch}(x), \quad f^{(n)}(x) = \begin{cases} \text{ch}(x) & \text{si } n \text{ impair} \\ \text{sh}(x) & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

- Symétries : sh est impaire.
- Variations : sh est croissante sur \mathbb{R} .
- Valeurs remarquables : $\text{sh}(0) = 0$

- Propriétés de convexité : sh est concave sur \mathbb{R}_- et convexe sur \mathbb{R}_+ .
- Inégalités classiques :
 - * $\forall x \in \mathbb{R}_+, \text{sh}(x) \geq x$ (comparaison à la tangente en 0)
 - * $\forall x \in \mathbb{R}_-, \text{sh}(x) \leq x$ (idem)
- Limite remarquables : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sh}(x)}{x} = 1$.

Propriétés 8.4.3 (propriétés de ch)

Soit $f : x \mapsto \text{ch}(x)$

- Domaine de définition : \mathbb{R} .
- Dérivation : f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} , et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \text{sh}(x), \quad f^{(n)}(x) = \begin{cases} \text{sh}(x) & \text{si } n \text{ impair} \\ \text{ch}(x) & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

- Symétries : ch est paire.
- Variations : ch est décroissante sur \mathbb{R}_- et croissante sur \mathbb{R}_+ .
- Valeurs remarquables : $\text{ch}(0) = 1$
- Propriétés de convexité : ch est convexe
- Limite remarquables : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{ch}(x) - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Nous ne donnons qu'une formule de trigonométrie hyperbolique, les autres peuvent être retrouvées à l'aide des exponentielles (par exemple des formules pour $\text{sh}(a+b)$, $\text{sh}(a) + \text{sh}(b)$ etc).

Théorème 8.4.4 (identité remarquable)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$.

Propriétés 8.4.5 (propriétés de th)

Soit $f : x \mapsto \text{th}(x)$

- Domaine de définition : \mathbb{R} .
- Dérivation : f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} , et : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 - \text{th}^2(x) = \frac{1}{\text{ch}^2(x)}$
- Symétries : th est impaire.
- Variations : th est croissante sur \mathbb{R} .
- Valeurs remarquables : $\text{th}(0) = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{th}(x) = -1, \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{th}(x) = 1$.
- Propriétés de convexité : th est convexe sur \mathbb{R}_- et concave sur \mathbb{R}_+ .
- Inégalités classiques :
 - * $\forall x \in \mathbb{R}_+, \text{th}(x) \leq x$ (comparaison à la tangente en 0)
 - * $\forall x \in \mathbb{R}_-, \text{th}(x) \geq x$ (idem)
- Limite remarquables : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{th}(x)}{x} = 1$.

Note Historique 8.4.6

- Le premier à introduire les fonctions hyperboliques est le mathématicien et physicien italien Jacopo Riccati en 1760, dans le but d'exprimer l'aire sous une hyperbole (d'où le nom donné à ces fonctions). Ses définitions sont purement géométriques, et ne font pas référence à l'exponentielle.
- C'est Jean-Henri Lambert vers 1770 qui exprime sh et ch à l'aide de la fonction exponentielle, et qui en fait une étude complète.

V Réciproques des fonctions hyperboliques (HP)

Les réciproques des fonctions hyperboliques sont hors programme. Signalons tout de même que :

- sh est bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , et sa réciproque est appelée « argument sinus hyperbolique » et notée Argsh .
- ch est bijective de \mathbb{R}_+ sur $[1, +\infty[$, et sa réciproque, définie sur $[1, +\infty[$, est appelée « argument cosinus hyperbolique » et notée Argch
- th est bijective de \mathbb{R} sur $] -1, 1[$, et sa réciproque, définie sur $] -1, 1[$, est appelée « argument tangente hyperbolique », et notée Argth .

Une propriété remarquable des fonctions Argsh , Argch et Argth est qu'elles peuvent s'exprimer explicitement à l'aide des fonctions \ln et $\sqrt{\quad}$.

Soit en utilisant ces expressions explicites, soit en utilisant le théorème de dérivation des fonctions réciproques, on obtient la dérivabilité de ces fonctions (sauf Argch en 1) et les expressions

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad \forall x \in]1, +\infty[, \text{Argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad \forall x \in]-1, 1[, \text{Argth}'(x) = \frac{1}{1 - x^2}.$$

VI Tableau des dérivées des fonctions usuelles

Le tableau 8.8 rappelle l'ensemble des dérivées à bien connaître. Nous n'y incluons pas les dérivées des réciproques des fonctions hyperboliques (HP).

$f(x)$	domaine de définition	domaine de dérivabilité	$f'(x)$
c ($c \in \mathbb{R}$)	\mathbb{R}	\mathbb{R}	0
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	\mathbb{R}	\mathbb{R}	nx^{n-1}
x^n ($n \in \mathbb{Z}_-$)	\mathbb{R}^*	\mathbb{R}^*	nx^{n-1}
x^α ($\alpha \in]1, +\infty[\setminus \mathbb{N}$)	\mathbb{R}_+	\mathbb{R}_+	$\alpha x^{\alpha-1}$
x^α ($\alpha \in]0, 1[$)	\mathbb{R}_+	\mathbb{R}_+^*	$\alpha x^{\alpha-1}$
cas particulier \sqrt{x}	\mathbb{R}_+	\mathbb{R}_+^*	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
x^α ($\alpha \in \mathbb{R}_-$)	\mathbb{R}_+^*	\mathbb{R}_+^*	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	\mathbb{R}	\mathbb{R}	e^x
$\ln(x)$	\mathbb{R}_+^*	\mathbb{R}_+^*	$\frac{1}{x}$
$\log_b(x)$ ($b \in \mathbb{R}_+^*$)	\mathbb{R}_+^*	\mathbb{R}_+^*	$\frac{1}{x \ln b}$
$\sin(x)$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$\cos(x)$
$\cos(x)$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$	idem	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
Arcsin(x)	$[-1, 1]$	$] - 1, 1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Arccos(x)	$[-1, 1]$	$] - 1, 1[$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Arctan(x)	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$\frac{1}{1+x^2}$
sh(x)	\mathbb{R}	\mathbb{R}	ch(x)
ch(x)	\mathbb{R}	\mathbb{R}	sh(x)
th(x)	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$1 - \text{th}^2(x) = \frac{1}{\text{ch}^2(x)}$

FIGURE 8.8 – Tableau des dérivées à connaître

Calcul intégral

Lorsqu'on a vu un étudiant de deuxième ou troisième année en Faculté des Sciences peiner pendant 10 minutes pour faire un changement de variables ou une intégration par parties, on ne peut être que prodigieusement agacé, surtout (comme c'est parfois le cas) si le même étudiant assaisonne son ignorance et sa maladresse d'un jargon prétentieux et inutile qu'il n'a pas su davantage assimiler

(Jean Dieudonné)

Mes brouillons, d'ordinaire couverts d'ouïes de violoncelles (des intégrales : \int - j'en ai écrit tant que le mot me vient à l'esprit automatiquement dès que je me concentre !) mes brouillons sont cette fois infestés d'exposants entre parenthèses.

(Cédric Villani)

Le but de ce chapitre est de fournir les bases du calcul intégral. Il s'agit donc de développer les techniques calculatoires, sans se préoccuper pour le moment des fondements théoriques du calcul intégral (à savoir la théorie de l'intégration, avec la construction de l'intégrale). Pour ce faire, notre point de départ sera le théorème fondamental du calcul intégral affirmant que l'intégrale est obtenue comme différence de la primitive évaluée aux deux bornes. Ce théorème sera démontré dans un chapitre ultérieur.

À partir de là, nous développons toutes les techniques calculatoires usuelles, en particulier l'intégration par parties et le changement de variables. Nous donnons une ouverture vers les formules de Taylor, la formule de Taylor avec reste intégral étant obtenue par intégrations par partie itérées. Enfin, nous mettons en place les techniques de résolution de certaines équations différentielles linéaires, ces résolutions étant très souvent basées sur du calcul intégral.

I Calcul intégral et primitivation

Cette section a pour but de mettre en place de façon rapide (et sans aborder tous les aspects théoriques sous-jacents) les techniques du calcul intégral.

I.1 Résultats issus de la théorie

Nous admettons provisoirement les résultats de ce paragraphe, issus de la construction de l'intégrale.

Théorème 9.1.1 (Croissance, positivité et stricte de l'intégrale, admis provisoirement)

1. Soit $a < b$ et f et g deux fonctions continues telles que $f \leq g$ sur $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b f(t) \, dt \leq \int_a^b g(t) \, dt$$

2. En particulier, si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.

3. Enfin, si f est continue positive et non identiquement nulle sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t) dt > 0$.

Théorème 9.1.2 (Inégalité triangulaire intégrale, admis provisoirement)

Soit $a < b$, et f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$.

Ces deux résultats ne nous seront pas indispensables pour la plus grande partie de ce chapitre, mais peuvent être utiles au détour d'un exercice.

Par ailleurs, nous rappelons la notion de primitive :

Définition 9.1.3 (primitive)

Soit E un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R} et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Une primitive F de f est une fonction $F : E \rightarrow \mathbb{R}$, dérivable sur E et telle que pour tout $x \in E$, $F'(x) = f(x)$.

Les fonctions de dérivée nulle sur un intervalle étant les fonctions constantes, on a de façon immédiate :

Proposition 9.1.4 (unicité d'une primitive à constante près)

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et f admettant une primitive F . Alors l'ensemble des primitives de f sur I est $\{F + c, c \in \mathbb{R}\}$.

Autrement dit, deux primitives de f sur un intervalle I ne diffèrent que d'une constante additive.

En particulier, si f admet au moins une primitive, alors, étant donné $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$.

Avertissement 9.1.5

Attention, ce résultat n'est pas vrai si I n'est pas un intervalle. Si I est une réunion disjointe d'intervalles ouverts, les primitives diffèrent d'une fonction constante sur chacun des intervalles ouverts de l'union (mais pouvant différer d'un intervalle à l'autre).

Nous pouvons maintenant énoncer notre point de départ pour l'étude pratique de l'intégration :

Théorème 9.1.6 (Expression intégrale d'une primitive, Newton, admis provisoirement)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $x_0 \in I$. Alors f admet une primitive sur I , et la fonction :

$$F : x \mapsto \int_{x_0}^x f(x) dx$$

est une primitive de f . Il s'agit de LA primitive s'annulant en x_0

On en déduit de façon immédiate le théorème fondamental du calcul intégral :

Théorème 9.1.7 (Théorème fondamental du calcul des intégrales)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Soit F une primitive de f . Alors :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Nous faisons les mises en garde suivantes :

Avertissement 9.1.8

Le théorème fondamental du calcul des intégrales est énoncé pour des fonctions continues uniquement :

- Si f n'est pas continue, $x \mapsto \int_{x_0}^x f(x) dx$ peut ne pas être une primitive de f (voir le cas d'une fonction obtenue en modifiant une valeur d'une fonction continue)
- Il existe des fonctions non intégrables f admettant des primitives ; f étant non intégrable, le théorème fondamental du calcul des intégrales tombe en défaut !

Des exemples de telles fonctions sont un peu exotiques, et nous n'en donnons pas ici. Nous en verrons peut-être en exercice ou en DM.

Remarque 9.1.9

- Comme suggéré ci-dessus, il existe des fonctions non continues admettant des primitives. On peut montrer par exemple que la fonction $f : x \mapsto x^2 \sin(\frac{1}{x})$ est dérivable, de dérivée non continue. Cette dérivée, bien que non continue, admet donc une primitive.
- Cependant, toute fonction n'admet pas de primitive. On peut montrer par exemple qu'une dérivée vérifie toujours la propriété des valeurs intermédiaires, même si elle n'est pas continue (théorème de Darboux). Ainsi, toute fonction ne vérifiant pas la propriété des valeurs intermédiaires n'est pas primitivable. C'est le cas par exemple de $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$, ou plus simplement de $x \mapsto [x]$.

I.2 Techniques élémentaires de primitivation

Le théorème fondamental du calcul intégral montre à quel point il est important de savoir calculer des primitives. En particulier, une bonne connaissance des primitives des fonctions usuelles est indispensable pour une bonne maîtrise du calcul intégral. Ces primitives dont une bonne connaissance est indispensable sont rappelées dans le tableau de la figure 9.1. **À connaître sur le bout des doigts.**

Par commodité, et par référence au théorème fondamental du calcul intégral, nous introduisons la notation suivante :

Notation 9.1.10

Étant donnée une fonction continue f , on désigne par $\int f(t) dt$, ou parfois plus simplement par $\int f$ une primitive de f .

Avertissement 9.1.11

Il faut être bien conscient que cette notation n'est définie qu'à une constante près. Il s'agit donc d'un abus de notation, à manipuler avec précautions, comme toute notation abusive.

Des primitives usuelles, nous pouvons en déduire d'autres, obtenues par les règles de compositions, en lisant à l'envers la formule de dérivation des fonctions composées :

Proposition 9.1.12 (primitivation de fonctions composées)

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et admettant une primitive F . Soit u une fonction dérivable de J dans I , où J est un intervalle ouvert de \mathbb{R} . Alors, une primitive de $u' \times f \circ u$ est $F \circ u$:

$$\int (u' \times f \circ u) = \left(\int f \right) \circ u.$$

Avertissement 9.1.13

Attention, la fonction $f \circ u$ ne se primitive pas en $\frac{F \circ u}{u'}$!!

Exemples 9.1.14

1. Primitives de $x \mapsto \frac{1}{x(1 + \ln x^2)}$.
2. Primitives de $x \mapsto \frac{x}{1 + x^2}$ et $x \mapsto \frac{1}{1 + x^2}$

Un cas fréquent est celui d'une composition par $x \mapsto (ax + b)$. Ici, la dérivée de cette dernière fonction étant constante, on peut la passer du côté de la primitive (par linéarité de la dérivation). On obtient alors :

Corollaire 9.1.15 (Primitivation de $x \mapsto f(ax + b)$)

Soit F une primitive de f sur un intervalle I , et a et b deux réels, $a \neq 0$. Soit J un intervalle tel que $aJ + b \subset I$. Alors la fonction $g : x \mapsto f(ax + b)$ est primitivable sur J , et une primitive en est $G : x \mapsto \frac{1}{a}F(ax + b)$.

Ce n'est bien sûr qu'une réexpression dans un cas très particulier du théorème général de primitivation des composées. Nous voyons comment utiliser ce résultat pour la primitivation des fractions rationnelles du type $\frac{1}{ax^2 + bx + c}$, qu'on rencontre assez fréquemment. La méthode, basée sur la mise sous forme canonique, est à savoir mettre en place sans hésiter

Méthode 9.1.16 (primitivation d'inverses de trinômes)

Soit $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$ un polynôme de degré 2 ($a \neq 0$).

1. Si P admet une racine double r , $\frac{1}{P}$ se primitive en $x \mapsto \frac{-1}{a(x - r)}$.
2. Si P admet deux racines réelles r_1 et r_2 , chercher α et β tels que

$$\frac{1}{P(x)} = \frac{\alpha}{x - r_1} + \frac{\beta}{x - r_2}.$$

La fonction $\frac{1}{P}$ se primitive en $x \mapsto \alpha \ln|x - r_1| + \beta \ln|x - r_2|$

3. Si P n'a pas de racine réelle, effectuer une mise sous forme canonique pour obtenir :

$$\frac{1}{P(x)} = \frac{\gamma}{(\alpha x + \beta)^2 + 1},$$

puis utiliser une primitivation composée : une primitive en est

$$x \mapsto \frac{\gamma}{\alpha} \operatorname{Arctan}(\alpha x + \beta).$$

Cette méthode est adaptable au cas de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$. La mise sous forme canonique nous ramène dans ce cas soit à une dérivée (composée) de Arcsin, soit Argch, soit encore Argsh.

Exemples 9.1.17

1. Primitives de $x \mapsto \frac{1}{x^2 + 2x + 3}$
2. Primitives de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - 2x - x^2}}$.

Nous avons indiqué dans la figure 9.1 les différentes expressions composées qu'on peut primitiver en partant de chacune des fonctions usuelles. Par convention, dans ce tableau les fonctions dont le nom est une lettre majuscule correspondent aux primitives des fonctions en lettres minuscules correspondantes. Par ailleurs, dans la dernière colonne, nous avons noté par abus $\sin(u)$ pour la fonction composée de \sin et u , et de même pour un certain nombre d'autres fonctions. Cette notation est incorrecte, mais commode ici.

$f(x)$	$F(x)$	intervalle	g	G
0	0	\mathbb{R}	0	0
a	ax	\mathbb{R}	au'	au
x^p ($p \neq -1$)	$\frac{x^{p+1}}{p+1}$	\mathbb{R} ou \mathbb{R}_+ suivant p	$u'u^p$	$\frac{u^{p+1}}{p+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	\mathbb{R}^*	$\frac{u'}{u}$	$\ln u $
e^x	e^x	\mathbb{R}	$u'e^u$	e^u
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	\mathbb{R}	$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	\mathbb{R}	$u'\cos(u)$	$\sin(u)$
$\tan(x)$	$-\ln \cos(x) $	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$	$u'\tan(u)$	$-\ln \cos(u) $
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$	$\frac{u'}{\cos^2(u)}$	$\tan(u)$
$1 + \tan^2(x)$	$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$	$u' + u'\tan^2(u)$	$\tan(u)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\text{Arctan}(x)$	\mathbb{R}	$\frac{u'}{1+u^2}$	$\text{Arctan}(u)$.
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{Arcsin}(x)$ ou $-\text{Arccos}(x)$	$] -1, 1[$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\text{Arcsin}(u)$
$\text{sh}(x)$	$\text{ch}(x)$	\mathbb{R}	$u'\text{sh}(u)$	$\text{ch}(u)$
$\text{ch}(x)$	$\text{sh}(x)$	\mathbb{R}	$u'\text{ch}(u)$	$\text{sh}(u)$
$\text{th}(x)$	$\ln(\text{ch}(x))$	\mathbb{R}	$u'\text{th}(u)$	$\ln(\text{ch}(u))$
$\frac{1}{\text{ch}^2(x)}$	$\text{th}(x)$	\mathbb{R}	$\frac{u'}{\text{ch}^2(u)}$	$\text{th}(u)$
$1 - \text{th}^2(x)$	$\text{th}(x)$	\mathbb{R}	$u' - u'\text{th}^2(u)$	$\text{th}(u)$

FIGURE 9.1 – Tableau des primitives à connaître

II Techniques de calcul intégral

Comme annoncé ci-dessus, notre point de départ est le théorème fondamental du calcul intégral (qui, vu son importance, est parfois aussi appelé théorème fondamental de l'analyse). Ce théorème est à la base des deux grandes techniques (outre le calcul directe à l'aide d'une primitive) permettant de calculer des intégrales :

II.1 Intégration par parties

Théorème 9.2.1 (Intégration par parties)

Soit f, g deux fonctions de classe C^1 sur $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b f'(x)g(x) \, dx = \left[f(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) \, dx.$$

En effectuant plusieurs intégrations par parties successives, on obtient :

Théorème 9.2.2 (Intégration par parties itérée)

Soit f et g deux fonctions de classe C^n sur $[a, b]$ ($n \geq 1$). Alors :

$$\int_a^b f^{(n)}(x)g(x) \, dx = \left[\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i f^{(n-1-i)}(x)g^{(i)}(x) \right]_a^b + (-1)^n \int_a^b f(x)g^{(n)}(x) \, dx.$$

Remarque 9.2.3 (Comment retenir cette formule)

- La partie variations est la partie intégrée de la formule : pour chaque terme de la somme l'ordre total de dérivation est un de moins que l'ordre total dans l'intégrale, donc $n - 1$. On somme sur toutes les façons de dériver f et g avec un ordre total de $n - 1$.
- Le signe qui alterne dans la somme provient du fait qu'à chaque étape, on change le signe de l'intégrale. La première étape doit donner un signe positif. Or, la première étape de l'IPP donne le facteur $f^{(n-1)}g$, donc correspond à l'indice $i = 0$. Ainsi, le signe est $(-1)^i$.
- Le signe devant l'intégrale provient du fait qu'on a effectué n intégrations par partie (autant qu'il faut pour abaisser le degré de dérivation de f jusqu'à 0) ; chaque intégration par parties change le signe devant l'intégrale.

Exemple 9.2.4

Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t} \, dt$ sous forme d'une somme. Déterminer la limite de $F_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Il s'agit d'un cas particulier de la fonction Γ d'Euler, définie pour tout $x > 0$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n - 1)!$. On peut donc voir la fonction Γ comme un prolongement à \mathbb{R} de la factorielle.

Une conséquence importante du théorème d'intégration par parties itérée est la formule de Taylor avec reste-intégrale :

Théorème 9.2.5 (Formule de Taylor avec reste-intégrale)

Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur $[a, b]$. Alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \, dt.$$

Corollaire 9.2.6 (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soit $a < b$, et f une fonction de classe \mathcal{C}^{n+1} sur $[a, b]$, telle que $m \leq f^{(n+1)} \leq M$ sur $[a, b]$. Alors

$$\frac{m(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leq f(b) - \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} \leq \frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Remarque 9.2.7

1. L'inégalité de Taylor-Lagrange est souvent utilisée dans la version suivante : si f est de classe \mathcal{C}^{n+1} sur $[a, b]$ et $f^{(n+1)} \leq M$ sur $[a, b]$, alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} \right| \leq \frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

2. La version générale de l'inégalité permet d'établir par exemple que sous les mêmes hypothèses, si $f^{(n+1)} \geq 0$, alors

$$f(b) \leq \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!},$$

et de même dans l'autre sens.

L'inégalité de Taylor est vraie dans un cas un peu plus général : il suffit en fait que f soit de classe \mathcal{C}^n sur $[a, b]$, et $n+1$ fois dérivable sur $]a, b[$, la majoration de $f^{(n+1)}$ étant alors à donner sur $]a, b[$. Ce résultat plus précis est hors-programme et la démonstration en est plus délicate.

Si on réexprime le théorème d'intégration par parties pour le calcul des primitives, on obtient :

Corollaire 9.2.8 (Intégration par parties pour le calcul des primitives)

Soit f, g deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I . Alors, sur l'intervalle I :

$$\int f'g = fg - \int fg'.$$

Exemple 9.2.9

Calcul d'une primitive de $x \mapsto \ln(x)$.

II.2 Changements de variables

La deuxième grande technique du calcul intégral est celle du changement de variable, qui n'est en fait qu'une réexpression commode de la primitivation de fonctions composées.

Théorème 9.2.10 (Changement de variables)

Soit f une fonction continue sur $[\alpha, \beta]$, et u une fonction de classe \mathcal{C}^1 de $[a, b]$ vers $[\alpha, \beta]$. Alors f est intégrable entre $u(a)$ et $u(b)$, et :

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(x) \, dx = \int_a^b f(u(t))u'(t) \, dt.$$

On dit qu'on a fait le changement de variable $x = u(t)$.

Remarque 9.2.11 (Comment ne pas s'embrouiller dans les bornes)

Dans l'intégrale de gauche, les bornes sont pour la variable x , dans celle de droite, elles sont pour la variable t . On passe de la variable t à la variable x en appliquant u : il en est de même pour les bornes : les bornes pour la variable x sont obtenues en appliquant u aux bornes pour la variable t .

Remarques 9.2.12

1. Si u est bijective, on peut écrire : $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, dx = \int_{u^{-1}(\alpha)}^{u^{-1}(\beta)} f(u(t))u'(t) \, dt$.
2. Cette formule peut s'utiliser dans les deux sens, comme le montre l'exemple suivant.

Exemples 9.2.13

1. $\int_2^3 \frac{4t^3}{1-t^8} \, dt$
2. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx$.

Le théorème fondamental du calcul des intégrales permet également l'étude de fonctions définies à l'aide d'intégrales, la dépendance s'effectuant au niveau des bornes, via le théorème suivant :

Théorème 9.2.14 (Dérivation d'intégrales dépendant de leurs bornes)

Soit I et J deux intervalle Soit u et v deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 de I dans J , et soit f une fonction continue sur J . Soit G la fonction définie par : $\forall x \in I, \quad G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) \, dt$.
Alors G est de classe \mathcal{C}^1 sur I , et : $\forall x \in I, \quad G'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$.

Le théorème fondamental du calcul des intégrales montre l'importance de la notion de primitive pour le calcul des intégrales, la capacité à calculer une intégrale étant fortement liée à la capacité de trouver une primitive. Il est donc indispensable de reconnaître rapidement les fonctions que l'on sait primitiver directement. Une telle habitude est aussi indispensable pour exploiter correctement la méthode de l'intégration par parties. Une bonne connaissance du tableau des primitives, et une pratique régulière de la primitivation et de l'intégration sont donc nécessaires.

II.3 Conséquences pour les fonctions admettant des symétries

On donne trois conséquences importantes du théorème de changement de variable, et du théorème de dérivation d'une intégrale dépendant de ses bornes, pour le calcul d'intégrales de fonctions paires, impaires ou périodiques.

Proposition 9.2.15 (Intégrale d'une fonction impaire)

Soit $I = [-a, a]$ et f une fonction continue et impaire sur I . Alors

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 0.$$

Proposition 9.2.16 (Intégrale d'une fonction paire)

Soit $I = [-a, a]$ et f une fonction continue et paire sur I . Alors

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx.$$

Proposition 9.2.17 (Intégrale d'une fonction périodique)

Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} , périodique de période $T > 0$. Alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^{a+T} f(x) \, dx = \int_0^T f(x) \, dx.$$

Ainsi, l'intégrale d'une fonction périodique sur une période ne dépend pas du choix de la période.

III Équations différentielles linéaires

III.1 Généralités sur les équations différentielles

Une équation différentielle satisfaite par une fonction f est une relation liant f et ses dérivées successives jusqu'à un certain ordre. Plus formellement :

Définition 9.3.1 (Équation différentielle ordinaire, ED)

Soit $r \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle de \mathbb{R} , et y une fonction à valeurs réelles ou complexes r fois dérivable sur I . Soit F une fonction définie sur une partie (ouverte) U de \mathbb{R}^{r+2} . On dit que y vérifie l'équation différentielle

$$F(x, y, y', \dots, y^{(r)}) = 0,$$

si pour tout $x \in I$, $(x, y(x), \dots, y^{(r)}(x)) \in U$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(r)}(x)) = 0.$$

On dit que l'équation est exactement d'ordre r si F dépend de façon effective de sa dernière variable.

On définit de même une équation différentielle satisfaite par un système (y_1, \dots, y_p) de fonctions comme une relation liant x et les dérivées successives des y_i . L'ordre de l'équation est l'ordre maximal des dérivées dont dépend la relation.

Exemple 9.3.2

1. $xy'' - 2y' + \sin(y) = 0$
2. $\frac{y'}{z''} - xyz' + \frac{\sin(x)}{1+z^2} = \frac{y'}{y}$

Note Historique 9.3.3

De nombreux problèmes physiques amènent à des équations différentielles, d'où la question qui s'est posée très tôt de savoir déterminer les solutions de telles équations. Nous citons par exemple :

- L'équation du pendule oscillant : $\theta'' + \omega_0^2 \sin \theta = 0$
- L'équation de la chaînette (courbe réalisée par une chaînette homogène suspendue par ses deux extrémités) : $p' = \frac{\omega}{H} \sqrt{1+p^2}$, où p est la pente.
- L'équation de Bessel (introduite par Daniel Bernoulli, en rapport avec le mouvement des planètes, et étudiée par Bessel au 19e siècle) : $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0$.
- Les équations de type $y'' = q_0(x) + q_1(x)y + q_2(x)y^2$, appelées équations de Riccati, introduites par ce dernier en vue d'études hydroliques et acoustiques
- Plus récemment, toute une série d'équations liées au fonctionnement de circuits électroniques :
 - * Circuit RC en régime libre : $u' + \frac{u}{RC} = 0$

- * Circuit RC en régime transitoire : $u' + \frac{u}{RC} = \frac{e_0}{R_0C}$
- * Circuit RC en régime sinusoïdal forcé : $u' + \frac{u}{RC} = \frac{E}{RC} \cos(\omega t)$
- * Circuit RCL : $q'' + 2\lambda q' + \omega_0^2 q = \frac{e_0}{L}$.
- etc.

Un système d'équations différentielles est un ensemble fini d'équations différentielles entre une ou plusieurs fonctions. L'ordre du système est l'ordre maximal de dérivation intervenant dans le système.

Exemple 9.3.4

Voici un système de 2 équations entre 3 fonctions :

$$\begin{cases} xy_1'' + y_2' + \sin(y_1 y_3') & = 0 \\ x^2 y_3' - y_3 y_2 - \cos(y_1) & = 0 \end{cases}$$

Toute équation différentielle portant sur une fonction se ramène à un système d'ordre 1, par ajout d'inconnues et d'équations. Plus précisément :

$$F(x, f, f', f^{(2)}, \dots, f^{(r)}) = 0 \iff \begin{cases} f_1 = f' \\ f_2 = f_1' \\ \vdots \\ f_{r-1} = f_{r-2}' \\ F(x, f, f_1, \dots, f_{r-1}, f_{r-1}') = 0 \end{cases}$$

Il n'est pas dur de se convaincre alors que toute équation différentielle portant sur un ensemble fini d'inconnues peut se rapporter de même à un système d'ordre 1, puis que tout système quelconque peut se rapporter à un système d'ordre 1. Ainsi, l'étude des systèmes différentiels d'ordre 1 fournit le cas général.

Définition 9.3.5 (Forme normale)

Un système différentiel est dit sous forme normale si, pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, il s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

On dit qu'un système a été mis sous forme normale si on est parvenu à trouver un système sous forme normale admettant les mêmes solutions.

Exemple 9.3.6

Le système

$$\begin{cases} 3x + 2y' + z' + 2z & = 0 \\ x - 2x^2 y' + z' - 2xy & = 0 \end{cases}$$

n'est pas sous forme normale, mais peut être mis sous forme normale sur \mathbb{R}_+^* .

En adoptant une notation vectorielle, un système sous forme normale s'écrit donc :

$$Y' = F(x, Y), \text{ où } Y = (y_1, \dots, y_n), \quad Y' = (y_1', \dots, y_n'), \quad F = (f_1, \dots, f_n).$$

Une équation différentielle traduit souvent l'évolution d'un système dynamique. En physique, on appelle espace des phases l'ensemble des configurations possibles du système. Dans notre cas simple, il s'agit de l'ensemble des valeurs possibles de $(f_1(x), \dots, f_n(x))$, donc de \mathbb{R}^n , ou d'un sous-ensemble de \mathbb{R}^n .

Lorsqu'on étudie un système dynamique, on connaît souvent sa configuration initiale (c'est-à-dire qu'on connaît, pour une valeur x_0 donnée, les valeurs des $f_i(x_0)$), et on aimerait connaître sa configuration à un autre moment. Il s'agit donc de rechercher une solution de l'équation différentielle vérifiant les conditions initiales fixées. C'est ce qu'on appelle le *problème de Cauchy*.

Définition 9.3.7 (problème de Cauchy)

Soit $Y' = F(x, Y)$ un système dynamique (écrit vectoriellement) sous forme normale. Le problème de Cauchy relatif à ce système et aux conditions initiales (x_0, Y_0) consiste en la recherche des solutions Y de l'équation vérifiant $Y(x_0) = Y_0$.

Remarquez que si les variables du système sont issues du procédé nous ayant permis de passer d'une équation d'ordre r sur une seule fonction à un système d'ordre 1, alors la donnée du problème de Cauchy revient à la donnée de $f(x_0), f'(x_0), \dots, f^{(r)}(x_0)$.

Intuitivement, l'évolution d'un système dynamique est globalement déterministe (si on connaît toutes les données extérieures). On peut donc s'attendre à avoir l'unicité de la solution d'une équation différentielle.

Théorème 9.3.8 (Théorème de Cauchy-Lipschitz approximatif, HP)

Sous certaines conditions sur F , il existe une unique solution y définie sur un intervalle de taille maximale de l'équation $Y' = F(x, Y)$ soumis au problème de Cauchy $Y(x_0) = Y_0$.

Note Historique 9.3.9

- La première version de ce théorème est due à Augustin Cauchy (première moitié du 19^e siècle), et n'est qu'un résultat d'unicité locale. Rudolf Lipschitz élargit un peu la classe de fonctions F à laquelle on peut appliquer ce théorème (les fonctions lipschitziennes). C'est Fuchs, Picard, Painlevé et Henri Poincaré qui proposent à la fin du 19^e siècle une approche plus globale portant sur la solution maximale.
- L'hypothèse du théorème de Cauchy-Lipschitz est vérifiée pour les équations de la physique, mais ce n'est pas pour autant que le monde est déterministe, car une infime variation des conditions initiales amène de grosses variations à long terme, comme l'a montré Henri Poincaré. En 1972, Le météorologue Edward Lorenz a résumé cela dans le titre d'une de ses conférences :

« le battement d'ailes d'un papillon au Brésil peut-il provoquer une tornade au Texas ? »

Depuis, on appelle cela l'*effet papillon*.

Nous nous contentons de l'étude d'équations différentielles réelles, sachant que la plupart des résultats ci-dessous se généralisent sans problème au cas de fonctions à valeurs dans \mathbb{C} , les constantes devant alors être prises dans \mathbb{C} .

IV Introduction rapide aux intégrales impropres

Ce paragraphe sera rempli l'année prochaine.

IV.1 Équations différentielles linéaires

Définition 9.4.1 (Équation différentielle linéaire)

Une équation différentielle linéaire d'ordre r d'une variable y est une équation différentielle de la forme :

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_r(x)y^{(r)} = b(x),$$

où a_r n'est pas la fonction nulle.

On définit de la même manière une équation différentielle linéaire d'ordre r de plusieurs variables y_1, \dots, y_p comme une relation affine à coefficients fonctionnels entre les dérivées des y_i jusqu'à l'ordre r (au moins l'un des coefficients d'un des termes d'ordre r étant non nul).

On définit aussi les systèmes d'équations linéaires.

Les exemples issus de l'électronique cités ci-dessus fournissent des exemples d'équations linéaires (circuits RCL...) En revanche, l'équation de la chaînette, l'équation du pendule oscillant et les équations de Riccati ne sont pas linéaires.

Puisque les équations du type $f_{i+1} = f'_i$ qu'on avait rajoutées pour ramener tout système à un système d'ordre 1 sont linéaires, tout système linéaire se ramène à un système linéaire d'ordre 1. L'intérêt essentiel de cette réduction (et la raison pour laquelle on a dans cette situation des techniques particulières et efficaces) réside en la possibilité de décrire un tel système par une opération matricielle.

Proposition 9.4.2 (Écriture matricielle d'un système différentiel d'ordre 1)

Un système de n équations différentielles linéaires d'ordre 1 en les variables y_1, \dots, y_p peut s'écrire sous la forme $Y' = A(x)Y + B(x)$, où :

- $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$, et $Y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_p \end{pmatrix}$,
- A est une fonction de I dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Ainsi, A est une matrice à n lignes et p colonnes, à coefficients dépendant de x .
- Le produit $A(x)Y'$ correspond au produit matriciel usuel.
- B est une fonction de I dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Ainsi, B est une matrice-colonne à n lignes, à coefficients dépendant de x .

Ainsi, cette proposition et l'observation qui précède permettent d'affirmer que tout système d'équations linéaires se ramène (éventuellement par ajout d'inconnues et d'équations) à une équation différentielle vectorielle du type $Y' = A(x)Y + B(x)$.

On dispose de méthodes matricielles pour la résolution de tels systèmes, passant notamment par la « diagonalisation » de la matrice $A(x)$, procédé que vous verrez l'année prochaine.

On étudie de façon directe le cas d'équations linéaires d'ordres 1 et 2, mais auparavant, on se sert de la description générale pour donner un résultat de structure de l'ensemble des solutions. Pour cela, nous commençons par définir la notion de sous-espace vectoriel et sous-espace affine de \mathbb{R}^n .

Définition 9.4.3 (Sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n ou \mathbb{R}^I)

Un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n ou \mathbb{R}^I est un sous-ensemble E non vide de \mathbb{R}^n ou \mathbb{R}^I , stable par combinaisons linéaires : pour tout $(x, y) \in E^2$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda x + \mu y \in E$.

En particulier $0 \in E$.

Géométriquement, dans \mathbb{R}^n , il s'agit des droites, plans (et autres objets du même type en dimension plus grande) passant par 0.

Définition 9.4.4 (Sous-espace affine de \mathbb{R}^n ou \mathbb{R}^I)

Un sous-espace affine A de \mathbb{R}^n ou \mathbb{R}^I est un sous-ensemble non vide de \mathbb{R}^n ou \mathbb{R}^I tel que, si $a_0 \in A$ est un élément quelconque de A , l'ensemble $A_0 = A - a_0 = \{a - a_0 \mid a \in A\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

Remarques 9.4.5

1. Cette définition est indépendante du choix de a_0 , et tout choix de a_0 dans A définit le même sous-espace vectoriel A_0 .
2. Ainsi, un sous-espace affine peut s'écrire sous la forme $A = A_0 + a_0$, où A_0 est un sous-espace vectoriel et a_0 un élément particulier de A .

Géométriquement, dans \mathbb{R}^n , il s'agit des droites, plans (et autres objets du même type en dimension plus grande) ne passant pas nécessairement par 0.

Théorème 9.4.6 (Structure de l'ensemble des solutions)

Soit $Y' = A(x)Y + B(x)$ un système dynamique linéaire sous forme normale. S'il est non vide, l'ensemble \mathcal{S} des solutions de ce système est un sous-espace affine de l'ensemble de toutes les fonctions de I dans \mathbb{K} . Plus précisément,

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + Y_0,$$

où :

- \mathcal{S}_0 est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée $Z' = A(x)Z$;
- Y_0 est une solution particulière.

La recherche d'une solution particulière peut se faire en plusieurs temps, si B se décompose en somme de fonctions plus simples :

Proposition 9.4.7 (Principe de superposition)

Si $B = B_1 + B_2$, pour trouver une solution particulière y_0 de l'équation $Y' = A(x)Y + B(x)$, il suffit de trouver une solution particulière Y_1 de $Y' = A(x)Y + B_1(x)$ et une solution particulière Y_2 de $y' = A(x)y + B_2(x)$. Alors $Y_0 = Y_1 + Y_2$ est solution de $Y' = A(x)Y + B(x)$.

IV.2 Équations différentielles linéaires d'ordre 1**IV.2.1 Situation**

Nous nous intéressons ici aux équations linéaires d'ordre 1 sur un intervalle I , dont la forme générale est : $a_1(x)y' + a_0(x)y = \beta(x)$, où a et b sont des fonctions d'une variable réelle, à valeurs dans \mathbb{R} (il ne s'agit donc plus d'une situation vectorielle).

On se restreint ici au cas où la fonction a_1 ne s'annule pas sur l'intervalle I considéré, et où les fonctions a_1 , a_0 et β sont continues, à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Ainsi, en divisant par a_1 et en isolant le terme y' , on est ramené à une équation sous forme normale : $y' = a(x)y + b(x)$, où a et b sont continues à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Nous allons étudier l'ensemble des solutions d'une équation de ce type, à l'aide de deux « quadratures » (c'est-à-dire deux primitives). Les méthodes mises en oeuvre sont à connaître, car ce sont elles qui vous permettront de résoudre explicitement une équation différentielle.

Au passage, cette étude nous permettra de constater que le théorème de Cauchy-Lipschitz est bien valide dans cette situation.

Remarque 9.4.8

Si a_1 s'annule sur l'intervalle I , on peut restreindre l'étude à des sous-intervalles sur lesquels a_1 ne s'annule pas, puis essayer de recoller les morceaux.

La mise sous forme normale $y' = a(x)y + b(x)$ nous permet d'utiliser le théorème de structure, nous assurant que l'ensemble des solutions \mathcal{S} est somme d'une solution particulière y_0 et de l'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' = a(x)y$.

IV.2.2 Solutions de l'équation homogène

Théorème 9.4.9 (Résolution de l'équation $y' = a(x)y$ (a continue))

L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' = a(x)y$ est :

$$\mathcal{S}_0 = \{y : x \mapsto Ce^{A(x)}\},$$

où A est une primitive de la fonction (continue) a , et C est une constante.

Remarque 9.4.10 (Comment retrouver cette formule si on l'a oubliée)

- Au brouillon, on s'autorise des divisions par y (rigoureusement incorrect si on n'a pas justifié que la fonction de s'annule pas!) L'équation s'écrit alors $\frac{y'}{y} = a(x)$.
- On reconnaît en $\frac{y'}{y}$ la dérivée de $\ln|y|$ (appelée dérivée logarithmique de y). On primitive, on passe à l'exponentielle et le tour est joué.
- Au propre, il est préférable d'utiliser directement la formule du cours, pour éviter les problèmes de justification issus de la division par y .

Exemples 9.4.11

1. Résolution de $y' = ay$ (a constant)
2. Résolution de $y' = yx^\alpha$ sur \mathbb{R} si $\alpha \geq 0$, sur \mathbb{R}_+^* sinon.

IV.2.3 Recherche d'une solution particulière de $y' = a(x)y + b(x)$

Pour commencer, fractionner éventuellement le problème en problèmes plus simples par le principe de superposition énoncé plus haut. On suppose cette première étape effectuée, et on cherche une solution particulière de l'équation $y' = a(x)y + b(x)$.

Voici une méthode efficace pour trouver une solution particulière (au moins sous forme intégrale) à partir d'une solution de l'équation homogène :

Méthode 9.4.12 (Méthode de variation de la constante)

1. Les solutions de l'équation homogène étant de la forme $x \mapsto Ce^{A(x)}$, on recherche une solution particulière de l'équation non homogène sous la forme $x \mapsto C(x)e^{A(x)}$ (on rend la constante variable)
2. En remplaçant dans l'équation différentielle, $x \mapsto C(x)$ s'obtient par primitivation.

Exemples 9.4.13

1. Résoudre $y' = 2y + \sin(x) + e^x + x$ sur \mathbb{R}
2. Résoudre $y' = -\frac{y}{x} + \text{Arctan}(x)$ sur \mathbb{R}_+^*

Remarque 9.4.14

Il n'est pas toujours nécessaire d'employer la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière : parfois elle est suffisamment évidente pour être devinée.

Exemples 9.4.15

1. Si a et b sont constants, la fonction constante égale à $-\frac{b}{a}$ est solution de $y' = ay + b$.

2. La fonction $y : x \mapsto ce^{\alpha x}$ est solution de $y' = ay + be^{\alpha x}$, où c vérifie l'équation $\alpha c = ac + b$.

IV.2.4 Problème de Cauchy associé à EDL du premier ordre

Nous pouvons maintenant résoudre le problème de Cauchy associé à une EDL du premier ordre :

Théorème 9.4.16 (Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations linéaires d'ordre 1)

Soit a et b deux fonctions continues sur un intervalle I , à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et \mathcal{S} l'ensemble des solutions à valeurs dans \mathbb{K} de l'équation $y' = a(x)y + b(x)$. Soit x_0 un élément de I . Alors il existe une et une seule solution y de l'équation différentielle telle que $y(x_0) = y_0$.

IV.2.5 Résolution des EDL d'ordre 1 à coefficients constants

Du fait de son importance pratique, on isole dans le résultat suivant la résolution complète du cas d'une équation $y = ay + b$ dans le cas où a et b sont constants (réels ou complexes). Ce théorème est un corollaire immédiat des résultats des sections précédentes.

Théorème 9.4.17 (Résolution d'une équation linéaire $y' = ay + b$ à coefficients constants)

Soit a et b deux éléments de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ est :

$$\mathcal{S} = \left\{ y : x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}, C \in \mathbb{K} \right\},$$

En particulier, l'unique solution telle que $y(x_0) = y_0$ est :

$$y : x \mapsto \left(\frac{b}{a} + y_0 \right) e^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}.$$

IV.3 Résolution des EDL d'ordre 2 à coefficients constants

IV.3.1 Position du problème

Une méthode générale d'étude *via* l'outil matriciel permet d'adapter sans peine le principe de résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 1 à la résolution des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur, en se ramenant d'abord à un système d'ordre 1, qu'on écrit matriciellement (voir plus haut). Tant que nous ne disposons pas de cet outil (et notamment des techniques de diagonalisation), nous nous contentons d'une étude dans un cas beaucoup moins général, celui où tous les coefficients de l'équation sont constants, dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Par commodité, on note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , selon le contexte dans lequel on se place, pour éviter d'avoir à distinguer les deux cas dans les énoncés.

Si le coefficient du terme en y'' est nul, on est ramené à l'étude d'une équation d'ordre 1. On peut donc supposer que ce coefficient est non nul, et en divisant l'équation par ce coefficient, on est ramené à l'étude d'une équation de la forme suivante :

$$y'' + ay' + by = f(x) \text{ où } a, b \in \mathbb{K} \text{ et } f \text{ continue à valeurs dans } \mathbb{K}.$$

Ainsi, les techniques énoncées précédemment nous ramènent sans difficulté à un système linéaire d'ordre 1 sous forme normale ce qui nous permet de :

1. utiliser le théorème de structure de l'ensemble des solutions, qui nous dit qu'on peut se contenter de la résolution du système homogène $y'' + ax + by = 0$, et de la recherche d'une solution particulière
2. utiliser le principe de superposition pour ramener la recherche des solutions particulières au cas de fonctions f les plus simples possibles.

IV.3.2 Résolution de l'équation homogène

La méthode ci-dessous est importante en soi, même si l'utilisation directe du théorème qu'on en déduit est plus efficace. Cependant, le deuxième point de cette méthode se généralise au cas d'équations linéaires d'ordre 2 à coefficients non constants, à condition d'avoir réussi à trouver une solution particulière de l'équation homogène (ce qui constitue alors souvent le point délicat de la résolution).

Méthode 9.4.18 (Recherche des solutions de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$)

- Recherche une solution particulière sous la forme $y_0 : x \mapsto e^{rx}$. Le réel r vérifie alors l'équation $r^2 + ar + b = 0$:
- Étant donné une solution particulière y_0 de l'équation homogène, effectuer le changement de variable $y = y_0z$. On obtient l'équation :

$$2y_0'z' + y_0z'' + ay_0z' = 0, \quad \text{puis:} \quad z'' + (2r + a)z' = 0$$

- On résout cette équation de degré 1 en z' , puis on trouve z par primitivation.
- On revient à la variable initiale en exprimant $y = y_0z$. Cela nous donne toutes les solutions de l'équation différentielle.

On obtient, par application de cette méthode :

Théorème 9.4.19

Soit a et b des nombres complexes. L'ensemble des solutions à valeurs complexes de l'équation $y'' + ay' + b = 0$ est :

$$\begin{cases} \mathcal{S}_0 = \{y : x \mapsto ce^{r_1x} + de^{r_2x}\} & \text{si } \Delta \neq 0 \\ \mathcal{S}_0 = \{y : x \mapsto (c + dx)e^{rx}\} & \text{si } \Delta = 0, \end{cases}$$

où Δ est le discriminant du polynôme $X^2 + aX + b$, et où r_1 et r_2 sont les racines (réelles ou complexes) de ce polynôme (notée simplement r , en cas de racine double).

Terminologie 9.4.20 (polynôme caractéristique)

Le polynôme $X^2 + aX + b$ est appelé *polynôme caractéristique* de l'équation différentielle $y'' + ay' + b = 0$.

Remarques 9.4.21

1. La première étape de la méthode exposée pour trouver ces solutions nous fournissait déjà la totalité des solutions (puisqu'on pouvait choisir indifféremment r_1 ou r_2 et puisque l'ensemble des solutions est stable par combinaison linéaire). La deuxième étape sert dans ce cas seulement à prouver qu'il n'y a pas d'autre solution.
2. Dans le cas où $\Delta = 0$, la deuxième étape nous fournit une solution que la première étape ne nous permettait pas d'obtenir. La méthode trouve là toute sa pertinence.

Même si les coefficients a et b sont réels, il peut arriver que l'expression obtenue au bout fasse intervenir des exponentielles complexes (cas où $\Delta < 0$). La solution générale obtenue est alors une fonction à valeurs complexes. Parmi celles-ci, certaines sont à valeurs réelles. On est souvent intéressé par ces fonctions spécifiquement. Voici un résultat permettant de retrouver facilement l'ensemble des solutions à valeurs réelles

Proposition 9.4.22 (Passer des solutions complexes aux solutions réelles)

Soit $y'' + ay' + b = 0$ une équation différentielle linéaire à coefficients constants réels. Soit $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ l'ensemble de toutes ses solutions à valeurs complexes et $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des solutions à valeurs réelles. Alors :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{\operatorname{Re}(y) \mid y \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}\}.$$

On obtient alors :

Théorème 9.4.23 (Expression des solutions réelles de $y'' + ay' + by = 0$)

Soit Δ le discriminant du polynôme caractéristique $X^2 + aX + b = 0$ et r_1 et r_2 ses racines réelles ou complexes ($r = r_1 = r_2$ si $\Delta = 0$). Alors, l'ensemble des solutions réelles est :

- $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto ce^{r_1x} + de^{r_2x} \mid (c, d) \in \mathbb{R}^2\}$ si $\Delta > 0$;
- $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto (cx + d)e^{rx} \mid (c, d) \in \mathbb{R}^2\}$ si $\Delta = 0$;
- $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto e^{\alpha x} (c \cos(\omega x) + d \sin(\omega x)) \mid (c, d) \in \mathbb{R}^2\}$ si $\Delta < 0$,
où α et ω sont tels que $r_1 = \alpha - i\omega$ et $r_2 = \alpha + i\omega$.

Dans le cas où $\Delta < 0$, la valeur de α est unique, mais ω n'est unique qu'au signe près. On peut par exemple choisir :

$$\alpha = -\frac{a}{2} \quad \text{et} \quad \omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}.$$

On peut aussi réexprimer les solutions en regroupant sin et cos :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto Ae^{\alpha x} \cos(\omega x - \varphi) \mid (A, \varphi) \in \mathbb{R}^2\} \quad (\Delta < 0).$$

IV.3.3 Problème de Cauchy

La résolution du problème de Cauchy ne pose désormais plus de problème.

Théorème 9.4.24 (Théorème de Cauchy-Lipschitz pour $y'' + ay' + by = 0$, a, b réels)

Soit I un intervalle de \mathbb{R} , $x_0 \in I$ et $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$. Alors il existe une unique solution y de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ telle que $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$.

IV.3.4 Solution générale du système non homogène

Comme pour le cas d'EDL de degré 1, la première étape est l'utilisation du principe de superposition pour se ramener à des études plus simples.

Pour les EDL d'ordre 1, comme dans le cas des équations d'ordre 1, il existe une méthode dite « de variation des constantes » pour trouver une solution particulière, mais elle est plus délicate à mettre en oeuvre. Comme elle n'est pas au programme, nous nous limitons à l'étude de cas particuliers intervenant souvent en physique.

Exemples 9.4.25

Recherche de solutions particulières de $y'' + ay' + by = f(x)$ lorsque :

1. $f(x) = Ae^{\lambda x}$
2. $f(x) = Ax^n e^{\lambda x}$ (par exemple $n = 4$)
3. $f(x) = B \cos(\omega x)$ ($a, b \in \mathbb{R}$)
4. $f(x) = B \sin(\omega x)$ ($a, b \in \mathbb{R}$)

Suites numériques

Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et que l'on fait toujours la même chose, il restera une grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées.

(Euclide)

L'ensemble de la série renferme donc en bloc toutes les approximations, c'est-à-dire les valeurs immédiatement supérieures et inférieures, car, à mesure qu'on la considère de plus en plus loin, l'erreur sera moindre que toute grandeur donnée

(Gottfried Wilhelm Leibniz)

Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur finie, de manière à en différer aussi peu qu'on voudra, cette dernière est appelée limite de toutes les autres.

(Augustin Louis Cauchy)

Nous rappelons :

Définition 10.0.26 (Suite numérique)

Une suite numérique (réelle ou complexe) est une famille $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathbb{R} ou \mathbb{C} indexée sur \mathbb{N} (parfois sur \mathbb{N}^* , ou sur $\mathbb{N} \setminus \{0, \dots, n_0 - 1\}$). Il s'agit donc d'une fonction de \mathbb{N} dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

I Convergence de suites

I.1 Un peu d'histoire

Note Historique 10.1.1

- L'appréhension de la notion de limite d'une suite est ancienne. On trouve déjà dans les *Éléments* d'Euclide (citation ci-dessus).

Traduisons cette citation en langage mathématique : pour tout $(\varepsilon, a) \in \mathbb{R}_+^*$ (une grandeur est toujours strictement positive pour les grecs), si (u_n) est une suite (strictement positive pour la même raison) telle que pour tout n , $u_{n+1} \leq \frac{u_n}{2}$, alors (en sous-entendant « à un moment, il restera... »), il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $u_n < \varepsilon$.

C'est exactement dire (en langage moderne) que la suite (u_n) (qui est sous-géométrique de raison 2) converge vers 0...

- Archimède également utilise intuitivement une limite, lorsqu'il calcule une valeur approchée de π en approchant le cercle par des polygônes réguliers dont il calcule la circonférence.
- Au 17-ième siècle, même si la notion de limite semble assez claire, elle n'est pas bien définie, et tous les arguments de convergence sont expliqués qualitativement, avec assez peu de rigueur, comme le montre la citation de Leibniz en 1682, pour justifier l'égalité $\pi = 4 \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right]$.
- Il faut attendre Augustin Louis baron Cauchy pour avoir une définition précise (mais pas encore énoncée mathématiquement) de la limite, donnée dans son *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* (1821). Cauchy définit ce qu'on appelle maintenant les suites de Cauchy, permettant d'étudier (dans \mathbb{R}) la convergence de suites sans en connaître la limite.
Le *Cours d'Analyse* a été pour Cauchy l'occasion d'apporter rigueur et clarification à un grand nombre de notions jusque-là utilisées intuitivement. Dans ce sens, cet ouvrage a eu une importance capitale dans l'évolution de l'analyse.
- Il faut attendre la deuxième moitié du 19^e siècle pour voir naître la définition moderne (énoncée mathématiquement) de la limite, grâce à Karl Weierstrass, à qui on doit également toutes les définitions similaires relatives aux limites et à la continuité des fonctions.

I.2 Définition de la limite d'une suite

Intuitivement, une suite admet une limite ℓ si ses termes s'en approchent aussi près qu'on veut, sans plus s'en éloigner, donc si, quitte à prendre n suffisamment grand, u_n est une approximation aussi fine que l'on souhaite de ℓ . Nous formalisons cette définition de la sorte :

Définition 10.1.2 (limite d'une suite, convergence, divergence)

- Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} admet une limite $\ell \in \mathbb{K}$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \in B(\ell, \varepsilon).$$

- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{K}$, on dit qu'elle est convergente.
- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet aucun ℓ de \mathbb{K} comme limite, alors on dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente (dans \mathbb{K}).

Cette définition est valable dans un contexte plus général : elle permet de définir la convergence d'une suite à valeurs dans n'importe quel espace métrique (ensemble muni d'une distance).

Proposition 10.1.3 (Diverses caractérisations de la convergence)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ ;
- (ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon$;
- (iii) pour tout voisinage V de ℓ , il existe N tel que pour tout $n \geq N, u_n \in V$.

Nous nous plaçons désormais, par pure commodité, dans le cas de suites réelles. La plupart des résultats se généralisent au cas de suites complexes.

Dans le cas d'une suite réelle, on peut également définir une convergence vers les deux infinis :

Définition 10.1.4 (Limite $+\infty$ ou $-\infty$ d'une suite réelle)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet la limite $+\infty$ si et seulement si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n > A.$$

2. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet la limite $-\infty$ si et seulement si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n < A.$$

On remarquera que (en admettant ici l'unicité de la limite) une suite tendant vers $+\infty$ est divergente dans \mathbb{R} , mais convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$. Ainsi, suivant le point de vue, on pourra parler de divergence ou de convergence. En particulier, on rencontre aussi bien l'expression « $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$ » que « $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ ». Pour éviter toute controverse, on peut se contenter de dire : « $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ », ou encore « $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet la limite $+\infty$ ».

Avertissement 10.1.5

Il existe des suites n'admettant pas de limite, même dans $\overline{\mathbb{R}}$! Par exemple $(-1)^n$.

L'intérêt de la caractérisation par les voisinages, c'est qu'elle permet d'unifier les définitions de limite dans les cas fini et infini pour des suites réelles. En effet, on dit que $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $+\infty$ s'il existe a tel que $]a, +\infty[\subset V$. Dans ces conditions, on obtient :

Proposition 10.1.6 (Caractérisation par voisinage pour les limites dans $\overline{\mathbb{R}}$)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle, et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet la limite ℓ si et seulement si pour tout voisinage V de ℓ , il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \in V$.

Cette unification du fini et de l'infini permet souvent d'éviter de faire des distinctions de cas dans des démonstrations théoriques.

I.3 Unicité de la limite et exemples

Lemme 10.1.7 (lemme de séparation)

Soit ℓ et ℓ' (finis ou infinis) tels que $\ell \neq \ell'$. Alors il existe un voisinage U de ℓ et un voisinage V de ℓ' tels que $U \cap V = \emptyset$.

Théorème 10.1.8 (Unicité de la limite)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite (réelle ou complexe). Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite (dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou \mathbb{C}), alors cette limite est unique.

Notation 10.1.9 (Limite)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. On désigne par $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, ou plus simplement par $\lim u_n$ l'unique limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou \mathbb{C} (si cette limite existe).

On rencontre aussi parfois la notation $u_n \rightarrow \ell$.

Avertissement 10.1.10

Faites attention à ne pas utiliser la notation $\lim u_n$ avant de vous être assuré de l'existence de la limite. En particulier, généralement, le symbole \lim ne doit pas être employé dès le début d'un calcul de limite. On travaille d'abord sur la suite elle-même, et on passe à la limite le plus tard possible, et en tout cas, pas avant d'avoir pu justifier l'existence de la limite.

Avertissement 10.1.11

Ne confondez pas limite et « valeur d'adhérence ». Ainsi, -1 et 1 ne sont pas des limites de $(-1)^n$, même s'il existe des valeurs de n aussi grandes qu'on veut telles que u_n soit proche de l'une ou l'autre

de ces valeurs (et même égale ici). On dit que 1 et -1 sont valeurs d'adhérence de la suite. Comme le montre cet exemple, on n'a pas unicité des valeurs d'adhérence. On en reparlera un peu plus loin.

Exemples 10.1.12

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$;
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^a} = 0$ pour $a > 0$;
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^a = +\infty$ pour $a > 0$;
4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$ si $|a| < 1$;
5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$ si $a > 1$;
6. $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de limite si $a \leq -1$.

I.4 Premières propriétés des suites convergentes

Une propriété bien utile, notamment pour l'étude de suites récurrentes :

Proposition 10.1.13 (Limite d'un translaté)

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers ℓ , alors $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ aussi.

Plus généralement, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(u_{n+k})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{n-k})_{n \geq k}$ convergent alors vers ℓ .

Proposition 10.1.14

Toute suite convergente (dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , mais pas $\overline{\mathbb{R}}$) est bornée.

Enfin, en ne considérant que la moitié des inégalités présentes dans la définition, on obtient, dans le cas de suites réelles, la propriété suivante parfois plus simple à utiliser que la définition. Attention, comme on oublie ici la moitié des inégalités, chaque point de cette propriété est moins fort que la définition. La conjonction des deux points équivaut à la définition.

Proposition 10.1.15 (Comparaison de (u_n) à un minorant strict de sa limite)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergeant vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors :

- Pour tout $\ell' < \ell$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n > \ell'$.
- Pour tout $\ell'' > \ell$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n < \ell''$.

Ainsi, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers ℓ , alors (u_n) finit par dépasser n'importe quelle valeur $\ell' < \ell$, et de même, (u_n) finit par passer sous n'importe quelle valeur $\ell'' > \ell$.

Avertissement 10.1.16

Ce n'est évidemment pas vrai si $\ell' = \ell$. Une suite n'est pas forcément majoré (ou minoré) par sa limite. Elle peut tendre vers sa limite en faisant de petites oscillations, comme la suite $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par exemple.

I.5 Suites de Cauchy (hors-programme)

L'étude de la convergence d'une suite par l'utilisation de la définition de la limite nécessite la connaissance préalable de la limite ℓ . Dans certaine situation, on ne peut pas accéder à cette connaissance. Augustin

Cauchy, dans son *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* donne un critère de convergence n'utilisant pas la valeur de la limite.

Définition 10.1.17 (Suite de Cauchy, HP)

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite *de Cauchy* si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, p \geq n \geq N \implies |u_n - u_p| < \varepsilon.$$

Théorème 10.1.18 (Complétude de \mathbb{R} , HP)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

Note Historique 10.1.19

Initialement, Cauchy donne cette définition de la convergence. Mais elle n'est pas satisfaisante, car si elle convient dans \mathbb{R} (et également dans \mathbb{C}), elle n'est pas correcte dans \mathbb{Q} (voir proposition ci-dessous). C'est pour cela qu'à la fin du 19^e siècle, on a adopté la définition actuelle, due à Weierstass.

Proposition 10.1.20 (\mathbb{Q} n'est pas complet, HP)

Il existe des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de rationnels qui sont de Cauchy, mais non convergentes dans \mathbb{Q} .

Cela motive la définition suivante :

Définition 10.1.21 (Espace complet, HP)

Soit E un espace métrique (sur lequel on peut donc définir une notion de convergence, et également une notion de suites de Cauchy). On dit que E est complet si et seulement si toutes les suites de Cauchy sont convergentes dans E (la réciproque étant toujours vraie).

Ainsi, ce qui précède montre que \mathbb{R} est complet, alors que \mathbb{Q} n'est pas complet. C'est même là une façon de construire \mathbb{R} à partir de \mathbb{Q} , sans doute la plus employée : on « complète » \mathbb{Q} en lui ajoutant des limites fictives de toutes ses suites de Cauchy. On dit que \mathbb{R} est la complétion de \mathbb{Q} . On y reviendra un peu plus loin.

I.6 Convergence des suites complexes

Nous avons vu que la définition et les principales propriétés s'adaptent très bien au cas des suites à valeurs complexes. Il est cependant parfois plus commode de ramener l'étude d'une suite complexe à l'étude de deux suites réelles. C'est ce que permet le résultat suivant.

Proposition 10.1.22 (Caractérisation de la convergence d'une suite complexe)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe. Alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans \mathbb{C} si et seulement si $(\operatorname{Re}(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\operatorname{Im}(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent dans \mathbb{R} , et dans ce cas :

$$\lim u_n = \lim \operatorname{Re}(u_n) + i \lim \operatorname{Im}(u_n).$$

Cette propriété se généralise sans problème au cas de suites à valeurs dans \mathbb{R}^p (muni de la distance euclidienne) :

Proposition 10.1.23 (Caractérisation de la convergence d'une suite de vecteurs)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de \mathbb{R}^p . On note pour tout n , $\begin{pmatrix} u_{n,1} \\ \vdots \\ u_{n,p} \end{pmatrix}$ les coordonnées de u_n .

Alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans \mathbb{R}^p si et seulement si pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $(u_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans \mathbb{R} . Dans ce cas :

$$\lim u_n = \begin{pmatrix} \lim u_{n,1} \\ \vdots \\ \lim u_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la convergence d'un vecteur équivaut à la convergence coordonnée par coordonnée.

II Propriétés des suites liées à la convergence**II.1 Opérations sur les limites****Théorème 10.2.1 (Opérations sur les limites finies)**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles ou complexes convergentes, et λ et μ deux scalaires (réels ou complexes). Alors :

1. $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, et $\lim |u_n| = |\lim u_n|$;
2. $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, et $\lim(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \lim u_n + \mu \lim v_n$;
3. $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, et $\lim(u_n v_n) = \lim u_n \cdot \lim v_n$;
4. si $\lim v_n \neq 0$, alors $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang ; ainsi, $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est définie à partir d'un certain rang, est convergente, et $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}$.

Théorème 10.2.2 (Opérations impliquant des limites infinies)

Dans le cas où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites réelles, les résultats ci-dessus restent vrais si la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et/ou de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est infinie, avec les règles arithmétiques suivantes (règles usuelles dans $\overline{\mathbb{R}}$) :

$$a + \infty = +\infty; \quad +\infty + \infty = +\infty; \quad a \cdot (+\infty) = (\text{sg}(a))\infty; \quad (\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = \pm\infty; \quad \frac{1}{\pm\infty} = 0.$$

Avertissement 10.2.3 (Formes indéterminées)

En revanche, les opérations arithmétiques suivantes ne sont pas définies, et donnent des formes indéterminées (ayez des exemples en tête) :

$$\infty - \infty; \quad 0 \cdot \infty; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad \frac{0}{0}$$

Aux règles précédentes, nous ajoutons la suivante :

Proposition 10.2.4 (Produit $0 \times$ borné)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles ou complexes telles que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tende vers 0 et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée. Alors $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

Enfin, pour pouvoir établir les règles relatives à l'exponentiation, nous devons étudier le passage à la limite sous l'exponentielle et le logarithme, ce qui découle d'un résultat plus général, que nous admettons ici (c'est un corollaire de la caractérisation séquentielle de la continuité) :

Théorème 10.2.5 (passage à la limite sous une fonction continue, admis provisoirement)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite (réelle ou complexe) convergeant vers ℓ . Soit f une fonction continue en ℓ . Alors la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

Proposition 10.2.6 (Passage à la limite pour les puissances)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles convergeant vers des réels $\ell > 0$ et ℓ' . Alors $(u_n^{v_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell^{\ell'}$.

Avertissement 10.2.7 (Formes indéterminées pour les puissances)

On notera les deux formes indéterminées relatives aux exponentiations :

$$0^0 \quad \text{et} \quad 1^\infty.$$

On verra une autre application du théorème 10.2.5 pour la recherche de la limite d'une suite définie par une récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est continue. La limite, si elle existe, vérifie alors $\ell = f(\ell)$.

II.2 Limites et inégalités

Les suites considérées dans cette section sont réelles. Pour les suites complexes, l'utilisation de résultats de ce type nécessite de séparer les études de la partie réelle et de la partie imaginaire.

Théorème 10.2.8 (Conservation des inégalités larges)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles, et $N \in \mathbb{N}$ tels que : $\forall n \geq N, u_n \leq v_n$. Alors, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admettent des limites dans \mathbb{R} , $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

Remarque 10.2.9

Avant de passer à la limite dans une inégalité, il faut avoir justifié soigneusement l'existence des limites.

Avertissement 10.2.10

Les inégalités strictes ne se conservent pas !

Exemple 10.2.11

Pour tout $n \geq 1, 0 < \frac{1}{n}$. Passez à la limite...

Théorème 10.2.12 (théorème de convergence par encadrement)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, trois suites réelles, et $N \in \mathbb{N}$, tels que : $\forall n \geq N, u_n \leq v_n \leq w_n$. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent toutes deux vers une même limite finie, alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi, et

$$\lim v_n = \lim u_n = \lim w_n.$$

Dans le cas d'une limite infinie, on n'a pas besoin d'un encadrement. Suivant l'infini, une majoration ou une minoration suffit (pas besoin de contrôler le côté infini!) :

Théorème 10.2.13 (théorème de divergence par minoration ou majoration)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq N$, $u_n \leq v_n$.

1. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
2. Si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.

Remarque 10.2.14

Les deux théorèmes ci-dessus donnent l'existence de la limite de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Il n'est pas utile de l'avoir justifiée avant. Mais notamment pour le théorème de convergence par encadrement, il faut faire attention à la rédaction, et bien faire ressortir le fait que le théorème donne l'existence de la limite, avant d'écrire l'égalité sur les limites.

Avertissement 10.2.15

Ne surtout jamais présenter le théorème de convergence par encadrement comme un double passage à la limite dans les inégalités (à l'extrême rigueur si on connaît déjà l'existence de toutes les limites, mais c'est maladroit)

Méthode 10.2.16 (Méthode de calcul de limites par majoration/minoration :)

- Si on parvient à trouver une majoration : $\forall n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq v_n$, où $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de limite nulle, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers ℓ .
- Si on parvient à minorer $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par une suite de limite $+\infty$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
- Si on parvient à majorer $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par une suite de limite $-\infty$ alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.

Exemples 10.2.17

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n} = 0$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{n} = 0$;
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^b a^n = +\infty$ si $a > 1$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^b a^n = 0$ si $|a| < 1$;
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$;
4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

Dans deux des exemples ci-dessus apparaît la méthode suivante :

Méthode 10.2.18 (Comparaison à une suite géométrique)

- Étudier l'existence et le cas échéant la valeur de $\lim \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$.
- En cas d'existence, notons $\ell = \lim \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$.
 - * Si $\ell < 1$, on peut majorer à partir d'un certain rang $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ par une suite géométrique de raison $r \in]\ell, 1[$, et on en déduit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.
 - * Si $\ell > 1$, on peut minorer à partir d'un certain rang $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ par une suite géométrique de raison $r \in]1, \ell[$, donc $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Si (u_n) est de signe constant pour n assez grand, on en déduit sa convergence vers un des deux infinis, sinon, la suite ne converge pas dans $\overline{\mathbb{R}}$.
 - * Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Exemple 10.2.19

L'indétermination du cas $\ell = 1$ peut être illustré par les suites $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, ou par n'importe quelle suite convergant vers une limite finie non nulle.

II.3 Suites monotones

On rappelle les définitions suivantes :

Définition 10.2.20 (Suites croissantes, décroissantes, monotones)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite.

- On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante) si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $u_{n+1} \leq u_n$)
- On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante (resp. strictement décroissante) si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$ (resp. $u_{n+1} < u_n$)
- On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone si elle est croissante ou décroissante.
- On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

On parlera de suite croissante à partir du rang N si les inégalités ne sont vérifiées qu'à partir du rang N , et de même pour la décroissance.

Une propriété importante des suites monotones, c'est qu'elles sont toujours convergentes dans $\overline{\mathbb{R}}$. Plus précisément :

Théorème 10.2.21 (Théorème de la convergence monotone)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans \mathbb{R} .
2. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et non majorée, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
3. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans \mathbb{R} .
4. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et non minorée, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $-\infty$.

Remarque 10.2.22

Ce théorème est faux si on se place dans \mathbb{Q} . Il est donc spécifique à \mathbb{R} . Il pourrait en fait être pris comme axiome de la construction de \mathbb{R} à la place de la propriété de la borne supérieure.

Remarque 10.2.23

Ce théorème est particulièrement utile pour établir la convergence de suites définies par une récurrence de type $u_{n+1} = f(u_n)$; la valeur de la limite est ensuite obtenue en résolvant $\ell = f(\ell)$.

Exemple 10.2.24

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$. Étudier la convergence de (u_n) .

II.4 Suites adjacentes

Définition 10.2.25 (Suites adjacentes)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit qu'elles sont adjacentes si et seulement si :

1. l'une est croissante et l'autre décroissante ;
2. $(v_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

Proposition 10.2.26 (Comparaison de deux suites adjacentes)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites adjacentes (avec $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante). Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.

Théorème 10.2.27 (Théorème des suites adjacentes)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles adjacentes. Alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

Corollaire 10.2.28 (Théorème des intervalles emboîtés)

Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'intervalles fermés bornés telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \subset I_n$, et telle que la longueur des intervalles I_n tend vers 0. Alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ est un singleton.

Le théorème des suites adjacentes est notamment utile pour l'étude des « séries alternées », c'est à dire de la limite de sommes $\sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$, où (a_k) est décroissante de limite nulle :

Méthode 10.2.29 (Étude des séries alternées)

Soit $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$, avec (a_n) décroissante de limite nulle.

- Montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
- En déduire qu'elles ont même limite S
- On verra un peu plus loin que cela implique que (S_n) tend vers S .

Cette méthode fournit la convergence, mais pas la valeur. Le résultat obtenu par cette méthode s'appelle « critère spécial de convergence des séries alternées »

Remarque 10.2.30

Le théorème des suites adjacentes n'est pas vrai si on se place dans \mathbb{Q} . Encore une fois, on aurait pu choisir ce résultat comme axiome de la construction de \mathbb{R} .

II.5 Digression sur la construction de \mathbb{R}

Au cours de ce chapitre et des précédents, nous avons croisé un certain nombre de propriétés dont nous avons dit qu'elles auraient pu être prises comme axiome de \mathbb{R} . Voici un petit bilan.

Supposons que nous sachions définir l'ensemble \mathbb{R} , mais que nous ne connaissions aucune propriété de \mathbb{R} . Alors, on pourrait établir :

Théorème 10.2.31 (Propriétés équivalentes à la propriété fondamentale, HP)

Les résultats suivants sont équivalents :

- (i) La description des intervalles de \mathbb{R}
- (ii) La propriété de la borne supérieure
- (iii) Le théorème de convergence monotone
- (iv) Le théorème des suites adjacentes
- (v) La convergence de toutes les suites de Cauchy.

Pour pouvoir construire \mathbb{R} , il faut s'imposer l'une de ces propriétés, les autres en découlent. Nous avons admis la propriété de la borne supérieure, mais nous aurions pu faire un autre choix.

Note Historique 10.2.32

La construction la plus répandue est celle utilisant les suites de Cauchy, construction établie par Charles Méray en 1869, son point de départ étant de prouver rigoureusement la convergence des suites de Cauchy, résultat jusque-là plus ou moins admis, faute d'une construction correcte de \mathbb{R} . Cantor fait la même construction à peu près à la même époque.

III Suites extraites

III.1 Définitions

Définition 10.3.1 (Suite extraite, fonction extractrice)

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Une *suite extraite* de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$.
2. La fonction φ est appelée *fonction extractrice* de la suite extraite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Ainsi formellement, une suite extraite de (u_n) est une composée de $u_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ par une fonction strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. En pratique, cela signifie que (v_n) est constitué de termes de (u_n) , dans l'ordre, et sans répétition d'indice.

Exemples 10.3.2

1. Les deux suites extraites des termes d'indice pair et des termes d'indice impair : $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.
2. (u_{n^2})
3. Pas $(u_{n(n-1)})$

La beauté poétique de la démonstration du lemme suivant nous laisse rêveurs :

Lemme 10.3.3 (Lemme des pics)

De toute suite réelle on peut extraire une suite monotone.

III.2 Suites extraites et convergence

Le comportement des suites extraites à l'infini donne des indications quant au comportement de la suite initiale. Si le comportement de la suite initiale détermine le comportement d'une suite extraite, il est beaucoup plus délicat de faire chemin arrière, une suite extraite ne pouvant fournir qu'une information partielle sur la suite totale.

Théorème 10.3.4 (Théorème de convergence des suites extraites)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou dans \mathbb{C} . Alors toutes les suites extraites de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes, de même limite que (u_n) .

Avertissement 10.3.5

La convergence d'une ou plusieurs suites extraites n'est en général pas suffisante pour assurer la convergence d'une suite. Il faut que l'ensemble des suites extraites considérées permettent de contrôler de façon complète tous les termes de la suite (au moins à partir d'un certain rang).

Le cas le plus important est la possibilité de récupérer la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à l'aide des deux suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$:

Proposition 10.3.6

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. Alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou \mathbb{C} si et seulement si $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ , et dans ce cas, $\lim u_n = \ell$.

Nous pouvons bien sûr adapter la proposition précédente au cas des suites extraites (u_{3n}) , (u_{3n+1}) et (u_{3n+2}) , etc.

On peut formuler un théorème plus général. Intuitivement, pour contrôler tous les termes de (u_n) , il faut que les images des fonctions extractrices des suites extraites auxquelles on limite notre étude recouvrent \mathbb{N} entier (sauf éventuellement un nombre fini de terme). A cela, il faut rajouter une hypothèse de finitude, pour une question d'uniformité du contrôle qu'on a sur les termes de la suite.

La notion de suite extraite est intimement liée à celle de valeur d'adhérence :

Définition 10.3.7 (valeur d'adhérence, Spé)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels (ou complexes). On dit que le réel (ou complexe) x est une *valeur d'adhérence* de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'il existe une suite extraite (v_n) de (u_n) telle que $\lim v_n = x$.

Ainsi, l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est l'ensemble de toutes les limites (finies) des suites extraites de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Avertissement 10.3.8

Une suite peut ne pas avoir de valeur d'adhérence dans \mathbb{R} . Elle en a toujours une dans $\overline{\mathbb{R}}$. On peut montrer que l'unicité de la valeur d'adhérence dans $\overline{\mathbb{R}}$ caractérise la convergence de la suite.

III.3 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Le théorème suivant est important, car il donne l'existence d'une valeur d'adhérence non infinie.

Théorème 10.3.9 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)

De toute suite bornée on peut extraire une suite convergente.

Remarquez que c'est une conséquence directe du théorème ???. Nous en donnons une démonstration directe pour une suite réelle, par dichotomie, n'utilisant pas le lemme des pics.

Le cas d'une suite complexe se déduit du cas réel en deux étapes : on extrait une première suite telle que la partie réelle converge, puis de cette suite extraite on extrait une deuxième suite pour assurer la convergence de la partie imaginaire.

Note Historique 10.3.10

Le théorème de Bolzano-Weierstrass a été énoncé par Bolzano en 1830, et démontré par Weierstrass en 1860. Weierstrass connaissait-il l'énoncé de Bolzano ? Ce n'est pas certain, car ce dernier est interdit de publication par l'empire austro-hongrois, car trop critique vis-à-vis de l'ordre établi. Il en résulte que ses résultats ont été très peu diffusés.

Corollaire 10.3.11

Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé borné de \mathbb{R} . Alors de toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans I on peut extraire une suite convergent vers un réel $\ell \in I$.

Cette propriété définit la notion d'ensemble *compact*

Définition 10.3.12 (Sous-ensemble compact, Spé)

Soit E un espace métrique et $K \subset E$. On dit que K est *compact* si de toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on peut extraire une suite convergent vers un élément de K .

Ainsi, les intervalles fermés bornés de \mathbb{R} sont des sous-ensembles compacts de \mathbb{R} . On peut montrer plus généralement que les sous-ensembles compacts de \mathbb{R} sont exactement les sous-ensembles fermés et bornés de \mathbb{R} (ce qui inclut en particulier les intervalles fermés bornés).

IV Traductions séquentielles de certaines propriétés

Un certain nombre de propriétés analytiques, qui ne sont pas directement exprimées à l'aide de suite, peuvent se caractériser par une propriété portant sur des suites. c'est ce qu'on appelle une caractérisation séquentielle.

IV.1 Densité

On rappelle :

Définition 10.4.1 (Densité d'un sous-ensemble de \mathbb{R})

Soit X un sous-ensemble de \mathbb{R} . On dit que X est dense dans \mathbb{R} si pour tout (x, y) de \mathbb{R} tel que $x < y$, il existe $z \in X$ tel que $x < z < y$.

On peut étendre cette définition à tout espace métrique E , en imposant qu'il existe un élément de X dans toute boule ouverte de E .

On a déjà justifié par exemple que \mathbb{Q} , $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et \mathbb{D} sont denses dans \mathbb{R} .

Théorème 10.4.2 (Caractérisation séquentielle de la densité)

Soit X un sous-ensemble de \mathbb{R} . L'ensemble X est dense dans \mathbb{R} si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X tels que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x .

La démonstration montre qu'on peut choisir une suite dont tous les termes sont supérieurs à x , ou de façon symétrique, dont tous les termes sont inférieurs à x . le lemme des pics (ou une démonstration directe) permet alors d'obtenir une propriété utile dans certaines situations :

Proposition 10.4.3

Soit X un sous-ensemble dense de \mathbb{R} . Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite croissante $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X tels que $\lim u_n = x$. On peut trouver de même une suite décroissante.

IV.2 Borne supérieure**Théorème 10.4.4 (Caractérisation séquentielle de la borne supérieure)**

Soit X un sous-ensemble non vide de \mathbb{R} . Alors $M \in \overline{\mathbb{R}}$ est la borne supérieure de \mathbb{R} si et seulement si

1. M est un majorant de X
2. il existe une suite d'éléments de X convergent vers M .

On peut dans ce cas toujours trouver une suite *croissante* convergent vers $\sup(X)$, et même *strictement croissante* si $\sup(X) \notin X$.

IV.3 Autres caractérisations séquentielles

On a déjà évoqué la caractérisation séquentielle de la continuité au moins dans un sens :

Théorème 10.4.5 (Caractérisation séquentielle de la continuité)

Une fonction f définie sur un intervalle I est continue en $x_0 \in I$ si et seulement si pour toute suite $x_n \rightarrow x$ d'éléments de I , $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

On peut caractériser de la même manière la limite d'une fonction (il y a juste à changer $f(x) \rightarrow \ell$, la limite à gauche et à droite (en remplaçant les suites (x_n) par des suites restant toujours sous ou au-dessus de x , ou même plus simplement par des suites strictement croissantes ou décroissantes), et par conséquent la continuité à gauche ou à droite. Nous reviendrons sur ces caractérisations séquentielles dans les chapitres idoines.

Une dernière caractérisation séquentielle qu'on peut évoquer (mais qui est hors-programme) est de nature topologique : le fait qu'un ensemble F soit un ensemble fermé peut se caractériser par le fait que toute suite convergente d'éléments de F converge vers une limite elle-même élément de F , ou encore, par le fait que toutes les valeurs d'adhérences des suites de F sont encore dans F .

V Suites particulières

Nous étudions dans cette section un certain nombre de suites d'un type qu'on rencontre souvent, et qu'il faut savoir étudier.

V.1 Suites définies par une récurrence affine

Nous étudions ici les suites définies par une relation $u_{n+1} = au_n + b$. Une telle suite est entièrement déterminée par la donnée de cette relation, et la donnée de son terme initial u_0 (ou éventuellement u_N , si la suite ne débute pas au rang 0).

Les suites arithmétiques et les suites géométriques en sont des cas particuliers, par lesquels nous commencerons cette étude.

Définition 10.5.1 (Suite arithmétique)

Une suite arithmétique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+1} = u_n + b$.

Proposition 10.5.2 (Explicitation des suites arithmétiques)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique, vérifiant la relation $u_{n+1} = u_n + b$. Alors :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nb$;
- plus généralement, pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, $u_n = u_m + (n - m)b$,
- ou encore, pour tout $(m, k) \in \mathbb{N}^2$, $u_{m+k} = u_m + kb$.

Définition 10.5.3 (Suites géométriques)

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une *suite géométrique* si et seulement elle vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation du type $u_{n+1} = au_n$.

Proposition 10.5.4 (Explicitation des suites géométriques)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique, vérifiant la relation $u_{n+1} = au_n$. Alors :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \cdot a^n$;
- plus généralement, pour tout $m < n$, $u_n = u_m a^{n-m}$,
- ou encore, pour tout $(m, k) \in \mathbb{N}^2$, $u_{m+k} = u_m a^k$.

Et voici le cas général (à l'exclusion des suites arithmétiques) :

Définition 10.5.5 (Suites arithmético-géométriques)

Une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite *arithmético-géométrique* si elle vérifie une relation du type $u_{n+1} = au_n + b$, avec $a \neq 1$.

Méthode 10.5.6 (Explicitation des suites arithmético-géométriques)

- Rechercher une constante c telle que $(u_n - c)_{n \in \mathbb{N}}$ soit géométrique. Pour cela, former une relation de récurrence pour $v_n = u_n - c$, et poser c de sorte que cette relation de récurrence soit celle d'une suite géométrique.
- Expliciter la suite géométrique (v_n) et revenir ensuite à (u_n) .

Cette méthode est aussi importante (pour les multiples adaptations qu'on peut en faire) que le résultat qu'on en déduit :

Proposition 10.5.7 (Explicitation des suites arithmético-géométriques)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique, de relation $u_{n+1} = au_n + b$, et c le point fixe de la relation, à savoir l'unique réel vérifiant $c = ac + b$. Alors la suite $(u_n - c)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a^n(u_0 - c) + c.$$

Exemple 10.5.8

Expliciter la suite (u_n) telle que $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 2$.

Méthode 10.5.9 (Explicitation de $u_{n+1} = au_n + P(n)$)

La méthode d'explicitation peut s'adapter au cas de suites telles que $u_{n+1} = au_n + P(n)$, avec $a \neq 1$, où P est un polynôme de degré d . Dans ce cas, chercher c non pas constant, mais sous forme d'un polynôme de degré d . Il faut revenir à la méthode initiale, la notion de point fixe n'ayant plus de sens, du fait que P lui-même dépend de n .

Exemple 10.5.10

$$u_0 = 2, u_{n+1} = 2u_n + 3n - 2$$

Plus généralement :

Théorème 10.5.11 (Structure)

L'ensemble des suites vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b_n$ où (b_n) est une suite fixée, est un sous-espace affine de l'ensemble des suites, obtenu comme somme d'une solution particulière, et de l'ensemble des suites géométriques de raison a (i.e. solutions de l'équation homogène $u_{n+1} = au_n$).

V.2 Suites définies par une relation linéaire d'ordre k **Définition 10.5.12 (Suites récurrence linéaire d'ordre k)**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On dit que (u_n) est une *suite récurrente linéaire d'ordre k* si (u_n) vérifie une relation du type :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+k} = a_{k-1}u_{n+k-1} + \dots + a_1u_{n+1} + a_0u_n.$$

où $(a_0, \dots, a_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$.

Une suite récurrente d'ordre k est entièrement déterminée par sa relation de récurrence et la donnée de ses k premiers termes.

Exemple 10.5.13 (Suites de Fibonacci, de Lucas et de Gibonacci)

1. La suite de Fibonacci est la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Il s'agit donc d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
2. La suite de Lucas $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la même relation que la suite de Fibonacci, avec l'initialisation $L_0 = 2$ et $L_1 = 1$.
3. Une suite de Gibonacci (nom évidemment dérivé de Fibonacci) est une suite (G_n) vérifiant la même relation, et telle que $G_0 \geq 0$ et $G_1 \geq 0$. Ainsi, les suites de Fibonacci et de Lucas sont des cas particuliers de suites de Gibonacci.

Note Historique 10.5.14

Leonardo Fibonacci (1175-1250), aussi appelé Leonardo Pisano, ou en français, Léonard de Pise, est un mathématicien italien, dont l'enfance passée en Kabylie a contribué à l'introduction en Europe des chiffres arabes. Il a écrit plusieurs recueils de problèmes numériques. Sa contribution aux mathématiques la plus célèbre reste la suite portant son nom. Elle aurait été introduite par Fibonacci en vue de dénombrer les lapins de son élevage en fonction du nombre de lapins des saisons précédentes. C'est la première vraie formule de récursion de l'histoire des mathématiques.

« Fibonacci » n'est pas son vrai nom. Littéralement, cela signifie « fils de Bonacci », son père s'appelant Guilielmo Bonacci. Le nom « Fibonacci » lui a été donné à titre posthume.

Définition 10.5.15 (Polynôme caractéristique d'une récurrence linéaire)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire, de relation

$$u_{n+k} = a_{k-1}u_{n+k-1} + \dots + a_1u_{n+1} + a_0u_n \quad \text{soit:} \quad u_{n+k} - a_{k-1}u_{n+k-1} - \dots - a_1u_{n+1} - a_0u_n = 0$$

Le polynôme caractéristique associé à la suite récurrente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est le polynôme

$$P(X) = X^k - a_{k-1}X^{k-1} - \dots - a_1X - a_0.$$

Exemple 10.5.16

Toutes les suites de Gibonacci (donc les suites de Fibonacci et de Lucas également) ont le même polynôme caractéristique $P(X) = X^2 - X - 1$.

La recherche des racines du polynôme caractéristique permet d'expliciter les suites récurrentes linéaires. Nous nous contentons d'énoncer et démontrer le cas de récurrences linéaires d'ordre 2, le seul au programme.

Théorème 10.5.17 (Explicitation des suites récurrentes linéaires d'ordre 2)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2, et P son polynôme caractéristique, de degré 2.

1. Si P admet deux racines distinctes (réelles ou complexes) r et s , alors il existe des scalaires (réels ou complexes) λ et μ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r^n + \mu s^n.$$

2. Si P admet une racine double r , alors il existe des scalaires (réels ou complexes) λ et μ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda + \mu n)r^n.$$

Méthode 10.5.18 (Explicitation d'une récurrence d'ordre 2)

- Déterminer le polynôme caractéristique, et rechercher ses racines.
- Suivant la situation, donner la forme de l'explicitation, avec les paramètres λ et μ
- Écrire la relation obtenue pour les deux termes initiaux (généralement $n = 0$ et $n = 1$). cela fournit un système de deux équations à deux inconnues λ et μ .
- Résoudre ce système pour trouver les valeurs de λ et μ .

Ce résultat se généralise bien au cas de suites récurrentes linéaires d'ordre k , lorsque les racines sont deux à deux distinctes. Nous donnons le résultat, mais nous nous dispenserons de la preuve, pour laquelle nous n'avons pas encore tous les outils d'algèbre linéaire adéquats.

Théorème 10.5.19 (Explicitation des suites récurrentes linéaires, cas particulier, HP, admis)

Si P admet exactement k racines distinctes 2 à 2 (réelles ou complexes) r_1, \dots, r_k , alors il existe des complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda_1 r_1^n + \dots + \lambda_k r_k^n = \sum_{i=1}^k \lambda_i r_i^n.$$

Les complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sont déterminés par les conditions initiales, par la résolution d'un système de k équations à k inconnues.

La formule générale consiste alors à rajouter des facteurs polynomiaux multipliant les suites géométriques, dont les degrés sont strictement inférieurs à la multiplicité de la racine correspondante dans le polynôme caractéristique.

De même que pour le cas des suites d'ordre 1, on a un théorème de structure lorsqu'on ajoute un second membre. A voir comme une généralisation des suites arithmético-géométriques.

Théorème 10.5.20 (Structure)

Soit (b_n) une suite, et les deux relations de récurrence suivantes :

- $(E) : u_{n+k} = a_{k-1}u_{n+k-1} + \dots + a_1u_{n+1} + a_0u_n + b_n$
- $(EH) : v_{n+k} = a_{k-1}v_{n+k-1} + \dots + a_1v_{n+1} + a_0v_n$.

Alors l'ensemble des suites vérifiant (E) est un sous-espace affine de l'ensemble des suites, obtenu comme somme d'une solution particulière, et du sous-espace vectoriel des solutions de (EH) .

V.3 Suites définies par une récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

Enfin, nous donnons quelques méthodes d'étude de suites récurrentes d'ordre 1 non linéaires, c'est-à-dire de suites définies par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$, pour une certaine fonction f . Nous dirons dans ce paragraphe simplement « suite récurrente » pour désigner une telle suite. Remarquez qu'une telle suite n'est pas toujours bien définie : il peut arriver qu'un terme u_n sorte du domaine de définition de f , et qu'on ne puisse plus appliquer la relation de récurrence. Une des premières tâches est souvent de vérifier que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie. Si souvent, cette justification est intuitivement évidente, son principe est basé sur la récurrence : si on parvient à définir le terme u_n , on peut encore définir le terme u_{n+1} . Nous nous intéressons en particulier à la limite de (u_n) . La recherche de la limite d'une suite récurrente s'opère toujours sur le même principe.

Méthode 10.5.21 (Étude de la limite d'une suite récurrente)

- Étudier l'existence de la limite :
 - * s'assurer que la suite est bien définie,
 - * étudier sa monotonie, et obtenir l'existence de la limite à l'aide par exemple du théorème de la limite monotone.
- une fois assuré de l'existence de la limite, déterminer les valeurs possibles de cette limite ℓ en passant à la limite dans la relation de récurrence :

Si f est continue, soit ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$, soit ℓ est un bord ouvert du domaine de f .
- Déterminer, parmi l'ensemble des valeurs possibles de ℓ laquelle est la bonne.
- Déterminer les points fixes de f peut déjà s'avérer utile pour la première étape (aide à la recherche d'intervalles stables, de majorants et de minorants). Commencer par cela peut être efficace.

Nous donnons quelques techniques utiles pour la première étape de cette méthode.

Définition 10.5.22 (Intervalle stable)

On dit qu'un intervalle I est stable par f si f est définie sur I et $f(I) \subset I$.

Théorème 10.5.23 (CS pour que (u_n) soit bien définie)

Si I est un intervalle stable par f , et si $u_0 \in I$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

Évidemment, si on parvient à trouver un indice N tel que u_N soit dans un intervalle stable, on parvient à la même conclusion.

Les intervalles stables permettent aussi souvent d'étudier les variations de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Le résultat lui-même étant hors-programme, nous présentons cette démarche sous forme d'une méthode à connaître et développer à chaque fois (sauf en cas de manque de temps).

Méthode 10.5.24 (Étude des variations lorsque f est croissante)

Supposons f croissante sur un intervalle stable I , et $u_0 \in I$ (peut s'adapter si on n'a pas cette inclusion dès le rang initial).

- Comparer u_0 et u_1 .
- Propager l'inégalité trouvée par une petite récurrence : la croissance de f permet de passer d'un rang au suivant.

Méthode 10.5.25 (Étude des variations lorsque f est décroissante)

Supposons f décroissante sur un intervalle stable I , et $u_0 \in I$ (peut s'adapter si on n'a pas cette inclusion dès le rang initial).

- Adapter la méthode précédente pour l'étude de (u_{2n}) :
 - * (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont récurrentes, de fonction associée $f \circ f$.
 - * Comparer u_0 et u_2 , et en déduire les variations de (u_{2n}) par la méthode précédente.
- En appliquant f décroissante à la suite (u_{2n}) , on prouve la monotonie (de variation opposée) de (u_{2n+1}) .

Ainsi, si f est décroissante sur un intervalle stable, les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens de variation opposés. cela ne suffit pas pour prouver que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Pour cela, il faut encore s'assurer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont même limite. Les limites de ces deux suites sont à rechercher parmi les points fixes de $f \circ f$.

Remarque 10.5.26

La connaissance des points fixes de f peut aider à trouver des majorants. En effet, si f est croissante, et c un point fixe tel que $u_0 \leq c$, on peut propager cette inégalité aux rangs suivants.

Exemple 10.5.27

Étude de la suite $u_0 \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 - u_n$.

VI Étude asymptotique

VI.1 Domination, négligeabilité

Définition 10.6.1 (Domination)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que (u_n) est *dominée* par (v_n) si et seulement s'il existe un réel M tel que à partir d'un certain rang n_0 , $|u_n| \leq M|v_n|$, soit, formellement :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n| \leq M|v_n|.$$

Ainsi, (u_n) est dominée par (v_n) si et seulement si l'ordre de grandeur de (u_n) ne dépasse pas celui de (v_n) , à une constante multiplicative près.

Définition 10.6.2 (Négligeabilité)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que (u_n) est *négligeable* devant (v_n) s'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et un entier n_0 tels que :

$$\forall n \geq n_0, u_n = \varepsilon_n v_n \quad \text{et} \quad \lim \varepsilon_n = 0.$$

Il est souvent plus pratique d'utiliser, lorsque c'est possible, les caractérisations suivantes de la domination et de la négligeabilité

Proposition 10.6.3

Si (v_n) ne s'annule pas (à partir d'un certain rang au moins), alors :

1. (u_n) est dominée par (v_n) si et seulement si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée ;
2. (u_n) est négligeable devant (v_n) si et seulement si $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$

Enfin, pour pouvoir gérer facilement des relations de domination ou de négligeabilité, ou pour pouvoir écrire des approximations de façon commode, on utilise les notations suivantes :

Notation 10.6.4 (Notations de Bachmann et de Landau)

1. Si (u_n) est dominée par (v_n) , on note $u_n = O(v_n)$
2. Si (u_n) est négligeable devant (v_n) , on note $u_n = o(v_n)$

L'intérêt de cette notation est qu'on peut l'utiliser dans les calculs. On peut par exemple considérer $u_n = v_n + o(w_n)$. C'est notamment pratique pour formaliser des approximations. Ainsi, dire que

$$u_n = 2 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

signifie que pour n assez grand, u_n est à peu près égal à $2 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2}$, et que l'erreur faite en approchant u_n par cette expression est négligeable devant le plus petit terme de cette expression polynomiale. Il s'agit d'une bonne approximation par une expression polynomiale en $\frac{1}{n}$ à l'ordre 2. Il s'agit même de la meilleure.

Avertissement 10.6.5

Attention à l'abus de notation que l'on fait en écrivant cette égalité. Il ne s'agit pas vraiment d'une égalité, et c'est à prendre plus dans le sens d'une appartenance ((u_n) appartient à l'ensemble des suites dominées par (v_n)). Si on garde en tête l'idée qu'il s'agit d'une appartenance, on évite un certain nombre d'erreurs que peut véhiculer la notation. Par exemple :

- $u_n = o(v_n)$ et $u'_n = o(v_n)$ n'implique pas $u_n = u'_n$, ce qui est assez troublant formellement pour une égalité.
- on ne peut pas simplifier des o : $u_n + o(w_n) = v_n + o(w_n)$ n'implique pas $u_n = v_n$

Note Historique 10.6.6

- La notation O pour la dominance a été introduite par le mathématicien allemand Paul Bachmann dans son livre *Die analytische Zahlentheorie* (1894)
- Le mathématicien allemand Edmond Landau, spécialiste de la théorie des nombres, introduit la notation o dans son *Handbuch der Lehrer von der Verteilung der Primzahlen* (1909)
- Le britannique Godfrey Harold Hardy d'une part et le russe Ivan Vinogradov d'autre part, introduisent d'autres notations pour la dominance et la négligeabilité. Les notations de Hardy ne sont plus utilisées, celles de Vinogradov restent parfois utilisées en théorie des nombres.
- Hardy introduit également la notation Ω pour désigner la négation de la négligeabilité.
- L'informaticien Donald Knuth (spécialiste de l'informatique théorique, et créateur du célèbre logiciel TeX, référence encore aujourd'hui pour la composition de documents mathématiques professionnels, notamment sous sa forme dérivée LaTeX) sème la confusion en redéfinissant (en toute connaissance de cause) la notation $\Omega(u_n)$ dans un article de 1976 (*Big Omicron and Big Omega and Big Theta*) :

$$v_n = \Omega(u_n) \iff \exists C > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, v_n \geq C u_n.$$

Il définit également la notation $\Theta(u_n)$:

$$v_n = \Omega(u_n) \iff \exists C, C' > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, C' u_n \leq v_n \leq C u_n.$$

Ces notations sont plus adaptées que o et O pour l'étude de la complexité des algorithmes : une minoration de la complexité permet de mieux cerner les limitations d'un algorithme !

Exemple 10.6.7 (Reexpression des croissances comparées)

1. $\ln n = o(n^\alpha)$ ($\alpha > 0$)
2. $n^\alpha = o(e^n)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).
3. $n! = o(n^n)$.
4. $a^n = o(n!)$ ($a \in \mathbb{R}$)
5. $n^a = o(n^b)$ si $a < b$

Proposition 10.6.8

Soit (u_n) une suite réelle.

1. $u_n = O(1)$ si et seulement si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
2. $u_n = o(1)$ si et seulement si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.
3. $\lim u_n = \ell$ si et seulement si $u_n = \ell + o(1)$.

À part qu'elle n'est pas anti-symétrique, la relation de domination (resp. de négligeabilité) se comporte à peu près comme une relation d'ordre large (resp. stricte), ce qu'expriment les propriétés suivantes. Dans ces énoncés, (u_n) , (v_n) , (w_n) et (x_n) désignent des suites réelles.

Propriétés 10.6.9 (Transitivités strictes et larges de o et O)

1. Si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$, alors $u_n = O(w_n)$.
2. Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.
3. Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.
4. Si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.

Propriétés 10.6.10 (sommées de o et O)

1. Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n + v_n = o(w_n)$.
2. Si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = O(w_n)$, alors $u_n + v_n = O(w_n)$.
3. Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = O(w_n)$, alors $u_n + v_n = O(w_n)$.
4. Si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n + v_n = O(w_n)$.

Propriétés 10.6.11 (produits de o et O)

1. Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(x_n)$, alors $u_n v_n = o(w_n x_n)$.
2. Si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = o(x_n)$, alors $u_n v_n = o(w_n x_n)$.
3. Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = O(x_n)$, alors $u_n v_n = o(w_n x_n)$.
4. Si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = O(x_n)$, alors $u_n v_n = O(w_n x_n)$.
5. En particulier, $w_n o(x_n) = o(w_n x_n)$ et $w_n O(x_n) = O(w_n x_n)$
(Les o et O sont multiplicatifs : on peut rentrer ou sortir un facteur multiplicatif).

Remarque 10.6.12 (Intérêt des o et O)

On se sert souvent des o et O pour estimer (ou borner) la vitesse de convergence d'une suite vers sa limite, en étudiant $u_n - \ell$. On compare ainsi souvent la différence $u_n - \ell$ à une suite de référence de limite nulle, ou u_n à une suite de référence de limite $+\infty$. Par exemple, une suite telle que $|u_n - \ell| = o(e^{-n})$ aura une convergence rapide (exponentielle), alors que l'information $|u_n - \ell| = o\left(\frac{1}{\ln n}\right)$ ne permet pas de contrôler aussi bien la convergence (mais une telle égalité n'empêche pas que la convergence puisse être rapide).

VI.2 Équivalents**Définition 10.6.13 (Équivalence)**

Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont dites *équivalentes* s'il existe une suite (α_n) et un entier n_0 tels que

$$\forall n \geq n_0, u_n = \alpha_n v_n \quad \text{et} \quad \lim \alpha_n = 1.$$

Notation 10.6.14

Si (u_n) et (v_n) sont équivalentes, on note $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, ou simplement $u_n \sim v_n$.

De la définition découle le résultat important suivant :

Proposition 10.6.15 (Caractérisation de l'équivalence par la négligeabilité)

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \iff u_n = v_n + o(v_n).$$

Cette propriété implique notamment qu'une somme de terme est équivalente à son terme prépondérant (celui devant lequel tous les autres sont négligeables). La recherche de l'équivalent d'une somme passe de fait souvent par l'étude des négligeabilités des termes les uns par rapport aux autres. On en déduit par exemple :

Proposition 10.6.16 (équivalent d'un polynôme)

Soit P un polynôme de monôme dominant $a_d X^d$. Alors $P(n) \sim a_d n^d$.

Par exemple, $2n^2 + n - 1 \sim 2n^2$.

Comme pour la négligeabilité et la dominance, on a une version commode lorsque (v_n) ne s'annule pas

Proposition 10.6.17

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que (v_n) ne s'annule pas (au moins à partir d'un certain rang). Alors

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \iff \lim \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Remarque 10.6.18

Dans les trois notations $u_n = O(v_n)$, $u_n = o(v_n)$ et $u_n \sim v_n$, les égalités s'appliquent bien aux termes u_n et v_n , et non aux suites. Cependant on ne quantifie pas les expressions dans lesquelles interviennent des o , O ou des équivalents : il s'agit d'une égalité au voisinage de $+\infty$, comme les limites.

Proposition 10.6.19

La relation \sim est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites réelles.

Théorème 10.6.20 (Conservation des limites par équivalence)

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, et si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et sa limite est ℓ .

Avertissement 10.6.21

La réciproque est fautive en général. Elle est vraie en cas de limite non nulle et non infinie, mais en revanche, deux suites de même limite nulle ou infinie ne sont pas nécessairement équivalentes.

Exemples 10.6.22

1. (n) et (n^2) ne sont pas équivalentes
2. (e^{-n}) et (e^{-2n}) ne sont pas équivalentes.

Ainsi, la notion d'équivalent n'a vraiment d'intérêt que pour des suites de limite nulle ou infinie. Dans ce cas, la recherche d'un équivalent permet d'estimer la vitesse de convergence. On recherche pour cela un équivalent sous une forme simple et bien connue, par exemple n^a , ou $n^a \ln^b n$ etc. On peut ainsi comparer la vitesse de convergence de deux suites.

Proposition 10.6.23 (Conservation du signe)

Soit (u_n) et (v_n) deux suites équivalentes. Alors il existe n_0 tels que pour tout $n \geq n_0$, u_n et v_n soient de même signe.

Avertissement 10.6.24

Attention, cela ne signifie pas qu'à partir du rang n , (u_n) et (v_n) sont de signe constant ! Le signe peut varier, mais de la même manière pour les deux suites.

On peut faire un peu mieux, et obtenir une conservation stricte : il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, u_n et v_n sont soit tous les deux nuls, soit strictement de même signe.

Comme les o et O , les équivalents se comportent bien vis-à-vis des produits et des quotients :

Proposition 10.6.25 (Équivalents de produits, quotients, puissances)

Soit (u_n) , (v_n) , (u'_n) et (v'_n) quatre suites réelles.

1. Si $u_n \sim u'_n$ et $v_n \sim v'_n$, alors $u_n v_n \sim u'_n v'_n$.
2. Si de plus v_n est non nulle à partir d'un certain rang, alors $\frac{u_n}{v_n} \sim \frac{u'_n}{v'_n}$.
3. Si $u_n \sim u'_n$ et si a est un réel fixé, alors $(u_n)^a \sim (u'_n)^a$.

En revanche, le passage à une puissance dépendant de n requiert de la prudence (revenir à la notation exponentielle).

Lors de l'étude des fonctions usuelles, nous avons rencontré un certain nombre de limites remarquables, qui en fait s'expriment sous forme d'un équivalent, et sont généralement plus commodes à utiliser sous cette forme.

Proposition 10.6.26 (Équivalents classiques, à connaître sur le bout des doigts)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite **de limite nulle**. Alors :

- | | |
|--|--|
| 1. $\ln(1 + u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$; | 6. $\operatorname{sh}(u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$; |
| 2. $e^{u_n} - 1 \underset{+\infty}{\sim} u_n$; | 7. $\operatorname{ch}(u_n) - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{2}$; |
| 3. $\sin(u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$; | 8. $\operatorname{th}(u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$; |
| 4. $\cos(u_n) - 1 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{u_n^2}{2}$; | 9. $\operatorname{Arcsin}(u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$; |
| 5. $\tan(u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$; | 10. $\operatorname{Arctan}(u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$; |
| | 11. $(1 + u_n)^a - 1 \underset{+\infty}{\sim} au_n \quad (a \neq 0)$; |

Nous n'avons pas vu de règle pour sommer des équivalents. C'est normal. C'est interdit.

Avertissement 10.6.27 (Sommes d'équivalents)

Ne pas sommer des équivalents.

Si les parties principales se compensent, on s'expose à des erreurs.

Exemple 10.6.28

$u_n = \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$, $v_n = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} \sim -\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}$; Faites la somme des deux.

Méthode 10.6.29 (Pour contourner le problème des sommes d'équivalents)

- Étudier les négligeabilités entre les termes de la somme, pour ne garder que les termes d'ordre prépondérant.
- Écrire les équivalents avec un o et effectuer la somme sous cette forme.
- Si les parties principales ne se compensent pas, on peut revenir à un équivalent.
- Sinon, on ne peut pas conclure directement. Il faut étudier l'ordre de grandeur de ce qu'il reste après simplification des parties principales, et pour cela, il faut avoir une meilleure approximation de chaque terme (la connaissance de l'équivalent ne suffit pas). On peut par exemple utiliser un développement limité (voir chapitre correspondant).

Exemple 10.6.30

Déterminer un équivalent de $\sin\left(\frac{2}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

Avertissement 10.6.31 (Composition d'équivalents)

Ne composez pas un équivalent pas une fonction.

En général, $u_n \sim v_n$ n'implique pas $f(u_n) \sim f(v_n)$. Même avec des fonctions « gentilles » comme le logarithme ou l'exponentielle, ça peut être faux.

Exemples 10.6.32

1. Est-ce que $e^n \sim e^{n+1}$?
2. Est-ce que $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$?

Limites, continuité : étude locale

Lorsque les valeurs numériques d'une même variable décroissent indéfiniment de manière à s'abaisser au-dessous de tout nombre donné, cette variable devient ce qu'on nomme un infiniment petit [...] une variable de cette espèce a zéro pour limite.

(Augustin de Cauchy)

Il faut entendre par dernier quotient des quantités évanouissantes le quotient qu'ont entre elles ces quantités qui diminuent, non pas avant de s'évanouir, ni après qu'elles se sont évanouies, mais au moment même où elles s'évanouissent.

(Isaac Newton)

Nous étudions dans ce chapitre les notions de limite d'une fonction, et de continuité, uniquement d'un point de vue local.

Toutes les notions sont vues pour des fonctions réelles à valeurs dans \mathbb{R} . Tout comme pour les suites, elles peuvent être généralisées (tant qu'il n'est pas question d'infini) pour des fonctions d'une variable réelle, à valeurs dans \mathbb{C} , les définitions étant obtenues en considérant des modules en lieu et place des valeurs absolues. Il convient alors de remarquer que, comme dans le cas des suites, l'existence d'une limite, ou la continuité d'une fonction d'une variable réelle à valeurs dans \mathbb{C} équivaut à l'existence d'une limite, ou à la continuité, de sa partie réelle et de sa partie imaginaire.

I Préliminaire topologique

Soit X un sous-ensemble de $\overline{\mathbb{R}}$. On désigne par \overline{X} l'adhérence de X (dans $\overline{\mathbb{R}}$), c'est-à-dire l'ensemble des points x de $\overline{\mathbb{R}}$ (pas forcément dans X), pour lesquels il existe des points de X aussi proche qu'on veut de x :

Définition 11.1.1 (Adhérence dans $\overline{\mathbb{R}}$ d'un sous-ensemble de $\overline{\mathbb{R}}$)

- $\overline{X} \cap \mathbb{R} = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon > 0, \exists y \in X, |y - x| < \varepsilon\}$,
- $+\infty \in \overline{X}$ si et seulement si X n'est pas majoré,
- $-\infty \in \overline{X}$ si et seulement si X n'est pas minoré.

Si $x \in \overline{X}$, on dit que x est un point adhérent à l'ensemble X .

Par exemple :

- si $X =]0, 1[$, $\overline{X} = [0, 1]$;
- si $X = [0, 2[$, $\overline{X} = [0, 2]$;
- si $X = [0, +\infty[$, $\overline{X} = [0, +\infty]$;

L'adhérence dans \mathbb{R} se définirait de même, mais dans ce cas, les infinis n'y sont pas.

Lemme 11.1.2 (Caractérisations de l'adhérence)

- (i) *Caractérisation topologique* : \overline{X} est le plus petit sous-ensemble fermé de $\overline{\mathbb{R}}$ contenant X
- (ii) *Caractérisation séquentielle* : $x \in \overline{X}$ si et seulement si x est limite d'au moins une suite d'éléments de X .

En particulier, on a toujours $X \subset \overline{X}$.

En pratique, dans la suite de ce chapitre, X sera souvent un intervalle non réduit à un point. Dans ce cas, \overline{X} est l'intervalle fermé de mêmes extrémités. Il arrivera également que X soit une réunion d'intervalles. Dans ce cas, \overline{X} est la réunion des intervalles fermés correspondants.

II Limites

Dans toute cette partie, X désigne un sous-ensemble de \mathbb{R} , et f une fonction de X dans \mathbb{R} .

II.1 Définitions

Définition 11.2.1 (Limites en un point fini)

Soit $a \in \overline{X} \cap \mathbb{R}$.

- Soit $b \in \mathbb{R}$. On dit que $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - b| \leq \varepsilon.$$

- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a (ou bien f admet b comme limite en a) si :

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, |x - a| \leq \eta \implies f(x) \geq A.$$

- On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a si :

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, |x - a| \leq \eta \implies f(x) \leq -A.$$

Décortiquons l'expression dans le cas d'une limite finie :

- $\forall \varepsilon > 0$: « Quelle que soit la marge d'erreur ε qu'on se donne, aussi petite soit-elle ... »
- $\exists \eta > 0$: « ... il existe une petite boule de rayon η centrée en a , quitte à prendre η très petit ... »
- $\forall x \in X, |x - a| < \eta \implies \dots$: « ... tel que si x est à la fois dans X et dans cette boule ... »
- $\dots \implies |f(x) - b| < \varepsilon$: « alors $f(x)$ est proche à ε près de b . »

Autrement dit : « Si $x \in X$ est suffisamment proche de a , alors $f(x)$ est aussi proche qu'on veut de b . »

Remarques 11.2.2

1. L'hypothèse $a \in \overline{X}$ est nécessaire pour pouvoir considérer des points aussi proches qu'on veut de a .
2. Si $a \in X$, et si $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers a , alors $f(a) = b$. En effet, si ce n'est pas le cas, le choix de $\varepsilon = \frac{|b-a|}{2}$ et de $x = b$ amène, pour tout $\eta > 0$, une contradiction à la définition de la limite.
3. Dans la plupart des cas, on considère donc la limite en une valeur a adhérente stricte à X , c'est-à-dire n'appartenant pas à X : par exemple en l'extrémité d'un intervalle ouvert, ou en un point a tel que $X = Y \setminus \{a\}$ (par exemple en 1 avec $X = [0, 2] \setminus \{1\}$).
4. Si a est un point *isolé* de X (il n'existe pas de point de X infiniment proche de a autre que a), alors f admet une limite en a , valant $f(a)$.

5. Les définitions sont données avec des inégalités larges $|x - a| \leq \eta$ et $|f(x) - b| \leq \varepsilon$. On pourrait tout aussi bien mettre des inégalités strictes, pour $|x - a| < \eta$ (qui peut le plus peut le moins!) et pour $|f(x) - b| < \varepsilon$ (la propriété étant vraie pour tout ε , on peut décider de prendre initialement $\frac{\varepsilon}{2}$, ce qui nous donne après choix convenable de η , et quantifications adéquates, $|f(x) - b| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.)

Proposition 11.2.3 (Limite en un point du domaine)

Si $a \in X$, et si $f(x)$ admet une limite en a , alors cette limite est nécessairement égale à $f(a)$.

Nous voyons maintenant comment définir la limite d'une fonction en un point infini. La longueur de ces définitions est due au nombre de cas à étudier.

Définition 11.2.4 (Limite en $+\infty$)

On suppose que $+\infty$ est adhérent à X .

- Soit $b \in \mathbb{R}$. On dit que $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in X, x \geq B \implies |f(x) - b| \leq \varepsilon.$$

- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A \geq 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in X, x \geq B \implies f(x) \geq A.$$

- On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A \geq 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in X, x \geq B \implies f(x) \leq -A.$$

Définition 11.2.5 (Limite en $-\infty$)

On suppose que $-\infty$ est adhérent à X .

- Soit $b \in \mathbb{R}$. On dit que $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers $-\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in X, x \leq -B \implies |f(x) - b| \leq \varepsilon.$$

- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ si :

$$\forall A > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in X, x \leq -B \implies f(x) \geq A.$$

- On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ si :

$$\forall A > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in X, x \leq -B \implies f(x) \leq -A.$$

Remarque 11.2.6

Lorsqu'on prend $X = \mathbb{N}$, on retrouve la définition de la limite des suites.

Comme on peut le constater, la distinction entre un point fini et les deux infinis, à faire à la source et à l'arrivée, amène à distinguer 9 cas différents dans la définition des limites. Pour les études pratiques, ce n'est pas gênant : il suffit de considérer le cas qui nous concerne. Pour des études plus théorique, notamment pour établir des propriétés générales, il peut être plus commode d'avoir une description plus uniforme, évitant d'avoir à distinguer entre un grand nombre de cas.

II.2 Définition synthétique

On peut donner une définition globale à l'aide de la notion de voisinage. Rappelons que U est un voisinage (sous-entendu : dans \mathbb{R}) de $a \in \mathbb{R}$ si U contient une boule ouverte centrée en a , donc si

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x - a| < \varepsilon \implies x \in U.$$

On a vu qu'on peut généraliser cette notion au cas d'un voisinage de $\pm\infty$ de la manière suivante :

- U est un voisinage de $+\infty$ s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $]A, +\infty[\subset U$;
- U est un voisinage de $-\infty$ s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $] -\infty, A[\subset U$.

On obtient alors une définition équivalente de la limite d'une fonction en un point :

Théorème 11.2.7 (Définition des limites par voisinages)

Soit $a \in \overline{X}$ (fini ou infini) et $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) f admet une limite b lorsque x tend vers a
- (ii) pour tout voisinage V de b , il existe un voisinage U de a tel que $f(U \cap X) \subset V$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in U \cap X, \quad f(x) \in V.$$

Nous dirons qu'une fonction f admet une propriété \mathcal{P} au voisinage d'un point $a \in \overline{X}$, s'il existe un voisinage V de a dans \mathbb{R} (au sens étendu ci-dessus pour a infini) tel que la propriété \mathcal{P} soit vérifiée par f sur l'ensemble $V \cap X$.

La notion de limite permet alors de « contrôler » une fonction au voisinage d'un point. Ainsi, on obtient par exemple :

Proposition 11.2.8

Soit f une fonction admettant une limite finie en un point a de \overline{X} . Alors, f est bornée au voisinage de a .

Définition 11.2.9 (Coïncidence de deux fonctions)

Soit f et g deux fonctions définies sur X et Y et a tel que $a \in \overline{X}$ et $a \in \overline{Y}$. On dit que f et g coïncident au voisinage de a si et seulement s'il existe un voisinage V de a dans \mathbb{R} tel que $X \cap V = Y \cap V$ et que

$$\forall x \in X \cap V, \quad f(x) = g(x).$$

Proposition 11.2.10 (Comparaison des limites de deux fonctions coïncidant au vois. de a)

Soit f et g deux fonctions coïncidant au voisinage d'un point a . Alors, si f admet une limite (finie ou infinie) en a , alors g aussi, et

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Remarquez que cela impose l'existence d'un intervalle ouvert $]b, c[$ contenant a , tel que f et g coïncident sur $]b, c[$. En aucun cas, une telle règle ne peut se généraliser si a est au bord d'un intervalle de coïncidence, car, si a est par exemple le bord gauche, on ne contrôle pas les deux fonctions à gauche de a .

II.3 Unicité de la limite

On rappelle le lemme suivant, déjà utilisé pour démontrer l'unicité de la limite des suites :

Lemme 11.2.11 (Lemme de séparation)

Soit $(x, y) \in \overline{\mathbb{R}^2}$ tels que $x \neq y$. Alors il existe des voisinages U de x et V de y tels que $U \cap V = \emptyset$.

Théorème 11.2.12 (Unicité de la limite)

Soit $a \in \overline{X}$. Sous réserve d'existence, la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a est unique.

Notation 11.2.13

En cas d'existence de la limite en a , cette notation étant maintenant non ambiguë, on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a .

II.4 Limites à droite, limites à gauche**Notation 11.2.14**

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note $X_{<a} = \{x \in X \mid x < a\}$ et $X_{>a} = \{x \in X \mid x > a\}$

Définition 11.2.15 (Limites à droite et à gauche)

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $a \in \overline{X_{<a}}$. On dit que f admet une limite à gauche en a , égale à b , si la restriction $f|_{X_{<a}}$ de f à $X_{<a}$ admet b pour limite en a . On note cette limite $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x)$, ou encore $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $a \in \overline{X_{>a}}$. On dit que f admet une limite à droite en a , égale à b , si la restriction $f|_{X_{>a}}$ de f à $X_{>a}$ admet b pour limite en a . On note cette limite $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$, ou encore $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

Exemples 11.2.16

1. $f : x \mapsto \frac{x}{|x|}$ en $a = 0$;
2. $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ en $a = 0$;
3. $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ en $a \in \mathbb{Z}$.

Proposition 11.2.17 (Caractérisation de la limite par les limites à droite et à gauche)

Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $a \in \overline{X_{<a}}$ et $a \in \overline{X_{>a}}$. Alors :

- si $a \in X$, f admet une limite en a si et seulement si f admet des limites à gauche et à droite en a , et si : $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$;
- si $a \notin X$, f admet une limite en a si et seulement si f admet des limites à gauche et à droite en a , et si : $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

II.5 Caractérisation séquentielle d'une limite

La plupart des résultats élémentaires sur les limites étant similaire à ceux qu'on a pour les suites, il peut être commode d'avoir un moyen de se ramener à cette situation, afin d'éviter d'avoir à refaire toutes les preuves. On peut le faire grâce au théorème suivant.

Théorème 11.2.18 (Caractérisation séquentielle d'une limite)

Soit $a \in \overline{X}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers a ;
- (ii) pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans X et tendant vers a , la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers b .

Utilité : Importer tous les résultats qu'on a établis pour les suites, ou démontrer la non-existence d'une limite.

Exemples 11.2.19

1. La fonction $x \mapsto \sin x$ n'admet pas de limite en $+\infty$.
2. La fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'admet de limite en aucun point de $\overline{\mathbb{R}}$.

Pour le cas de limites à droite et à gauche, on a bien entendu une caractérisation similaire par des suites tendant vers a par valeurs inférieures ou supérieures (du fait que les limites à gauche et à droite sont définies par restriction du domaine). Cependant, on peut avoir une caractérisation plus fine, utile dans certaines occasions, notamment pour des propriétés liées à la monotonie.

Théorème 11.2.20 (Caractérisation séquentielle des limites à droite ou à gauche)

Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $a \in \overline{X}_{<a}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) f admet une limite à gauche en a , égale à b ;
- (ii) pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans X et strictement inférieures à a , tendant vers a , $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers b ;
- (iii) pour toute suite strictement croissante $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans X tendant vers a , $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers b .

On a un énoncé similaire pour les limites à droite.

II.6 Opérations sur les limites

Les résultats suivants sont énoncés pour des limites globales, mais sont bien entendu aussi valables pour des limites à gauche et à droite, ces dernières étant obtenus comme limites globales de fonctions restreintes.

Théorème 11.2.21 (Limites de sommes et produits)

Soit f et g deux fonctions définies sur $X \subset \mathbb{R}$, et $a \in \overline{X}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si f et g admettent une limite dans \mathbb{R} en a , alors $f + g$, λf , fg et $|f|$ aussi, et :

1. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$;
2. $\lim_{x \rightarrow a} \lambda f(x) = \lambda \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$;
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$;
4. $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |\lim_{x \rightarrow a} f(x)|$.

Théorème 11.2.22 (Limites de quotients)

Soit f et g deux fonctions définies sur $X \subset \mathbb{R}$, et $a \in \overline{X}$. Si f et g admettent une limite en a , et si

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0, \text{ alors } \frac{f}{g} \text{ admet une limite en } a, \text{ et : } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

Théorème 11.2.23 (Limites de compositions)

Soit X et Y deux sous-ensembles de \mathbb{R} . Soit $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, et $a \in \overline{X}$. On suppose que $f(x)$ tend vers $b \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers a . Alors :

1. $b \in \overline{Y}$;
2. si $g(y)$ tend vers c lorsque y tend vers b , alors $g \circ f(x)$ tend vers c lorsque x tend vers a .

Autrement dit : $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f(x)) = \lim_{y \rightarrow \lim_a f(x)} g(y)$.

Théorème 11.2.24 (Opérations sur des limites infinies)

Les règles précédentes restent vraies (avec les règles opératoires de $\overline{\mathbb{R}}$) dans toutes les situations n'amenant pas une des formes indéterminées suivantes :

$$0 \times \infty, \quad \infty - \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}.$$

II.7 Passage à la limite dans une inégalité

On énonce les propriétés suivantes pour une limite globale ; elles se généralisent pour les limites à droite ou à gauche.

Proposition 11.2.25 (Prolongement des inégalités, ou conservation des inégalités larges)

Soit $X \subset \mathbb{R}$, et $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in X$, $f(x) \leq g(x)$. Soit $a \in \overline{X}$. Alors, si f et g admettent une limite en a , ces limites vérifient :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Remarques 11.2.26

1. Cela reste vrai si l'inégalité initiale n'est vraie qu'au *voisinage* de a .
2. À n'utiliser qu'en cas d'*existence des limites* (à justifier au préalable).
3. Les inégalités *strictes* ne se conservent pas !
4. On parle parfois de *stabilité* des inégalités larges par passage à la limite.

Théorème 11.2.27 (Théorème d'encadrement)

Soit $X \subset \mathbb{R}$, et $f, g, h : X \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{X}$. On suppose que :

1. $\forall x \in X$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ (ou au moins sur un voisinage de a) ;
2. f et h admettent des limites finies en a telles que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$.

Alors g admet une limite finie en a , et : $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$.

Exemples 11.2.28

1. On a déjà utilisé ce théorème pour obtenir $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (démonstration géométrique).
2. On en déduit : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$.
3. Ainsi que : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

Le théorème d'encadrement s'adapte de la façon suivante dans le cas de limites infinies :

Théorème 11.2.29 (Théorème de majoration)

Soit $X \subset \mathbb{R}$, et $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{X}$. On suppose que :

1. $\forall x \in X, f(x) \leq g(x)$ (ou au moins sur un voisinage de a);
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

Alors g admet une limite en a égale à $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$.

Théorème 11.2.30 (Théorème de minoration)

Soit $X \subset \mathbb{R}$, et $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{X}$. On suppose que :

1. $\forall x \in X, f(x) \leq g(x)$ (ou au moins sur un voisinage de a);
2. $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$.

Alors f admet une limite en a égale à $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Remarque 11.2.31

Il est important de remarquer que le théorème d'encadrement et les théorèmes de minoration et majoration fournissent en premier lieu l'existence des limites. Il s'agit donc de bien plus qu'un simple passage à la limite dans des inégalités.

II.8 Fonctions monotones

Théorème 11.2.32 (Théorème de limite monotone)

Soit f une fonction croissante sur X . Alors, en tout point a où ces limites peuvent être envisagées :

1. f admet une limite à gauche $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, et si $a \in X$, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \leq f(a)$;
2. f admet une limite à droite $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, et si $a \in X$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \geq f(a)$.

De plus, si au point a , les limites à droite et à gauche peuvent être envisagées, on a :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x),$$

et si f est définie en ce point a :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x),$$

Corollaire 11.2.33

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $+\infty$ soit adhérent à X . Alors f admet une limite en $+\infty$, et cette limite est finie si et seulement si f est majorée. De même, si $-\infty$ est adhérent à X , f admet une limite en $-\infty$, et cette limite est finie si et seulement si f est minorée.

Ces deux énoncés ont bien sûr un équivalent pour les fonctions décroissantes.

III Comparaison locale de fonctions

Dans cette section, nous adaptons au cas des fonctions les notions de comparaison étudiées pour les suites (équivalent, négligeabilité etc.) Dans le cas des fonctions, ces comparaisons ne se feront plus uniquement

en $+\infty$, mais au voisinage de n'importe quel point.

III.1 Petit o , grand O

Dans toute cette section X désigne un sous-ensemble de \mathbb{R} , et f et g (éventuellement indexées) deux fonctions de X dans \mathbb{R} .

Définition 11.3.1 (Dominance, O)

Soit $a \in \overline{X}$. On dit que f est *dominée par g au voisinage de a* s'il existe un voisinage U de a et un réel $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall x \in U \cap X, |f(x)| \leq k|g(x)|.$$

On note $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x))$, ou $f \underset{a}{=} O(g)$, ou, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la valeur de a , $f(x) = O(g(x))$. Dans cette notation, x est une variable muette, qu'il ne faut donc pas quantifier.

Proposition 11.3.2 (Réexpression de la dominance)

1. Si a est fini, $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x))$ si et seulement si :

$$\exists \eta > 0, \exists k \in \mathbb{R}_+^* \forall x \in X, |x - a| < \eta \implies |f(x)| \leq k|g(x)|.$$

2. Si $a = +\infty$, $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x))$ si et seulement si :

$$\exists B > 0, \exists k \in \mathbb{R}_+^* \forall x \in X, x > B \implies |f(x)| \leq k|g(x)|.$$

3. Si g ne s'annule pas au voisinage de a , $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x))$ si et seulement si $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a .

Définition 11.3.3 (Négligeabilité, o)

Soit $a \in \overline{X}$. On dit que f est *négligeable devant g au voisinage de a* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de a tel que :

$$\forall x \in U \cap X, |f(x)| \leq \varepsilon|g(x)|.$$

On note $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$, ou $f \underset{a}{=} o(g)$ ou, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la valeur de a , $f(x) = o(g(x))$. Dans cette notation, x est une variable muette, qu'il ne faut donc pas quantifier.

Proposition 11.3.4 (Réexpressions de la négligeabilité)

1. Si a est fini, $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, |x - a| < \eta \implies |f(x)| \leq \varepsilon|g(x)|.$$

2. Si $a = +\infty$, $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \in X, x > B \implies |f(x)| \leq \varepsilon|g(x)|.$$

3. Si g ne s'annule pas au voisinage de a , $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Pour transférer toutes les propriétés connues des o et O pour les suites, on peut, comme pour les limites, utiliser un critère séquentiel :

Théorème 11.3.5 (Critère séquentiel pour les o et O)

Soit f et g définies sur un ensemble X et $a \in \overline{X}$. Alors $f \underset{a}{=} O(g)$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X tendant vers a , $f(x_n) = O(g(x_n))$. Un énoncé similaire tient pour la négligeabilité.

Propriétés 11.3.6 (Règles opératoires sur les o et O)

Soit $a \in \overline{X}$.

1. Si $f \underset{a}{=} o(g)$, alors $f \underset{a}{=} O(g)$.
2. Si $f_1 \underset{a}{=} O(g)$ et $f_2 \underset{a}{=} O(g)$, alors $f_1 + f_2 \underset{a}{=} O(g)$.
3. Si $f_1 \underset{a}{=} o(g)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g)$, alors $f_1 + f_2 \underset{a}{=} o(g)$.
4. Si $f_1 \underset{a}{=} O(g_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} O(g_2)$, alors $f_1 f_2 \underset{a}{=} O(g_1 g_2)$.
5. Si $f_1 \underset{a}{=} O(g_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g_2)$, alors $f_1 f_2 \underset{a}{=} o(g_1 g_2)$.
6. Si $f_1 \underset{a}{=} o(g_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g_2)$, alors $f_1 f_2 \underset{a}{=} o(g_1 g_2)$.
7. Si $f \underset{a}{=} O(g)$ et $g \underset{a}{=} O(h)$, alors $f \underset{a}{=} o(h)$.
8. Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{=} O(h)$, alors $f \underset{a}{=} o(h)$.
9. Si $f \underset{a}{=} O(g)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$, alors $f \underset{a}{=} o(h)$.
10. Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$, alors $f \underset{a}{=} o(h)$.
11. $f \underset{a}{=} g \cdot o(h)$ si et seulement si $f \underset{a}{=} o(gh)$.

Soit $Y \subset \mathbb{R}$, $h : Y \rightarrow X$ et $b \in \overline{Y}$ tel que $\lim_{y \rightarrow b} h(y) = a$.

12. Si $f \underset{a}{=} O(g)$, alors $f \circ h \underset{b}{=} O(g \circ h)$.
13. Si $f \underset{a}{=} o(g)$, alors $f \circ h \underset{b}{=} o(g \circ h)$.

Il faut donc garder en tête qu'à bien des points de vue, o et O se comportent comme des inégalités strictes et larges.

Enfin, comme pour les suites, on peut réexprimer les théorèmes de croissance comparée sous forme de négligeabilité.

Théorème 11.3.7 (Croissances comparées)

On a :

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R}_+, \ln^\alpha(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\beta)$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R}_+, \forall \gamma \in \mathbb{R}_+, x^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(\exp(\gamma x^\beta))$.
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+, \forall \beta \in \mathbb{R}_+, \ln^\beta(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$
4. $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}, \alpha < \beta \implies x^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\beta)$
5. $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}, \alpha < \beta \implies x^\beta \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^\alpha)$

III.2 Équivalents

Définition 11.3.8 (Équivalence)

Soit $a \in \overline{X}$. On dit que f est équivalent à g au voisinage de a si $|f - g| = o(g)$.

On note $f \underset{a}{\sim} g$, ou $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$. Dans cette notation, x est une variable muette, qu'il ne faut donc pas quantifier.

Proposition 11.3.9

La relation $\underset{a}{\sim}$ est une relation d'équivalence.

Proposition 11.3.10 (Réexpression de l'équivalence)

Si g ne s'annule pas sur un voisinage de a , $f \underset{a}{\sim} g$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Comme pour la dominance et la négligeabilité, on peut se ramener au cas des suites par la propriété suivante :

Théorème 11.3.11 (Critère séquentiel pour les équivalents)

Soit f et g définies sur un ensemble X , et $a \in \overline{X}$. Alors $f \underset{a}{\sim} g$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans X et tendant vers a , on a $f(x_n) \sim g(x_n)$.

Propriétés 11.3.12 (Règles opératoires sur les équivalents)

1. Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$, alors $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$.
2. Si $f \underset{a}{\sim} g$, et si f ne s'annule pas sur un voisinage de a , alors g non plus, et $\frac{1}{f} \underset{a}{\sim} \frac{1}{g}$.
3. Soit $h : Y \rightarrow X$ et $b \in \overline{Y}$ tel que $\lim_{y \rightarrow b} h(y) = a$. Alors, si $f \underset{a}{\sim} g$, on a aussi $f \circ h \underset{b}{\sim} g \circ h$.

Avertissement 11.3.13

1. On ne somme pas des équivalents.
2. On ne compose pas par la gauche un équivalent.

Proposition 11.3.14 (Équivalents et limites)

1. Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors, si f admet une limite, g aussi, et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.
2. L'implication ci-dessus est une équivalence, sauf si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \in \{0, -\infty, +\infty\}$.

Proposition 11.3.15 (Conservation du signe)

Si $f \underset{a}{\equiv} g$, alors f et g ont même signe au voisinage de a

Proposition 11.3.16 (Équivalents classiques)

Les équivalents suivants sont à connaître parfaitement.

1. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, (x + a)^n \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} x^n$.

2. $\forall (a_0, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ tel que $a_d \neq 0$, $a_d x^d + \dots + a_0 \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} a_d x^d$.
3. $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$
4. $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$
5. $\sin x \underset{0}{\sim} x$.
6. $\tan x \underset{0}{\sim} x$.
7. $\cos x - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$.
8. $\text{Arcsin} x \underset{0}{\sim} x$
9. $\text{Arctan} x \underset{0}{\sim} x$
10. $\frac{\pi}{2} - \text{Arccos} x \underset{0}{\sim} x$
11. $\text{sh}(x) \underset{0}{\sim} x$
12. $\text{th}(x) \underset{0}{\sim} x$
13. $\text{ch}(x) - 1 \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$
14. Si $a \neq 0$, $(1+x)^a - 1 \underset{0}{\sim} ax$.

De façon plus anecdotique, mais pouvant parfois être utile (il faut surtout être capable de les retrouver) :

Proposition 11.3.17 (D'autres équivalents)

1. $\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$
2. $\frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(x) \underset{1}{\sim} \sqrt{2(1-x)}$
3. $\text{Arccos}(x) \underset{1}{\sim} \sqrt{2(1-x)}$.

Dérivabilité, continuité

Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivées.

Charles Hermite

Nous étudions dans ce chapitre les premières propriétés de régularité d'une fonction, à savoir la continuité, et la dérivabilité. Les études locales ayant déjà été faites en grande partie dans un chapitre antérieur, notre but sera essentiellement, après quelques rappels ou précisions, d'étudier des propriétés plus globales des fonctions continues ou dérivables sur tout un intervalle.

I Continuité

I.1 Fonction continue en un point

Dans ce paragraphe, f désigne une fonction de X dans \mathbb{R} .

Proposition/Définition 12.1.1 (Définition de la continuité par propositions équivalentes)

Soit $a \in X$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) f admet une limite en a (forcément égale à $f(a)$);
- (ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, |x - a| < \eta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$;
- (iii) pour tout voisinage V de $f(a)$, il existe un voisinage U de a tel que $f(U) \subset V$.
- (iv) pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans X tendant vers a , $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $f(a)$.

Si l'une de ces propriétés est vérifiée, on dit que f est continue en a .

Proposition 12.1.2 (Restriction de l'ensemble source)

Si f et g coïncident sur un voisinage de a , f est continue en a si et seulement si g est continue en a .

Avertissement 12.1.3

Si f et g coïncident sur un intervalle $[a, b]$, la continuité de f en a ne suffit pas à obtenir la continuité de g en a . Il est nécessaire que le domaine de coïncidence contienne un *ouvert* auquel appartient a .

Exemples 12.1.4

1. $f : x \mapsto c$ est continue en tout $a \in \mathbb{R}$.

2. $f : x \mapsto x$ est continue en tout $a \in \mathbb{R}$.
3. $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue en tout $a \in \mathbb{R}^*$.
4. $f : x \mapsto \sin x$ est continue en tout $a \in \mathbb{R}$.
5. $f : x \mapsto \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est discontinue en 0.

I.2 Opérations sur les fonctions continues

Les règles usuelles sur les limites amènent directement :

Proposition 12.1.5 (Opérations sur les fonctions continues)

Soit f et g deux fonctions de X dans \mathbb{R} , et $a \in X$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Si f est continue en a , alors λf est continue en a .
2. Si f et g sont continues en a , alors aussi $f + g$.
3. Si f et g sont continues en a , alors aussi fg .
4. Si f et g sont continues en a , et $g(a) \neq 0$, alors g ne s'annule pas sur un voisinage de a , et $\frac{f}{g}$ est continue en a .

Proposition 12.1.6 (Composition de fonctions continues)

Soit $X, Y \subset \mathbb{R}$, et $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in X$. Si f est continue en a , et si g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a .

Dans la suite, nous nous intéressons aux propriétés des fonctions définies sur tout un intervalle.

I.3 Fonctions continues et continues par morceaux

Soit I un intervalle de \mathbb{R}

Définition 12.1.7 (Fonction continue sur un intervalle)

On dit que f est continue sur I si et seulement si f est continue en tout a de I .

Définition 12.1.8 (Fonction continue par morceaux sur un intervalle)

1. On dit que f est continue par morceaux sur un segment $I = [a, b]$ si et seulement s'il existe des réels $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ tels que :
 - (i) f soit continue sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$, $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$
 - (ii) f admette des limites à gauche finies en x_1, \dots, x_n et des limites à droite finies en x_0, \dots, x_{n-1} .
2. On dit que f est continue par morceaux sur un intervalle I quelconque, si pour tout segment $J \subset I$, f est continue par morceaux sur J .

Exemples 12.1.9

1. La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue par morceaux sur \mathbb{R} .
2. la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur \mathbb{R}^* prolongée par $f(0) = 0$ n'est pas continue par morceaux sur \mathbb{R} .

Nous n'étudierons pas tellement les fonctions continues par morceaux dans ce chapitre. Nous les retrouverons plus tard, lorsque nous définirons l'intégrale de Riemann.

I.4 Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Une première propriété importante des fonction continues sur un intervalle est le théorème des valeurs intermédiaires.

Dans ce qui suit, par convention, et dans un soucis d'unification des énoncés, $f(+\infty)$ désigne $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ dans le cas où cette limite existe, et de même pour $f(-\infty)$.

Théorème 12.1.10 (TVI, version 1 : existence d'un zéro)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I d'extrémités a et b dans $\overline{\mathbb{R}}$ (avec existence des limites dans le cas de bornes infinies). Alors, si $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$ (ou l'inverse), il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$

Avertissement 12.1.11

Attention, c n'a aucune raison d'être unique !

Théorème 12.1.12 (TVI, version 2 : réalisation des valeurs intermédiaires)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , et soit $M = \sup_{x \in I} f(x)$ et $m = \inf_{x \in X} f(x)$. Alors f prend toutes les valeurs de l'intervalle $]m, M[: \forall x_0 \in]m, M[, \exists c \in I, f(c) = x_0$.

Théorème 12.1.13 (TVI, version 3 : image d'un intervalle)

L'image d'un intervalle quelconque par une fonction continue est un intervalle.

Le théorème des valeurs intermédiaire affirme plus ou moins que pour passer d'un côté à l'autre d'une droite, sans lever le crayon, on est bien obligé à un moment de croiser cette droite !

Note Historique 12.1.14

Le théorème des valeurs intermédiaires, aussi appelé théorème de Bolzano, a été démontré par Bolzano à l'aide de la borne supérieure, mais à un moment où, la construction de \mathbb{R} n'ayant pas encore été précisée, les propriétés fondamentales de \mathbb{R} restaient mal fondées. Cauchy dans son cours d'analyse, donne le résultat sans preuve rigoureuse, se contentant d'un dessin. Peano prouve le résultat par dichotomie à la fin du 19^e siècle.

I.5 Continuité uniforme

La notion de continuité traduit le fait que localement, $f(x)$ approche $f(a)$ à ε près fixé arbitrairement à l'avance. L'aspect local de cette approximation se traduit par η intervenant dans la définition : η nous donne le domaine de validité de l'approximation. Plus η est petit, plus il faut rester proche de x pour que l'approximation soit correcte. La taille de ce domaine de validité peut d'ailleurs dépendre de x . En général, il n'y a pas de raison de pouvoir trouver un réel η convenant pour toutes les valeurs de x du domaine de définition d'une fonction continue. Cela signifie que, une marge ε étant donnée, il peut exister des points pour lesquels il faudra rester très très proche (infiniment proche si on fait tendre x vers un des bords du domaine) de x pour que l'approximation à ε près reste vraie.

Exemples 12.1.15

1. $x \mapsto e^x$ sur \mathbb{R} .
2. $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, 1[$.

Si pour tout ε , on peut trouver un η convenable pour toute valeur de x , on parlera de continuité uniforme. Remarquez qu'il ne s'agit de rien de moins que d'une interversion de quantificateurs par rapport à la définition de la continuité sur un domaine.

Définition 12.1.16 (Continuité uniforme)

Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble X de \mathbb{R} . On dit que f est uniformément continue sur X si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in X^2, |x - y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Le réel η est appelé *module de continuité uniforme de f pour l'approximation ε*

Les exemples précédents montrent qu'il existe des fonctions continues sur un intervalle sans y être uniformément continues. En revanche, cette situation est impossible sur un segment (intervalle fermé borné)

Théorème 12.1.17 (Heine)

Soit $I = [a, b]$ un segment, et f une fonction continue sur I . Alors f est uniformément continue sur I .

I.6 Extrema des fonctions continues sur un intervalle fermé borné**Théorème 12.1.18 (Théorème de compacité)**

Soit $I = [a, b]$ un segment (c'est-à-dire un intervalle fermé borné), et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I . Alors f est bornée, et atteint ses bornes.

En d'autres termes, toute fonction continue sur un segment admet un maximum et un minimum.

Remarque 12.1.19

Le nom (non universel) de ce théorème, provient du fait que la propriété essentielle en jeu dans ce résultat est la compacité des segments, c'est-à-dire la propriété de Bolzano-Weierstrass. Il existe un résultat plus général, dont l'hypothèse s'exprime par compacité du domaine de définition (dans \mathbb{R}^n , ou même plus généralement encore).

Corollaire 12.1.20

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

I.7 Autour des fonctions monotones – Théorème de la bijection**Théorème 12.1.21**

Soit I un intervalle, et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est injective si et seulement si f est strictement monotone.

Théorème 12.1.22

Soit I un intervalle, et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ monotone. Si $f(I)$ est un intervalle, alors f est continue

Ce théorème constitue une réciproque du théorème des valeurs intermédiaires dans le cas où f est monotone.

Avertissement 12.1.23

Le résultat peut être mis en défaut si f n'est pas monotone, par exemple en considérant $x \mapsto f = x\mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}(x) + (1-x)\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$.

Définition 12.1.24

Soit $A, B \subset \mathbb{R}$. Un homéomorphisme $f : A \rightarrow B$ est une application continue bijective dont la réciproque est continue.

Théorème 12.1.25 (Théorème de la bijection)

Soit I un intervalle d'extrémités a et b . Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ strictement monotone et continue. Soit :

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \text{et} \quad \beta = \lim_{x \rightarrow b} f(x)$$

(ces limites existent car f est monotone). Alors $f(I)$ est un intervalle d'extrémités α et β , et f est un homéomorphisme de I sur $f(I)$.

Plus précisément, la borne α de $f(I)$ est ouverte si et seulement la borne a de I est ouverte, et de même pour β .

On affirme en particulier que si f est une fonction continue strictement monotone, elle induit une bijection sur son image, et sa réciproque est également continue.

II Dérivabilité

Nous avons déjà étudié la dérivabilité en un point, ainsi que toutes les propriétés calculatoires. Nous nous contentons donc ici de l'étude des propriétés des fonctions dérivables sur tout un intervalle.

La dérivabilité d'une fonction est une hypothèse de régularité assez forte (la fonction ne peut pas être localement « hérissée »). La dérivabilité d'une fonction sur tout un intervalle a de ce fait des implications assez fortes. Tout d'abord, comme vous le savez déjà, la dérivabilité sur un intervalle permet une étude facile des variations des fonctions, et donc des extremas. Nous commençons par ce premier point, les rapports avec les variations nécessitant un peu plus de technique.

II.1 Extremum d'une fonction

Soit I un intervalle, $x_0 \in I$, et f une fonction définie sur I .

Définition 12.2.1 (Minimum, maximum global)

1. On dit que f admet un minimum global en x_0 si pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f(x_0)$.
2. On dit que f admet un maximum global en x_0 si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(x_0)$.

Définition 12.2.2 (Minimum, maximum global strict)

1. On dit que f admet un minimum global strict en x_0 si pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$, $f(x) > f(x_0)$.
2. On dit que f admet un maximum global strict en x_0 si pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$, $f(x) < f(x_0)$.

Ainsi, x_0 est le seul point de I en lequel f admet son minimum (ou maximum)

Définition 12.2.3 (Minimum, maximum local)

1. On dit que f admet un minimum local en x_0 s'il existe un voisinage U de x_0 tel que pour tout $x \in I \cap U$, $f(x) \geq f(x_0)$.
2. On dit que f admet un maximum local en x_0 s'il existe un voisinage U de x_0 tel que pour tout $x \in I \cap U$, $f(x) \leq f(x_0)$.

Le premier résultat que nous donnons reliant les extrema et la dérivée est le suivant, donnant une condition pour avoir un extremum.

Théorème 12.2.4 (CN du premier ordre pour l'existence d'un extremum)

Soit I un intervalle ouvert et $x_0 \in I$. Si f est dérivable en x_0 et admet un extremum local en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$.

Avertissement 12.2.5

Ce n'est pas vrai si I n'est pas ouvert et x_0 est une borne de I .

Le théorème précédent motive la définition suivante :

Définition 12.2.6 (Point critique)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$. On dit que x_0 est un point critique de f si $f'(x_0) = 0$.

Ainsi, si une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I admet en x_0 un extremum, alors x_0 est un point critique de f .

Avertissement 12.2.7

Il ne s'agit pas d'une condition suffisante, comme le montre l'exemple de

La notion de point critique nécessite de se placer sur un intervalle ouvert, ou tout au moins de considérer des points x_0 qui ne soient pas au bord de l'intervalle I . On parle de *point intérieur* de I . Plus généralement, l'intérieur d'un ensemble X est l'ensemble des points de X dont X est un voisinage. Il s'agit du plus grand ouvert contenu dans X .

Méthode 12.2.8 (Étude d'un point critique)

L'étude des dérivées d'ordre supérieur peut nous permettre de trancher sur la nature d'un point critique. En effet, admettons provisoirement la formule de Taylor-Young que nous démontrerons dans le chapitre suivante : au voisinage d'un point x_0 , on a, pour une fonction f de classe \mathcal{C}^n au voisinage de ce point :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n).$$

Soit x_0 un point critique, et $n > 0$ le rang minimal pour lequel $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. La formule de Taylor-Young amène alors

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),$$

soit $f(x) - f(x_0) \underset{+\infty}{\sim} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$.

La propriété de conservation du signe permet alors de conclure :

- Si n est impair, il n'y a pas d'extremum local
- Si n est pair, il y a un extremum local, minimum si $f^{(n)}(x_0) > 0$, maximum si $f^{(n)}(x_0) < 0$.

II.2 Théorème de Rolle

Graphiquement, le théorème suivant est une évidence :

Théorème 12.2.9 (Rolle)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors, si $f(a) = f(b)$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

On peut étendre le théorème de Rolle de plusieurs façons. Les résultats suivants sont des exercices classiques (à savoir démontrer à la demande, il ne s'agit pas de résultats du cours) :

Corollaire 12.2.10 (Rolle sur un intervalle infini d'un côté, HP)

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a, +\infty[$, et telle que $f(a) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Alors il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Corollaire 12.2.11 (Rolle sur \mathbb{R} , HP)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur \mathbb{R} , et telle que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Corollaire 12.2.12 (Rolle en cascade, HP)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$, n fois dérivable sur $]a, b[$, et telle qu'il existe $n + 1$ réels $a \leq a_0 < a_1 < \dots < a_n \leq b$ tels que $f(a_0) = f(a_1) = \dots = f(a_n)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Note Historique 12.2.13

- Michel Rolle (1659-1719) démontre une version purement algébrique de ce théorème dans le cadre des polynômes. Il ne possède même pas à ce moment-là de la notion de dérivée : il recherche des encadrements de racines d'un polynôme en constatant qu'elles sont séparées par les racines non nulles du polynôme obtenu en multipliant chaque monôme par son degré. Cette construction purement algébrique n'est rien d'autre, après simplification par X , que la dérivée du polynôme...
- Lagrange, puis Cauchy, démontrent le théorème de Rolle dans une version plus générale, en établissant d'abord le théorème des accroissements finis, puis en utilisant le TVI sur f' : ils utilisent donc une hypothèse supplémentaire, la continuité de f' .
- C'est Pierre-Ossian Bonnet (1819-1892) qui propose le point de vue actuel, permettant de se dispenser de l'hypothèse de continuité, et simplifiant considérablement la preuve du théorème des accroissements finis, le voyant comme une conséquence du théorème de Rolle plutôt que l'inverse.

II.3 Théorème des accroissements finis

Une première conséquence importante du théorème de Rolle est :

Théorème 12.2.14 (Théorème des accroissements finis, TAF)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Remarque 12.2.15 (Interprétation géométrique)

Il existe une tangente parallèle à la corde.

Remarquez que le TAF est une généralisation du théorème de Rolle. On a même une équivalence entre les deux propriétés, le TAF étant simplement obtenu du théorème de Rolle par ajout d'une partie affine.

Corollaire 12.2.16 (Inégalité des accroissements finis, IAF)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Soit M un majorant de f' sur $]a, b[$, et m un minorant de f' sur $]a, b[$. Alors :

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a).$$

En particulier, si M est un majorant de $|f'|$, alors $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$.

Attention à bien considérer $a < b$ pour le premier encadrement, sans les valeurs absolues. En revanche, le rôle symétrique de a et b dans l'inégalité $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$ nous dit qu'on peut s'affranchir de l'hypothèse $a < b$ pour utiliser cette inégalité.

L'inégalité des accroissements finis nous donne un lien entre des propriétés de dérivabilité et la propriété définissant les fonctions lipschitziennes :

Définition 12.2.17 (Fonctions lipschitziennes)

Soit $k \in \mathbb{R}_+$ et f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que f est k -lipschitzienne si pour tout $(x, y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. On dit que f est lipschitzienne s'il existe $k \geq 0$ telle que f soit k -lipschitzienne.

Corollaire 12.2.18

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Si f' est bornée sur I , alors f est lipschitzienne sur I . Plus précisément, si k est un majorant de $|f'|$, alors f est k -lipschitzienne. La réciproque est vraie.

En revanche, il peut exister des fonctions lipschitziennes non dérivables.

Note Historique 12.2.19

La terminologie provient du nom du mathématicien allemand Rudolf Lipschitz (1832-1903). Ces fonctions interviennent notamment dans les problèmes d'existence de solutions de certaines équations différentielles (théorème de Cauchy-Lipschitz).

Un type particulièrement important de fonction lipschitzienne est :

Définition 12.2.20 (Fonction contractante)

Une fonction contractante sur un intervalle I est une fonction f qui soit k -lipschitzienne, pour un réel $k \in [0, 1[$

Exemple 12.2.21

Par exemple, les fonctions vérifiant $|f'| \leq M < 1$ sur I sont contractante. En est-t-il de même si on a juste $|f'| < 1$ sur I ? Donner une condition sur l'intervalle I pour que ce soit le cas.

Les fonctions contractantes ont un rôle important dans l'étude des systèmes dynamiques discrets (*i.e.* les suites définies par une récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$). En effet :

Théorème 12.2.22 (Systèmes dynamiques donnés par une fonction contractante, HP)

Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble de \mathbb{R} , et I un intervalle stable par f tel que f soit contractante sur I . Soit (u_n) une suite vérifiant la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, et telle qu'il existe n_0 tel que $u_{n_0} \in I$. Alors (u_n) converge dans \mathbb{R} .

En particulier, toute fonction contractante sur un intervalle I y admet un point fixe. Dans le cas où f est dérivable, le point fixe considéré est attractif.

II.4 Variations des fonctions dérivables

Le théorème suivant, que vous connaissez bien, est intuitivement évident, si on fait le rapprochement avec les pentes des tangentes. Son aspect local provient de façon immédiate de la définition de la dérivée. Le passage du local au global peut se faire par des moyens directs (mais c'est un peu fastidieux). Il découle de façon immédiate du théorème des accroissements finis.

Théorème 12.2.23 (Caractérisation par la dérivée de la variation des fonctions)

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, et I un intervalle tel que f est continue sur I et dérivable sur $I \setminus X$ (où X est fini). Alors :

1. f est croissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I \setminus X$, $f'(x) \geq 0$.
Si cette inégalité est stricte sauf en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante.
2. f est décroissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I \setminus X$, $f'(x) \leq 0$.
Si cette inégalité est stricte sauf en un nombre fini de points, alors f est strictement décroissante.

Corollaire 12.2.24 (Caractérisation des fonctions constantes)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I , dérivable sur $I \setminus X$ (où X est fini). Alors f est constante si et seulement si pour tout $x \in I \setminus X$, $f'(x) = 0$.

II.5 Dérivation et primitivation

En admettant provisoirement que toute fonction continue sur un segment est intégrable sur ce segment, ainsi que les manipulations usuelles sur les intégrales (ces points seront justifiés ultérieurement), on démontre maintenant un théorème qu'on avait admis dans un chapitre antérieur.

Théorème 12.2.25 (Primitivation des fonctions continues)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Alors f admet une primitive F sur I . Plus précisément, étant donné $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, l'unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$ est définie par :

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

Théorème 12.2.26 (Théorème fondamental du calcul des intégrales, Newton)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et F une primitive de f sur $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Appliqué à f' , donc une primitive est f , on obtient en particulier le résultat suivant, qui a parfois son utilité :

Corollaire 12.2.27 (Expression intégrale de f)

Soit f une fonction définie et de classe C^1 sur un intervalle I , et soit $c \in I$. Alors

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(c) + \int_c^x f'(t) dt.$$

Remarquez que ce résultat est vrai pour tout type d'intervalle I .

II.6 Limites de dérivées et prolongements de fonctions dérivables

Une conséquence importante du théorème des accroissements finis est :

Théorème 12.2.28 (Théorème de la limite de la dérivée)

Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Si f' admet (dans $\overline{\mathbb{R}}$) une limite en a alors

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x).$$

En particulier, si $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$ est finie, f est dérivable en a et $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$.

Adaptation immédiate pour la borne b !

Théorème 12.2.29 (Théorème de la classe C^n par prolongement)

Soit I un intervalle et $x_0 \in I$. Soit f une fonction définie et de classe C^n sur $I \setminus \{x_0\}$. Si pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $f^{(k)}$ admet une limite finie en x_0 , alors f peut être prolongée sur I en une fonction \tilde{f} de classe C^n sur I . De plus, on aura alors :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \tilde{f}^{(k)}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f^{(k)}(x).$$

On a en fait même beaucoup mieux que cela (mais ce n'est pas au programme semble-t-il...)

Théorème 12.2.30 (Théorème de prolongement des fonctions de classe \mathcal{C}^n , HP)

Soit I un intervalle et $x_0 \in I$. Soit f une fonction définie et de classe \mathcal{C}^n sur $I \setminus \{x_0\}$. Si $f^{(n)}$ admet une limite finie en x_0 , alors f est prolongeable en une fonction de classe \mathcal{C}^n sur I .

III Dérivabilités de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C}

Les définitions (par les limites) des dérivées (totales, à gauche, à droite) s'adaptent pour les fonctions à valeurs dans \mathbb{C} , les limites ayant été définies dans ce cadre. Les différentes règles de calcul s'adaptent également. Attention cependant à la composition (on peut composer par une fonction de la variable complexe, mais on n'a pas défini de notion de dérivée dans ce cadre) : seul le cas de la composition par l'exponentielle complexe est à connaître (voir un chapitre antérieur).

Il est important de se souvenir de la caractérisation suivante :

Théorème 12.3.1 (Caractérisation de la dérivabilité par les parties réelles et imaginaires)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$, où I est un intervalle de \mathbb{R} , et f_1 et f_2 de I dans \mathbb{R} telles que $f = f_1 + i f_2$. Alors f est dérivable sur I si et seulement si f_1 et f_2 le sont, et dans ce cas,

$$f' = f_1' + i f_2'.$$

Autrement dit, la linéarité de la dérivation vaut aussi pour des combinaisons linéaires à coefficients complexes.

Certains résultats relatifs aux fonctions dérivables sur un intervalle se généralisent également au cas de fonctions à valeurs dans \mathbb{C} , mais pas tous cependant. Ainsi, par exemple les résultats liés à l'étude d'extrema ou de variations n'ont pas de sens dans ce cadre, car ils nécessiteraient la donnée d'une relation d'ordre sur \mathbb{C} . En particulier :

- Le théorème de Rolle, dont la démonstration repose sur l'existence d'un extremum, n'a pas d'équivalent pour une fonction à valeurs dans \mathbb{C} . On pourra en revanche, sous les conditions idoines, l'appliquer à la partie réelle f_1 et à la partie imaginaire f_2 , trouvant ainsi deux réels c_1 et c_2 tels que $f_1'(c_1) = 0$ et $f_2'(c_2) = 0$, mais comme c_1 et c_2 n'ont aucune raison d'être égaux, on ne pourra pas en conclure l'existence d'un réel c tel que $f'(c) = 0$. Pensez à une fonction décrivant, à vitesse homogène, un cercle dans \mathbb{C} ; la dérivée sera un vecteur de norme constante, tangent au cercle, donc ne s'annulant pas. Pourtant, si entre a et b , on fait un tour complet, on aura $f(a) = f(b)$.
- Le théorème des accroissements finis, dont la démonstration repose sur le théorème de Rolle, entre également en défaut. D'ailleurs, le théorème de Rolle n'est qu'un cas particulier du théorème des accroissements finis. Là encore, sous les conditions idoines, on pourra trouver des réels c_1 et c_2 tels que $(f_1(b) - f_1(a)) = f_1'(c_1)(b - a)$ (pour la partie réelle) et $(f_2(b) - f_2(a)) = f_2'(c_2)(b - a)$ (pour la partie imaginaire), mais c_1 et c_2 étant en général distincts, on ne pourra, sauf cas exceptionnels, pas trouver de réel c tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

De façon remarquable cependant, l'inégalité des accroissements finis reste vraie :

Théorème 12.3.2 (IAF pour des fonctions à valeurs dans \mathbb{C})

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, et M un réel tel que $|f'| \leq M$ sur $]a, b[$. Alors

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|.$$

En particulier, les théorèmes de prolongement restent vrais.

Approximations polynomiales

J'ai bien dit des injures, et de bien grosses, à mon ami Mr Taylor [...] sur l'obscurité étonnante, et la mauvaise façon de son livre.

(Monmortius)

Le Calcul infinitésimal [...] est l'apprentissage du maniement des inégalités bien plus que des égalités, et on pourrait le résumer en trois mots : MAJORER, MINORER, APPROCHER.

(Jean Dieudonné)

I Formules de Taylor

Dans toute cette section, f désigne une fonction d'un intervalle I de \mathbb{R} vers \mathbb{R} , et $x_0 \in I$.

I.1 Développement de Taylor

But : étant donné n , définir un polynôme P de degré n qui approche au mieux f au voisinage d'un point $x_0 \in I$. Tout d'abord, la valeur au point doit être la même : $P(x_0) = f(x_0)$. Ensuite, les deux courbes doivent être tangentes, ce qui impose que $P'(x_0) = f'(x_0)$. La variation des tangentes au voisinage de x_0 doit ensuite être la plus proche possible, ce qui impose que $P''(x_0) = f''(x_0)$. Intuitivement, on en déduit que le meilleur polynôme de degré n approchant la courbe au voisinage de x_0 vérifie donc les conditions :

$$P(x_0) = f(x_0) \quad P'(x_0) = f'(x_0) \quad \dots \quad P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0),$$

à condition bien sûr que ces dérivées de f soient définies. On dit que les courbes de P et f sont *tangentes à l'ordre n* en x_0 .

Définition 13.1.1 (Développement de Taylor de f)

Soit f une fonction admettant en x_0 une dérivée d'ordre n . Alors un *développement de Taylor* de f en x_0 à l'ordre n est un polynôme P de degré au plus n vérifiant les conditions :

$$P(x_0) = f(x_0), \quad P'(x_0) = f'(x_0), \quad \dots, \quad P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

donc un polynôme dont la courbe est tangente à l'ordre n à celle de f en x_0 .

Théorème 13.1.2 (Existence, unicité et expression du développement de Taylor de f)

Soit f une fonction n fois dérivable en x_0 . Alors le développement de Taylor de f en x_0 à l'ordre n existe, est unique, et est donné explicitement par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0)^k}{k!} \cdot f^{(k)}(x_0).$$

Remarque 13.1.3

Le développement de Taylor à l'ordre 1 au voisinage de x_0 n'est autre que l'expression de la droite tangente à la courbe de f en x_0 . Les développements de Taylor sont donc à voir comme une généralisation polynomiale de la droite tangente, aux ordres supérieurs.

Définition 13.1.4 (Reste de Taylor à l'ordre n)

Si f admet en x_0 une dérivée d'ordre n , on note R_n la différence entre f et son développement de Taylor :

$$\forall x \in I, \quad R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0)^k}{k!} \cdot f^{(k)}(x_0).$$

R_n est appelé *reste de Taylor à l'ordre n de f au point x_0* .

On note parfois $R(x, x_0)$ pour indiquer la dépendance vis-à-vis du point x_0 .

L'objet des formules de Taylor est d'étudier ce reste. Cela a pour but d'estimer l'erreur faite en approchant f par son développement de Taylor. Notamment, si f est de classe \mathcal{C}^∞ sur I , est-ce qu'en faisant tendre n vers $+\infty$, le développement de Taylor tend vers f ?

Proposition/Définition 13.1.5 (Fonction développable en série de Taylor)

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur I . Si pour tout $x \in I$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$, alors :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

Dans ce cas, on dit que f est *développable en série de Taylor au point x_0* .

Exemples 13.1.6

1. Dans la suite, nous donnons les développements des fonctions usuelles en séries de Taylor au voisinage de points particuliers. On pourrait montrer qu'elles sont développables en séries de Taylor (au moins localement) au voisinage de tout point.
2. Il existe des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ au voisinage d'un point x_0 , qui ne sont développables en série de Taylor sur aucun voisinage de x_0 , par exemple la fonction $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$, prolongée en 0 par $f(0) = 0$, étudiée au voisinage de 0.

Les trois formules suivantes donnent trois évaluations du reste de Taylor, plus ou moins précises suivant que les hypothèses sont plus ou moins fortes. On commence par la plus précise des formules de Taylor, aussi celle qui demande le plus d'hypothèses.

I.2 Formule de Taylor avec reste intégral

Nous avons déjà démontré, avec le théorème d'intégration par parties itérées, cette formule de Taylor. Le reste y est exprimé de façon exacte, sans aucun terme inconnu.

Théorème 13.1.7 (Formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n au point a)

Soit $a < b$, et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1} sur $[a, b]$. Alors :

$$\forall t \in [a, b], \quad f(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(t-a)^k}{k!} \cdot f^{(k)}(a) + \int_a^t \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) \, dx.$$

Cette formule se généralise bien entendu au cas où $b < a$; il n'y a dans ce cas qu'à inverser les bornes des intervalles.

I.3 Formule de Taylor-Lagrange

La seconde formule de Taylor que nous voyons exprime aussi le reste de Taylor sous forme exacte, mais dépendant d'un paramètre c qu'on ne connaît pas précisément. Étant moins précise que la première formule, elle nécessite aussi des hypothèses moins fortes.

Théorème 13.1.8 (Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n au point a , évaluée en b , HP)

Soit $a < b$ deux réels, et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $[a, b]$, et $n+1$ fois dérivable sur $]a, b[$. Alors :

$$\exists c \in]a, b[, \quad f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Cette formule s'adapte au cas où $b < a$ sans changement d'expression.

Remarque 13.1.9

La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 0 est exactement la formule des accroissements finis.

Corollaire 13.1.10 (Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n au point a)

Sous les mêmes hypothèses, et l'hypothèse supplémentaire que $m \leq f^{(n+1)} \leq M$ sur $]a, b[$, on a (pour $a < b$) :

$$\frac{m(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leq f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \leq \frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

En particulier, si $|f^{(n+1)}| \leq M$ sur $]a, b[$, on a :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| \leq \frac{M|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Cette dernière inégalité est également vraie si $b < a$.

Remarque 13.1.11

Seule l'inégalité de Taylor-Lagrange est au programme, sous des hypothèses plus fortes (f de classe C^{n+1}). Sous cette hypothèse, elle est conséquence de la formule de Taylor avec reste intégral. Ce point de vue est davantage conforme au programme.

I.4 Formule de Taylor-Young

La dernière formule que nous voyons est la moins exacte : elle présente le reste sous forme d'une approximation locale (valable au voisinage d'un point), contrairement aux deux autres qui donnaient une expression exacte valable sur tout un intervalle, donc qui avaient une portée globale. Étant la formule la moins précise des trois, c'est aussi celle qui nécessite les hypothèses les moins fortes

Théorème 13.1.12 (Formule de Taylor-Young à l'ordre n au point x_0)

Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , $x_0 \in I$, et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^n au voisinage de x_0 . Alors, au voisinage de x_0 :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n).$$

Cette formule est une conséquence de la formule de Taylor avec reste intégral prise à l'ordre $n - 1$ (on n'a pas les hypothèses suffisantes pour aller à un autre supérieur), en procédant à un encadrement à l'aide d' ε de l'intégrale.

Remarques 13.1.13

1. La formule de Taylor-Young ne nous donne qu'une information locale, au voisinage de x_0 . En aucun cas elle ne peut être utilisée pour une étude globale.
2. On peut donner une hypothèse plus minimaliste : l'existence de la dérivée n -ième en x_0 suffit (si $n > 0$, sinon, il faut rajouter la continuité). On peut le démontrer par récurrence, mais cela nécessite un argument d'intégration des o .
3. La formule de Taylor-Young fournit ce qu'on appelle le *développement limité* de f au voisinage de x_0 à l'ordre n .

II Formules de Taylor pour les fonctions usuelles

II.1 Exponentielle

Proposition 13.2.1 (Développement limité de l'exponentielle)

La formule de Taylor-Young à l'ordre n au point 0 de l'exponentielle donne l'égalité suivante, au voisinage de 0 :

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

L'inégalité de Taylor-Lagrange permet de montrer :

Théorème 13.2.2 (Développement en série de l'exponentielle)

La fonction exponentielle est développable en série de Taylor au point 0 sur \mathbb{R} , et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

On désigne cette série sous le nom de série exponentielle.

II.2 Logarithme

Proposition 13.2.3 (Développement limité du logarithme)

La formule de Taylor-Young à l'ordre n au point 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$ donne l'égalité suivante, au voisinage de 0 :

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n).$$

La formule de Taylor avec reste intégral permet d'obtenir :

Proposition 13.2.4 (Développement en série du logarithme)

La fonction logarithme $x \mapsto \ln(1+x)$ est développable en série de Taylor au point 0 sur l'intervalle $] -1, 1]$, et :

$$\forall x \in] -1, 1], \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}.$$

II.3 Fonctions trigonométriques

Proposition 13.2.5 (Développement limité de sin et cos)

Les formules de Taylor-Young au point 0 pour le sinus (à l'ordre $2n+2$) et pour le cosinus (à l'ordre $2n+1$) donnent, au voisinage de 0 :

$$\sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \quad \text{et} \quad \cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}).$$

Proposition 13.2.6 (Développement en série de sin et cos)

Le sinus et le cosinus sont développables en séries de Taylor en 0, sur \mathbb{R} , et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{et} \quad \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Remarque 13.2.7

On en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{ix} = \cos x + i \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!},$$

ainsi la série exponentielle converge aussi vers l'exponentielle pour un paramètre imaginaire pur.

On peut alors en déduire (par exemple à l'aide d'un produit de Cauchy, voir cours sur les séries) :

Théorème 13.2.8 (Série exponentielle complexe)

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$

II.4 Fonctions hyperboliques

Proposition 13.2.9 (Développement limité de sh et ch)

Les formules de Taylor-Young au point 0 pour le sinus hyperbolique (à l'ordre $2n+2$) et pour le cosinus hyperbolique (à l'ordre $2n+1$) donnent, au voisinage de 0 :

$$\operatorname{sh}x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \quad \text{et} \quad \operatorname{ch}x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}).$$

Ces formules traduisent le fait que sh et ch sont les parties impaires et paires respectivement de l'exponentielle.

Proposition 13.2.10 (Développement en série de sh et ch)

Le sinus hyperbolique et le cosinus hyperbolique sont développables en séries de Taylor en 0, sur \mathbb{R} , et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{sh}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{et} \quad \operatorname{ch}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Remarque 13.2.11

Il est fréquent d'étendre la définition de cos, sin, ch et sh à \mathbb{C} tout entier, en les définissant comme somme des séries correspondantes. On a alors les identités suivantes :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \sin(z) = \operatorname{sh}(iz) \quad \text{et} \quad \cos(z) = \operatorname{ch}(iz),$$

donc :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{sh}(z) = \sin(-iz) \quad \text{et} \quad \operatorname{ch}(z) = \cos(-iz).$$

Les formules d'Euler restent valables :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \operatorname{ch}(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Les formules de trigonométrie usuelles pouvant être toutes démontrées à partir des formules d'Euler, on en déduit qu'elles restent vraies dans le cas complexe. En particulier, en utilisant la correspondance complexe entre sh et sin, et entre ch et cos, on peut déduire des formules de trigonométrie circulaire toutes les formules de trigonométrie hyperbolique similaires.

II.5 Fonctions puissances

La formule générale est :

Proposition 13.2.12 (Développement limité de $x \mapsto (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$)

Au voisinage de 0, $(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$.

Cas particuliers importants :

1. Pour $a \in \mathbb{N}$, on retrouve le début du développement du binôme.
2. Au voisinage de 0,

$$\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n) \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n).$$

On reconnaît une troncature de série géométrique

À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, on montre :

Proposition 13.2.13 (Développement en série des fonctions puissances)

La fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) est développable en série de Taylor en 0 sur l'intervalle $] -1, 1[$, et :

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Remarques 13.2.14

1. Pour $a \in \mathbb{N}$, on retrouve la formule du binôme
2. Pour $a \in \mathbb{Z}_*^*$, on obtient ce qu'on appelle la formule du binôme négatif, qu'on peut réexprimer de la sorte (pour $n \in \mathbb{N}$) :

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)x^{k-n} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+n)\cdots(k+1)x^n = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

Cette formule ne dit rien de plus que le fait qu'on peut dériver terme à terme une série géométrique. On peut encore l'exprimer plus synthétiquement de la sorte :

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \frac{1}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k}{n} x^n.$$

Avertissement 13.2.15

En général, on ne peut pas dériver terme à terme une série de fonctions. Vous montrerez l'année prochaine qu'on peut le faire pour les séries entières, c'est-à-dire s'exprimant sous la forme $\sum_{k=0}^n a_n x^n$. Le cas ci-dessus de la série géométrique est donc un cas particulier de cette règle plus générale.

II.6 Polynômes

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n et $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors $P^{(n+1)} = 0$. Ainsi, d'après la formule de Taylor avec reste intégral, applicable car P est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , le reste de Taylor au point x_0 est nul. On en déduit :

Théorème 13.2.16 (Formule de Taylor pour les polynômes)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré au plus n . Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k.$$

Ce théorème peut bien entendu être démontré de manière purement algébrique, ce qui permet d'ailleurs de le généraliser à d'autres corps que \mathbb{R} ;

Remarque 13.2.17

Remarquez qu'il s'agit d'un changement de variable, ou plutôt d'indéterminée : on exprime le polynôme P comme combinaison linéaire de monômes $(X - x_0)^n$. Dans le langage de l'algèbre linéaire, on dira qu'on a décomposé P sur la base $((X - x_0)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$.

III Généralités sur les développements limités

III.1 Définition, exemples

Dans cette section, on se donne $x_0 \in \mathbb{R}$.

Définition 13.3.1 (Développement limité (DL) au voisinage d'un point)

Soit f une fonction définie sur un voisinage de x_0 . On dit que le polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ est un développement limité à l'ordre n de f en x_0 si, au voisinage de x_0 :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} P_n(x) + o((x - x_0)^n).$$

Remarque 13.3.2

On exprime généralement P_n dans la base $(1, X - x_0, (X - x_0)^2, \dots, (X - x_0)^n)$. Ainsi, un développement limité à l'ordre n sera la donnée de réels a_0, \dots, a_n tels que, au voisinage de x_0 ,

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Le développement limité est donc une approximation polynomiale locale au voisinage d'un point. Il s'agit de la meilleure approximation par un polynôme de degré au plus n , au voisinage d'un point donné.

La formule de Taylor-Young donne de façon immédiate :

Théorème 13.3.3 (Existence du DL de fonctions n fois dérivables)

Si f est de classe C^n au voisinage de x_0 , alors f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 , égal au développement de Taylor-Young de f à l'ordre n .

Comme mentionné plus haut, si $n > 1$, l'existence de la dérivée n -ième suffirait en fait.

Théorème 13.3.4 (Unicité du DL)

Si f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 , alors ce développement est unique.

On en déduit en particulier :

Proposition 13.3.5 (DL de fonctions paires ou impaires)

Soit f une fonction admettant un DL à l'ordre n au voisinage de 0.

1. *Si f est paire, son DL n'est constitué que de monômes de degré pair ;*
2. *Si f est impaire, son DL n'est constitué que de monômes de degré impair.*

Remarques 13.3.6

1. Toutes les fonctions n'admettent pas un DL en un point x_0 . Certaines fonctions peuvent admettre des DL jusqu'à un certain ordre n_0 et plus ensuite.
2. **Attention !** L'existence d'un DL à l'ordre n en x_0 n'implique pas l'existence de la dérivée n -ième de f en x_0 . Ainsi, tous les DL ne sont pas obtenus par la formule de Taylor-Young.
3. Cependant, pour les petits ordres :
 - Si f admet un DL à l'ordre 0 en x_0 , f est continue en x_0 ;
 - Si f admet un DL à l'ordre 1 en x_0 , f est dérivable en x_0 ;
 - **et ça s'arrête là !**

Exemples 13.3.7

1. $x \mapsto \sqrt{|x|}$ n'admet pas de DL à l'ordre 1 au voisinage de 0
2. La fonction $f : t \mapsto \cos(t) + t^3 \sin \frac{1}{t}$, prolongée en 0 par $f(0) = 1$, admet-elle un développement limité à l'ordre 2 en 0 ? Est-elle 2 fois dérivable en 0 ?

On peut renforcer un peu la définition des DL :

Définition 13.3.8 (DL au sens fort)

Soit f une fonction définie sur un voisinage de x_0 . On dit que le polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ est un développement limité au sens fort à l'ordre n de f en x_0 si, au voisinage de x_0 :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} P_n(x) + O((x - x_0)^{n+1}).$$

Cette définition est plus restrictive que la première, car il impose qu'il n'y ait pas, dans un développement à un ordre supérieur de f , de termes d'ordre non entier $(x - x_0)^\alpha$, $a \in]n, n + 1[$, ni de terme logarithmique du type $(x - x_0)^n \ln(x - x_0)$, etc.

La propriété d'unicité reste vraie, ainsi que l'existence (si f est $n+1$ fois dérivable en x_0 , notez l'hypothèse plus forte !)

De la formule de Taylor-Young, nous déduisons donc les DL des fonctions usuelles. Ces DL, rappelés en fin de chapitre, serviront de briques pour la plupart des calculs de DL que nous effectuerons, grâce aux règles de calculs que nous établirons dans la suite de ce chapitre.

III.2 Restriction

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n . D'après la formule de Taylor pour les polynômes, tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ peut s'écrire sous la forme

$$P(X) = a_0 + a_1(X - x_0) + \cdots + a_n(X - x_0)^n.$$

Cette écriture est unique (cela provient du fait qu'on justifiera plus tard que $(1, X - x_0, \dots, (X - x_0)^n)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$, mais peut aussi se voir comme une conséquence de l'unicité du développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0). On peut alors définir :

Définition 13.3.9 (Troncature)

Soit $P = a_0 + a_1(X - x_0) + \cdots + a_n(X - x_0)^n$ un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $m \leq n$. La troncature de P à l'ordre m au voisinage de x_0 est le polynôme $T_{m,x_0}(P)$ défini par :

$$T_{m,x_0}(P) = a_0 + a_1(X - x_0) + \cdots + a_m(X - x_0)^m.$$

Proposition 13.3.10 (Restriction)

Si f admet un DL à l'ordre n au point x_0 , alors f admet des DL à tous ordres $m \leq n$, obtenus en tronquant le DL à l'ordre n à la puissance m -ième en $(x - x_0)^m$: autrement dit, si $m \leq n$,

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} P(x) + o((x - x_0)^n) \implies f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} T_{m, x_0}(P)(x) + o((x - x_0)^m).$$

Remarque 13.3.11

Si f n'admet pas de DL à l'ordre n_0 en x_0 , elle n'en admet pas non plus aux ordres supérieurs.

Exemple 13.3.12

Pour quels ordres $t \mapsto t^n \ln |t|$ admet-elle un DL au voisinage de 0 ?

III.3 Forme normalisée et partie principale

Pour faciliter la recherche des ordres minimaux de développement nécessaires lors de certaines opérations sur les DL, nous introduisons la forme normalisée d'un DL.

Proposition/Définition 13.3.13 (Forme normalisée d'un DL au voisinage de 0)

Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 , admettant à l'ordre n un DL non nul. Alors il existe un unique entier $m \leq n$ tel que, pour h au voisinage de 0, on ait :

$$f(x_0 + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} h^m(a_0 + a_1 h + \dots + a_{n-m} h^{n-m} + o(h^{n-m})),$$

avec $a_0 \neq 0$. Il s'agit de la forme normalisée du DL à l'ordre n de f au voisinage de x_0 .

Remarques 13.3.14

- La forme normalisée inclut le changement de variable $h = x - x_0$. Dans la pratique, ce changement de variable est effectué de manière quasi-systématique, car il permet d'utiliser les DL des fonctions usuelles, tous donnés au voisinage de 0.
- m est l'ordre minimal pour lequel $\frac{f(x_0+h)}{h^m}$ ne tende pas vers 0 lorsque h tend vers 0. Plus précisément, $h \mapsto \frac{f(x_0+h)}{h^m}$ est prolongeable par continuité en une fonction g , non nulle en 0, et g admet un développement limité à l'ordre $n - m$ en 0, égal à

$$g(h) \underset{h \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1 h + \dots + a_{n-m} h^{n-m} + o(h^{n-m}).$$

La forme normalisée d'un DL permet notamment d'obtenir un équivalent de f .

Proposition 13.3.15 (Équivalent déduit d'un DL)

Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 , telle que

$$f(x_0 + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} h^m(a_0 + a_1 h + \dots + a_{n-m} h^{n-m} + o(h^{n-m})), \quad a_0 \neq 0.$$

Alors $f(x_0 + h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} a_0 h^m$, c'est-à-dire $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} a_0 (x - x_0)^{n-m}$.

Ainsi, le développement limité est à voir comme une généralisation et un affinement des équivalents : l'ordre le plus grossier d'un DL non trivial fournit l'équivalent, les termes suivants du DL permettent

d'affiner l'approximation donnée par l'équivalent : ces termes ne sont pas accessibles directement par le calcul d'équivalent.

Définition 13.3.16 (Partie principale)

Soit f une fonction admettant, à un certain ordre n au voisinage de x_0 , un développement limité non trivial, s'écrivant sous forme normalisée :

$$f(x_0 + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} h^m (a_0 + a_1 h + \dots + a_{n-m} h^{n-m} + o(h^{n-m})), \quad a_0 \neq 0.$$

La partie principale de f (sur l'échelle polynomiale) est la fonction $x \mapsto a_0(x - x_0)^m$. On dira dans cette situation que f admet une partie principale d'ordre m .

IV Opérations sur les développements limités

On se limite dans tout ce paragraphe à des développements limités en 0; les fonctions usuelles étant développées en ce point, on se ramènera en pratique systématiquement à ce cas par un changement de variable.

Pour simplifier, on note simplement T_n pour l'application linéaire $T_{n,0}$ définie ci-dessus. $T_n(P)$ est donc obtenu de P en ne gardant que les monômes de degré inférieur ou égal à n dans l'écriture de P dans la base $(1, X, \dots, X^k, \dots)$.

IV.1 Somme de DL

La règle la plus simple concerne la somme.

Proposition 13.4.1 (Somme de DL)

Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de 0, et P et Q deux polynômes de degré au plus n . Si au voisinage de 0,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} Q(x) + o(x^n),$$

alors $(f + g)(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + Q(x) + o(x^n)$.

Autrement dit, si f et g admettent des DL à l'ordre n en 0, leur somme aussi, et ce DL est obtenu en sommant les DL de f et g .

IV.2 Produit de DL

Proposition 13.4.2 (Produit de DL)

Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de 0, et P et Q deux polynômes de degré au plus n . Si au voisinage de 0,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} Q(x) + o(x^n),$$

alors $(fg)(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} T_n(PQ)(x) + o(x^n)$.

Autrement dit, si f et g admettent des DL à l'ordre n en 0, leur produit aussi, et ce DL est obtenu en faisant le produit des DL de f et g , et en ne gardant que les monômes de degré inférieur ou égal à n .

Exemples 13.4.3

1. $\frac{\cos(x)}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$.
2. $(e^x)^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$.

$$3. \ln(1+x)^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o(x^4).$$

Remarque 13.4.4

- Dans le second exemple ci-dessus, les termes d'ordre 4 du DL de $\ln(1+x)$ n'interviennent pas dans le résultat final. Ceci était prévisible, car la partie principale de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0 est d'ordre 1, donc le terme x^4 est au moins multiplié par un terme d'ordre 1, donc fournit dans le produit des termes d'ordre au moins égal à 5.
- De façon plus générale, si le premier terme du développement de f n'est pas constant, on ne sera pas obligé d'aller jusqu'à l'ordre n pour le développement de g pour obtenir le développement à l'ordre n de fg . On pourrait établir une règle générale pour déterminer à quel ordre il convient d'aller, mais plutôt qu'une utilisation non comprise d'une règle stérile, il est préférable de réfléchir par soi-même au cas par cas.

Exemple 13.4.5

$$1. (\sin(x) - x)(\cos(x) - 1) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^5}{12} - \frac{x^7}{90} + o(x^8).$$

$$2. \sin(x)^6 \underset{x \rightarrow 0}{=} x^6 - x^8 + o(x^9).$$

IV.3 Composition de DL**Proposition 13.4.6 (Composition de DL)**

Soit f et g des fonctions définies au voisinage de 0 telles que $f(0) = 0$. Si P et Q sont des développements limités de f et g en 0 à l'ordre n , alors $T_n(Q \circ P)$ est un DL en 0 à l'ordre n de $g \circ f$:

$$\left(f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + o(x^n) \text{ et } g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} Q(x) + o(x^n) \right) \implies g \circ f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} T_n(Q \circ P)(x) + o(x^n).$$

Exemples 13.4.7

$$1. e^{\sin(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

$$2. e^{\cos(x)-1} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{7}{24}x^4 + o(x^4)$$

Encore une fois, il n'est pas toujours nécessaire d'aller jusqu'à l'ordre n pour les deux fonctions : si le plus petit terme du développement de f est x^k , un terme y^ℓ du développement contribuera à des termes en x de degré au moins $k\ell$. Ainsi, on peut se contenter de garder dans le développement de g uniquement les termes de degré ℓ tel que $k\ell \leq n$. Cela permet de diminuer l'ordre du développement de g d'un facteur multiplicatif k , ce qui est parfois bien appréciable.

La encore, on pourrait donner des règles précises, mais j'estime qu'il est préférable de réfléchir au cas par cas plutôt que d'appliquer une règle obscure.

Exemples 13.4.8

$$1. \ln(\cos(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4).$$

$$2. \tan(\operatorname{sh}(x) - x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + o(x^8).$$

$$3. \sin\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) - \frac{x^2}{1+x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{2} + o(x^9).$$

Méthode 13.4.9 (DL d'une réciproque)

Soit f une fonction bijective (au moins injective au voisinage de 0). On peut trouver un DL de la réciproque f^{-1} de f au voisinage de 0, en identifiant les DL :

$$x = f^{-1} \circ f(x) + o(x^n),$$

fournissant $n + 1$ équations dont les inconnues sont les coefficients du DL de f^{-1} . L'identification est possible du fait de l'unicité du DL.

Exemple 13.4.10

Montrer que $f : x \mapsto x \cos(x)$ est injective sur un voisinage de 0, et trouver le DL à l'ordre 3 d'une réciproque locale (réponse $f^{-1}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$).

Remarque 13.4.11

1. Pourquoi considérer $f^{-1} \circ f$ plutôt de $f \circ f^{-1}$?
2. Trouver une CN sur l'ordre de la partie principale de f pour que f^{-1} admette un DL en 0 au même ordre que f .

IV.4 Quotient de DL**Proposition 13.4.12 (DL d'un inverse)**

Soit g une fonction définie sur un voisinage de 0, et ne s'annulant pas en 0. Si g admet un DL donné par le polynôme P en 0 à l'ordre n , alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{1}{P}$ aussi, et les DL à l'ordre n en 0 de $\frac{1}{g}$ et $\frac{1}{P}$ sont les mêmes. Autrement dit, si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, alors :

$$(g(0) \neq 0 \text{ et } g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + o(x^n)) \implies \left(\frac{1}{g(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} Q(x) + o(x^n) \iff \frac{1}{P(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} Q(x) + o(x^n) \right).$$

Ainsi, si $g(0) \neq 0$, pour trouver un DL de $\frac{1}{g}$ à l'ordre n , il suffit d'inverser un DL à l'ordre n de g .

Méthode 13.4.13 (Calcul pratique du DL d'un quotient)

Soit g une fonction admettant un DL à l'ordre n au voisinage de 0, et telle que $g(0) \neq 0$. Soit P un polynôme de degré au plus n tel que au voisinage de 0, $g(x) = P(x) + o(x^n)$. Comme $g(0) \neq 0$, on a également $P(0) \neq 0$. Par conséquent, en mettant le terme constant non nul a de P en facteur, il existe un polynôme R de degré au plus n et s'annulant en 0, tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a(1 + R(x)).$$

On a alors, au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{P(x)} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + R(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} T_n(1 - R + R^2 + \dots + (-1)^n R^n)(x) + o(x^n),$$

d'après la formule de composition appliquée à $h \circ R$, où h est la fonction $y \mapsto \frac{1}{1+y}$. On obtient donc, au voisinage de 0, d'après la proposition précédente :

$$\frac{1}{g(x)} = T_n(1 - R + R^2 + \dots + (-1)^n R^n)(x) + o(x^n).$$

Il peut parfois être plus judicieux d'écrire $P = a(1 - R)$, car la formule de DL de $y \mapsto \frac{1}{1-y}$ est encore plus simple.

Exemples 13.4.14 (Exemples archiclassiques, à savoir refaire jusqu'à l'ordre 5)

1. $\frac{1}{\cos x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + o(x^7)$.
2. $\tan x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + o(x^{10})$.

Remarque 13.4.15

Si $g(0) = 0$, et si g admet une partie principale d'ordre v , on peut mettre x^v en facteur. Dans ce cas, on est ramené à une fonction $x \mapsto \frac{g(x)}{x^v}$ se prolongeant en une fonction h ne s'annulant pas en 0 : au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{x^v} \cdot \frac{1}{h(x)}$$

Comme on divise par x^v , on obtiendra en fait un développement contenant également des puissances négatives de x . Ce n'est donc pas un DL. C'est ce qu'on appelle un développement asymptotique. On en reparlera un peu plus loin.

Exemple 13.4.16

$$\frac{1}{x^2 \cos(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} + \frac{5}{24}x^2 + o(x^2)$$

Il existe des techniques plus efficaces que la composition pour faire le quotient de deux DL, notamment pour des ordres importants, en particulier une adaptation de la division euclidienne des polynômes, faite en inversant l'ordre (et le rôle) des monômes. C'est ce qu'on appelle la division suivant les puissances croissantes. Cette méthode est hors-programme. Pour les petits ordres, la technique exposée ci-dessus est amplement suffisante.

IV.5 Primitivation d'un DL

Proposition 13.4.17 (Primitivation d'un DL)

Soit f une fonction dérivable au voisinage de 0, dont la dérivée admet un DL à l'ordre $n-1$ au voisinage de 0, donné par :

$$f'(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + o(x^{n-1}).$$

Alors f admet au voisinage de 0 un DL à l'ordre n , donné par :

$$f(x) = f(0) + a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + o(x^n).$$

Méthode 13.4.18

Pour primitiver terme à terme un DL, ne pas oublier :

- de primitiver également le $o(x^{n-1})$;
- de préciser le terme constant (constante d'intégration), égal à $f(0)$.

Exemples 13.4.19

1. DL de $\text{Arctan } x$, $\text{Arcsin}(x)$ et $\text{Arccos}(x)$ en 0 à tous ordres.
2. Du même accabit, mais hors-programme : Argth , Argsh , Argch .
3. $\text{Arctan} \left(\frac{x^2 + 1}{x - 2} \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\text{Arctan} \left(\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{5}x - \frac{12}{25}x^2 - \frac{56}{375}x^3 + o(x^3)$.

Remarque 13.4.20

Dans le cas de fonctions dérivables n fois en 0, la formule de primitivation de DL peut être vue comme une conséquence immédiate de la formule de Taylor-Young.

IV.6 Dérivation

La dérivation de DL se passe moins bien que l'intégration. En effet, contrôler l'intégrale d'un o se fait bien, par majoration : si un terme est petit, son intégrale aussi, sur un intervalle donné. En revanche, un terme peut être petit, mais avoir de très fortes variations locales (petites oscillations très pentues). Ainsi, la dérivation d'un o n'est en général pas contrôlable. Il faut de ce fait des hypothèses fortes pour pouvoir dériver un DL, en revenant à la formule de Taylor-Young.

Proposition 13.4.21 (Dérivation d'un DL)

Soit f une fonction f dérivable n fois en 0, admettant (donc) un DL à l'ordre n au voisinage de 0 :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n).$$

Alors f' admet un DL à l'ordre $n - 1$ en 0, égal à

$$f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + o(x^{n-1}).$$

V Développements asymptotiques

On peut également définir des « développements limités » en la variable x au voisinage de $+\infty$: dans ce cas, on se ramène à 0 par un changement de variables $y = \frac{1}{x}$. Ainsi, un DL en $+\infty$ est un polynôme en la variable $\frac{1}{x}$. On parle plutôt dans ce cas de développement asymptotique.

Exemple 13.5.1

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + x + 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Un développement limité permet de comparer localement une fonction à une fonction polynomiale, donc à situer la fonction sur une échelle de comparaison constituée de fonctions $x \mapsto (x - x_0)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Dans le cas de fonctions non bornées au voisinage d'un point, on peut être amené à introduire des puissances négatives de $(x - x_0)$, afin de mesurer la divergence locale. On parlera là encore de développement limité (ou asymptotique) d'ordre n une approximation du type

$$f(t) = \sum_{k=n_0}^n a_k(x - x_0)^k,$$

l'entier n_0 étant dans \mathbb{Z} .

Exemple 13.5.2

$$\frac{1}{\operatorname{sh}(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} - \frac{x}{6} + \frac{7}{360}x^3 + o(x^4).$$

Avertissement 13.5.3

Si f a un développement asymptotique commençant par un terme de degré $-k$, pour obtenir un DL à l'ordre n du produit fg , il faut augmenter l'ordre du DL de g jusqu'à $n+k$ (car on divisera ensuite par x^k). N'oubliez pas de le faire ! Encore une fois, réfléchissez bien aux ordres nécessaires pour chaque développement.

Exemples 13.5.4

1. $\frac{e^x - 1}{\cos(x) - 1} \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{2x} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}x + o(x)$
2. $\frac{\sin(x) - x}{\ln(1+x) - x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x}{12} + \frac{x^2}{18} + o(x^2).$

On peut être amené à affiner la comparaison, en insérant des fonctions intermédiaires entre les puissances entières x^n . La notion essentielle permettant de définir correctement des développements asymptotiques est la notion d'échelle de comparaison. Les définitions que nous allons voir généralisent toutes celles données jusqu'à présent.

Définition 13.5.5 (Échelle de comparaison, HP)

Une échelle de comparaison au voisinage de t_0 est une famille \mathcal{E} de fonctions, définies et non identiquement nulles au voisinage de t_0 , et telles que pour tout f et tout g de \mathcal{E} , on ait soit $f = o(g)$, soit $g = o(f)$.

Autrement dit, les fonctions de l'échelle de comparaison peuvent toutes se classer les unes par rapport aux autres, par ordre de prépondérance. Cette situation est à comparer au cas d'un ensemble totalement ordonné. On peut en fait se ramener à cette situation en considérant la relation d'ordre définie sur l'ensemble des fonctions non identiquement nulles au voisinage de 0 par $f \leq g$ si et seulement si $f = o(g)$ ou $f = g$. On pourrait aussi définir cette relation sur un ensemble quotient de l'ensemble des fonctions définies au voisinages de x_0 par la relation d'équivalence définie par $f \equiv g$ si et seulement si f et g coïncident sur un voisinage de x_0 (on parle de germes de fonctions).

Exemples 13.5.6 (Échelles de comparaison)

1. $x \mapsto (x - x_0)^n$, $n \in \mathbb{N}$, au voisinage de x_0 (échelle polynomiale).
2. $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, au voisinage de 0.
3. $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, au voisinage de 0 ou $+\infty$.
4. $x \mapsto x^\alpha \ln^\beta(x)$ au voisinage de 0 ou de $+\infty$.
5. $x \mapsto x^\alpha (\ln(x))^\beta (\ln(\ln(x)))^\gamma$ au voisinage de $+\infty$, etc.
6. $x \mapsto x^\alpha e^{P(x)}$, P polynôme sans terme constant

On définit alors :

Définition 13.5.7 (Développement asymptotique)

Un développement asymptotique d'une fonction f sur une échelle de comparaison \mathcal{E} au voisinage de x_0 à la précision $\varphi \in \mathcal{E}$ est la donnée d'une approximation de f de la forme :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} \sum_{\substack{\psi \in \mathcal{E} \\ \varphi = o(\psi) \text{ ou } \psi = \varphi}} a_\psi \psi(x) + o(\varphi(x)).$$

Ainsi, un développement limité à l'ordre n n'est rien d'autre qu'un développement asymptotique sur l'échelle $(x \mapsto (x - x_0)^k)_{k \in \mathbb{N}}$, avec la précision $x \mapsto (x - x_0)^n$.

Exemples 13.5.8

- $\frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{x}}} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{3}{8}x - \frac{5}{16}x\sqrt{x} + \frac{35}{128}x^2 + o(x^2)$.
- $\frac{\sin(x)}{1 + x\sqrt{x} \cdot \ln(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} x - x^2\sqrt{x} \ln(x) - \frac{x^3}{6} + x^4 \ln^2(x) + o(x^4)$.

La plupart des techniques précédentes s'adaptent. Il faut bien sûr être très vigilant sur la manipulation des o . On peut remarquer que la notion de partie principale se généralise aussi, mais dépend de l'échelle de comparaison choisie :

Définition 13.5.9 (Partie principale relativement à une échelle de comparaison)

Soit f une fonction admettant sur une échelle de comparaison \mathcal{E} un développement asymptotique :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} \sum_{\substack{\psi \in \mathcal{E} \\ \varphi = o(\psi) \text{ ou } \psi = \varphi}} a_\psi \psi(x) + o(\varphi(x)).$$

Soit ψ_0 tel que $a_{\psi_0} \neq 0$, et tel que $a_\psi = 0$ pour tout ψ de \mathcal{E} vérifiant $\psi_0 = o(\psi)$. Alors la partie principale de f relativement à l'échelle de comparaison \mathcal{E} est la fonction $a_{\psi_0} \psi_0$.

Il s'agit donc de la partie prépondérante d'un développement asymptotique non trivial de f sur cette échelle.

Exemples 13.5.10

- $\sqrt{x} + x^2 + x^3$ sur l'échelle $(x^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$, au voisinage de 0
- $\sqrt{x} + x^2 + x^3$ sur l'échelle $(x^\alpha(1+x))_{\alpha \in \mathbb{R}}$, au voisinage de 0.

VI Applications

VI.1 Courbes polynomiales asymptotes à une courbe

Méthode 13.6.1 (Recherche de courbes polynomiales asymptotes)

Pour trouver les courbes polynomiales (par exemple les droites) asymptotes à la courbe de f en $+\infty$, il suffit de faire un DA à l'ordre 0 de f en $+\infty$. En effet, les termes de degré négatifs de ce DA forment une partie polynomiale. On obtient donc (en cas d'existence d'un tel DA), pour un certain $m \in \mathbb{N}$:

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} a_m \left(\frac{1}{x}\right)^{-m} + \cdots + a_0 + o(1) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} a_m x^m + \cdots + a_0 + o(1).$$

Cela signifie que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (a_m x^m + \dots + a_0) = 0$. Par définition, cela revient à dire que la courbe polynomiale d'équation $y = a_m x^m + \dots + a_0$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

Méthode 13.6.2 (Position de la courbe par rapport à une courbe asymptote)

Pour trouver la position de la courbe de f par rapport à une courbe polynomiale asymptote (par exemple une droite asymptote), il suffit d'étudier le signe du terme de plus petit exposant strictement positif) dans le DA. Par exemple, si ce terme est le terme de degré 1, on va obtenir, au voisinage de $+\infty$:

$$f(x) = a_m x^m + \dots + a_0 + \frac{b}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{donc:} \quad f(x) - (a_m x^m + \dots + a_0) \underset{+\infty}{\sim} \frac{b}{x}.$$

Ainsi, $f(x) - (a_m x^m + \dots + a_0)$ est du signe de $\frac{b}{x}$ au voisinage de $+\infty$, donc du signe de b ; cela fournit la position, au voisinage de $+\infty$ de la courbe de f par rapport à la courbe polynomiale asymptote $x \mapsto a_m x^m + \dots + a_0$.

Exemple 13.6.3

Montrer que la parabole d'équation $y = ex^2 + \frac{e}{2}x - \frac{e}{24}$ est asymptote à la courbe de $f : x \mapsto x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1+x}$, et que la courbe de f est au-dessus de l'asymptote (le terme d'ordre 1 est $\frac{e}{48x}$).

VI.2 Extréma et points d'inflexion

Supposons que f admet un DL à un certain ordre $k \geq 1$ au voisinage de x_0 , de la forme : $f(x) = a_0 + a_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^k)$, avec $a_k \neq 0$. Alors

- f admet un point critique en x_0 si et seulement si $k > 1$
- la courbe de f présente alors un extremum en x_0 si et seulement si k est pair ; il s'agit d'un maximum si $a_k < 0$ et d'un minimum si $a_k > 0$.

En d'autres termes :

Proposition 13.6.4 (Étude d'un point critique)

Soit f admettant en x_0 un point critique. Alors :

- f admet un extremum en x_0 si et seulement si la partie principale de $x \mapsto f(x) - f(x_0)$ au voisinage de x_0 est d'ordre pair ;
- dans ce cas, si ax^α désigne cette partie principale, f admet un minimum local en x_0 si $a > 0$ et un maximum local si $a < 0$.

Ainsi, pour savoir si f admet un extremum local en un point critique x_0 , il suffit de trouver le premier terme non nul de degré strictement positif du DL de f en x_0

On peut procéder de la même façon à l'étude des points d'inflexion, points en lesquels la tangente change de côté de la courbe. Une condition nécessaire est que $f''(x_0) = 0$, mais il ne s'agit pas d'une condition suffisante.

Proposition 13.6.5 (Étude des points d'inflexion)

Soit f tel que $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + o(x - x_0)$, et telle que $f''(x_0) = 0$. Alors la courbe de f présente en x_0 un point d'inflexion si et seulement si la partie principale de $x \mapsto f(x) - a_0 - a_1(x - x_0)$ au voisinage de 0 est d'ordre impair.

Ainsi, pour savoir si la courbe d'une fonction f présente un point d'inflexion en x_0 , il suffit de déterminer le premier terme non nul de degré strictement supérieur à 1 du DL de f en x_0 .

VII Développement limités des fonctions usuelles

Les développements limités suivants sont à bien connaître. Les dernières lignes sont les cas particuliers les plus fréquents de la formule du DL de $(1+x)^\alpha$.

Théorème 13.7.1 (DL des fonctions classiques)

1. $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$
2. $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} + o(x^n)$.
3. $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$.
4. $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$.
5. $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$.
6. $\text{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})$
7. $\text{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$.
8. $\text{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$.
9. $\text{th}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$.
10. $(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$
 $\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + o(x^n)$.
11. $\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n)$.
12. $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$.
13. $\sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{48}x^3 + o(x^3)$
14. $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3)$

On n'entend autre chose par somme des ordonnées d'un demi-cercle sinon la somme d'un nombre indéfini de rectangles faits de chaque ordonnée avec chacune des petites portions égales du diamètre, dont la somme [...] ne diffère de l'espace d'un demi-cercle que d'une quantité moindre qu'aucune donnée

(Blaise Pascal)

Le but de ce chapitre est de donner un fondement rigoureux à la théorie de l'intégration. Il existe plusieurs constructions de l'intégrale. Celle que nous donnons est historiquement la première complètement formalisée, et est due à Bernhard Riemann (1826-1866)

Note Historique 14.0.2

La notion d'intégration est ancienne, mais la théorie de l'intégration n'a vraiment été fondée que par Leibniz à la fin du 17-ième siècle. C'est lui qui introduit le symbolisme permettant de faire le lien entre dérivation et intégration. C'est à lui également qu'on doit le signe \int , représentant un S pour somme.

Il faut attendre toute la théorisation de la notion de fonction et des notions relatives à la continuité pour une formalisation rigoureuse. Il s'agit tout d'abord de la construction de l'intégrale de Riemann (1854), puis de l'intégrale de Lebesgue (1902). D'autres variantes existent.

Nous nous intéressons donc à l'approche de Riemann. L'idée sous-jacente à la construction est l'interprétation de l'intégrale comme l'aire sous la courbe. Cette aire est facile à déterminer pour des fonctions en escalier : il s'agit de la somme d'aires de rectangles. On commence donc par définir l'intégrale de fonctions en escalier, puis on définit plus généralement l'intégrale d'une fonction en l'approchant par des fonctions en escalier. La question qui se pose au passage est de savoir quelles sont les fonctions pour lesquelles cette construction est possible (fonctions intégrables au sens de Riemann), donc quelles sont les fonctions qui peuvent être approchées d'assez près par des fonctions en escalier, (et au passage, quel sens donner à cette affirmation?).

On commence donc par étudier les fonctions en escalier, puis on définit leur intégrale, et on étudie leurs propriétés. Seulement après, on définit la notion d'intégrabilité au sens de Riemann, et on vérifie que les propriétés sur les fonctions en escalier se transmettent au cas général. On montre que les fonctions continues par morceaux sont intégrables au sens de Riemann, donc en particulier les fonctions continues. Enfin, on termine en précisant le lien entre primitive et intégrale. L'aspect pratique et calculatoire ayant déjà été vu dans un chapitre antérieur, nous nous contentons d'un petit complément sur la primitivation des fractions rationnelles, par l'utilisation de la décomposition en éléments simples.

I Intégrale des fonctions en escalier

Une fonction en escalier est une fonction constante par morceaux. Pour définir correctement les morceaux de l'intervalle $[a, b]$ sur lesquels f est constante, on introduit la notion de subdivision.

I.1 Notion de subdivision d'un intervalle

Définition 14.1.1 (subdivision d'un intervalle)

- Une *subdivision* σ de l'intervalle $[a, b]$ est une suite finie strictement croissante

$$\sigma = (a = \sigma_0 < \dots < \sigma_n = b).$$

- L'entier n est le nombre de parts de la subdivision.
- Les intervalles $[\sigma_i, \sigma_{i+1}]$, $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ sont appelés *intervalles de la subdivision*.
- Le *pas* $p(\sigma)$ de la subdivision est la longueur du plus grand intervalle :

$$p(\sigma) = \max_{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket} (\sigma_{i+1} - \sigma_i).$$

On assimilera souvent une subdivision σ à l'ensemble $\{\sigma_0, \dots, \sigma_n\}$; ainsi, on s'autorisera à parler d'appartenance, d'inclusion, d'union et d'intersection de subdivisions. Quitte à réordonner les éléments, une union de subdivisions est encore une subdivision; de même pour une intersection de subdivisions.

Définition 14.1.2 (Relation de raffinement)

Soit σ et τ deux subdivisions de $[a, b]$. On dit que σ est plus fine que τ , et on note $\sigma \leq \tau$ si $\tau \subset \sigma$ (autrement dit, la subdivision σ est obtenue de τ en rajoutant des points)

Théorème 14.1.3 (Le raffinement définit un ordre)

La relation \leq sur les subdivisions est une relation d'ordre.

Théorème 14.1.4 (Existence des bornes supérieures et inférieures)

1. Soit $(\sigma_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de subdivisions de $[a, b]$. Cette famille admet une borne supérieure pour la relation de raffinement, et :

$$\sup_{i \in I} \sigma_i = \bigcap_{i \in I} \sigma_i.$$

2. Soit $(\sigma_i)_{i \in I}$ une famille finie de subdivisions de $[a, b]$. Cette famille admet une borne inférieure pour la relation de raffinement, et :

$$\inf_{i \in I} \sigma_i = \bigcup_{i \in I} \sigma_i.$$

I.2 Fonctions en escalier

En vue de construire l'intégrale par approximations, en commençant par un cas simple, nous introduisons les fonctions en escalier. Nous nous contentons dans un premier temps de l'étude des fonctions d'un intervalle $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} . Nous généraliserons plus loin les résultats obtenus pour des fonctions de $[a, b]$ dans \mathbb{C} .

Définition 14.1.5 (Fonctions en escalier)

Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *en escalier* s'il existe une subdivision $\sigma = (\alpha = \sigma_0 < \dots < \sigma_n = b)$ de $[a, b]$ telle que f soit constante sur chacun des intervalles $] \sigma_i, \sigma_{i+1} [$, $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Définition 14.1.6 (Subdivision associée)

Soit f une fonction en escalier. Une subdivision σ telle que dans la définition 14.1.5 est appelée *subdivision associée à f* .

Remarque 14.1.7

Il n'existe pas une unique subdivision associée à une fonction en escalier f . On peut toujours en trouver une infinité. En effet, toute subdivision plus fine qu'une subdivision associée à f sera encore associée à f .

Proposition 14.1.8 (Image d'une fonction en escalier)

L'image d'une fonction en escalier est un ensemble fini. En particulier, une fonction en escalier est bornée.

Proposition 14.1.9 (subdivision optimale)

Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$. Il existe une subdivision moins fine que toutes les autres associée à f . Il s'agit de l'intersection de toutes les subdivisions associées à f .

Lemme 14.1.10

Soit f une fonction en escalier de subdivision associée σ , et soit τ telle que $\tau \leq \sigma$. Alors τ est associée à f .

Lemme 14.1.11

Soient f et g deux fonctions en escalier. Il existe une subdivision commune associée à f et g .

Théorème 14.1.12 (Structure de l'ensemble des fonctions en escalier)

L'ensemble $\text{Esc}([a, b])$ des fonctions en escalier sur $[a, b]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{[a, b]}$.

I.3 Intégrale d'une fonction en escalier

Dans cette section, les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

Définition 14.1.13

Soit f une fonction en escalier, et σ une subdivision associée à f . On définit :

$$I(f, \sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(\sigma_{i+1} - \sigma_i),$$

où, pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, f_i désigne la valeur constante de f sur l'intervalle $] \sigma_i, \sigma_{i+1} [$.

Remarque 14.1.14

$I(f, \sigma)$ est la somme de l'aire signée des rectangles situés entre l'axe des abscisses et les valeurs constantes de f sur chacun des intervalles $]\sigma_i, \sigma_{i+1}[$. C'est donc l'aire entre l'axe et la courbe.

Théorème 14.1.15

Pour toutes subdivisions σ et τ associées à f , $I(f, \sigma) = I(f, \tau)$. Autrement dit, la quantité $I(f, \sigma)$ est indépendante du choix de la subdivision associée σ .

Définition 14.1.16 (Intégrale d'une fonction en escalier)

On définit l'intégrale de la fonction en escalier f sur $[a, b]$ comme étant la valeur commune des $I(f, \sigma)$, pour les subdivisions associées σ . On note cette quantité $\int_{[a,b]} f(x) dx$, ou, plus souvent, $\int_a^b f(x) dx$. Ainsi, si σ est une subdivision quelconque associée à la fonction en escalier f , on a :

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(\sigma_{i+1} - \sigma_i).$$

De la définition et d'un bon choix de subdivision découle immédiatement :

Proposition 14.1.17 (Intégrale d'une fonction nulle presque partout)

Si f est nulle sauf en un nombre fini de points, son intégrale est nulle.

I.4 Propriétés des intégrales de fonctions en escalier

Nous supposons toujours les fonctions à valeurs réelles.

Proposition 14.1.18 (Additivité par rapport aux bornes – relation de Chasles)

Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$, et soit $c \in]a, b[$. Alors f est en escalier sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$, et :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Proposition 14.1.19 (Linéarité)

$\int_{[a,b]} : \text{Esc}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire sur l'espace vectoriel $\text{Esc}([a, b])$. Autrement dit, pour toutes fonctions en escalier f et g , et tout réel λ , on a :

$$\int_a^b (f(x) + \lambda g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \lambda \int_a^b g(x) dx.$$

En particulier, de la nullité de l'intégrale d'une fonction nulle presque partout, il découle :

Proposition 14.1.20 (Intégrale de deux fonctions en escalier égales presque partout)

Si deux fonctions en escalier ne diffèrent qu'en un nombre fini de points, alors leurs intégrales sont égales.

Proposition 14.1.21 (Positivité, ou croissance, de l'intégrale)

Soit f et g deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ telles que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$. Alors :

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx.$$

En particulier, si f est en escalier sur $[a, b]$ et positive, $\int_a^b f(x) \, dx \geq 0$.

Proposition 14.1.22 (Inégalité triangulaire intégrale)

Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$, à valeurs réelles. Alors $|f|$ est en escalier sur $[a, b]$, et :

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

Définition 14.1.23 (extension de la notation intégrale)

Par convention on pose $\int_a^a f(x) \, dx = 0$, et, si $a < b$, $\int_b^a f(x) \, dx = -\int_a^b f(x) \, dx$.

Alors, la relation de Chasles est vraie pour toute valeur de c , qu'elle soit ou non dans $]a, b[$, à condition que la fonction soit en escalier sur tous les intervalles considérés.

II Construction de l'intégrale de Riemann

L'idée de la construction est d'encadrer une fonction donnée le plus finement possible par des fonctions en escalier, dans l'espoir de définir l'intégrale par ces approximations. Dans un premier temps, on reste dans le cadre de fonctions à valeurs dans \mathbb{R} .

II.1 Fonctions intégrables

Dans toute cette section, f désigne une fonction de $[a, b]$ dans \mathbb{R} .

Notation 14.2.1

On définit :

1. $\text{Esc}_-(f) = \{g \in \text{Esc}([a, b]) \mid \forall x \in [a, b], g(x) \leq f(x)\}$
2. $\text{Esc}_+(f) = \{g \in \text{Esc}([a, b]) \mid \forall x \in [a, b], g(x) \geq f(x)\}$

Ainsi, $\text{Esc}_-(f)$ est l'ensemble des fonctions en escalier minorant f et $\text{Esc}_+(f)$ est l'ensemble des fonctions en escalier majorant f .

Remarquez que $\text{Esc}_-(f)$ et $\text{Esc}_+(f)$ peuvent être vides, par exemple si f n'est pas bornée.

Définition 14.2.2 (Intégrabilité au sens de Riemann)

On dit que f est intégrable (au sens de Riemann) sur $[a, b]$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists g \in \text{Esc}_-(f), \exists h \in \text{Esc}_+(f), \int_a^b (h(x) - g(x)) \, dx < \varepsilon.$$

Remarquez que cette intégrale est forcément positive.

Proposition 14.2.3 (CN d'intégrabilité)

Pour que f soit intégrable sur $[a, b]$, il est nécessaire que f soit bornée.

On définit :

$$A_-(f) = \left\{ \int_a^b g(x) \, dx \mid g \in \text{Esc}_-(f) \right\}, \quad \text{et} \quad A_+(f) = \left\{ \int_a^b g(x) \, dx \mid g \in \text{Esc}_+(f) \right\}.$$

On note, sous réserve d'existence :

$$I_-(f) = \sup A_-(f) \quad \text{et} \quad I_+(f) = \inf A_+(f).$$

Théorème 14.2.4

f est intégrable si et seulement si $I_-(f)$ et $I_+(f)$ existent, et si $I_-(f) = I_+(f)$.

Définition 14.2.5 (Intégrale de Riemann)

Si f est intégrable, on définit son intégrale comme étant la valeur commune de $I_+(f)$ et $I_-(f)$:

$$\int_a^b f(x) \, dx = I_-(f) = I_+(f).$$

Proposition 14.2.6 (Critère d'intégrabilité)

Une fonction f définie sur $[a, b]$ est intégrable si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier φ et θ telles que

$$\forall x \in [a, b], \quad \varphi(x) - \theta(x) \leq f(x) \leq \varphi(x) + \theta(x),$$

et $\int_a^b \theta(x) \, dx \leq \varepsilon$. Dans ce cas, on obtient :

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b \varphi(x) \, dx \right| \leq \varepsilon.$$

Proposition 14.2.7 (Critère séquentiel d'intégrabilité)

Une fonction f définie sur $[a, b]$ est intégrable si et seulement si il existe deux suites de fonctions en escalier (φ_n) et (θ_n) telles que

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x) - \varphi_n(x)| \leq \theta_n(x),$$

et $\int_a^b \theta_n(x) \, dx \rightarrow 0$. Dans ce cas, $\int_a^b \varphi_n(x) \, dx$ admet une limite et

$$\int_a^b \varphi_n(x) \, dx \rightarrow \int_a^b f(x) \, dx.$$

Intuitivement, l'intégrale d'une fonction f représente donc l'aire sous la courbe, obtenue par approximation. Cette aire sous la courbe peut être vue comme l'aire d'un rectangle de base $[a, b]$, de hauteur égale à la valeur moyenne de f sur $[a, b]$. Cela motive la définition suivante :

Définition 14.2.8 (Moyenne de f)

Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$. La moyenne de f sur $[a, b]$, est la quantité définie par l'intégrale

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx.$$

Le théorème des sommes de Riemann que nous verrons un peu plus loin précise cette notion de moyenne : il s'agit en fait d'une limite de la moyenne des valeurs prises par f en n points régulièrement répartis sur $[a, b]$, limite prise lorsque le nombre de points n tend vers $+\infty$.

II.2 Exemples importants de fonctions intégrables

Voici une classe importante de fonctions intégrables :

Théorème 14.2.9 (Intégrabilité des fonctions monotones)

Soit f une fonction monotone sur $[a, b]$. Alors f est intégrable sur $[a, b]$.

Des arguments un peu plus fins, nécessitant l'utilisation du théorème de Heine (donc de la compacité), amène l'intégrabilité de cette seconde classe de fonctions :

Théorème 14.2.10 (Intégrabilité des fonctions continues)

Soit f continue sur $[a, b]$. Alors f est intégrable sur $[a, b]$.

Nous verrons un peu plus loin que cela reste vrai pour les fonctions continues par morceaux. Mais auparavant, nous devons établir un certain nombre de propriétés de l'intégrale de Riemann.

Avant de quitter cette section, nous donnons un exemple de fonction bornée mais non intégrable :

Exemple 14.2.11

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [0, 1]$ par $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Alors f est bornée, mais n'est pas intégrable. Plus précisément, $I_-(f) = 0$ et $I_+(f) = 1$.

II.3 Propriétés de l'intégrale**Proposition 14.2.12 (Additivité par rapport aux bornes – relation de Chasles)**

Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$ et $c \in]a, b[$. Alors f est intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$, et :

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

Proposition 14.2.13 (Structure de l'ensemble des fonctions intégrables)

L'ensemble $\text{Int}([a, b])$ des fonctions intégrables sur $[a, b]$ est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

Proposition 14.2.14 (Linéarité de l'intégrale)

L'intégrale $\int_{[a,b]} : \text{Int}([a,b]) \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire sur l'espace vectoriel $\text{Int}([a,b])$. Autrement dit, pour toutes fonctions intégrables f et g , et tout réel λ , on a :

$$\int_a^b (f(x) + \lambda g(x)) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \lambda \int_a^b g(x) \, dx.$$

Corollaire 14.2.15

Si f et g sont égales presque partout, alors f est intégrable si et seulement si g l'est, et dans ce cas, leurs intégrales sont égales.

Proposition 14.2.16 (Croissance et positivité de l'intégrale)

Soit f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$ telles que pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leq g(x)$. Alors :

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx.$$

En particulier, si f est intégrable sur $[a,b]$ et positive, $\int_a^b f(x) \, dx \geq 0$.

Corollaire 14.2.17 (Inégalité de la moyenne)

Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$ telle que $m \leq f \leq M$. Alors :

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx \leq M.$$

Proposition 14.2.18 (Inégalité triangulaire intégrale)

Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$. Alors $|f|$ est intégrable sur $[a,b]$, et :

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

Avertissement 14.2.19

Il est important dans cette inégalité de bien respecter l'ordre des bornes : l'inégalité triangulaire n'est valable que lorsque $a < b$.

Proposition 14.2.20 (Intégrabilité d'un produit)

Soit f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$. Alors le produit fg est intégrable sur $[a,b]$.

II.4 Intégrales des fonctions continues par morceaux**Définition 14.2.21 (Fonctions continues par morceaux sur un segment)**

Soit f une fonction définie sur un segment $[a,b]$. On dit que f est continue par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $a = \sigma_0 < \dots < \sigma_n = b$ de $[a,b]$ telle que f soit continue sur tous les intervalles

ouverts $]σ_i, σ_{i+1}[$ ($i ∈ [0, n - 1]$), et admette des limites finies à droite en $σ_0 = a$, à droite et à gauche (pas nécessairement égales) en $σ_1, …, σ_{n-1}$ et à gauche en $σ_n = b$.

On définit plus généralement la notion de fonction continue par morceaux sur un intervalle quelconque, même si nous n'aurons pas à nous servir de cette notion dans l'immédiat.

Définition 14.2.22 (Fonction continue par morceaux sur un intervalle)

Une fonction f définie sur un intervalle I est continue par morceaux sur cet intervalle si elle est continue par morceaux sur tout segment inclus dans l'intervalle I .

Théorème 14.2.23 (Intégrabilité des fonctions continues par morceaux)

Toute fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ est intégrable.

II.5 Sommes de Riemann

Théorème 14.2.24 (Sommes de Riemann)

Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

On utilise souvent ce théorème sur l'intervalle $[0, 1]$: cela s'écrit alors :

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Seul le cas d'une fonction f continue est au programme, cas dans lequel la démonstration se simplifie notablement, en utilisant la continuité uniforme de f .

II.6 Extension des résultats aux fonctions à valeurs dans \mathbb{C}

Étant donnée une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, on peut décomposer f en $f = f_1 + i f_2$, où f_1 et f_2 sont à valeurs réelles. On définit alors :

Définition 14.2.25 (Intégrale d'une fonction à valeurs complexes)

Soit $f = f_1 + i f_2$. On dit que la fonction f est intégrable si et seulement si f_1 et f_2 le sont, et dans ce cas,

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f_1(t) dt + i \int_a^b f_2(t) dt.$$

On montre sans difficulté que l'ensemble des fonctions intégrables de $[a, b]$ dans \mathbb{C} est un espace vectoriel, et que l'intégrale est une forme linéaire. On vérifie également sans peine la relation de Chasles, ainsi que l'intégrabilité d'un produit de fonctions intégrables, en exprimant sa partie réelle et sa partie imaginaire à l'aide des parties réelles et imaginaires des deux fonctions initiales.

Par ailleurs, une fonction à valeurs dans \mathbb{C} étant continue si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont, on récupère également de la sorte l'intégrabilité des fonctions continues par morceaux à valeurs dans \mathbb{C} .

Le seul résultat qu'il ne soit pas complètement immédiat de généraliser est l'inégalité triangulaire, qu'on peut déduire du cas réel par un argument de rotation :

Théorème 14.2.26 (Inégalité triangulaire intégrale dans \mathbb{C})

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ intégrable. Alors $|f|$ est aussi intégrable, et

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

III Primitives et intégration

III.1 Rappels

Nous renvoyons au chapitre sur la dérivabilité pour le théorème fondamental du calcul des intégrales :

Théorème 14.3.1 (Expression intégrale d'une primitive)

Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur \mathbb{R} . Alors f admet une primitive sur I . De plus, soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. L'unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$ est :

$$\forall x \in I, \quad F(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

En particulier, l'unique primitive F telle que $F(x_0) = 0$ est :

$$\forall x \in I, \quad F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

Corollaire 14.3.2 (Théorème fondamental du calcul des intégrales)

Soit f continue sur $[a, b]$. Soit F une primitive de f . Alors :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Nous renvoyons au chapitre initial *Outils analytiques* pour le tableau récapitulatif des primitives à connaître impérativement sur le bout des doigts, ainsi que pour tous les théorèmes essentiels issus du théorème fondamental, en particulier :

- Dérivation d'une intégrale dépendant de ses bornes
- Intégration par parties
- Changement de variable

Nous rappelons aussi à l'occasion que la formule de Taylor avec reste intégral est obtenu par une intégration par partie itérée.

Nous terminons ce chapitre par l'étude de la primitivation des fractions rationnelles.

III.2 Primitivation des fractions rationnelles

Le fait important à retenir est qu'on sait primitiver toutes les fractions rationnelles, à condition de connaître explicitement ses pôles. Ce fait est souvent un phare guidant les naufragés du calcul intégral vers des rivages cléments, grâce à cette idée fixe : « se ramener à l'intégrale d'une fraction rationnelle ».

Méthode 14.3.3 (Primitivation d'une fraction rationnelle F)

1. Trouver la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}(X)$.
2. La partie polynomiale se primitive facilement.
3. Les termes en $\frac{1}{(x-a)^\alpha}$ se primitivent en $\frac{1}{(1-\alpha)(x-a)^{\alpha-1}}$ si $\alpha \neq 1$, et $\ln|x-a|$ si $\alpha = 1$.
4. Pour les facteurs irréductibles de degré 2, faire une mise sous forme canonique du dénominateur et factoriser par le terme constant restant, ce qui ramène à :

$$\int \frac{cx + d}{((ax + b)^2 + 1)^\alpha} dx.$$

Le changement de variable $y = ax + b$ nous ramène alors à

$$\int \frac{sy + t}{(y^2 + 1)^\alpha} dy.$$

Le terme $\frac{y}{(y^2 + 1)^\alpha}$ se primitive en $\frac{1}{2} \ln(y^2 + 1)$ si $\alpha = 1$ et en $\frac{1}{2(1-\alpha)(y^2 + 1)^{\alpha-1}}$ sinon. On est donc ramené à $\int \frac{1}{(y^2 + 1)^\alpha} dy$.

Avec un peu d'habitude, on peut se débarrasser du terme cy avant la mise sous forme canonique, en le faisant partir dans une primitivation du type $\frac{u'}{u^\alpha}$.

5. Le calcul de $\int \frac{1}{(y^2 + 1)^\alpha} dy$ se fait par réduction du degré α par intégrations par partie successives, jusqu'à se ramener au cas $\alpha = 1$, pour lequel la primitivation se fait en $\text{Arctan } y$.

Séries numériques

Qu'est-ce qu'une série? Répondre à cette question pose un certain nombre de problèmes. Intuitivement, ainsi que nous l'avons vu, une série est un objet collectant les différentes sommes des premiers termes d'une suite. Autrement dit, il s'agit d'un point de vue sur les suites, différent du point de vue usuel, puisqu'il s'agit ici de considérer les suites au travers de leurs sommes partielles. Mais comment définir de façon spécifique un objet qui existe déjà, et dont on veut simplement modifier le point de vue?

Définir une série comme un objet $\sum u_n$ de sommes de termes (u_n) nécessite de s'être donné une suite (u_n) , et de considérer les sommes partielles S_n associées à cette suite. Ainsi, une définition correcte d'une série serait de la définir couple un couple $((u_n), (S_n))$ de deux suites, la seconde correspondant à la somme partielle de la première. De la sorte, on définit la suite (u_n) (u_n est le terme général de la série) ainsi que le point de vue (le fait que l'on considère les sommes partielles). Certains auteurs se contentent de définir une série comme la suite des sommes partielles d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, mais cette définition sous-entend la donnée initiale d'une suite (u_n) et ne diffère donc par réellement de la définition formelle sous forme d'un couple. Même si cette définition est formellement moins rigoureuse, c'est celle-ci que nous retiendrons, afin de ne pas trop mystifier un objet somme toute assez simple à appréhender.

I Notion de série et de convergence

I.1 Définitions

Définition 15.1.1 (Série)

- (i) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels ou complexes. La série de terme général u_n , notée $\sum_{n \geq 0} u_n$, ou plus simplement $\sum u_n$, est, avec l'abus mentionné dans l'introduction du chapitre, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles de la suite (u_n) , à savoir :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

- (ii) S_n est appelé somme partielle (d'ordre n) de la série $\sum u_n$, et u_n est appelé terme général de la série $\sum u_n$.

Remarques 15.1.2

- La donnée de la suite (S_n) des sommes partielles de $\sum u_n$ permet de retrouver le terme général u_n de la série, puisque

$$u_0 = S_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = S_n - S_{n-1}.$$

2. La définition se généralise de façon évidente pour des séries dont le premier terme est u_{n_0} , $n_0 \in \mathbb{N}$ (ou même $n_0 \in \mathbb{Z}$).

Avertissement 15.1.3

Attention à ne pas confondre suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et série de terme général u_n .

Définition 15.1.4 (Convergence d'une série)

- (i) On dit que la série $\sum u_n$ de terme général u_n converge si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de ses sommes partielles admet une limite finie. On note alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n.$$

Cette quantité est appelée *somme* de la série de terme général u_n .

- (ii) Une série non convergente est dite *divergente*.
 (iii) Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série convergente, et soit $n \in \mathbb{N}$. Le n -ième *reste* de la série est :

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n.$$

- (iv) La *nature* de la série $\sum u_n$ est le fait d'être convergente ou divergente.

Remarque 15.1.5

Par convention, afin de ne pas avoir d'ambiguïté dans la terminologie, nous parlerons de série divergente également lorsque nous adopterons un point de vue dans $\overline{\mathbb{R}}$, dans le cas d'une série dont les sommes partielles tendent vers $+\infty$ ou $-\infty$. Nous nous autoriserons cependant parfois dans cette situation à écrire l'égalité suivante, valable dans $\overline{\mathbb{R}}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty \quad \text{ou} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = -\infty.$$

Avertissement 15.1.6

Toute série divergente ne diverge pas vers $+\infty$ ou $-\infty$!

Exemple 15.1.7

$$\sum (-1)^n$$

Nous verrons plus loin qu'une façon efficace de montrer la convergence d'une série est de la comparer à une autre série dont on connaît les propriétés de convergence. Pour cette raison, il est important de connaître les propriétés de convergence d'un certain nombre de séries de référence. De l'importance du théorème suivant !

Théorème 15.1.8 (Séries géométriques)

Soit $a \in \mathbb{C}$. La série $\sum a^n$ converge si et seulement si $|a| < 1$; dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.

L'exemple suivant est également d'une grande importance (peut-être encore plus que les séries géométriques). Nous nous contentons de l'indiquer en exemple pour le moment : nous énoncerons un théorème plus général un peu plus tard.

Exemple 15.1.9 (Série de Riemann de paramètre 1)

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente. Cette série est appelée *série harmonique*

La comparaison à des séries de référence permettra d'obtenir des critères efficaces de convergence, rendant en général l'étude de la convergence des séries beaucoup plus aisée que celle des suites. Pour cette raison, il est souvent intéressant de pouvoir ramener l'étude de la convergence d'une suite à celle d'une série.

Méthode 15.1.10 (Comment étudier la convergence d'une suite *via* les séries)

La convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ équivaut à la convergence de la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$. C'est un moyen pratique de démontrer la convergence de certaines suites, en utilisant les techniques spécifiques et performantes des séries.

I.2 Propriétés liées à la convergence

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites.

Proposition 15.1.11

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne diffèrent que d'un nombre fini de termes, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Théorème 15.1.12 (CN de convergence portant sur le terme général)

Si $\sum u_n$ converge, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0. De manière équivalente, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, alors $\sum u_n$ diverge.

Définition 15.1.13 (Divergence grossière)

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, on dit que $\sum u_n$ diverge *grossièrement*.

Avertissement 15.1.14

La réciproque est fautive. Une série dont le terme général est de limite nulle peut diverger. C'est le cas par exemple de $\sum \frac{1}{n}$. Ainsi, il existe des séries divergentes sans être grossièrement divergente.

Proposition 15.1.15 (Linéarité)

Soit λ et μ deux complexes.

1. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge, et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

2. Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum (u_n + v_n)$ diverge.
3. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, on ne peut rien conclure sur $\sum u_n + v_n$.

II Séries à termes positifs

Dans tout ce paragraphe, sauf indication contraire, on considère des séries $\sum u_n$, à termes positifs, c'est-à-dire telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$. On peut transcrire facilement tout ce qui suit :

- au cas où : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq 0$ ($(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive à partir d'un certain rang) : en effet deux séries ne différant que d'un nombre fini de termes ont même nature ;
- au cas d'une série à termes tous négatifs puisque $\sum a_n$ et $\sum(-a_n)$ ont même nature.

II.1 Comparaisons entre séries à termes positifs

La plupart des règles rendant l'étude des séries à terme positifs plutôt aisée résultent du résultat suivant, scholie du théorème de convergence monotone des suites.

Proposition 15.2.1 (Convergence dans $\overline{\mathbb{R}}$ d'une série à termes positifs)

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Alors soit $\sum u_n$ converge, soit elle diverge vers $+\infty$.

En particulier, on en déduit le premier résultat de comparaison des séries, duquel découle tous les autres :

Théorème 15.2.2 (Théorème de comparaison des séries à termes positifs, TCSTP)

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $0 \leq u_n \leq v_n$. Alors :

1. si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ converge aussi ;
2. si $\sum u_n$ diverge, $\sum v_n$ diverge aussi.

De plus, si la divergence est grossière pour $\sum u_n$, elle l'est aussi pour $\sum v_n$.

Le deuxième point (si on omet le cas de divergence grossière) n'est évidemment rien de plus que la contraposée du premier.

Il faut bien comprendre qu'une série $\sum u_n$ est la somme de plein de u_n : si les u_n (positifs) sont suffisamment petits la somme ne grossit pas trop vite et converge ; si les u_n ne deviennent pas assez vite petits, en revanche, la somme grossit trop vite et diverge.

Ainsi, une inégalité du type $0 \leq u_n \leq v_n$ permet de contrôler la taille des éléments que l'on somme. Si $\sum v_n$ converge, cela signifie que les v_n restent assez petits, donc les u_n aussi. Inversement, si $\sum u_n$ diverge, cela signifie que les u_n ne deviennent pas petits assez vite, donc les v_n non plus !

On voit donc qu'en fait, ce qui importe, c'est la vitesse de convergence de u_n vers 0 : plus u_n converge vite vers 0, plus la série a de chances d'être convergente. Ceci se traduit bien par des propriétés de dominance ou de négligeabilité, fournissant notre deuxième critère de convergence.

Corollaire 15.2.3 (Comparaison des séries par dominance ou négligeabilité)

Soit $\sum u_n$ une série à termes quelconque, et $\sum v_n$ une série à termes positifs telles que $u_n = O(v_n)$ (ou $u_n = o(v_n)$). Alors :

- la convergence de $\sum v_n$ entraîne la convergence absolue de $\sum u_n$.
- la divergence de $\sum u_n$ (celle de $\sum |u_n|$ suffit) entraîne la divergence de $\sum v_n$.

Il paraît alors raisonnable de se dire que deux séries dont les termes généraux se comportent sensiblement de la même façon en $+\infty$ sont de même nature. Cela constitue notre troisième critère de comparaison pour les séries à termes positifs.

Théorème 15.2.4 (Théorème de comparaison de séries à termes positifs par équivalence)

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Avertissement 15.2.5

Ce résultat est faux si on ne suppose pas la positivité des séries !

Exemple 15.2.6

Contre-exemple dans le cas de séries à termes quelconques : $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge et $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ diverge. Pourtant : $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

II.2 Convergence absolue et semi-convergence

Comme nous l'avons vu, nous avons des outils efficaces pour étudier les séries à termes positifs, car nous disposons dans ce cadre de résultats de comparaison efficaces. Pour cela, il est souvent utile de pouvoir se ramener à cette situation, ce que l'on fait *via* la notion de convergence absolue.

Définition 15.2.7 (Convergence absolue)

On dit que $\sum u_n$ converge *absolument* si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Comme l'indique bien la terminologie, nous avons :

Théorème 15.2.8 (Convergence absolue entraîne convergence)

Toute série réelle ou complexe absolument convergente est convergente.

C'est cette propriété qui permet bien souvent de ramener l'étude d'une série quelconque à l'étude d'une série à termes positifs. Ce n'est malheureusement pas toujours possible :

Avertissement 15.2.9

La réciproque est fautive. Il existe des séries convergentes, mais pas absolument convergentes.

Exemple 15.2.10

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, mais pas absolument convergente. On montre sa convergence en montrant que les deux suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) de la suite de ses sommes partielles sont adjacentes.

Définition 15.2.11 (Série semi-convergente)

Si $\sum u_n$ est convergente sans être absolument convergente, on dit que la série est semi-convergente.

II.3 Comparaison entre une série et une intégrale

Pour pouvoir utiliser pleinement les théorèmes de comparaison, il faut des séries de référence, avec lesquelles faire les comparaisons. Une méthode fructueuse pour trouver des séries de référence est d'utiliser une comparaison à une intégrale.

Pour énoncer le théorème, il nous faut introduire la notion d'intégrale convergente sur un domaine infini (c'est un cas particulier de l'étude plus générale des intégrales impropres)

Définition 15.2.12 (Intégrale convergente en $+\infty$)

Soit f une fonction intégrable de $[a, +\infty[$ dans \mathbb{R} .

- On dit que $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est convergente si et seulement si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. On note alors :

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt.$$

- Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est divergente.
- La nature d'une intégrale est le fait d'être convergente ou divergente.

Théorème 15.2.13 (Théorème de comparaison entre série et intégrale)

Soit $a \in \mathbb{R}_+$ et soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction décroissante et positive. Alors $\sum_{n \geq a} f(n)$ converge si et seulement si $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.

En d'autres termes, sous les hypothèses du théorème, la série $\sum_{n \geq a} f(n)$ et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ sont de même nature.

La méthode d'encadrement développée dans la preuve du théorème de comparaison entre séries et intégrales est à savoir mettre en pratique, car elle est utile dans d'autres circonstances, par exemple pour obtenir des équivalents de sommes partielles (en cas de divergence) ou de restes (en cas de convergence).

II.4 Séries de référence

Pour pouvoir utiliser efficacement les théorèmes de comparaison, il faut disposer d'un certain nombre de séries de référence, dont on connaît bien le comportement, et auxquelles nous pourrions comparer les autres séries. Nous avons déjà vu les séries géométriques :

Théorème 15.2.14 (Nature des séries géométriques)

La série $\sum x^n$ converge si et seulement si $|x| < 1$. La convergence est alors absolue, tandis que la divergence est grossière.

On peut en déduire des propriétés de convergence d'autres séries du même type :

Exemple 15.2.15

Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$. La série $\sum P(n)x^n$ converge absolument si $|x| < 1$ et diverge grossièrement si $|x| \geq 1$.

Théorème 15.2.16 (Nature des séries exponentielles)

La série exponentielle $\sum \frac{x^n}{n!}$ est absolument convergente, pour toute valeur de x (sa somme étant e^x).

Comme pour les séries géométriques, on obtient plus généralement :

Exemple 15.2.17

Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. La série $\sum P(n) \frac{x^n}{n!}$ est convergente.

Enfin, la troisième famille de séries de référence est constituée des séries de Riemann.

Définition 15.2.18 (Série de Riemann)

La série de Riemann de paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ est la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$.

Du théorème de comparaison entre séries et intégrales, on déduit :

Théorème 15.2.19 (Nature des séries de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Voici une autre famille, généralisant les séries de Riemann, souvent prise en référence, mais hors-programme (à savoir réétudier rapidement) :

Proposition 15.2.20 (Nature des séries de Bertrand)

La série de Bertrand de paramètre $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, définie par $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$, est convergente si et seulement si $(\alpha, \beta) > (1, 1)$ pour l'ordre lexicographique.

Le cas limite $\alpha = 1$ s'obtient par comparaison série-intégrale. Les autres cas s'obtiennent par comparaison à une série de Riemann, et seront développés en exemple d'application des critères de comparaison donnés dans le paragraphe suivant.

Remarque 15.2.21

L'ordre de grandeur de la limite entre convergence et divergence, égal à $\frac{1}{n}$ sur l'échelle $(\frac{1}{n^\alpha})$ donnée par les séries de Riemann, peut être affinée en $\frac{1}{n \ln(n)}$ sur l'échelle donnée par les séries de Bertrand. Les séries de Bertrand peuvent en fait être généralisées en ajoutant au dénominateur d'autres termes, puissances de composées successives du logarithme. On peut montrer que la limite de convergence s'obtient, comme plus haut, pour l'ordre lexicographique, pour tous les exposants égaux à 1. Par exemple $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n) \ln^\gamma(\ln n) \ln^\delta(\ln(\ln(n)))}$ converge si et seulement si $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) > (1, 1, 1, 1)$.

II.5 Comparaison avec une série de Riemann

Des comparaisons avec les séries de référence, on déduit un certain nombre de critères de convergence assez efficaces. Ces critères n'étant pas explicitement au programme, il convient de bien se souvenir de la manière de les obtenir rapidement à partir des résultats généraux de comparaison. Connaître ces critères hors-programme permet toutefois de savoir rapidement comment diriger son raisonnement.

Théorème 15.2.22 (Règle de Riemann, ou règle « $n^\alpha u_n$ », HP)

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

1. S'il existe $\alpha > 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée (par exemple si elle admet une limite nulle), alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $(nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée à partir d'un certain rang par un réel $k > 0$ (par exemple si (nu_n) admet une limite infinie), alors $\sum u_n$ diverge.

Exemple 15.2.23

Séries de Bertrand

II.6 Comparaison avec une série géométrique**Théorème 15.2.24 (Règle de d'Alembert, HP)**

Soit $\sum u_n$ une série à termes quelconques. On suppose que $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)$ admet une limite ℓ . Alors :

1. Si $0 \leq \ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge absolument.
2. Si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.
3. Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure par cette méthode.

Exemples 15.2.25

1. On peut retrouver de manière élémentaire, et sans référence à la fonction exponentielle, la convergence de $\sum \frac{z^n}{n!}$
2. Plus généralement, ce critère est souvent très efficace pour l'étude des séries du type $\sum a_n z^n$ (séries entières). Par exemple $\sum n \ln(n) z^n$.

III Étude de la semi-convergence

Aucun résultat théorique n'est à connaître concernant l'étude de la semi-convergence. Les résultats et méthodes développés dans ce paragraphe sont théoriquement hors-programmes, mais il est bien utile en pratique de les connaître, ainsi que la démarche permettant d'y parvenir.

III.1 Séries alternées

Le premier cas simple de semi-convergence facile à étudier est le cas de toutes les séries s'étudiant de la même façon que $\sum \frac{(-1)^n}{n}$. En étudiant de plus près la preuve de la convergence de cette série, on se rend compte que les propriétés nécessaires à établir cette convergence sont celles rassemblées dans la définition suivante :

Définition 15.3.1 (Série alternée)

On dit qu'une série $\sum u_n$ est alternée s'il existe une suite positive décroissante de limite nulle (a_n) telle que $u_n = (-1)^n a_n$.

Nous obtenons alors, par la même technique que pour $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ (à développer à chaque fois) :

Théorème 15.3.2 (Théorème spécial de convergence des séries alternées, TSCSA, HP)

Toute série alternée est convergente.

Avertissement 15.3.3

N'oubliez pas l'hypothèse de décroissance dans la définition des séries alternées. Sans cette hypothèse, le TSCSA entre en défaut.

Exemple 15.3.4

$\sum \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$ est une série dont le terme général tend vers 0 et a un signe qui alterne. Cependant elle est divergente. C'est la série que nous avons déjà utilisée pour contredire le théorème de comparaison par équivalents pour des séries à termes quelconques.

III.2 Critère d'Abel

Le critère d'Abel généralise le TSCSA, permettant par exemple de remplacer le signe $(-1)^n$ par un terme $\cos(\alpha n)$ ou $\sin(\alpha n)$, ou par une exponentielle complexe $e^{i\alpha n}$. En particulier, contrairement au cas des séries alternées, il est utilisable dans le cas complexe.

Théorème 15.3.5 (Critère d'Abel, HP)

1. Soit $\sum a_n b_n$ une série telle que (a_n) soit réelle positive décroissante de limite nulle, et telle que la suite (B_n) des sommes partielles de $\sum b_n$ soit bornée. Alors $\sum a_n b_n$ converge.
2. Les suites (b_n) définies par $b_n = e^{in\alpha}$, $\cos(n\alpha)$ et $\sin(n\alpha)$ remplissent les conditions requises, lorsque $\alpha \neq 0 \pmod{2\pi}$.

Exemples 15.3.6

1. La convergence des séries alternées peut être vu comme un cas particulier de ce théorème
2. $\sum \frac{\cos n}{\sqrt{n}}$ converge
3. $\sum \frac{z^n}{n}$ converge si et seulement si $|z| \leq 1$ et $z \neq 1$.

IV Calcul de sommes

Il est possible de calculer la somme d'un certain nombre de séries. Ces calculs s'avèrent en particulier très utiles en probabilités, par exemple pour le calcul d'espérances et de variances de variables aléatoires réelles discrètes.

La plupart de ces sommes peuvent être obtenues sur \mathbb{R} par les formules de Taylor. Nous avons déjà eu l'occasion d'en voir certaines lors de l'étude des formules de Taylor.

IV.1 Séries exponentielles et logarithmiques

Nous avons déjà eu l'occasion de justifier les résultats suivants :

Proposition 15.4.1 (Séries exponentielles)

Pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Proposition 15.4.2 (Séries logarithmiques)

Pour tout $x \in]-1, 1[$,
$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}.$$

De la première somme découle une méthode de calcul de toutes les sommes du type $\sum \frac{P(n)x^n}{n!}$, P étant un polynôme.

Méthode 15.4.3 (Calcul de $\sum \frac{P(n)x^n}{n!}$)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $x \in \mathbb{Z}$. Soit $d = \deg(P)$.

• La famille $(1, X, X(X-1), \dots, X(X-1)\dots(X-d+1))$ est une base de $\mathbb{C}_d[X]$. On décompose P dans cette base :

* soit par ajustements successifs des coefficients dominants et compensations (en partant des plus hauts degrés)

* soit par divisions euclidiennes successives par $X, X-1, \dots, X-d+1$.

• On est ramené à des sommes $\sum_{n \geq 0} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n!} x^n$:

* Supprimer les termes initiaux qui sont nuls (la somme peut commencer à $n=k$)

* Simplifier les termes $n(n-1)\dots(n-k+1)$ avec les termes supérieurs de la factorielle (il reste $(n-k)!$)

* Faire un changement de variable, nous ramenant à $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{n+k}}{n!} = x^k e^x$.

IV.2 Séries géométriques

Nous avons déjà obtenu la formule $\sum x^n = \frac{1}{1-x}$, lorsque $|x| < 1$. Nous obtenons de façon plus générale

Définition 15.4.4 (Formule du binôme généralisée, Newton)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ La série $\sum \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$ est absolument convergente pour tout $|x| < 1$, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = (1+x)^\alpha.$$

En particulier, pour $\alpha = -(r+1)$, où $r \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(r+1)(r+2)\dots(r+n)}{n!} x^n = \frac{1}{(1-x)^{r+1}},$$

ou encore :

Corollaire 15.4.5 (Formule du binôme négatif)

Soit $r \in \mathbb{N}$. On a :

$$\forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{r+n}{n} x^n = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}.$$

En passant une factorielle de l'autre côté, on obtient :

$$\forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} (n+r)(n+r-1)\dots(n+1)x^n = \frac{r!}{(1-x)^{r+1}}.$$

La formule du binôme négatif dit donc très exactement qu'on peut dériver terme à terme la série géométrique.

Avertissement 15.4.6

En général on ne peut pas dériver terme à terme une série $\sum f_n(x)$ de fonctions. Certains théorèmes que vous verrez l'année prochaine permettent de le faire sous certaines hypothèses.

Méthode 15.4.7 (Calcul de $\sum P(n)x^n$.)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$.

- Soit d le degré de P . La famille $(1, X + 1, (X + 1)(X + 2), \dots, (X + 1)(X + 2) \dots (X + d))$ est une base de $\mathbb{C}_d[X]$. On décompose P dans cette base. Cela peut se faire
 - * soit par compensations successives en partant du plus haut degré, de sorte à adapter les coefficients dominants (efficace surtout en petits degrés)
 - * soit par divisions euclidiennes successives par $X + 1, X + 2, \dots, X + d$.
- On est alors ramené au calcul de sommes du type $\sum (n + 1) \dots (n + k)x^n$, ce qui se fait par la formule du binôme négatif.
- On peut aussi décomposer P sur la base $(1, X, (X - 1), \dots, (X - d + 1))$ et se ramener aux sommes $\sum n(n - 1) \dots (n - k + 1)x^{n-k}$, relevant également des sommes du binôme négatif par changement d'indice.

V Problèmes de commutativité

Nous terminons ce chapitre par le problème du changement de l'ordre de sommation dans une série.

Avertissement 15.5.1

Il est important de retenir qu'en général, changer l'ordre des termes dans une série peut modifier la somme (et même la nature) d'une série. On peut par exemple montrer qu'à partir d'une série semi-convergente quelconque, on peut obtenir, simplement en changeant l'ordre de sommation, une série convergeant vers n'importe quelle valeur fixée à l'avance, une série divergeant vers $+\infty$ ou $-\infty$, ainsi qu'une série divergeant dans $\overline{\mathbb{R}}$. Changer l'ordre de sommation modifie donc en profondeur les propriétés d'une série en général.

Notre but est d'établir qu'en se donnant des hypothèses plus fortes, on peut changer l'ordre de sommation.

Lemme 15.5.2 (changement de l'ordre dans une série à termes positifs)

Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs et σ une permutation de \mathbb{N} . Alors $\sum a_{\sigma(n)}$ est de même nature que $\sum a_n$ et en cas de convergence,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Théorème 15.5.3 (changement de l'ordre dans une série absolument convergente)

Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente, et σ une permutation de \mathbb{N} . Alors $\sum a_{\sigma(n)}$ est absolument convergente, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Comme on l'a évoqué, ce résultat entre en défaut dès lors que l'hypothèse de convergence absolue n'est plus vérifiée.

Remarque 15.5.4

Ce théorème (et surtout le fait qu'il ne soit pas vérifié lorsque la convergence absolue n'est pas assurée) explique la nécessité d'imposer la convergence absolue dans la définition de l'espérance d'une variable aléatoire réelle discrète X . En effet, l'ordre de sommation des termes définissant l'espérance provient

d'un choix arbitraire d'une numérotation des valeurs possibles prises par X . Pour que l'espérance soit bien définie, il faut que cette somme soit indépendante du choix de cette numérotation, donc de l'ordre de sommation.