Lycée Louis-Le-Grand, Paris
MPSI 4 – Mathématiques
A. Troesch

2015/2016

Analyse 9 – Intégration

Exercice 1 – Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists (k,n) \in \mathbb{N}^2,\ x = \frac{k}{2^n} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f n'est pas intégrable sur $[0,1]$.

Exercice 2 – **(Contre-exemple à la stabilité par composition)**
Soit f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = 0$ si x est irrationnel, $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q}$ pour toute fraction irréductible. Soit g définie sur $[0,1]$ par $g(x) = 0$ si $x = 0$ et $g(x) = 1$ sinon.
Montrer que f et g sont intégrables mais pas $g \circ f$.

Exercice 3 – **(Condition d'intégrabilité d'une composée)**
Montrer que si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est intégrable, et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne, alors $g \circ f$ est intégrable.

Exercice 4 – Soit f définie sur $[a,b]$, continue et bornée sur $]a,b[$. Montrer que f est intégrable sur $[a,b]$.

Exercice 5 – Étudier l'intégrabilité de $\mathbb{1}_E$, où E est un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$ ayant un nombre fini de points d'accumulation. Le cas échéant, donner la valeur de l'intégrale. Étudier le cas d'un ensemble dont l'ensemble des points d'accumulation admet un nombre fini de points d'accumulation. Généraliser.

Exercice 6 – Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ admettant en tout point x une limite finie lorsque $y \to x$, avec $y \neq x$, et soit $g : x \mapsto \lim\limits_{y \to x} f(y)$. Montrer que f et g sont intégrables, et que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\ \mathrm{d}x$.

Exercice 7 – Déterminer toutes les applications continues par morceaux sur $[a,b]$ telles que

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = (b-a) \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Exercice 8 – Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\int f^n$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Montrer que $f = -1$, $f = 1$ ou $f = 0$.

Exercice 9 – Soit C l'ensemble des applications f de $[0,1]$ dans $[0,1]$ continues strictement croissantes telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, et D l'ensemble des applications g de $[0,1]$ dans $[0,1]$ continues strictement décroissantes, telles que $g(0) = 1$ et $g(1) = 0$. Soit $f \in C$. Montrer que

$$\sup_{g \in D} \int_0^1 f(t) f(g(t))\ \mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t,$$

mais que cette borne n'est pas atteinte.

Exercice 10 – Soit $\varepsilon > 0$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Montrer qu'il existe $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_a^b |f - g| < \varepsilon$

Exercice 11 – Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application intégrable. Montrer que si pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) > 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f > 0$.

Exercice 12 – Soit f et g de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ intégrables, et telles que

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \int_0^x g(t)\ \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad g(x) = \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Montrer que $f = g = 0$.

Exercice 13 – Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, et $n \in \mathbb{N}$. On suppose que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\displaystyle\int_a^b t^k f(t)\ \mathrm{d}t = 0$. Montrer que f admet dans $]a,b[$ au moins $n+1$ zéros distincts.

Exercice 14 – Déterminer la limite des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$(a)\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}, \qquad (b)\ u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad (c)\ u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt[n]{\mathrm{e}^k}}$$

Exercice 15 –

1. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $|\mathrm{e}^x - 1 - x| \leqslant \dfrac{x^2\mathrm{e}}{2}$.
2. En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\frac{1}{n+k}} - n$.

Exercice 16 –

1. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$.
2. En déduire la limite de la suite (u_n) définie pour $n > 0$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n}\sin\frac{k}{n^2}$.

Exercice 17 – Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Déterminer

$$\lim \frac{1}{n^2}\sum_{1\leqslant k<\ell\leqslant n} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{\ell}{n}\right).$$

Exercice 18 – Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$ continue. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une unique subdivision $(x_k^{(n)})_{k\in[\![0,n]\!]}$ de $[a,b]$ telle que

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \int_{x_{k-1}^{(n)}}^{x_k^{(n)}} f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^{(n)}$.

Exercice 19 – Soit f et g deux fonctions réelles continues sur $[0,1]$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

Montrer que la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est $\displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\ \mathrm{d}x$.

Exercice 20 – Déterminer une équivalent en $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}}$. Même question pour $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{1}{(n+k)^2}$.

Exercice 21 – Soit $a > 1$. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1 - 2a\cos(x) + a^2)\ \mathrm{d}x$

Exercice 22 – On rappelle qu'une fonction φ est convexe sur un intervalle I si pour tout $(x,y) \in I^2$ et tout $\lambda \in [0,1]$, $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.

1. Généraliser l'inégalité ci-dessus pour $f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n)$ où les λ_i sont positifs de somme égalme à 1.
2. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ et φ une fonction convexe continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\varphi\left(\displaystyle\int_0^1 f\right) \leqslant \displaystyle\int_0^1 \varphi\circ f$.

Ce résultat reste vrai sans l'hypothèse de continuité mais nécessite des connaissances supplémentaires sur les fonctions convexes.

Exercice 23 – Déterminer $\lim_{a \to 0^+} \int_a^{3a} \frac{\tan x}{x^2}\ \mathrm{d}x$ à l'aide des deux méthodes suggérées ci-dessous :

1. à l'aide de deux intégrations par parties ;
2. en justifiant qu'il existe une fonction f continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et prolongeable par continuité en 0 et telle que pour tout $x > 0$, $\frac{\tan x}{x^2} = \frac{1}{x} + f(x)$.

Exercice 24 –
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(t) = \frac{t^2}{2\pi} - t$, et g la fonction définie sur $[0, \pi]$ par :

$$g(t) = \begin{cases} \frac{h(t)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{si } t \in]0, \pi] \\ -1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1([0, \pi])$.
2. Déterminer une constante C telle que pour tout entier $n \geqslant 0$, pour tout réel t de $]0, \pi]$:
$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right)}{2\sin\frac{t}{2}} + C.$$
3. Montrer que pour tout fonction $f \in \mathcal{C}^1([0, \pi])$:
$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi} f(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right)\ \mathrm{d}t = 0.$$
Soit la fonction ζ définie par : $\zeta(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$.
4. Déterminer le domaine de définition de la fonction ζ.
5. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $I_k = \int_0^{\pi} h(t)\cos(kt)\ \mathrm{d}t$.
6. Déduire des questions précédentes que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 25 – **(Lemme de Riemann-Lebesgue pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$)**
Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \int_a^b \sin(nt) f(t)\ \mathrm{d}t = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} \int_a^b \cos(nt) f(t)\ \mathrm{d}t = 0$

Exercice 26 – **(Inégalité de la moyenne, version forte)** Soit f continue sur $[a, b]$ et g continue par morceaux sur $[a, b]$ et positive. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\ \mathrm{d}t = f(c) \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t.$$

Exercice 27 – Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue telle que pour toute fonction $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, $\int_0^1 f(t)g(t) = 0$. Montrer que $f = 0$

Exercice 28 – Soit $f : [0, \mathrm{e}] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} n \int_1^{1+\frac{1}{n}} f(x^n)\ \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{f(x)}{x}\ \mathrm{d}x$.

Exercice 29 – Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une application continue n'admettant qu'un nombre fini de zéros, et telle que $f(0) = f(1) = 0$. Montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \int_0^1 \mathrm{e}^{nx} f(x)\ \mathrm{d}x \right| = 0.$$

Exercice 30 – (Sommes de Riemann dans le cas intégrable)
Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$, et soit $(\sigma^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de subdivisions de $[a,b]$, donc le pas p_n tend vers 0. On note

$$a = \sigma_0^{(n)} < \cdots < \sigma_{\ell_n}^{(n)} = b$$

la subdivision $(\sigma^{(n)})$. On définit la somme de Riemann associée à cette suite de subdivision :

$$S_n = \sum_{k=1}^{\ell_n} (\sigma_{k+1}^{(n)} - \sigma_k^{(n)}) f(\sigma_k^{(n)}).$$

Soit $\varepsilon > 0$, et φ et θ deux fonctions en escalier telles que $|f - \varphi| \leqslant \theta$, et $\displaystyle\int_a^b \theta \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$. Soit $\tau_0 < \cdots < \tau_q$ une subdivision associée à la fois à φ et à θ.

1. Montrer que si $[\sigma_{i-1}^{(n)}, \sigma_i^{(n)}]$ ne contient aucun point de τ, alors

$$\left| \int_{\sigma_{i-1}^{(n)}}^{\sigma_i^{(n)}} f(x) - f(\sigma_i^{(n)}) \right| \leqslant 2 \int_{\sigma_{i-1}^{(n)}}^{\sigma_i^{(n)}} \theta(x)\ \mathrm{d}x$$

2. Montrer que si $[\sigma_{i-1}^{(n)}, \sigma_i^{(n)}]$ contient au moins un point de τ,

$$\left| \int_{\sigma_{i-1}^{(n)}}^{\sigma_i^{(n)}} f(x) - f(\sigma_i^{(n)}) \right| \leqslant 2Mp_n,$$

où M est un majorant de $|f|$.

3. En déduire que

$$\left| \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x - S_n \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 4Mp_nq.$$

4. En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t.$$

On pourrait remplacer dans l'expression de S_n le terme $f(\sigma_i^{(n)})$ par l'évaluation en n'importe quel point de $[\sigma_{i-1}^{(n)}, \sigma_i^{(n)}]$, on obtiendrait le même résultat par le même raisonnement.