Lycée Louis-Le-Grand, Paris
MPSI 4 – Mathématiques
A. Troesch

Lundi 16 novembre 2015

Interrogation n° 2

Correction de l'exercice – (20 minutes, 20 questions, 20 points)

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2\ln(\mathrm{Arctan}(x)) + \frac{2x\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^{2x})(\mathrm{Arctan}(\mathrm{e}^x))}$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$, $f''(x) = \frac{\cos^2(x)+2\sin^2(x)}{\cos^3(x)}$.
4. D'après la formule de Leibniz,
$$f^{(42)}(x) = 2x\sin^{(42)}(x) + 84\sin^{(41)}(x) = -2x\sin(x) + 84\cos(x).$$
5. On a, pour tout $x \geqslant 0$, d'après la formule de dérivation d'un produit :
$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{42} (x+i-1)^i \times k(x+k-1)^{k-1}$$
donc : $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{42} \frac{k}{x+k-1}$ puis: $\dfrac{f'(1)}{f(1)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{42} 1 = 42.$
On peut aussi passer par la dérivée logarithmique, f'/f étant vue comme la dérivée de $\ln\circ f$.
6. En regardant les termes dominants, $\frac{f(x)}{x} \to 2$, et
$$f(x) - 2x = \frac{2(x^3+x^2+x-x^2-x-1) - 2x^3 - 2x}{x^2+1} \to 0.$$
Asymptote : $y = 2x$.
7. $\frac{f(x)}{x} \to 1$ et $f(x) - x = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \to 1$ (limite remarquable).
Asymptote : $y = x + 1$
8. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\frac{1}{x^2+2x+10} = \frac{1}{9\left(\left(\frac{x+1}{3}\right)^2+1\right)} = \frac{1}{3}\frac{\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{x+1}{3}\right)}.$$
Primitives : $\frac{1}{3}\mathrm{Arctan}\left(\frac{x+1}{3}\right) + K$.

On pose $g : y \mapsto \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{y}\right) - \dfrac{1}{1+y^2}$.

9. $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$
10. $\lim\limits_{x\to0^-} g(x) = -\dfrac{\pi}{2} - 1$, $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = \dfrac{\pi}{2} - 1$.
11. $\forall y \in \mathbb{R}^*$, $g'(y) = -\frac{1}{1+y^2} + \frac{2y}{(1+y^2)^2} = -\frac{(y-1)^2}{(1+y^2)^2}$
Limite en 0^+ et en 0^- : -1.
12. $g''(y) = \dfrac{-2(y-1)(1+y^2)^2 + 2\times 2y(1+y^2)(y-1)^2}{(1+y^2)^4} = \dfrac{(y-1)(2y^2-4y-2)}{(1+y^2)^3}$
Négative sur $]-\infty, 1-\sqrt{2}]$, et $[1, 1+\sqrt{2}]$, positive ailleurs.
13. Les points d'inflexions sont en $1-\sqrt{2}$, 1 et $1+\sqrt{2}$. On calcule les pentes :
$$f'(1-\sqrt{2}) = -\frac{3+2\sqrt{2}}{4}\ ; \qquad f(1) = 0\ ; \qquad f(1+\sqrt{2}) = -\frac{3-2\sqrt{2}}{4}.$$
14. Voir figure 1.

Soit $f : x \mapsto x\,\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{\ln(|x|)}\right)$.

15. Le domaine de définition est $\mathbb{R}^* \setminus \{-1, 1\}$, la fonction f est impaire.

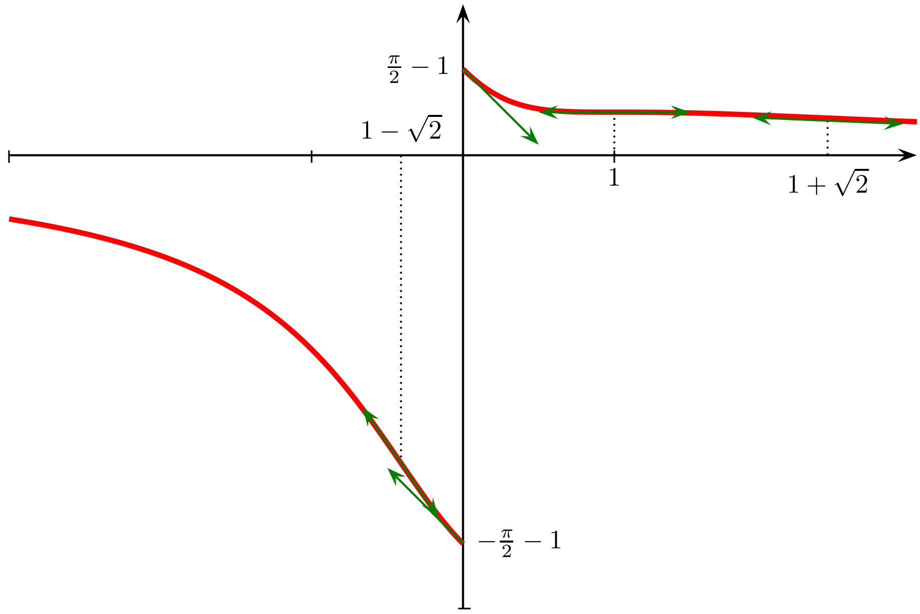

FIGURE 1 – Graphe de g

16. Limite en O^+ : 0 ; limite en 1^- : $-\frac{\pi}{2}$; limite en 1^+ : $\frac{\pi}{2}$; limite en $+\infty$: $+\infty$.
17. $\frac{f(x)}{x} \to 0$, et $f(x) - 0x \to +\infty$, donc il y a une direction asymtptotique $y = 0$, mais pas d'asymptote.
18. On constate que pour $x \neq 0$, $f'(x) = g(\ln(|x|))$, et par taux d'accroissement, après prolongement par continuité, $f'(0) = 0$.
19. et 20. Voir figure 2. On se sert bien entendu du rapport entre f et g, nous assurant la décroissance de f sur $[0, 1[$ et la croissance sur $]1, +\infty[$, et comme $f''(x) = \frac{1}{x} g'(\ln(|x|))$, la connaissance du signe (négatif) de g' nous assure la concavité de f sur $[0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$. La pente en 0 est nulle, la pente en 1^- est la limite en 0^- de g, donc $-\frac{\pi}{2} - 1$, la pente en 1^+ est de même $\frac{\pi}{2} - 1$. On complète par imparité.

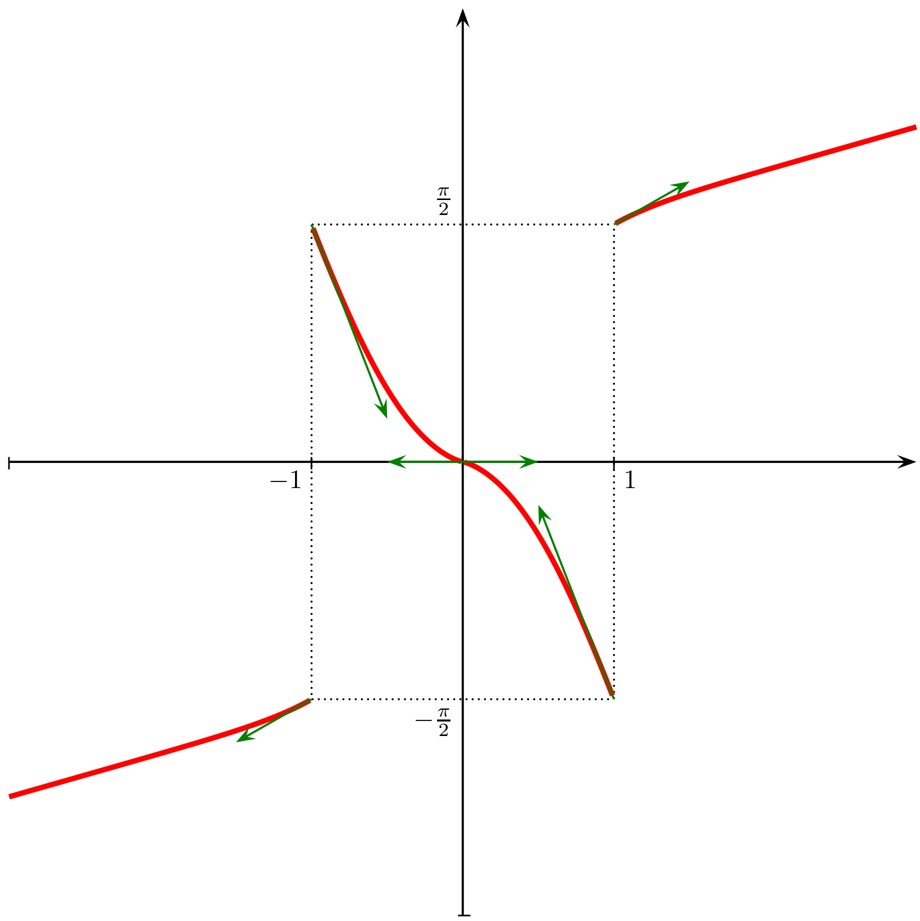

FIGURE 2 – Graphe de f