**Interrogation n° 3**

**Correction de l'exercice – (20 minutes, 20 questions, 20 points)**

1. Une primitive : $\boxed{F_1 : x \mapsto -\frac{1}{2}e^{-x^2}}$.
2. On passer au logarithme :
$$\ln(f_2(x)) = x^4 + \mathrm{Arctan}(x)\ln|\sin(x)| + \frac{1}{2}\ln|\ln|x||.$$
Ainsi, la dérivation amène :
$$\boxed{f_2'(x) = \left(4x^3 + \frac{1}{x^2+1}\ln|\sin(x)| + \mathrm{Arctan}(x)\mathrm{cotan}(x) + \frac{1}{2x\ln|x|}\right) f_2(x)}...$$
3. ... pour tout $\boxed{x \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z}\pi \cup \{1\})}$.
4. Les racines du polynôme caractéristique sont $j$ et $j^2$, donc $\frac{-}{1}2 \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ainsi, les solutions sont :
$$\boxed{x \mapsto y(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right),\ A, B \in \mathbb{R}}.$$
5. On reconnaît une forme $\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$, ou on fait un changement de variables $u = x^4$ :
$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\Big[\mathrm{Arcsin}(x^4)\Big]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{8}}.$$
6. On a $u' = 2(1+y')(x+y) = 2(y'(x+y) + y + x) = 2x$. Ainsi $\boxed{u = x^2 + C}$, $C \in \mathbb{R}$.
7. On a donc, pour tout $x$ pour lequel $x^2 + C \geqslant 0$, $y + x = \pm\sqrt{x^2+C}$. En notant le signe sous la forme $\varepsilon(x)$, égal à 1 ou $-1$, on obtient :
$$\boxed{y(x) = -x + \varepsilon(x)\sqrt{x^2+C}}.$$
8. Il faut se restreindre à $\mathbb{R}_+*$, sinon, on peut avoir une fonction définie en deux morceaux avec $C$ et $C'$ négatifs différents (solution sur $]-\infty, -\sqrt{-C}] \cup [\sqrt{-C'}, +\infty[$), avec des signes différents sur les deux moitiés. Sauf au bord du domaine (en $\sqrt{-C}$ si $C \leqslant 0$), en lequel peut être choisi indifféremment, on a
$$\varepsilon(x) = \frac{y(x)+x}{\sqrt{x^2+C}},$$
ainsi, $\varepsilon$ est continue. Comme $\varepsilon$ ne s'annule pas, en considérant $y$ définie sur un sous-ensemble maximal de $\mathbb{R}_+^*$ (il s'agit alors d'un intervalle, d'après les solutions trouvées), le TVI nous affirme que $\varepsilon$ garde un signe constant, ce qui suffit ici à affirmer que $\boxed{\varepsilon \text{ est constant}}$.
9. Le signe de $y(0)$ impose celui de $\varepsilon(x)$. Ainsi, si $K > 0$, il est nécessaire d'avoir $\boxed{C = K^2 \text{ et } \varepsilon(0) = 1}$, alors que si $K < 0$, il est nécessaire d'avoir $\boxed{C = -K^2 \text{ et } \varepsilon(0) = -1}$. La continuité de $y$ en 0 et la non nullité de $K$ impose que le signe $\varepsilon$ est le même au voisinage à gauche et à droie de 0, et étant constant sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, $\varepsilon est constant sur \mathbb{R}$. Réciproquement, cela définit bien une solution. D'où l'existence et l'unicité.
10. Si $K = 0$, le signe $\varepsilon(x)$ n'est pas imposé en 0, et on peut envisager $y(x) = -2x$ ou $y = 0$, à gauche et à droite de 0. On peut a priori avoir un changement de signe de $\varepsilon$ (pas de contradiction sur la continuité), mais pour ne pas contredire la dérivabilité de $y$, le seul choix possible est $\boxed{y(x) = -2x}$ sur $\mathbb{R}$ entier ou $\boxed{y = 0}$ sur $\mathbb{R}$ entier.
11. $\displaystyle \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{(x+1)^2 - (x^2+1)}{(x+1)(x^2+1)} = \boxed{\frac{x+1}{x^2+1} - \frac{1}{x+1}}$.

12. On fait une IPP et on est ramené à la question précédente :

$$\int \frac{\ln(x^2+1)}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln(1+x^2)}{x+1} + \int \frac{2x}{(1+x^2)(x+1)} = \boxed{-\frac{\ln(1+x^2)}{x+1} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \mathrm{Arctan}(x) - \ln|x+1|}.$$

13. Sur chacun des deux intervalles, l'EH s'écrit $y' = \frac{y}{x+1}$, et $\int (x+1)\,\mathrm{d}x = \ln|x+1|$, donc $y' = K\mathrm{e}^{\ln|x+1|}$, et quitte à changer (globalement sur tout l'intervalle) le signe de $K$, les solutions de l'EH sont $\boxed{x \mapsto K(x+1)}$.
14. La méthode de variation de la constante nous incite à rechercher une solution particulière sous la forme $K(x)(x+1)$. On a alors

$$K'(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{(x+1)^2}.$$

Des résultats précédents, on déduit l'expression de $K$, puis des solutions :

$$\boxed{y(x) = \left(-\frac{\ln(1+x^2)}{x+1} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \mathrm{Arctan}(x) - \ln|x+1| + K\right)(x+1)}.$$

15. On se rend compte que les solutions se prolongent par continuité en $-1$, du fait que $(x+1)\ln|x+1| \to 0$. Cependant, ce prolongement n'est pas dérivable en $-1$, comme on s'en rend compte facilement en formant le taux d'accroissement. Ainsi, $\boxed{\text{il n'existe pas de solution sur } \mathbb{R} \text{ tout entier.}}$
16. Le polynôme caractéristique est $X^2 + Y - 2 = (Y+2)(Y-1)$ ; Les solutions de l'EH sont $\boxed{x \mapsto A\mathrm{e}^{-2x} + B\mathrm{e}^{x}}$.
17. 1 étant racine du polynôme caractéristique, on cherche une solution sous la forme $P(x)\mathrm{e}^x$, où $P$ est de degré 2. Un calcul sans difficulté, ne prenant pas plus d'une minute (...) donne la solution recherchée :

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{18}(3x^2 - 2x)e^x}.$$

18. Comme i n'est pas racine du polynôme caractéristique, on recherche une solution de $y'' + y' - 2y = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$ sous la forme $\lambda\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$. On trouve

$$\lambda = -\frac{1}{10}(3+\mathrm{i}),$$

d'où, en passant à la partie imaginaire, une solution de $y'' + y' - 2y = \sin(x)$ :

$$\boxed{y(x) = -\tfrac{1}{10}(\cos(x) + 3\sin(x))}.$$

19. La solution générale est donc, par principe de superposition :

$$y(x) = A\mathrm{e}^{-2x} + B\mathrm{e}^{x} + \frac{1}{18}(3x^2 - 2x)\mathrm{e}^x - \frac{1}{10}(\cos(x) + 3\sin(x)).$$

L'égalité $y(0) = 0$ impose $A + B - \frac{1}{10} = 0$. On dérive :

$$y'(x) = -2A\mathrm{e}^{-2x} + B\mathrm{e}^{x} + \frac{1}{18}(3x^2 - 2x + 6x - 2)\mathrm{e}^x - \frac{1}{10}(-\sin(x) + 3\cos(x)).$$

L'égalité $y'(0) = 0$ impose $-2A + B - \frac{1}{9} - \frac{3}{10} = 0$. La résolution du système amène $\boxed{A = -\frac{14}{45}}$ et $\boxed{B = \frac{11}{54}}$.