Lycée Louis-Le-Grand, Paris 2015/2016
MPSI 4 – Informatique commune
G. Dewaele, A. Troesch

TP n° 3 : Problèmes liés à la représentation des réels

Exercice 1 – Autour de la validité de la comparaison à 0

1. Écrire un programme demandant des coefficients a, b et c à l'utilisateur et renvoyant les racines réelles de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$
2. Tester votre programme avec $a = 0.01$, $b = 0.2$ et $c = 1$, puis avec $a = 0.011025$, $b = 0.21$ et $c = 1$. Quelle conclusion en tirez-vous ?
3. Proposez une amélioration permettant d'éviter le problème ci-dessus.

Exercice 2 – Méthode d'Archimède pour le calcul de π.

Pour tout $n \geqslant 1$, on note u_n la longueur d'un côté d'un 2^n-gône régulier inscrit dans le cercle unité. Par convention, $u_1 = 2$.

1. **Où se cache π**
   (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = 2\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$.
   (b) En déduire la limite de $(2^{n-1}u_n)$. Quelle est l'interprétation géométrique de ce résultat ?
2. **Calcul naïf**
   (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$,
   $$u_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - u_n^2}}.$$
   (b) Écrire un programme affichant les n premières valeurs de $2^{n-1}u_n$ (l'entier n étant donné par l'utilisateur).
   (c) Testez avec $n = 40$. Essayez de comprendre quelle est la nature du problème rencontré.
3. **Augmentation de la précision**
   Nous proposons maintenant une méthode basée sur l'utilisation de grands entiers afin d'augmenter la précision de calcul. On évalue en fait $10^{200} \times u_n$.
   (a) Soit pour tout $n \geqslant 2$, v_n et w_n les suites définies par $v_1 = w_1 = 4 \cdot 10^{400}$ et pour tout $n \geqslant 1$:
   $$v_{n+1} = 2 \cdot 10^{400} - \left\lceil \sqrt{4 \cdot 10^{800} - 10^{400} v_n} \right\rceil \qquad \text{et} \qquad w_{n+1} = 2 \cdot 10^{400} - \left\lfloor \sqrt{4 \cdot 10^{800} - 10^{400} w_n} \right\rfloor$$
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leqslant 10^{400}u_n^2 \leqslant w_n$.
   (b) Quel problème rencontrez-vous lors de l'implémentation du calcul de (v_n) et (w_n) ?
4. **Calcul de la racine carrée des grands entiers**
   On propose une méthode de calcul de la partie entière de la racine carrée d'un grand nombre. Cette méthode est un cas particulier d'une méthode générale de résolution d'une équation que nous aurons l'occasion d'étudier plus en détail un peu plus tard dans l'année : la méthode de Newton. L'itération qu'on obtient dans ce cas particulièrement simple était connu depuis bien longtemps (algorithme de Heron pour le calcul d'une racine, 1^{er} siècle après J.-C.). On peut montrer que la convergence est extrêmement rapide.
   (a) Soit $a > 1$, et $f : x \mapsto x^2 - a$. Soit $x_0 > \sqrt{a}$, et x_1 l'abscisse du point d'intersection de la tangente à la courbe de f en x_0 et l'axe des abscisses. Montrer que $\sqrt{a} < x_1 < x_0$ (on pourra étudier la position de la courbe par rapport à la tangente)
   (b) Exprimer x_1 en fonction de x_0. On écrira $x_1 = g(x_0)$.
   (c) On définit la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $r_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$r_{n+1} = \lfloor g(r_n) \rfloor.$$
   Montrer qu'il existe un entier n tel que $r_n \leqslant \sqrt{a}$. Soit N le plus petit entier vérifiant cela. Montrer que $r_N = \lfloor \sqrt{a} \rfloor$.
   (d) Écrire une fonction calculant $\lfloor \sqrt{a} \rfloor$ pour tout entier a.
   (e) Proposez une amélioration en initialisant la suite (r_n) avec un meilleur majorant de $\sqrt{a}$, obtenu en considérant le nombre maximal de chiffres le constituant.
   (f) Comment modifier cette fonction pour obtenir $\lceil \sqrt{a} \rceil$?

5. (a) Justifier que pour tout $n \geqslant 2$:
$$2^{n-1} u_n \leqslant \pi \leqslant 2^n \frac{u_n}{\sqrt{4-u_n^2}}$$
   (b) En déduire un encadrement de $10^{200}\pi$ en fonction de v_n et w_n. Écrire une fonction retournant cet encadrement.
   (c) Écrire une fonction retournant le rang n pour lequel l'encadrement obtenu de la sorte est le plus précis, ainsi que la valeur du minorant et de l'erreur.
   (d) Écrire une fonction extrayant les décimales correctes obtenues pour π pour l'approximation optimale précédente. Combien de décimales correctes obtient-on ? Comment pourrait-on faire pour augmenter la précision ?

Exercice 3 – Extraction de racines carrées « à la main »

Soit n un entier naturel non nul, dont on cherche la racine carrée. On propose l'algorithme suivant, dont la disposition est similaire à celle utilisée pour faire une division euclidienne à la main.

1. Pour une extraction à main, placer n à la place usuelle du nombre que l'on divise (à gauche).
2. Grouper les chiffres par tranches de 2, en partant de la droite.
3. Chercher le grand entier a_1 tel que a_1^2 soit inférieur ou égal à la première tranche (en partant de la gauche). Le chiffre a_1 est le premier chiffre de la racine carrée. On l'écrit à droite (place usuelle du nombre par lequel on divise). Pour la recherche de a_1, noter que le nombre d'essais est limité, puisque $a_1 \in [\![1, 9]\!]$. Les essais seront faits à la place usuelle du quotient.
4. Calcul du premier reste, obtenu comme différence de la première tranche et du carré de a_1. On l'écrit à la place usuelle des restes.
5. On abaisse la tranche suivante.
6. Par essais successifs (limités à 10), chercher la plus grande valeur de i dans $[\![0, 9]\!]$ telle que $(20r + i) \times i$ soit inférieur au reste, où r est la racine provisoire, constituée des chiffres obtenus lors des étapes précédentes. La valeur de i trouvée est le chiffre suivant de la racine, on l'écrit à la suite des autres.
7. On calcule le reste suivant, différence du reste précédent et de $(20r+i) \times i$ pour la valeur de i trouvée dans l'étape précédente.
8. Tant qu'il reste des tranches, on reprend à l'étape 5.

Si on veut calculer des décimales, on continue l'algorithme en abaissant des tranches nulles, comme lors de la division euclidienne.
Par exemple, pour trouver la partie entière de la racine de 71902 :

$$
\begin{array}{cr|l}
 & 7.\;1\;9.\;0\;2\;\; & 2\;6\;8 \\
\cline{3-3}
- & 4\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\; & \\
\cline{2-2}
 & & 9 \times 9 = 81 > 7 \\
 & 3\;1\;9\;\;\;\;\;\;\;\; & \quad\vdots \\
- & 2\;7\;6\;\;\;\;\;\;\;\; & 3 \times 3 = 9 > 7 \\
\cline{2-2}
 & & 2 \times 2 = 4 \leqslant 7 \\
\cline{3-3}
 & 4\;3\;0\;2\;\; & \\
- & 4\;2\;2\;4\;\; & 4\;9 \times 9 = 441 > 319 \\
\cline{2-2}
 & & 4\;8 \times 8 = 384 > 319 \\
 & 7\;8\;\; & 4\;7 \times 7 = 329 > 319 \\
 & & 4\;6 \times 6 = 276 \leqslant 319 \\
\cline{3-3}
 & & 5\;2\;9 \times 9 = 4761 > 4302 \\
 & & 5\;2\;8 \times 8 = 4224 \leqslant 4302
\end{array}
$$

Évidemment, on n'est pas obligé d'effectuer tous les essais successifs indiqués ici lorsqu'on effectue cet algorithme à la main, et on peut essayer directement des valeurs de i donnant un résultat dont l'ordre de grandeur est raisonnable.
Ainsi, $\lfloor\sqrt{71902}\rfloor = 268$, avec un reste égal à 78, ce qui signifie qu'on a l'égalité : $71902 = 268^2 + 78$.

1. Mettre en œuvre à la main l'algorithme proposé pour le calcul de $\lfloor\sqrt{64015}\rfloor$.
2. Justifier la terminaison et la correction de l'algorithme proposé et l'implémenter.
3. Trouver les 1000 premières décimales de $\sqrt{2}$.