Lycée Louis-Le-Grand, Paris 2015/2016
MPSI 4 – Informatique commune
G. Dewaele, A. Troesch

TP n° 4 : Complément au TP 3

Avant d'aborder les exercices suivants, on traitera la fin du TP précédent.

Exercice 1 – (Des méthodes de calcul approché de π)
Pour chacune des méthodes ci-dessous, écrire une fonction prenant en paramètre un entier n, et calculant le n-ième terme de la suite. faire l'affichage pour $n = 10$, $n = 100$, $n = 1000$, $n = 10000$ et $n = 100000$. Commentez les résultats obtenus. On ne demande pas de montrer la validité des formules. Pour information :

$$\pi \simeq 3.1415926535897932.$$

1. **Méthode de Leibniz :** $u_n = 4 \times \sum_{k=0}^{n} \frac{(1)^k}{2k+1}$
2. **Méthode de Leibniz (2) :** $u_n = 8 \times \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(4k+1)(4k+3)}$.
3. **Méthode d'Euler :** $u_n = \sqrt{6 \times \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}}$.
4. **Sommes de Riemann :** $u_n = 4 \times \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$
5. **Méthode de Machin :** $u_n = 4 \times \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left(4 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{2k+1} - \left(\frac{1}{239}\right)^{2k+1} \right)$.
6. **Méthode d'Archimède :** une variante de la méthode proposée dans le TP précédent, pour un calcul plus efficace en flottants, consiste à calculer le périmètre p_n en fonction de a_n, la distance d'un côté au rayon d'un 6×2^n-gône. On peut vérifier que :
$$a_0 = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{16}}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n}{4} + \frac{1}{8}}, \qquad p_0 = 3, \qquad p_{n+1} = \frac{p_n}{2a_{n+1}}.$$
7. **Méthode de Woon :** $a_0 = 1$, $a_n = \sqrt{1 + \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k\right)^2}$, $\qquad u_n = \frac{2^{n+1}}{a_n}$.
8. **Méthode des fractions continues :**
$$u_1 = 2 + \frac{2}{1+1}, \qquad u_2 = 2 + \frac{2}{1 + \frac{1}{\frac{1}{2}+1}}, \qquad u_3 = 2 + \frac{2}{1 + \frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{\frac{1}{3}+1}}}, \qquad u_3 = 2 + \frac{2}{1 + \frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{\frac{1}{4}+1}}}} \dots$$
9. **Méthode de Brown :** Soit $n \in \mathbb{N}$, on construit $a_0 = n$, et pour $k > 0$, a_k le plus petit entier supérieur ou égal à a_{k-1} divisible par $n - k$. On définit $u_n = \frac{n^2}{a_{n-1}}$.

Dans les deux exercices suivants, on pourra utiliser des listes. Une liste vide peut se créer de la façon suivante : `li = [ ]` *. On peut ajouter un terme à une liste par la méthode* `append` *. Par exemple* `li.append(5)` *ajoute l'attribut 5 à la liste (en fin de liste).*

Exercice 2 – On appelle nombre parfait un nombre n dont la somme des diviseurs propres (donc différents de n) est égal à n. On appelle couple de nombres amicaux (m, n) un couple constitué de deux entiers strictement positifs distincts tels que la somme des diviseurs propres de chacun est égal à l'autre.

1. Écrire une fonction calculant la somme des diviseurs propres d'un entier n
2. Écrire une fonction recherchant tous les nombres parfaits inférieurs à un entier N donné, et calculant la somme des inverses de tous les diviseurs de ces nombres. Quel commentaire faites-vous ?

3. Écrire une fonction recherchant tous les couples de nombres amicaux (m, n), tels que $m \leqslant N$, pour un entier N donné.
4. On appelle chaîne sociable une séquence $(a_1, \dots, a_n)$ d'entiers strictement positifs tels que chacun soit égal à la somme des diviseurs propres du précédent (cycliquement). Trouver les suites aliquotes ne faisant intervenir que des nombres inférieurs à 1000000 et contenant au moins un nombre inférieur ou égal à 15000.

   Remarque 1 : cela peut nécessiter un certain temps de calcul si vous avez calculé la somme des diviseurs de façon naïve, en cherchant les diviseurs 1 à 1 (cela prend 15 minutes sur mon ordinateur).

   Vous pouvez améliorer votre calcul en remarquant que la somme de tous les diviseurs de n (y compris n) s'exprime :
$$s(n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1},$$
   où on se demande bien ce que peuvent être les p_i et les α_i (on passe à 5 secondes sur mon ordinateur)

   Remarque 2 : la suite des sommes des diviseurs propres successifs (appelée suite aliquote) peut soit diverger (donc dépasser 1000000 à un moment ; on a plusieurs candidats pour un tel comportement, mais pour aucun de ces candidats, on ne sait à ce jour prouver qu'il y a effectivement divergence), soit boucler sur elle-même (si elle reste bornée, elle prend un nombre fini de valeurs, donc retourne au moins 2 fois sur une même valeur). Si la boucle se referme sur la valeur initiale, c'est bon, sinon, ce n'est pas une chaîne sociable. Très souvent, la suite boucle sur la valeur 0.

Exercice 3 –

1. Étant donné un entier $n \in \mathbb{N}$, déterminer la liste des facteurs de la décomposition de Zeckendorf de n, c'est-à-dire les uniques nombres de Fibonacci deux à deux distincts et non consécutifs de somme égale à n. On consultera les exercices de mathématique pour l'existence et l'unicité de cette décomposition.
2. Deux joueurs tirent à tour de rôle des allumettes d'une boîte, avec les règles suivantes :
   - Chaque joueur tire à chaque fois au moins une allumette.
   - Le premier joueur ne retire pas la totalité des allumettes au premier tour.
   - Un joueur tire au plus deux fois le nombre d'allumettes tirées par le joueur précédent.
   - Le joueur qui retire la dernière allumette a gagné.

   On peut montrer que si le nombre initial d'allumettes n'est pas un nombre de Fibonacci, une stratégie gagnante pour le joueur 1 consiste à tirer autant d'allumettes que le plus petit terme de la décomposition de Zeckendorf du nombre d'allumettes.

   Écrire une fonction prenant en argument un entier n (nombre d'allumettes), et mettant en place la stratégie gagnante si c'est possible (on alternera le jeu de l'ordinateur, qui commence, et le jeu de l'utilisateur, à qui on demandera une valeur, en précisant dans quel intervalle il a le droit de tirer).