

Interrogation n° 1

Nom :		Prénom :	
Note sur 20 :	Observations :		
Rang :			

1. Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. On suppose que $\leq$ est un bon ordre c'est-à-dire qu'il est total et que tout sous-ensemble de E admet un minimum. Soit m le minimum de E . Soit $\mathcal{P}$ une proposition, définie sur les éléments de E . Montrer que si $\mathcal{P}(m)$ est vraie et que si pour tout $x \in E \setminus \{m\}$, $(\forall y < x, \mathcal{P}(y)) \implies \mathcal{P}(x)$, alors la propriété $\mathcal{P}$ est vérifiée pour tout x de E .

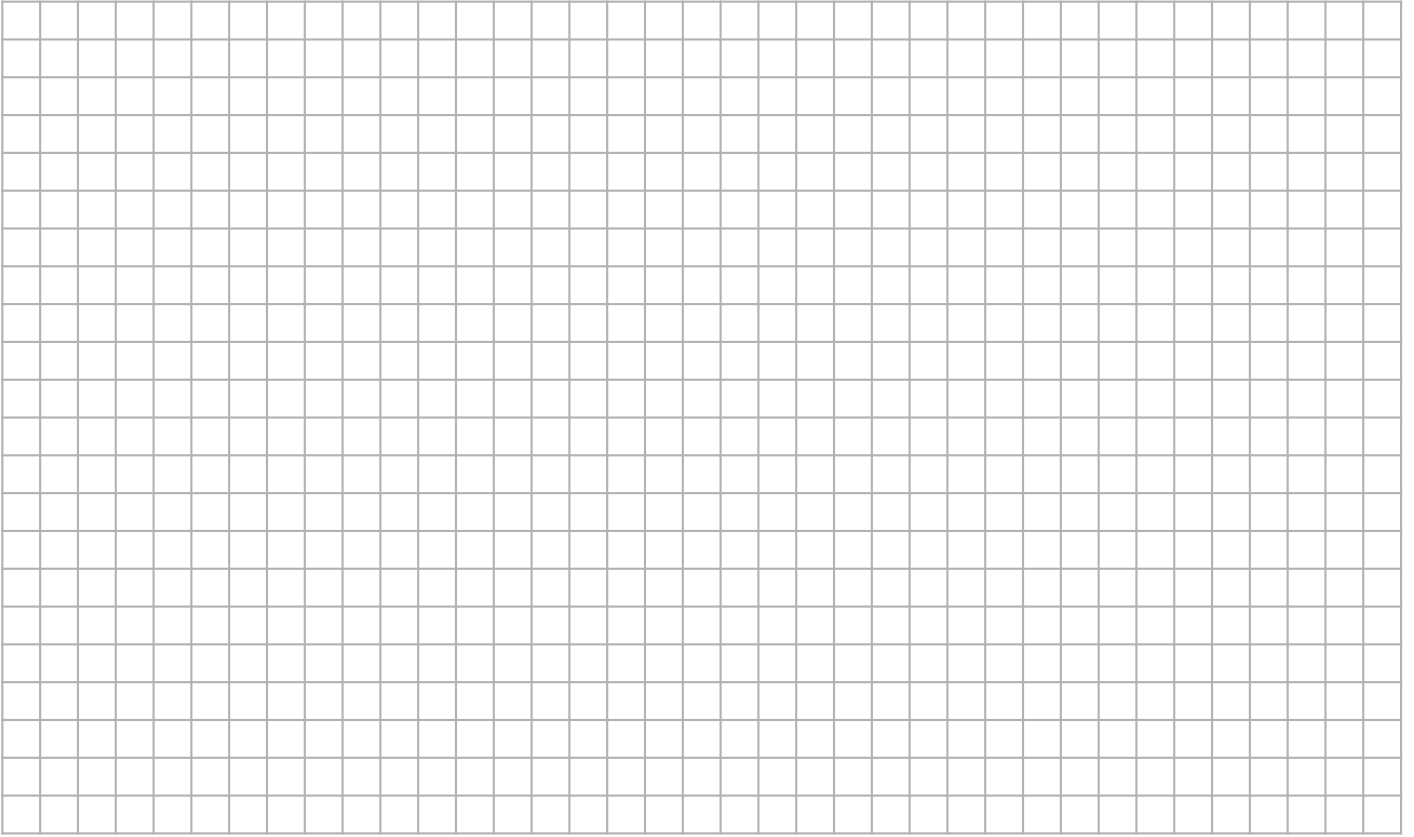
A full-page view of a blank sheet of graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines forming small squares across the entire page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

2. Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. On dit qu'un sous-ensemble X de E est un sarment original si pour tout $x \in X$ et tout $y \in E$, $y < x \implies y \in X$.

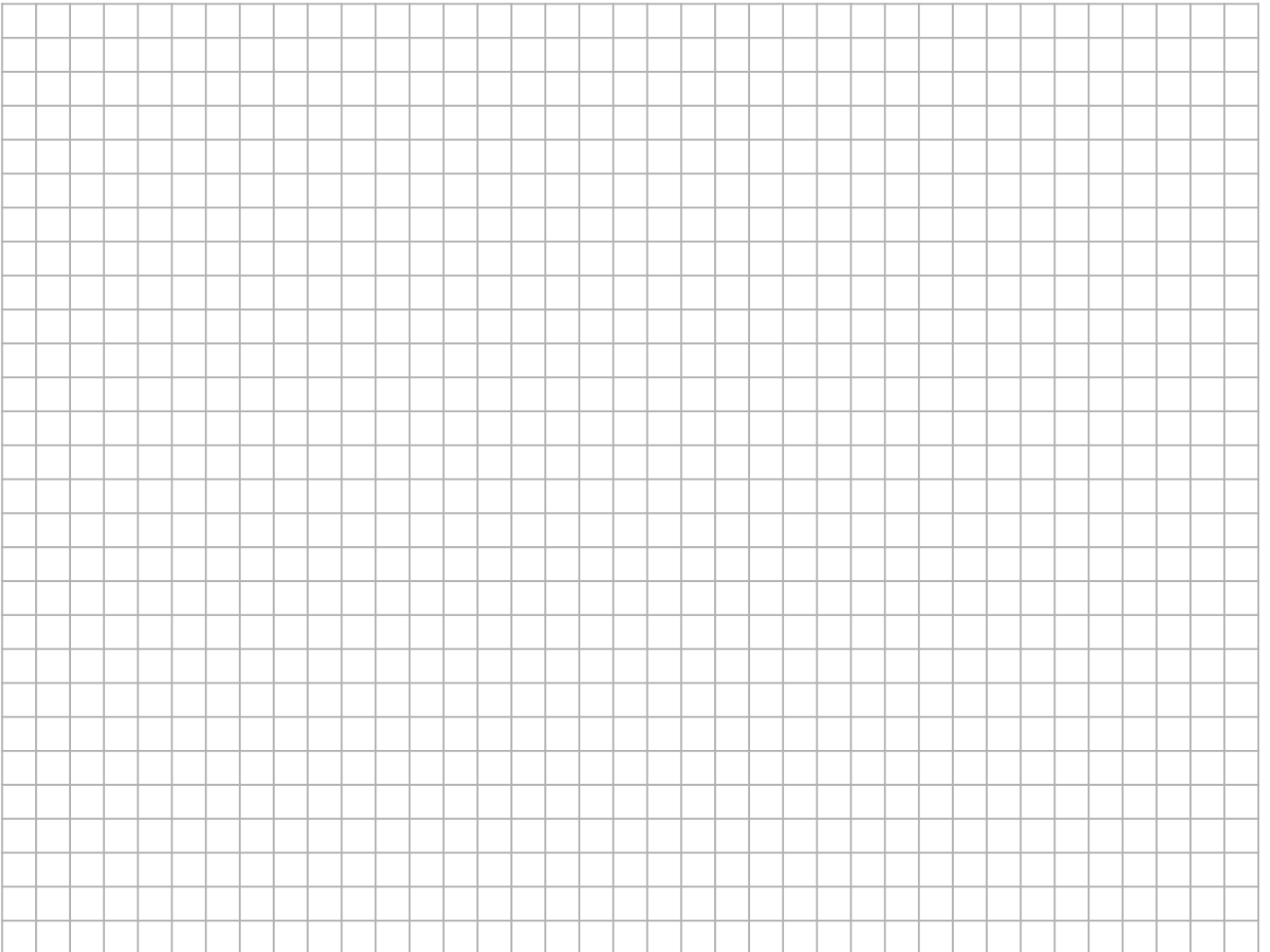
Montrer que l'union et l'intersection d'une famille quelconque de sarments originaux est encore un sarment original.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

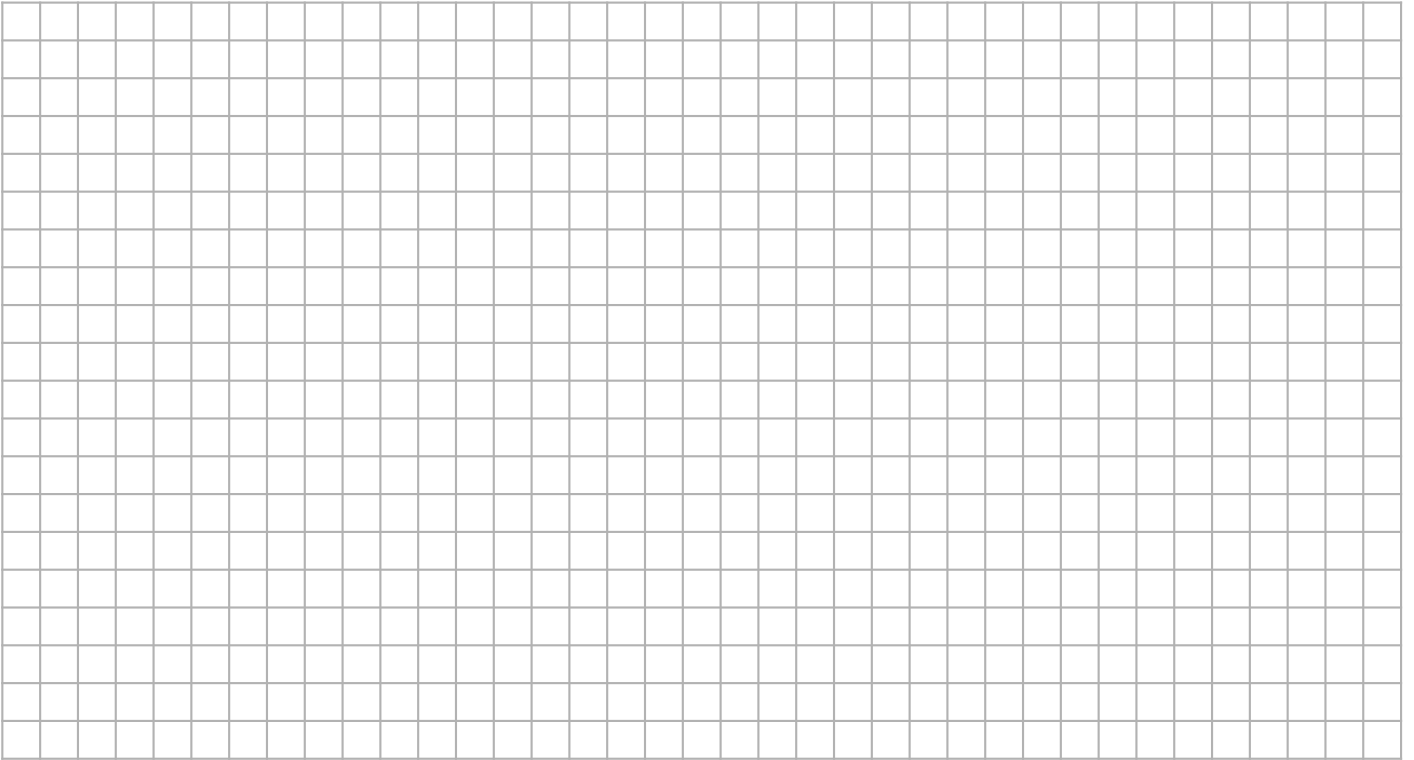
3. Construire un exemple d'ensemble ordonné fini E et d'un sarment original X de E tel qu'il n'existe pas d'élément x de E tel que $X = \{y \in E \mid y < x\}$ ou $X = \{y \in E \mid y \leq x\}$



4. Soit f une bijection croissante entre deux ensembles totalement ordonnés E et F , et soit X un sarment original de E . Montrer que $f(X)$ est un sarment original de F .



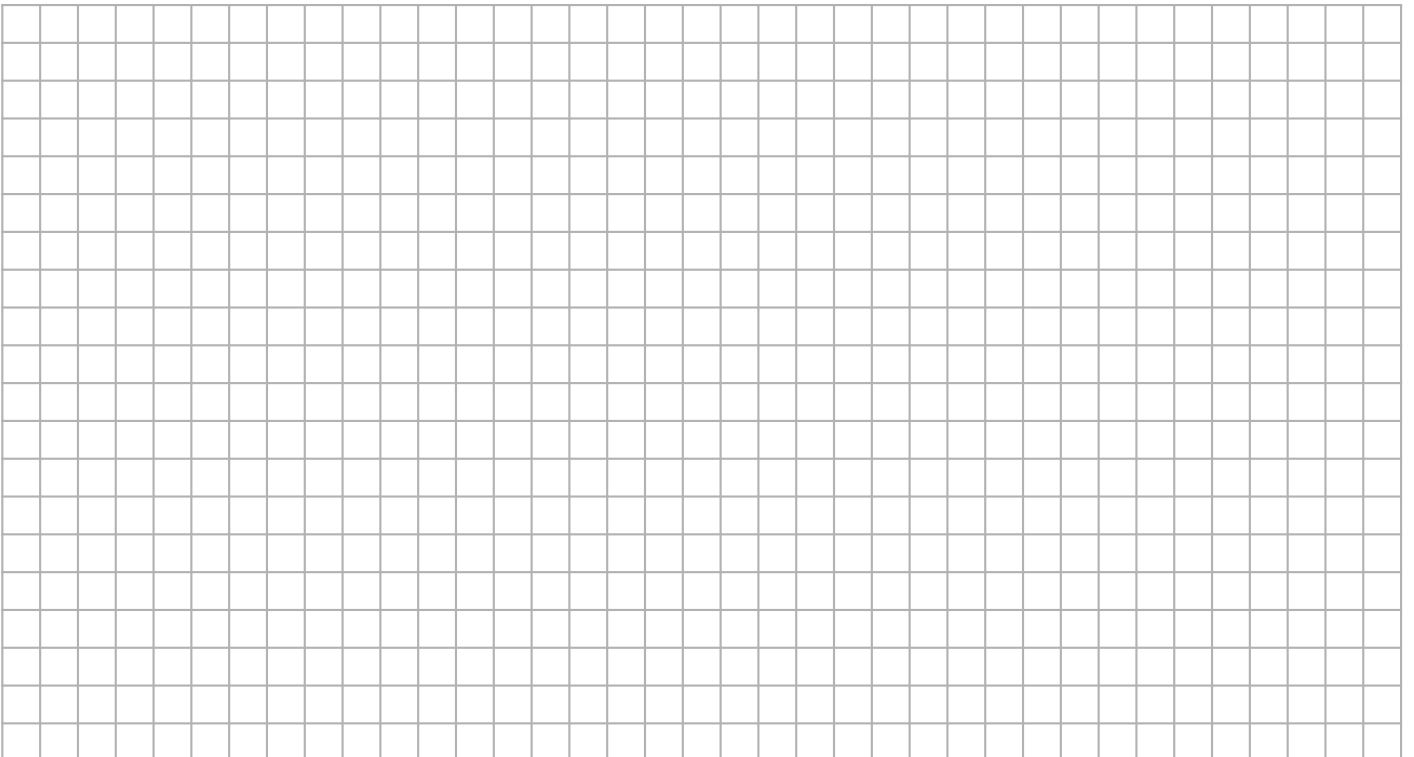
5. On dit qu'un sous-ensemble X de E est un sarment génial si pour tout $x \in X$ il existe $y < x$ tel que $y \in E$. On suppose que E admet un sarment génial non vide. Montrer que E est infini.



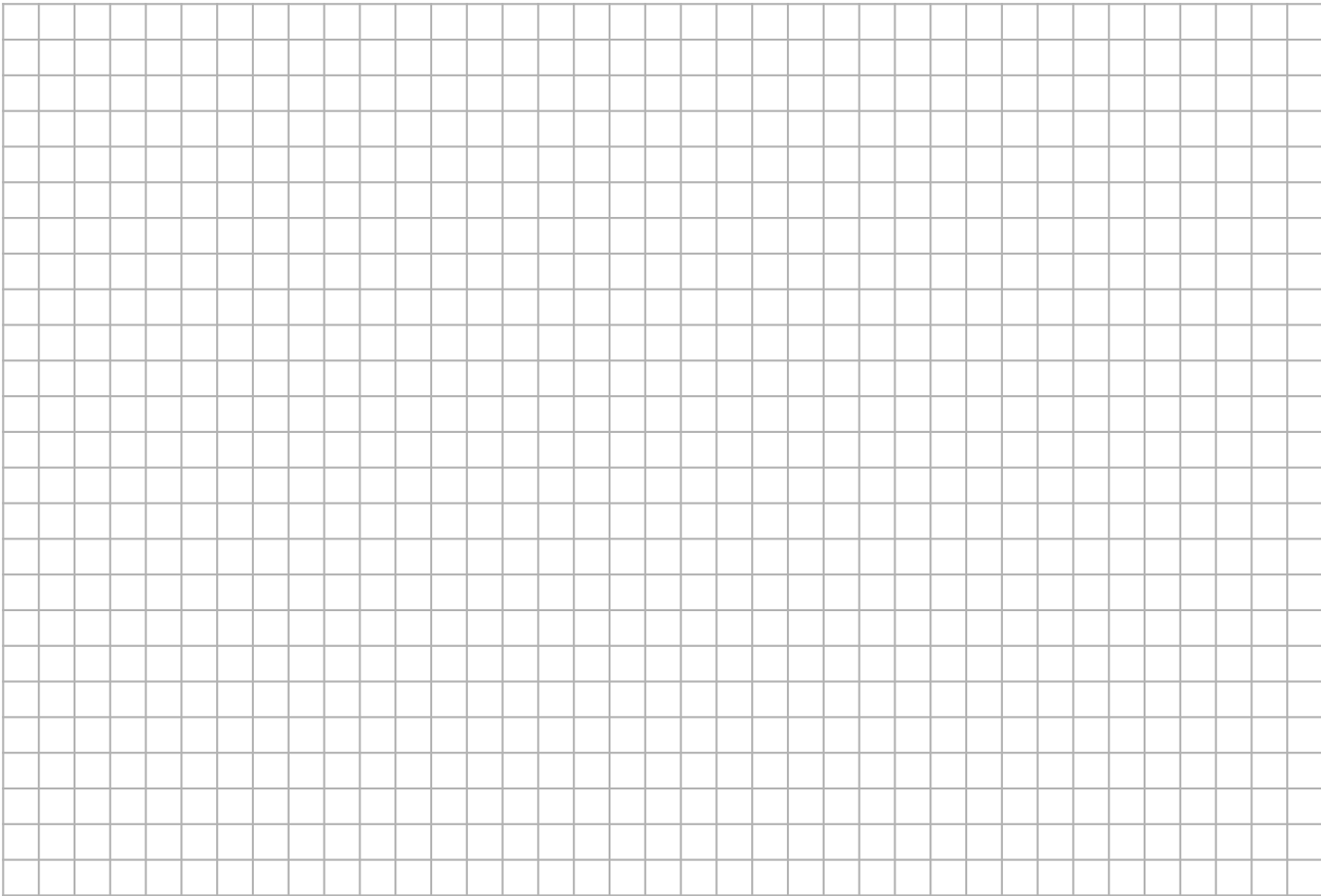
6. L'intersection de deux sarments géniaux est-elle un sarment génial ?



7. Que peut-on dire de l'intersection d'un sarment génial et d'un sarment original ?



8. Un ordinal est un ensemble α tel que la relation d'appartenance munisse α d'un bon ordre strict, et vérifiant la propriété de transitivité, c'est-à-dire tel que pour tout $x \in \alpha$, on ait $x \subset \alpha$. Montrer que si α est un ordinal, et si $\beta \in \alpha$, alors β est un ordinal.



9. Montrer que tout sarmement ordinal d'un ordinal est un ordinal.

