Chapitre 15 – Continuité et dérivabilité sur un intervalle

Théorème des valeurs intermédiaires, théorème de la bijection et similaires

☆☆☆☆ **Exercice 1** – Soit I un intervalle ouvert, et f et g deux applications continues sur I, ne s'annulant pas sur I, et telles que $|f| = |g|$. Montrer que $f = g$ ou $f = -g$.

☆☆☆☆ **Exercice 2** – Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue sur $[a,b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = c$ (autrement dit, f admet un point fixe).

★☆☆☆ **Exercice 3** – Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f \circ f(a) = a$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = c$.

★☆☆☆ **Exercice 4** – Soit $(p,q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, et $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue telle que $f(0) \neq f(1)$. Montrer qu'il existe $x_0 \in]0,1[$ tel que $pf(0) + qf(1) = (p+q)f(x_0)$.

★☆☆☆ **Exercice 5** –

1. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue telle que $f \circ f = f$. Soit $E_f = \{x \in [0,1],\ f(x) = x\}$. Montrer que E_f est un intervalle.
2. Décrire les applications $f : [0,1] \to [0,1]$ continues telles que $f \circ f = f$

☆☆☆☆ **Exercice 6** – Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(I) \subset \mathbb{Q}$. Montrer que f est constante.

★★★☆ **Exercice 7** – Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$.

1. Montrer qu'il existe $c \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Montrer qu'il existe $c \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ tel que $f(c) = f(c + \frac{1}{n})$.
3. Le résultat reste-t-il vrai en remplaçant $\frac{1}{n}$ par un réel quelconque $x \in]0,1[$?

★★★☆ **Exercice 8** – Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue, telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. On suppose que pour tout $x \in [0,1]$, il existe $n \geqslant 2$ tel que $f^n(x) = x$, où f^n est la composée n fois de f. Montrer que $f(x) = x$ pour tout x de $[0,1]$.

★★☆☆ **Exercice 9** – Montrer qu'il n'existe pas de bijection continue de $\mathbb{R}^*$ sur $\mathbb{R}$.

★☆☆☆ **Exercice 10** – **(Une fonction définie implicitement)**

1. Montrer que l'équation $x \ln x = 1$ admet une unique solution sur $]1, +\infty[$, notée x_0
2. Étudier les variations de $f : x \mapsto \frac{e^x}{\ln x}$ sur $]1, +\infty[$, et montrer que f admet en x_0 un minimum, dont on notera la valeur y_0 (ne pas chercher à expliciter y_0).
3. Montrer que pour tout $x \geqslant y_0$, il existe un unique réel de $]1, x_0]$, noté $g(x)$, tel que $\mathrm{e}^{g(x)} = x \ln g(x)$, et qu'il existe un unique réel de $[x_0, +\infty[$, noté $h(x)$, tel que $\mathrm{e}^{h(x)} = x \ln h(x)$.
4. En se servant des variations de f, justifier que g est décroissante sur $[y_0, +\infty[$, et que f est croissante sur $[y_0, +\infty[$. Déterminer la limite de g et h en $+\infty$.

★★☆☆ **Exercice 11** – Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application continue telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Monter que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $(x_{n,k})_{0 \leqslant k \leqslant n}$ tel que :

$$0 \leqslant x_{n,0} \leqslant x_{n,1} \leqslant \cdots \leqslant x_{n,n} \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![0,n]\!],\quad f(x_{n,k}) = \frac{k}{n}.$$

★★☆☆ **Exercice 12** – Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| \geqslant a|x-y|.$$

Montrer que f est bijective.

★★★☆ **Exercice 13** –
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) \geqslant 0$ et $f(1) \leqslant 0$. On suppose qu'il existe $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f + g$ soit croissante. Montrer que f s'annule sur $[0,1]$.

★★★★ **Exercice 14** – **(Oral ENS – Une réciproque au TVI)**
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, $f([a,b])$ est un segment, et telle que $f^{-1}(\{x\})$ est fermé pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est continue.

Théorème de compacité

★☆☆☆ **Exercice 15** – Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet une borne inférieure, et que celle-ci est atteinte.

★☆☆☆ **Exercice 16** – Montrer qu'il n'existe par de surjection continue de $[0,1] \to]0,1[$. Trouver une surjection continue de $]0,1[\to [0,1]$.

☆☆☆☆ **Exercice 17** – Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une application continue telle que $\forall x > 0$, $f(x) < x$. Montrer que pour tout $0 < a < b$, il existe $M < 1$ tel que $f(x) \leqslant Mx$ sur $[a,b]$.

★★★☆ **Exercice 18** –

1. Montrer qu'il n'existe pas de fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $c \in \mathbb{R}$, $|f^{-1}(\{c\})| \in \{0,2\}$.
2. Généraliser pour une fonction pour laquelle tout point aurait un nombre fini pair d'antécédents.

Continuité uniforme, théorème de Heine

☆☆☆☆ **Exercice 19** – Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

(i) f est uniformément continue sur A ;

(ii) Pour toutes suites (x_n) et (y_n) d'éléments de A telles que $x_n - y_n \to 0$, on a $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.

★☆☆☆ **Exercice 20** – Montrer que les fonctions suivantes ne sont pas uniformément continues :

1. $f_1 : x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$.
2. $f_2 : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
3. $f_3 : x \mapsto \tan(x)$ sur $]0, \frac{\pi}{2}$
4. $f_4 : x \mapsto \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

★★☆☆ **Exercice 21** – Soit A une partie bornée non vide de $\mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$. On suppose $\sup_A f = +\infty$. Montrer que f n'est pas uniformément continue.

★★☆☆ **Exercice 22** – Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, admettant une limite finie en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer que f est bornée et uniformément continue.

★★★☆ **Exercice 23** – Soit $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Montrer que f est prolongeable par continuité en a.

★★☆☆ **Exercice 24** – Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uniformément continue telle que pour tout $t > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(nt) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

★★☆☆ **Exercice 25** – Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue. Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k f\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

★★★☆ **Exercice 26** – Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer qu'il existe a et b tels que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $|f(x)|\leqslant a|x|+b$.

Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis

★☆☆☆ **Exercice 27** – Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que si $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 28 –
Soit P une fonction polynomiale. Montrer que l'équation $P(x)=\mathrm{e}^x$ n'admet qu'un nombre fini de solutions réelles.

★★★☆ **Exercice 29** – Soit $P_1,\dots,P_n$ et $Q_1,\dots,Q_n$ des polynômes de $\mathbb{R}[X]$, les P_i étant non nuls, et les Q_i deux à deux distincts et tels que si $i\neq j$, Q_i-Q_j ne soit pas constant. Montrer que la fonction

$$f_n\ :\ x\mapsto\sum_{k=1}^{n}P_k(x)\mathrm{e}^{Q_k(x)}$$

admet un nombre fini de zéros.

★★☆☆ **Exercice 30** –

1. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$, soit $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ deux applications continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$, et telles que :
$$\forall x\in]a,b[,\quad g'(x)\neq 0.$$
   (a) Montrer que $g(b)-g(a)\neq 0$.
   (b) Montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.
2. Soit f et g deux fonctions dérivables sur $]a,b[$, telles que $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$, telles que g et g' ne s'annulent pas sur $]a,b[$ et telles que $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ admette une limite $\ell\in\mathbb{R}$ en a. Montrer que $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ admet en a une limite dans $\mathbb{R}$ et l'exprimer en fonction de ℓ (règle de L'Hôpital)

★★☆☆ **Exercice 31** – Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ dérivable, telle que $f(0)=0$, et $f(x)>0$ pour tout $x\in]0,1[$. Soit α et β deux réels strictement plus grands que 0. Montrer qu'il existe $c\in]0,1[$ tel que :

$$\alpha\frac{f'(c)}{f(c)}=\beta\frac{f'(1-c)}{f(1-c)}.$$

★☆☆☆ **Exercice 32** – Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0)=f'(0)=0$, et $f(1)=0$. Montrer qu'il existe $c\in]0,1[$ tel que la tangente à la courbe en c passe par l'origine.

★★★☆ **Exercice 33** – Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ non identiquement nulle, à support compact, c'est-à-dire nulle sauf éventuellement sur un intervalle borné. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on peut trouver des réels $a_{n,0}<a_{n,1}<\cdots<a_{n,n}$ tels que pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $f^{(n)}(a_{n,i-1})f^{(n)}(a_{n,i})<0$.

★★☆☆ **Exercice 34** – Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ dérivable, telle que $f'(a)=f'(b)$. Montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que

$$f'(c)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}.$$

★★☆☆ **Exercice 35** – Soit $f:[0,a]\to\mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]0,a]$, vérifiant $f(0)=0$ et $f(a)f'(a)<0$. Montrer qu'il existe $c\in]0,a[$ tel que $f'(c)=0$.

★☆☆☆ **Exercice 36** – Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$ telle que $f(0)=0$, et $f(1)=0$. Montrer qu'il existe $c\in]0,1[$ tel que la tangente à la courbe en c passe par $(c-1,0)$.

★★☆☆ **Exercice 37 –**

1. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que f admette une limite ℓ en $+\infty$. Montrer qu'il existe une suite c_n de limite $+\infty$ telle que $f'(c_n)$ tende vers 0.
2. On suppose dans cette question que f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant $f^2+(1+f')^2 \leqslant 1$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est identiquement nulle.

★★★☆ **Exercice 38** – Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, telle que $f(0)=f'(0)=f(1)=0$.

1. Justifier l'existence de bornes supérieures M, M' et M'' de $|f|$, $|f'|$ et $|f''|$, et l'existence d'un réel $\alpha \in]0,1[$ tel que $|f(\alpha)| = M$.
2. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $|f'(x)| \leqslant M'' \cdot \min(x, |x-\alpha|)$.
3. En déduire que $|f(\alpha)| \leqslant M'' \cdot \min\left(\frac{\alpha^2}{4}, \frac{(1-\alpha)^2}{2}\right)$.
4. En déduire que $M \leqslant \left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right) \cdot M''$
5. On suppose de plus que $f'(1)=0$. Montrer que $M \leqslant \frac{1}{16} \cdot M''$.

★★☆☆ **Exercice 39 – Autour de la propriété des valeurs intermédiaires (Théorème de Darboux)**

1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Montrer que si f' ne s'annule pas sur $]a,b[$, alors f est injective sur $[a,b]$.
2. En déduire que si f' ne s'annule pas, alors f' est de signe constant.
3. Montrer que f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.
4. Trouver une fonction non continue vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires.

★★★★ **Exercice 40 – (Cas particulier du lemme de Sard, oral X)**
Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite négligeable (ou de mesure nulle) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite (I_n) d'intervalles ouverts tels que

$$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(I_n) < \varepsilon,$$

où $\mu(I)$ désigne la longueur de l'intervalle I.

1. Montrer qu'une réunion dénombrable de parties négligeables est négligeable.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On note C l'ensemble des zéros de f'. Montrer que $f(C)$ est négligeable.