

## TP n° 9 : Résolution d'équations numériques

Nous étudions dans ce TP plusieurs méthodes de calcul approché de solutions d'une équation du type  $f(x) = 0$ ,  $f$  étant une fonction continue d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 1** – Toutes les méthodes implémentées devront être vérifiées à l'aide des fonctions  $f_1 : x \mapsto x^2 - 2$ ,  $f_2 : x \mapsto x - e^{-x}$  et  $f_3 = \sqrt{x} - \frac{1}{2}$ , et une marge d'erreur de  $10^{-10}$ .

On comparera également aux valeurs théoriques, lorsqu'elles sont calculables, et à la valeur obtenue à l'aide de la fonction `newton` du module `scipy.optimize`. La fonction `newton` prend en argument une fonction  $f$  et un réel  $x_0$  initialisant la méthode, ainsi, qu'un troisième argument optionnel, devant être égal à la fonction dérivée  $f'$ . Si cet argument optionnel  $f'$  est donné, un zéro de  $f$  est calculé à l'aide de la méthode de Newton, sinon à l'aide de la méthode des sécantes.

### 1. Dichotomie

Écrire une fonction `dichotomie` prenant en argument une fonction  $f$ , deux réels  $a$  et  $b$  et une marge d'erreur  $\varepsilon$ , et retournant un couple  $(x, n)$ , tel que  $x \in [a, b]$  et  $f(x) = 0$ ,  $n$  étant le nombre de partages de l'intervalle  $[a, b]$  qu'il a été nécessaire d'effectuer par la méthode de dichotomie. On commencera par un test permettant de s'assurer de l'existence d'une telle valeur de  $x$ .

### 2. Méthode de la sécante

- Écrire une fonction `secante` prenant en paramètre une fonction  $f$ , deux réels  $a$  et  $b$  et une marge d'erreur  $\varepsilon$ , et retournant, en cas de succès, le couple  $(x, n)$  obtenu par la méthode de la sécante,  $x$  étant une valeur approchée près d'un zéro de  $f$ ,  $n$  étant le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir  $x$ , l'arrêt s'effectuant dès lors que deux valeurs successives sont  $\varepsilon$ -proches l'une de l'autre. On limitera le nombre d'itérations à 100. Si cette valeur est atteinte, on décrètera l'échec de la méthode.
- En comparant aux valeurs théoriques et aux valeurs fournies par la fonction `newton`, discuter, de la validité du test d'arrêt.
- Comparer les performances de cet algorithme et des précédents

### 3. Méthode de Newton-Raphson

- Écrire une fonction `mon_newton` prenant en paramètre une fonction  $f$ , sa dérivée  $f'$ , un réel  $a$  et une marge d'erreur  $\varepsilon$ , et retournant, en cas de succès, le couple  $(x, n)$  obtenu de même que précédemment, mais cette fois par la méthode de Newton-Raphson.
- En comparant aux valeurs théoriques et aux valeurs fournies par la fonction `newton`, discuter, de la validité du test d'arrêt.
- Comparer les performances de cet algorithme et des précédents.
- Trouver une fonction  $f$  admettant un zéro et un réel  $x_0$ , telle que la méthode de Newton associée soit bien définie, mais divergente.

### 4. Dérivation numérique

Afin de pouvoir exploiter la méthode de Newton-Raphson sans avoir à donner l'expression de la dérivée de  $f$ , nous cherchons ici à calculer numériquement la dérivée de  $f$ . Cette méthode n'est évidemment valable que si  $f$  est à variations régulières, dans un sens que nous ne précisons pas.

- Écrire une fonction `derivee` prenant en paramètre une fonction  $f$  et deux réels  $x$  et  $h$ , et retournant une valeur approchée de  $f'(x)$ , obtenue en considérant le taux d'accroissement entre  $x - h$  et  $x + h$ .

- (b) Écrire une fonction `trace_derivee` prenant en paramètre une fonction  $f$  et trois réels  $a$ ,  $b$  et  $h$ , et traçant le graphe de  $f'$  sur l'intervalle  $[a, b]$ ,  $h$  étant le réel considéré dans la question précédente pour le calcul de la dérivée (on consultera les TP précédents pour le tracé de graphes)
- (c) Écrire une fonction `choix_de_h`, prenant en paramètre une fonction  $f$ , sa dérivée théorique  $f'$  et un réel  $x$ , et traçant le graphe de la fonction qui à  $y$  associe l'erreur faite sur le calcul de  $f'$  par la méthode précédente en utilisant une valeur de  $h = 10^{-y}$ . On fera varier  $y$  entre 4 et 8. Confirmer le choix optimal de  $h$  obtenu par le calcul dans le cours.
- (d) Reprogrammer une nouvelle fonction `mon_newton_bis`, exploitant la méthode de Newton associée à la dérivation numérique.

## Exercice 2 – Méthode de Newton dans le plan complexe

Étant donné un nombre complexe  $a$ , on considère le polynôme  $P = (X - 1) \left( X + \frac{1}{2} - a \right) \left( X + \frac{1}{2} + a \right)$  ainsi que son polynôme dérivé  $P'$ . À tout nombre complexe  $z$  on associe la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par la condition initiale  $u_0 = z$  et la relation de récurrence :  $u_{n+1} = u_n - \frac{P(u_n)}{P'(u_n)}$ .

Comme on peut s'y attendre, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  va en général converger vers l'une des trois racines de  $P$ , mais dans certains cas ne va pas converger (voire cesser d'être définie à partir d'un certain rang).

Le but de cet exercice est de représenter une portion carrée du plan complexe  $(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)) \in [u, v]^2$  dans laquelle chaque point d'affixe  $z$  sera coloré d'une façon différente suivant que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $1$ ,  $-\frac{1}{2} - a$ ,  $-\frac{1}{2} + a$  ou ne converge pas.

### Représentation graphique.

La portion carrée du plan sera représentée par une matrice  $n \times n$ , la valeur de  $n$  permettant de choisir une résolution plus ou moins fine compte tenu du temps qui sera nécessaire aux calculs. Chaque case de ce tableau correspond donc à une valeur initiale  $z \in \mathbb{C}$  et devra contenir au final l'un des quatre entiers 0, 1, 2, 3 représentant respectivement les quatre situations décrites ci-dessus.

Le tableau initial sera créé à l'aide de la fonction :

`numpy.zeros((n,n))` qui définit une matrice  $n \times n$  dont chacune des cases contient la valeur 0.

Une fois le tableau `tab` rempli, la fonction :

`matplotlib.pyplot.matshow(tab)` provoque l'affichage d'une image dans laquelle chaque valeur du tableau est représentée par une couleur différente, suivant un spectre défini par défaut.

Pour chaque valeur de  $z$ , il vous faudra itérer la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un nombre suffisant de fois, en choisissant un critère vous permettant d'affirmer sans trop de risque de se tromper que la suite converge.

1. La *fractale de Newton* est obtenue lorsque  $a = i \frac{\sqrt{3}}{2}$ , c'est-à-dire lorsque  $P = X^3 - 1$ . Représentez-la dans le domaine  $\left\{ z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re}(z)| \leq 2 \text{ et } |\operatorname{Im}(z)| \leq 2 \right\}$ .
2. La valeur  $a = -0,00508 + 0,33136i$  permet d'observer un phénomène intéressant, la présence d'un *lapin de Douady*. Faire le tracé dans les domaines

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re}(z)| \leq 2 \text{ et } |\operatorname{Im}(z)| \leq 2 \right\} \quad \text{puis:} \quad \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re}(z)| \leq \frac{1}{10} \text{ et } |\operatorname{Im}(z)| \leq \frac{1}{10} \right\}.$$