Lycée Louis-Le-Grand, Paris — Lundi 3 décembre 2018
MPSI 4 – Mathématiques
A. Troesch

Interrogation n° 3 (10 minutes)

Correction de l'exercice – (10 minutes, 5 questions)

1. On peut primitiver à vue, puisqu'au signe près, on a une forme $\dfrac{u'}{1+u^2}$. Ainsi :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \Big[-\operatorname{Arctan}(\cos(x))\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \operatorname{Arctan}(1) - \operatorname{Arctan}(0) = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

2. On fait une intégration par parties (les fonctions considérées étant de classe $\mathcal{C}^1$) en vue de se débarrasser du logarithme :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^3}{3}\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{3}\ln(2) - \frac{2}{3}\int_0^1\left(x^2-1+\frac{1}{1+x^2}\right)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{3}\ln(2) - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}-1+\operatorname{Arctan}(1)\right)\\ &= \boxed{\frac{1}{3}\ln(2)+\frac{4}{9}-\frac{\pi}{6}.}\end{aligned}$$

3. On insère le terme y du numérateur dans une primitivation de type $\frac{u'}{u}$:

$$\begin{aligned}\int \frac{y}{y^2+\sqrt{2}\cdot y+1}\,\mathrm{d}y &= \int\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2y+\sqrt{2}}{y^2+\sqrt{2}\cdot y+1} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{y^2+\sqrt{2}\cdot y+1}\right)\,\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{2}\ln(y^2+\sqrt{2}\cdot y+1) - \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}\cdot y+1)^2+1}\\ &= \boxed{\frac{1}{2}\ln(y^2+\sqrt{2}\cdot y+1) - \operatorname{Arctan}(\sqrt{2}\cdot y+1)}\end{aligned}$$

Le même calcul (ou le changement de variable $y'=-y$) fournit :

$$\int \frac{y}{y^2-\sqrt{2}\cdot y+1}\,\mathrm{d}y = \boxed{\frac{1}{2}\ln(y^2-\sqrt{2}\cdot y+1) - \operatorname{Arctan}(\sqrt{2}\cdot y-1).}$$

4. On remarque que $\frac{1}{2\sqrt{2}}\big((y^2+\sqrt{2}\cdot y+1)-(y^2-\sqrt{2}\cdot y+1)\big) = y$, donc

$$\begin{aligned}\frac{y^2}{1+y^4} &= \frac{\frac{y}{2\sqrt{2}}\big((y^2+\sqrt{2}\cdot y+1)-(y^2-\sqrt{2}\cdot y+1)\big)}{(y^2+\sqrt{2}\cdot y+1)(y^2-\sqrt{2}\cdot y+1)}\\ &= \boxed{\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{y}{y^2-\sqrt{2}\cdot y+1} - \frac{y}{y^2-\sqrt{2}\cdot y+1}\right)}\end{aligned}$$

La question précédente fournit alors une primitive :

$$\int \frac{y^2}{1+y^4}\,\mathrm{d}y = \boxed{\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{y^2-\sqrt{2}\cdot y+1}{y^2+\sqrt{2}\cdot y+1}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\operatorname{Arctan}(\sqrt{2}\cdot y-1)+\operatorname{Arctan}(\sqrt{2}\cdot y+1)\Big).}$$

5. On commence par une IPP (les fonctions sont $\mathcal{C}^1$), puis un changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$ donné par $x=y^2$, amenant $\mathrm{d}x = 2y\,\mathrm{d}y$:

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{Arctan}(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= 2\sqrt{x}\cdot\operatorname{Arctan}(x) - \int\frac{2\sqrt{x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= 2\sqrt{x}\cdot\operatorname{Arctan}(x) - \int\frac{4y^2}{1+y^4}\\ &= 2\sqrt{x}\cdot\operatorname{Arctan}(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{y^2-\sqrt{2}\cdot y+1}{y^2+\sqrt{2}\cdot y+1}\right) - \sqrt{2}\Big(\operatorname{Arctan}(\sqrt{2}\cdot y-1)+\operatorname{Arctan}(\sqrt{2}\cdot y+1)\Big)\\ &= \boxed{2\sqrt{x}\cdot\operatorname{Arctan}(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x-\sqrt{2x}+1}{x+\sqrt{2x}+1}\right) - \sqrt{2}\Big(\operatorname{Arctan}(\sqrt{2x}-1)+\operatorname{Arctan}(\sqrt{2x}+1)\Big)}\end{aligned}$$