Lycée Louis-Le-Grand, Paris
MPSI 4 – Mathématiques
A. Troesch

Problème n° 6 : Étude d'une fonction réciproque

Correction du problème 1 – Etude d'une fonction réciproque

PARTIE I – Étude de g

1. **Variations de g.**

(a) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, continue et dérivable (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$, puisque c'est une fonction polynomiale. Sa dérivée est :

$$f'(t) = 3t^2 + 1.$$

Cette dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, et y est toujours positive. D'où le tableau de variation de f :

t	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(t)$	$+$
$f(t)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

Déterminons les points d'inflexion de f. Pour cela, étudions la dérivée seconde : $f''(t) = 6x$. Ainsi, f'' s'annule en 0, est négative pour $t < 0$ et positive pour $t > 0$ (elle change donc de signe en 0).
Ainsi, $\boxed{\text{0 est un point d'inflexion, et } f \text{ est concave sur } \mathbb{R}_- \text{ et convexe sur } \mathbb{R}^+}$.

(b) Voir figure 1. La pente de la tangente au point d'inflexion $(0, 0)$ est $f'(0) = 1$. Ainsi, l'équation de la tangente en ce point d'inflexion est $\boxed{y = x}$.

(c) Comme f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$, f est continue et strictement croissante. Ainsi, d'après le théorème de la bijection, f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle image $f(\mathbb{R})$. D'après les valeurs des limites de f en $+\infty$ et $-\infty$, cet intervalle image est $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Ainsi, f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc une $\boxed{\text{fonction réciproque } g}$, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Par définition, g vérifie $f \circ g = \mathrm{id}$, c'est-à-dire :

$$\boxed{g^3(x) + g(x) = x}. \tag{1}$$

(d) f étant strictement croissante et impaire, sa réciproque $\boxed{g \text{ est aussi strictement croissante et impaire}}$
Puisque g est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, son image est $\mathbb{R}$. Comme elle est croissante, elle admet des limites (dans $\overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$ et $-\infty$. Si par exemple en $-\infty$, cette limite est $\ell > -\infty$, on obtient, par croissante, $g(\mathbb{R}) \subset [\ell, +\infty[$, ce qui contredit $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Ainsi, $\boxed{\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty}$ et de même $\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$.

(e) D'après le théorème de dérivation des fonctions réciproques, puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée ne s'annule pas, sa récirpoque g est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, le cours nous assure même que $\boxed{g \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ également}}$. On obtient alors l'expression de la dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \frac{1}{f' \circ g(x)} = \frac{1}{3g^2(x) + 1}. \tag{2}$$

- g étant croissante et négative sur $\mathbb{R}_-$, g^2 est décroissante et positive, donc g' est croissante.
- De la même manière, on montre la décroissance de g' sur $\mathbb{R}_+$.
- Les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$, et la valeur en 0 amènent sans difficulé les valeurs des limites et extrema de g'.

On obtient alors le tableau de variation suivant :

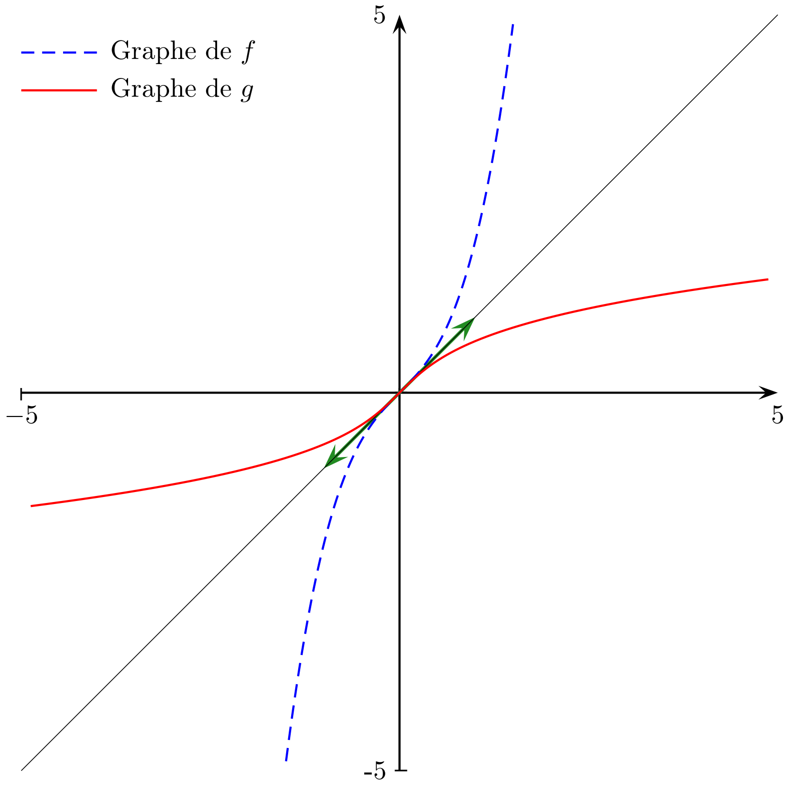

FIGURE 1 – Graphes de f et de g

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	0 ↗	1	↘ 0

Les variations de g' permettent de conclure que $\boxed{g \text{ est convexe sur } \mathbb{R}_- \text{ et concave sur } \mathbb{R}_+}$. En particulier, la courbe admet un $\boxed{\text{unique point d'inflexion en } 0}$.

(f) On l'a justifié dans la question précédente.

(g) Voir figure 1. On obtient le graphe de g en prenant le symétrique du graphe de f par la droite d'équation $y = x$.

Les résultats précédents sur g (variations, limites, points d'inflexion) se déduisent bien de cette symétrie !

2. **Étude de** g' – Certaines propriétés de g' ne se déduisent pas de f'.

(a) Comme $f^{(3)} = 6$, $f^{(3)}$ ne s'annule pas et par conséquent, $\boxed{f' \text{ n'a pas de point d'inflexion}}$.

(b) Le point essentiel est de réussir à se ramener à un intervalle fermé borné afin de pouvoir utiliser le théorème de compacité.

Si α est constante sur $[a, +\infty[$, le résultat est évident (tout point convient).

Sinon, soit $x \in]a, +\infty[$ tel que $\alpha(x) \neq \alpha(c)$ et soit $y = \dfrac{\alpha(x) + \alpha(c)}{2}$. La valeur y est strictement comprise entre $\alpha(x)$ et $\alpha(c)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction α étant supposée continue, il existe $x_1 \in]c, x[$ et $x_2 \in]x, +\infty[$ tels que $\alpha(x_1) = \alpha(x_2) = y$. La fonction α étant continue sur l'intervalle fermé borné $[x_1, x_2]$, elle y admet un maximum et un minimum (théorème de compacité). Puisque $x \in [x_1, x_2]$ et $\alpha(x) \neq y$, soit le maximum, soit le minimum est obtenu en au moins un point de $]x_1, x_2[$, et est donc un extremum local de α sur l'ouvert $]x_1, x_2[$, donc aussi sur $[a, +\infty[$. Attention, ce raisonnement ne serait pas valable pour un extremum sur le bord !

Ainsi, $\boxed{\text{il existe } c \in]a, +\infty[\text{ tel que } \alpha \text{ présente un extremum local en } c.}$

(c) On calcule g'' en dérivant (2) : D'après le théorème de composition des limites, g admettant des limites $-\infty$

et $+\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$,

$$\lim_{x\to-\infty} g''(x) = \lim_{t\to-\infty} \frac{-6t}{(3t^2+1)^3} = 0, \varepsilon \lim_{x\to+\infty} g''(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad g''(0) = 0.$$

En appliquant la question précédente à g'' sur les deux intervalles $]-\infty, 0]$ et $[0, +\infty[$, on trouve $c_1 < 0$ et $c_2 > 0$ tels que g'' admet un extremum local en c_1 et en c_2 (pour c_1 on utilise la propriété symétrique à celle de la question précédente, en $-\infty$). Ceci équivaut bien à dire que g' admet un point d'inflexion en ces points.

Ainsi, $\boxed{g' \text{ admet au moins deux points d'inflexion.}}$

On pouvait aussi répondre à cette question par l'étude des variations de $g'' = h \circ g$, avec $h(t) = \dfrac{-6t}{(3t^2+1)^3}$. Comme g est bijective strictement croissante, cela revient à étudier les variations de h. Or,

$$h'(t) = \frac{-6(3t^2+1)^3 + 6t(18t(3t^2+1)^2)}{(3t^2+1)^6} = \frac{-6(3t^2+1) + 108t^2}{(3t^2+1)^4} = \frac{90t^2-6}{(3t^2+1)^4}.$$

Ainsi, $h'(t)$ est du signe de $15t^2 - 1$. h change donc de sens de variation en $-\frac{1}{\sqrt{15}}$ et en $+\frac{1}{\sqrt{15}}$. On en déduit que g'' change de sens de variation en $g^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{15}}\right) < 0$ et en $g^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right) > 0$. Ces deux valeurs correspondent à des points d'inflexion de g'. On peut même les expliciter puisque $g^{-1} = f$.

3. **Étude locale et asymptotique de** g

(a) La relation $\underset{a}{\sim}$ est clairement reflexive et symétrique. Par ailleurs, si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$, on considère un voisinage V de a sur lequel aucune des 3 fonctions ne s'annule (en prenant l'intersection de voisinages convenables sparément pour chacune des fonctions). On a alors

$$\forall x \in V, \quad \frac{f(x)}{h(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \times \frac{g(x)}{h(x)} \longrightarrow 1.$$

Ainsi, $f \underset{a}{\sim} h$, donc $\underset{a}{\sim}$ est transitive.

Ainsi, $\boxed{\underset{a}{\sim} \text{ est une relation d'équivalence}}$.

(b) On peut utiliser la définition de la dérivée, la fonction g étant dérivable en 0 :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \frac{g(x)}{x} = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \longrightarrow g'(0) = 1.$$

On obtient bien, par définition, $\boxed{g(x) \underset{0}{\sim} x.}$

(c) On peut élever un équivalent à une puissance d'exposant constant (revenir au quotient : le cube d'une expression tendant vers 1 tend encore vers 1 !). Ainsi, $g^3(x) \underset{0}{\sim} x^3$

En utilisant la relation de la question 1(c), il vient donc :

$$\forall x \neq 0, \quad \frac{g(x) - x}{-x^3} = \frac{g(x)^3}{x^3} \underset{x\to0}{\longrightarrow} 1.$$

Ainsi, $\boxed{g(x) - x \underset{0}{\sim} -x^3}$

(d) Puisque $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, g est négligeable devant g^3 en $+\infty$:

$$\frac{g(x)}{g^3(x)} \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi,

$$\frac{g(x)^3 + g(x)}{g(x)^3} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \qquad \text{soit:} \qquad \frac{x}{g(x)^3} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1, \qquad \text{puis:} \qquad \frac{x^{\frac{1}{3}}}{g(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Ainsi $\boxed{g(x) \underset{+\infty}{\sim} x^{\frac{1}{3}}}$

(e) La fonction h est définie par la formule : $h(x) = \dfrac{g(x)}{x^{\frac{1}{3}}} - 1$. Cette formule a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. Ainsi, h est bien définie. De plus, d'après la question précédente,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x^{\frac{1}{3}}} = 1, \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\lim_{x \to +\infty} h(x) = 0}.$$

(f) D'après (1), pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$x(1+h(x))^3 + x^{\frac{1}{3}}(1+h(x)) = x, \qquad \text{soit} \qquad x^{\frac{2}{3}}(1+h(x))^3 + 1 + h(x) = x^{\frac{2}{3}}$$

Ainsi, $x^{\frac{2}{3}}((1+h(x))^3 - 1) = -(1+h(x)) \underset{+\infty}{\sim} -1$ puisque $h(x)$ tend vers 0. Par ailleurs, d'après le cours,

$$\frac{(1+u)^\alpha - 1}{u} \underset{u \to 0}{\longrightarrow} \alpha,$$

donc, puisque $h(x) \to 0$ en $+\infty$,

$$(1+h(x))^3 - 1 \underset{+\infty}{\sim} 3h(x)$$

On en déduit, que

$$3x^{\frac{2}{3}}h(x) \underset{+\infty}{\sim} -1, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \boxed{\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{2}{3}}h(x) = -\frac{1}{3}}.$$

4. **Étude d'une primitive de g**

(a) Tout d'abord, remarquons que G est bien définie, car g est continue. Faisons le changement de variables proposé $u = f(t)$, possible puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$. Les bornes en u sont $u_1 = 0$ et $u_2 = x$, ainsi, les bornes en t sont

$$t_1 = f^{-1}(u_1) = g(u_1) = g(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad t_2 = f^{-1}(u_2) = g(u_2) = g(x).$$

De plus, la relation entre les différentielles est : $\mathrm{d}u = f'(t)\ \mathrm{d}t$ Ainsi, pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$G(x) = \int_0^x g(u)\ \mathrm{d}u = \int_0^{g(x)} g(f(t))f'(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{g(x)} t \cdot f'(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{g(x)} (3t^3 + t)\ \mathrm{d}t =$$

$$= \left[\frac{3}{4} \cdot t^4 - \frac{1}{2} \cdot t^2\right]_0^{g(x)} = \frac{3}{4} \cdot g^4(x) - \frac{1}{2} \cdot g^2(x).$$

On obtient donc : $\boxed{G = \frac{3}{4}g^4 - \frac{1}{2}g^2}$

(b) On commence par la parité. La fonction g étant impaire,

$$G(-x) = \frac{3}{4} \cdot g^4(-x) - \frac{1}{2} \cdot g^2(-x) = \frac{3}{4} \cdot (-g(x))^4 - \frac{1}{2} \cdot (-g(x))^2 = \frac{3}{4} \cdot g^4(x) - \frac{1}{2} \cdot g^2(x) = G(x)$$

Ainsi, $\boxed{G \text{ est pair}}$.

Par définition, la dérivée de G est g, qui est négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi, $\boxed{G \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_- \text{ et croissante sur } \mathbb{R}_+.}$

(c) La limite de g en 0 est 0. Ainsi, $g^4(x) = o(g^2(x))$ au voisinage de 0. Par conséquent,

$$\boxed{G(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{2} \cdot g^2(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{2} \cdot x^2}.$$

La limite de g est $+\infty$ en $+\infty$, ainsi $g^2(x) = o(g^4(x))$ au voisinage de $+\infty$, et par conséquent

$$\boxed{G(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{4} \cdot g^4(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{4} \cdot x^{\frac{4}{3}}}.$$

PARTIE II – Approximation rationnelle de g

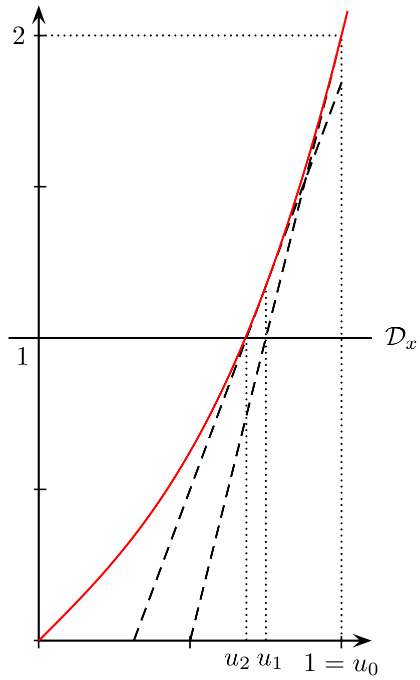

FIGURE 2 – Premières valeurs de $u_n(1)$

1. **Construction de l'algorithme d'approximation**
   - L'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse t est :

$$Y = (X - t)f'(t) + f(t) = (X - t)(3t^2 + 1) + t^3 + t = (3t^2 + 1) \cdot X - 2t^3.$$

   L'abscisse du point d'intersection de cette droite avec la droite d'équation $Y = x$ vérifie donc :

$$x = (3t^2 + 1) \cdot X - 2t^3, \qquad \text{soit} \qquad \boxed{X = \frac{2t^3 + x}{3t^2 + 1}}.$$

   - Par conséquent, par définition de la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, cette suite vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{u_{n+1}(x) = \frac{2u_n(x)^3 + x}{3u_n(x)^2 + 1}}.$$

   Cette relation d'ordre 1, et la condition initiale $\boxed{u_0(x) = x}$ déterminent entièrement la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.
2. **Étude graphique d'un exemple.** On note u_n pour $u_n(1)$. Voir figure 2.
3. **Étude de l'algorithme**
   (a) On calcule $\varphi(g(x))$: $\varphi(g(x)) = \dfrac{2g^3(x) + x}{3g^2(x) + 1} = g(x) \cdot \dfrac{2g^3(x) + x}{3g^3(x) + g(x)}$. Or, d'après la relation (1),

$$2g^3(x) + x = 2x - 2g(x) + x = 3x - 2g(x), \qquad \text{et de même}, \qquad 3g^3(x) + g(x) = 3x - 2g(x).$$

   Ainsi, $\boxed{\varphi(g(x)) = g(x)}$.

   (b) $t - \varphi(t) = t - \dfrac{2t^3 + x}{3t^2 + 1} = \dfrac{t^3 + t - x}{3t^2 + 1} = \dfrac{f(t) - x}{3t^2 + 1}$. Ainsi, le signe de $\boxed{t - \varphi(t) \text{ est celui de } f(t) - x}$.

   (c) La fonction φ, définie sur $\mathbb{R}_+$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. Sa dérivée vaut :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi'(t) = \frac{6t^2(3t^2 + 1) - 6t(2t^3 + x)}{(3t^2 + 1)^2} = \frac{6t^4 + 6t^2 - 6tx}{(3t^2 + 1)^2} = \frac{6t(f(t) - x)}{(3t^2 + 1)^2}.$$

   Ainsi, $\boxed{\text{le signe de } \varphi' \text{ est celui de } f(t) - x \text{ sur } \mathbb{R}_+}$

   Tout d'abord, l'intervalle $[g(x), x]$ n'est pas vide, car d'après la partie I, $g(x) \leqslant x$. Par ailleurs, par définition de g, on a $f(g(x)) = x$, et omme f est croissante, pour tout $t \in [g(x), x]$, $f(t) \geqslant x$. Comme φ' est du signe de $f(t) - x$, on en déduit que φ' est positive sur $[g(x), x]$, donc $\boxed{\varphi \text{ est croissante sur } [g(x), x]}$.

(d) φ est croissante sur $[g(x), x]$. Ainsi

$$\varphi([g(x), x]) \subset [\varphi(g(x)), \varphi(x)].$$

On a montré plus haut que $\varphi(g(x)) = g(x)$. Par ailleurs,

$$\varphi(x) = \frac{2x^3 + x}{3x^2 + 1} = x \cdot \frac{2x^2 + 1}{3x^2 + 1} \leqslant x \cdot \frac{3x^2 + 1}{3x^2 + 1} = x.$$

Ainsi, $\boxed{\varphi([g(x), x]) \subset [g(x), x]}$.

(e) Soit $t \in [g(x), x]$. On a déjà montré dans la question 3c que $f(t) - x \geqslant 0$, donc $t^3 + t - x \geqslant 0$. De plus $t - x \leqslant 0$, donc $t^3 + t - x \leqslant t^3$. Par conséquent, pour tout $t \in [x, g(x)]$:

$$0 \leqslant \varphi'(t) = \frac{6t(t^3 + t - x)}{(3t^2 + 1)^1} \leqslant \frac{6t^4}{(3t^2 + 1)^2} \leqslant \frac{6t^4}{(3t^2)^2} \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{0 \leqslant \varphi'(t) \leqslant \frac{2}{3}}.$$

4. **Étude de la convergence**

(a)
- $u_0(x) \in [g(x), x]$. Comme cet intervalle est stable par φ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}(x) = \varphi(u_n(x))$, on en déduit par une récurrence immédiate que $u_n(x) \in [g(x), x]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Puisque $u_1(x) \in [g(x), x]$ et $u_0(x) = x$, on a $u_1(x) \leqslant u_0(x)$. La croissance de φ permet de propager cette inégalité aux rangs suivants par une récurrence immédiate : si $u_n(x) \leqslant u_{n-1}(x)$, en appliquant la fonction croissante φ, et d'après la relation satisfaite par les $u_n(x)$, on obtient $u_{n+1}(x) \leqslant u_n(x)$. Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (u_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$
- Comme elle est aussi minorée par $g(x)$, elle converge. Puisque φ est continue, sa limite ℓ vérifie $\ell = \varphi(\ell)$, c'est-à-dire :

$$\ell = \frac{2\ell^3 + x}{3\ell^2 + 1},$$

ou encore :

$$3\ell^3 + \ell = 2\ell^3 + x, \qquad \text{d'où} \qquad \ell^3 + \ell = x.$$

La fonction $t \mapsto t^3 + t$ étant bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, l'équation $t^3 + t = x$ admet une unique solution. Cette solution est par définition $g(x)$. Ainsi, $\boxed{\ell = g(x)}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction φ est continue sur $[g(x), u_n(x)]$, dérivable sur $]g(x), u_n(x)[$, et φ' est compris entre 0 et $\frac{2}{3}$ sur $[g(x)u_n(x)] \subset [g(x), x]$. Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$0 \leqslant \varphi(u_n(x) - \varphi(g(x)) \leqslant \frac{2}{3}(u_n(x) - g(x)) \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{0 \leqslant u_{n+1}(x) - g(x) \leqslant \frac{2}{3}(u_n(x) - g(x))}.$$

(c) Soit $x \in [0, a]$. L'inégalité de la question précédente donne, par une récurrence immédiate :

$$0 \leqslant u_n(x) - g(x) \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n (u_0(x) - g(x)) = \left(\frac{2}{3}\right)^n (x - g(x)) \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n x \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n a.$$

Ainsi, cette inégalité étant vérifiée pour tout $x \in [0, a]$, il en résulte que

$$\boxed{\beta_n = \sup_{x\in[0,a]} (u_n(x) - g(x)) \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n a}.$$

(d) On part de la seconde expression :

$$(t - g(x))^2 \frac{2t + g(x)}{3t^2 + 1} = \frac{g^3(x) - 3t^2 g(x) + 2t^3}{3t^2 + 1} = \frac{x - g(x) - 3t^2 g(x) + 2t^3}{3t^2 + 1} = \frac{2t^3 + x - (3t^2 + 1)g(x)}{3t^2 + 1},$$

puis enfin : $\boxed{(t - g(x))^2 \dfrac{2t + g(x)}{3t^2 + 1} = \varphi(t) - g(x).}$

(e) Soit ψ la fonction définie par $\psi(t) = \dfrac{3t}{3t^2 + 1}$. Son domaine de définition est $\mathbb{R}$. Elle est impaire : il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}_+$. ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée :

$$\psi'(t) = \frac{(3t^2 + 1) - 6t(3t)}{(3t^2 + 1)^2} = \frac{3 - 9t^2}{(3t^2 + 1)^2}.$$

On en déduit les variations de ψ sur $\mathbb{R}_+$:

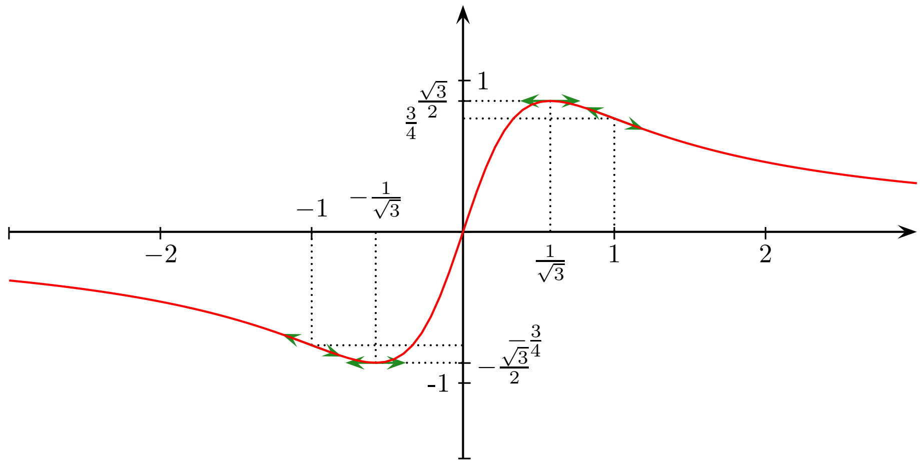

FIGURE 3 – Graphe de ψ

x	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$\psi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\psi(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

Ainsi, g admet un maximum égal à $\frac{\sqrt{3}}{2}$ en $\frac{1}{\sqrt{3}}$, et un minimum égal à $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ en $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. Pour déterminer ses points d'inflexion et sa convexité, on calcule la dérivée seconde (calculs à votre charge !) :

$$\psi''(t) = \frac{54(t^3 - t)}{(3t^2+1)^3}.$$

On en déduit le tableau de signe de φ'' :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$\psi''(x)$	$-$		$+$	$-$	$+$

Ainsi, ψ est concave sur $]-\infty,-1]$ et sur $[0,1]$, et est convexe sur $[-1,0]$ et sur $[1,+\infty[$. Elle admet trois points d'inflexion en -1, 0 et 1. On en déduit le tracé de la courbe de ψ (figure 3)

Evidemment, cette étude complète est inutile ici, seule la valeur des extrema nous intéresse.

(f)
- Si $t \in [g(x), x] \subset \mathbb{R}_+$, $g(x) \leqslant t$, et donc, d'après la question 4d,

$$\varphi(t) - g(x) \leqslant (t-g(x))^2 \frac{3t}{3t^2+1},$$

  et comme pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$0 \leqslant \frac{3t}{3t^2+1} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$$

  d'après l'étude précédente, on en déduit que pour tout $t \in [g(x), x]$:

$$0 \leqslant \varphi(t) - g(x) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(t-g(x))^2.$$

- En particulier, étant donné $n \in \mathbb{N}$, pour $t = u_n(x)$, on obtient :

$$0 \leqslant u_{n+1}(x) - g(x) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(u_n(x) - g(x))^2. \tag{3}$$

- On montre maintenant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$0 \leqslant u_n(x) - g(x) \leqslant \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2^n-1} (u_0(x)-g(x))^{2^n} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2^n-1} (x-g(x))^{2^n}. \tag{4}$$

Initialisation : Pour $n = 0$, les deux termes de l'inégalités sont égaux.
Hérédité : Supposons la prépriété vérifiée au rang n. Ainsi, la relation (4) est satisfaite pour cette valeur de n. De plus, (3) est satisfaite. Par conséquent :

$$0 \leqslant u_{n+1}(x) - g(x) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(u_n(x) - g(x))^2$$
$$\leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2^n-1}(x - g(x))^{2^n}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2^{n+1}-1}(x - g(x))^{2^{n+1}}.$$

La propriété est donc héréditaire, et par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut donc conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{0 \leqslant u_n(x) - g(x) \leqslant \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2^n-1}(x - g(x))^{2^n}.}$$

- De plus, d'après la relation (1), $x - g(x) = g^3(x)$; comme $u_n(x) \in [g(x), x]$, on en déduit que $x - g(x) \leqslant u_n(x)^3$. On obtient donc :

$$\boxed{0 \leqslant u_n(x) - g(x) \leqslant \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2^n-1}u_n(x)^{3\cdot 2^n}}.$$

(g) L'inégalité précédente ne permet de contrôler la convergence que lorsque $u_n^3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$. C'est pour cette raison qu'on se limite à l'intervalle $[0, 1]$.

```
import math

def phi(t,x):
    return (2 * t**3 + x) / (3 * t**2 + 1)

def g(x,err):
    u = x
    m = math.sqrt(3) / 2
    majorant = 1
    n = 0
    while majorant * (u ** (3 * 2 ** n)) > err:
        u = phi(u,x)
        n+=1
    return(u)
```

On peut même faire un tracé de la courbe sur $[0, 1]$, en utilisant les fonctions du module `matplotlib` :

```
import matplotlib.pyplot as plt

absc = []
ordo = []
for i in range(101):
    x = i * 0.01
    absc.append(x)
    ordo.append(g(x,1e-10))
plt.plot(absc,ordo)
plt.grid()
plt.savefig('pb_cnt017.eps')
plt.show()
```

On obtient le tracé suivant :