

# Indications des exercices

## MPSI 4

**Alain TROESCH**

---

Version du:

28 avril 2019



# Table des matières

1	Logique et raisonnements	3
2	Ensembles	6
3	Applications	8
4	Sommes, binôme	11
5	Relations	15
6	Nombres réels	19
7	Nombres complexes	23
8	Limites, dérivation	31
9	Fonctions usuelles	37
10	Calcul intégral	40
11	Équations différentielles linéaires	47
12	Suites	49
13	Calcul asymptotique	56
14	Approximations polynomiales	62
15	Séries numériques	69
16	Continuité et dérivabilité sur un intervalle	75
17	Intégration	79
18	Pivot de Gauss	82
19	Structures algébriques	83
20	Groupes symétriques	89

---

<b>21 Arithmétique</b>	<b>91</b>
<b>22 Polynômes et fractions rationnelles</b>	<b>95</b>
<b>23 Espaces vectoriels</b>	<b>101</b>
<b>24 Applications linéaires</b>	<b>105</b>
<b>25 Matrices</b>	<b>109</b>
<b>26 Déterminants</b>	<b>118</b>
<b>27 Algèbre bilinéaire</b>	<b>121</b>

# Logique et raisonnements

**Indications ou solutions pour l'exercice 1.1** – Pour le raisonnement déductif, bien décortiquer la structure logique, et poser les hypothèses.

**Indications ou solutions pour l'exercice 1.2** – La négation inverse les quantificateurs. Faire très attention au parenthésage.

**Indications ou solutions pour l'exercice 1.3** – La négation de l'existence et l'unicité équivaut à la négation de l'existence ou la négation de l'unicité.

**Indications ou solutions pour l'exercice 1.4** – Dans les phrases 2 et 3, se demander quelles sont les conditions à avoir pour obtenir la conclusion  $x \in B$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 1.5** – Rappel : la contraposée de  $A \implies B$  est  $\neg B \implies \neg A$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 1.6** –

1. Par l'absurde, en supposant qu'il n'y en a que  $n$ . Étudier la divisibilité de  $p_1 p_2 \cdots p_n + 1$  par un nombre premier quelconque.
2. Par récurrence forte, en remarquant que le raisonnement de la question précédente amène :

$$p_{n+1} \leq p_1 \cdots p_n + 1.$$

**Indications ou solutions pour l'exercice 1.7** –

1. Par contraposée, puis disjonction de cas. Remarquer que  $a^n - 1$  peut se factoriser par  $a - 1$  et plus généralement par  $a^d - 1$  lorsque  $d$  divise  $n$ .
2. Par contraposée, en cherchant de même que dans la question précédente une factorisation de  $a^n + 1$ .
3. Contraposée et disjonction de cas. Essayer de se ramener à la question précédente.

**Indications ou solutions pour l'exercice 1.8** – Même démonstration que pour  $\sqrt{2}$ . Essayez de généraliser à  $n$  quelconque, si  $n$  n'est pas un carré parfait (considérer un facteur premier de multiplicité impaire).

**Indications ou solutions pour l'exercice 1.9** – Deux pistes :

- Par l'absurde, en renumérotant les  $x_i$  de sorte à ce qu'ils soient rangés dans l'ordre croissant (pour une gestion plus facile des valeurs absolues). Sommer les  $|x_{i+1} - x_i|$ .
- Découper l'intervalle  $[0, 1]$  en  $n$  intervalles de longueur  $\frac{1}{n}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 1.10** – Sinon,  $a$  et  $b$  ont même parité. Peuvent-ils être pairs ? Justifier alors que  $c^2 \equiv 2 \pmod{4}$ . Est-ce possible ?

**Indications ou solutions pour l'exercice 1.11** – Par l'absurde. Classifier les droites suivant qu'elles contiennent 2 ou 3 points. Combien une droite portant 3 points permet-elle de former de paires de points. Montrer que le nombre de paires de points est de même parité que le nombre de droites. En déduire une contradiction.

**Indications ou solutions pour l'exercice 1.12** – Le joueur 1 peut toujours s'arranger pour retirer un nombre d'allumettes égal au complément à 8 du nombre d'allumettes tirées précédemment par le joueur 2. Arranger le premier coup pour tomber sur un multiple de 8. Généralisation évidente. Quel est le seul cas problématique ?

**Indications ou solutions pour l'exercice 1.13** –

1. Analyse-synthèse. Solution  $x = 5$
2. Analyse-synthèse. Solutions  $x = 1$  et  $x = 2$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 1.14** –

1. Analyse-synthèse.  $c = \int_0^1 f(t) dt$ .
2. Analyse-synthèse. Former un système satisfait par  $a$  et  $b$ , puis les exprimer en fonction de  $\int_0^1 f(t) dt$  et  $\int_0^1 tf(t) dt$ .  
Solution :  $a = 12 \int_0^1 tf(t) dt - 6 \int_0^1 f(t) dt$  et  $b = 4 \int_0^1 f(t) dt - 6 \int_0^1 tf(t) dt$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 1.15** – Par analyse-synthèse, en supposant qu'une telle décomposition existe. « Évaluer » successivement  $(x+1)f(x)$  en  $-1$ ,  $(x-1)f(x)$  en  $1$ ,  $(x-2)f(x)$  en  $2$  et  $(x-5)f(x)$  en  $5$ . La synthèse est alors une simple mise sur le même dénominateur. Un théorème qu'on verra en cours d'année nous dispensera par la suite de cette synthèse (ce théorème permet d'affirmer l'existence d'une telle décomposition).

Solution :  $a = -\frac{1}{36}$ ,  $b = \frac{1}{8}$ ,  $c = -\frac{1}{9}$ ,  $d = \frac{1}{72}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 1.16** – Analyse-synthèse. Écrire  $Z = \lambda X + Y$ , puis considérer la somme des coordonnées. Exprimer  $\lambda$  en fonction des coordonnées de  $Z$  et de  $X$ , puis exprimer  $Y$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 1.17** –

1. Analyse-synthèse. En notant  $S$  la somme des chiffres et  $n$  le code, montrer que  $n = 33S$ . Quelle est la plus grande valeur de  $n$  qu'on peut obtenir de la sorte ?
2. Analyse-synthèse :  $n = 231S$ . Utiliser  $n \equiv S [9]$  (test classique de divisibilité par 9) et en déduire que  $5n$  est divisible par 9. Il reste alors 3 valeurs possibles pour  $S$ . La synthèse permet d'en éliminer 2.  
Réponse : 4158.

**Indications ou solutions pour l'exercice 1.18** – Récurrence sur  $n$ . Former  $q_{n+1} - q_n$ , où  $q_n$  est le nombre étudié.

**Indications ou solutions pour l'exercice 1.19** – Il faut avoir une certaine maîtrise des signes  $\Sigma$ . Récurrence sur  $n$  à partir de la formule du binôme. Au rang  $n+1$  appliquer  $\mathcal{P}(n)$  en regroupant  $x_n$  et  $x_{n+1}$ , puis appliquer la formule du binôme à chaque  $(x_n + x_{n+1})^k$  qui apparaît.

**Indications ou solutions pour l'exercice 1.20** – Récurrence sur  $n$ . Minorer

$$\sum_{k=1}^{n+1} \sqrt{k} - \left( \frac{2(n+1)}{3} + \frac{1}{3} \right) \sqrt{n+1},$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence en isolant le dernier terme. Utiliser une quantité conjuguée et se débarrasser du  $\sqrt{n+1}$  le plus tard possible. Même principe pour la deuxième inégalité. Utiliser le théorème d'encadrement pour obtenir la limite  $\frac{2}{3}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 1.21** –

1. Trivial pour  $n < m$ . Récurrence sur  $n$  à  $m$  fixé, initialisée à  $n = m$ . Utiliser la formule comité-président  $m \binom{n}{m} = n \binom{n-1}{m-1}$  et la formule de Pascal.
2. Récurrence assez immédiate.
3. Récurrence.

**Indications ou solutions pour l'exercice 1.22** – Récurrence forte sur  $m$ . Pour l'hérédité, distinguer les deux cas possibles pour la première étape. Se ramener au cas  $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ .

On peut aussi utiliser la décomposition en base 2 de  $m$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 1.23** – Sans difficulté. Tout est basé sur des récurrences d'ordre 2. Le résultat exposé dans cet exercice est important (explicitation des suites récurrentes d'ordre 2). Nous le généraliserons en cours d'année.

**Indications ou solutions pour l'exercice 1.24** – Raisonner par récurrence sur  $n$ . Si des  $n+2$  éléments sélectionnés de  $\llbracket 1, 2n+2 \rrbracket$ , seulement  $n$  sont dans  $\llbracket 1, 2n \rrbracket$ , et qu'aucun ne divise un autre, ajouter à l'ensemble le nombre  $n+1$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 1.25** – Par HR, on peut déplacer la tour des  $n-1$  plus petits en 3, puis le grand disque en 2 puis la tour des  $n-1$  plus petits en 2. Le nombre minimal s'obtient par cet algorithme en considérant le nombre minimal au rang  $n-1$ , ce qui donne une relation de récurrence. Cette affirmation est à justifier soigneusement en remarquant que même si on fait des coups inutiles et des détours, il est nécessaire de se retrouver dans les configurations décrites ci-dessus.

**Indications ou solutions pour l'exercice 1.26** – Montrer que les nombres impairs ont tous même couleur, et que si un nombre pair a cette même couleur, il en est de même des suivants. En déduire que les nombres pairs sont tous de l'autre couleur.

Réponse : 40 en rouge, 2013 en bleu.

**Indications ou solutions pour l'exercice 1.27** – Récurrence forte descendante, à partir de  $n = 101$ . On traitera différemment les cas  $n \leq 90$  et  $n > 90$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 1.28** – Montrer plus généralement que  $u_n$  constitué de  $3^n$  chiffres 1 est divisible par  $3^n$  mais pas par  $3^{n+1}$  (par récurrence sur  $n$ ). On remarquera que :

$$u_{n+1} = u_n(1 + 10^{3^n} + 10^{2 \cdot 3^n}).$$

## Ensembles

**Indications ou solutions pour l'exercice 2.1** –

- Sens direct : deux choix naturels de  $Z$  peuvent convenir.
- Sens réciproque : Prendre  $x$  dans  $X$ , et utiliser l'une ou l'autre des deux inclusions, suivant que  $x \in Z$  ou non.

**Indications ou solutions pour l'exercice 2.2** – On peut raisonner élément par élément, en démontrant à chaque fois les deux implications, ou alors, plus rapidement et plus élégamment, travailler dans un ensemble global  $A$  contenant  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  (par exemple  $A = X \cup Y \cup Z$ ), et traduire les différences par  $X \setminus Y = X \cap Y^C$ , le complémentaire étant pris dans  $A$ . On s'en sort facilement avec les lois de Morgan et les propriétés de distributivité.

**Indications ou solutions pour l'exercice 2.3** – Par double inclusion. Pour l'inclusion directe, considérant  $x$  dans l'union, considérer, s'il en existe, un indice tel que  $x \in A_i \setminus A_{i+1}$ , les indices étant compris cycliquement. Que signifie le fait qu'il n'existe pas un tel indice ?

**Indications ou solutions pour l'exercice 2.4** – Non, tracer un diagramme en patates.

**Indications ou solutions pour l'exercice 2.5** – Considérer  $x \in C \setminus A$ , et montrer que  $x \in (C \cup D) \setminus (A \cup B)$ .

On peut aussi raisonner formellement uniquement avec des opérations ensemblistes en remarquant que  $A = (A \cup B) \cap D^C$ , le complémentaire étant pris dans un ensemble dont  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont des sous-ensembles.

**Indications ou solutions pour l'exercice 2.6** – Solution :  $B \subset X \subset \bar{A}$ . À quelle condition sur  $A$  et  $B$  l'équation admet-elle au moins une solution ?

**Indications ou solutions pour l'exercice 2.7** – Plusieurs méthodes possibles :

- Par récurrence, en utilisant la distributivité pour l'hérédité.
- Par double-inclusion : si  $x \in A_i \cup B_i$  pour un certain  $i$ ,  $x$  est dans  $\bigcup_{j \in I} A_j$ , sinon à l'autre union. Réciproque : sinon, construire  $I$  de sorte à n'avoir dans l'union que des ensembles ne contenant pas  $x$ .
- Montrer la relation en passant au complémentaire : se ramener à la propriété similaire dans  $\mathbb{R}$ , issue de la distributivité du produit sur la somme, en utilisant les fonctions caractéristiques, et le fait que  $x \in A \cup B$  si et seulement si  $\mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) \neq 0$ . Cette relation n'est d'ailleurs rien d'autre que le développement généralisé, lorsqu'on dispose d'une loi distributive sur une autre.

**Indications ou solutions pour l'exercice 2.8** – L'appartenance de  $x$  à l'un ou l'autre de ces deux ensembles impose des contraintes sur le nombre maximal ou le nombre minimal de  $X_i$  auxquels  $x$  appartient.

**Indications ou solutions pour l'exercice 2.9** – Sens direct évident. Réciproque : considérer  $X \in \mathcal{P}(X)$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 2.10** – Utiliser les cardinaux et la propriété de Cantor. On peut aussi adapter l'argument de Russell, en considérant  $E$  l'ensemble des éléments  $x$  de  $X$  tels que  $x \notin x$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 2.11** –

1. Ne pas se tromper dans les hauteurs d'imbrication : bien compter les accolades ! Le sigleton  $\{\emptyset\}$  n'est pas l'ensemble vide !  
Réponses (dans l'ordre) : oui, oui, oui, non.
2. (a)  $\mathcal{P}_2(X)$  contient 16 éléments, chacun de ces éléments étant un ensemble de sous-ensembles de  $X$ . Par exemple,  $\{\emptyset\}$ , ou  $\{\emptyset, \{1\}\}$ . L'ensemble  $\{\{\emptyset\}\}$  est-il élément de  $\mathcal{P}_2(X)$  ? Pour quelles valeurs de  $k$  est-il élément de  $\mathcal{P}_k(X)$  ?  
(b) Les cardinaux respectifs sont 1, 2 et 4.  
(c) Pour  $Y \in \mathcal{P}(X)$ , il s'agit de montrer que les éléments de  $Y$  sont éléments de  $\mathcal{P}(X)$ . Raisonner élément par élément en revenant à la transitivité de  $X$ .  
(d) Récurrence immédiate.
3. Classer les sous-ensembles de  $E \cup \{E\}$  suivant qu'ils contiennent l'élément  $E$  ou non, et étudier les 2 cas. Pour information, cette propriété est à la base de la définition des ordinaux de Cantor.
4. Sans difficulté.

**Indications ou solutions pour l'exercice 2.12** – Voir cette propriété comme une généralisation de la propriété de maximalité de l'intersection. Considérer la famille  $(U_i \cap V_j)_{(i,j) \in I \times J}$ .

On n'a pas unicité, puisqu'on peut ajouter à cette famille des parts redondantes ou vides, sans modifier la propriété requise. D'ailleurs, la famille considérée peut déjà contenir des redondances ou des parts vides. On peut reprendre le même exercice avec des partitions de  $X$ . Cette fois, on obtient l'unicité.

**Indications ou solutions pour l'exercice 2.13** – CNS : pour tout  $(i, j) \in I^2$ ,  $f_i$  et  $f_j$  coïncident sur  $X_i \cap X_j$ . On a alors unicité de  $f$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 2.14** – La difficulté essentielle est de bien comprendre les objets manipulés.

1. Sans difficulté, en suivant les définitions.
2. Étant donné  $S \in \mathcal{S}$ , construire  $f$  non nulle sur  $S$  et nulle ailleurs, et en déduire que  $S$  est élément du nerf du recouvrement. Réciproquement, étant donné  $S'$  élément du nerf, montrer qu'il existe  $S \in \mathcal{S}$  tel que  $S' \subset S$ , en déduire  $S' \in \mathcal{S}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 2.15** – Je n'ai pas trouvé de solution élémentaire (sans algèbre linéaire). J'attends vos suggestions.

## Applications

**Indications ou solutions pour l'exercice 3.1 –**

1.  $f(I) = [1, e[$
2.  $f(I) = \mathbb{R}_-$
3.  $f(I) = [\frac{1}{2}, 1]$
4.  $f(I) = [1, \frac{31}{27}]$  (étudier les variations)
5.  $f(I) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [2n, 2n + 1[$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 3.2 –**

1.  $f^{-1}(I) = \{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$ .
2.  $f^{-1}(I) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi ]$
3.  $f^{-1}(I) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [ -\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi ]$
4.  $f^{-1}(I) = ] - \infty, -4[ \cup ] 6, +\infty [$  (étude de variations et résolution des équations  $f(x) = 1$  et  $f(x) = 3$ , ou directement résolution d'inéquations).

**Indications ou solutions pour l'exercice 3.3 –**

1.  $[0, 1]$
2.  $[\frac{1}{2}, 1]$
- (a)
3. (a)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ] -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi [$ .
- (b)  $[-1, 0] \cup [2, 3]$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 3.4 –** Montrer que  $f(f^{-1}(F')) = F' \cap \text{Im}(f)$ .**Indications ou solutions pour l'exercice 3.5 –**

- Dans le sens direct, si  $U$  est un ouvert, considérer  $x$  de  $f^{-1}(U)$  et montrer l'existence de  $\delta$  en utilisant la continuité de  $f$  au point  $x$  et le fait que  $f(x)$  est un élément de l'ouvert  $U$ .
- Réciproquement, considérer  $U = ]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 3.6 –**

1. Pour l'exemple, considérer  $f$  non injective.

3. Par double-inclusion. Pour le sens direct, soit considérer les éléments, soit comparer  $B$  et  $f(f^{-1}(B))$ , pour  $B \subset F$ .

Pour la minimalité, utiliser la question 2.

4. Montrer  $(i) \implies (ii) \implies (iii) \implies (iv) \implies (i)$

La dernière implication peut se faire par contraposée. La deuxième en écrivant  $X \subset E$  comme union de singletons.

#### Indications ou solutions pour l'exercice 3.7 –

- Si  $f$  injective, considérer  $A, B \subset E$  et  $x \in A \setminus B$ . Que dire de  $f(x)$  relativement à  $f(B)$ ?
  - Si  $\widehat{f}$  est injective, quel candidat naturel  $Y$  peut vérifier  $f^{-1}(Y) = X$ , pour  $X$  donné?
  - Si  $\widehat{f^{-1}}$  est surjective, considérer un antécédant par  $\widehat{f^{-1}}$  des singletons.
- $(i) \implies (iii)$  : De quoi diffèrent deux ensembles  $Y$  et  $Y'$  ayant même image réciproque par  $f$ ?
  - $(ii) \implies (i)$  : contraposée
  - $(iii) \implies (iv)$  : Si  $\widehat{f^{-1}}$  injective, que vaut  $f(f^{-1}(B))$ ?

#### Indications ou solutions pour l'exercice 3.8 –

- Faire partir  $u$  en prenant  $x$  dans  $E$  et en le relevant par  $u$  dans  $E'$ .
- Si  $x \in \text{Im}(u)$ , construire  $f(x)$  par choix d'un antécédent de  $g(x')$  par  $v$ , où  $u(x') = x$ . Remarquez l'utilisation de l'axiome du choix...
- Pour la première, l'injectivité de  $v$  est nécessaire (sinon construire deux fonctions  $f_1$  et  $f_2$  dont la différence disparaît grâce au défaut d'injectivité de  $v$ ), ainsi que la surjectivité de  $u$  (faire différer  $f_1$  et  $f_2$  hors de l'image de  $u$ )  
Pour la deuxième, la surjectivité de  $v$  est CN par un résultat du cours (dé-composée). L'injectivité de  $u$  aussi (si  $x_1$  et  $x_2$  ont même image, on ne pourra obtenir aucune application différenciant les images de ces deux termes).

#### Indications ou solutions pour l'exercice 3.9 –

- Étant donné  $f : A \times B \rightarrow C$ , fixer  $b$  donne une application  $f_b$  de  $A$  dans  $C$ .
- Définir sur chacune des deux coordonnées.

#### Indications ou solutions pour l'exercice 3.10 –

- Penser division euclidienne
- Revenir indéfiniment sur les premiers entiers, en allant à chaque fois un peu plus loin.  
Vous pouvez trouver de nombreux autres exemples. Essayez par exemple en utilisant la décomposition en facteurs premiers.

**Indications ou solutions pour l'exercice 3.11** –  $f(n) = n$  par récurrence forte sur  $n$  : on n'a plus le choix de l'image.

**Indications ou solutions pour l'exercice 3.12** – Considérer  $\max(f^{-1}(\llbracket 0, M \rrbracket))$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 3.13** – Dans les deux hypothèses, on en déduit  $f \circ f = \text{id}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 3.14** – L'injectivité permet de supprimer un étage de  $p$ , la surjectivité permet, partant de plus bas, de rajouter artificiellement un étage afin de récupérer l'hypothèse.

**Indications ou solutions pour l'exercice 3.15** – Application directe de la propriété du cours liée aux propriétés d'injectivité ou surjectivité d'une composée. Récupérer d'abord la bijectivité de  $g$ , puis utiliser sa réciproque.

**Indications ou solutions pour l'exercice 3.16** – Dans les deux cas, essayer de construire  $g$  explicitement, en remontant les flèches. Dans un cas, il faut voir quoi faire quand il n'y a pas de flèche à remonter, dans l'autre, il faut voir quoi faire quand il y a plusieurs flèches à remonter.

**Indications ou solutions pour l'exercice 3.17** – Ces caractérisations de l'injectivité et de la surjectivité n'utilisent que les applications, et non les éléments. Cette caractérisation permet de définir des notions similaires à injectivité et surjectivité dans un contexte plus général et plus abstrait (dans une catégorie ou on a des objets, des flèches entre objets jouant le rôle d'applications, mais pas d'éléments). On parle dans ce contexte de monomorphismes et d'épimorphismes.

1. Sens direct immédiat en appliquant à  $x$ . Sens réciproque par contraposée, en construisant  $g$  et  $h$  nulles presque partout.
2. Sens direct facile. Sens réciproque par contraposée : sur quels éléments définir  $g$  et  $h$  différemment ?

**Indications ou solutions pour l'exercice 3.18** –

- Injectivité ssi  $A \cup B = E$
- Surjectivité ssi  $A \cap B = \emptyset$

**Indications ou solutions pour l'exercice 3.19** –

1. Si  $(A, B) \neq (\emptyset, \emptyset)$ ,  $(\emptyset, \emptyset)$  n'est pas dans l'image. Et sinon ?
2. CNS :  $A \cap B = \emptyset$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 3.20** –

1. Montrer d'abord  $f(P) \subset D$ . On évitera  $a + ib$ , et on utilisera l'expression du module, de la partie réelle et imaginaire en fonction du conjugué.  
Définir ensuite une  $g : D \rightarrow P$  (ne pas oublier de justifier  $g(D) \subset P$ ), réciproque de  $f$ .
2. Avec les conjugués. En déduire  $g(P) \subset P$ , puis définir une réciproque.

**Indications ou solutions pour l'exercice 3.21** – Pour la généralisation, raisonner par récurrence. Se ramener au rang  $n - 1$ , en composant deux flèches successives (sur le cercle). Montrer qu'on peut choisir les deux flèches qu'on compose de sorte que l'hypothèse au rang  $n - 1$  est alors vérifiée (on a les mêmes compositions globale qu'au rang  $n$ , faisant le tour du cercle, sauf une ; on peut s'arranger pour que celle qu'on n'a pas n'est pas l'unique injective ou l'unique surjective).

**Indications ou solutions pour l'exercice 3.22** – Définir  $g(x)$  en relevant  $x$  dans  $E$  par  $s$ . Montrer l'indépendance vis-à-vis du choix de l'antécédent de  $x$ . Montrer que la composée  $i \circ h$  est bien ce qu'on veut.

**Indications ou solutions pour l'exercice 3.23** – Écrire les diagrammes pour mieux comprendre la situation.

1. CNS :  $\text{Im}(g) \subset \text{Im}(f)$ . Unicité ssi la restriction de  $f$  à  $f^{-1}(\text{Im}(g))$  est injective.
2. CNS :  $f(x) = f(y) \implies g(x) = g(y)$ . Unicité ssi  $f$  bijective.

## Sommes, binôme

**Indications ou solutions pour l'exercice 4.1** – Effectuer le changement d'indice  $i' = i - 1$  dans le second facteur  $S_{k+1}(n)$ , et regrouper les deux sommes en factorisant autant que possible.

Solution :  $S_k(n) = \frac{n!}{k \times (n-k)!}$

**Indications ou solutions pour l'exercice 4.2** – Trouver  $P$  par identification, en imposant un coefficient constant nul. On trouve, sans surprise (puisqu'on connaît la valeur de la somme)

$$P = \frac{X(X-1)(2X-1)}{6}.$$

Faire un télescopage pour trouver la somme voulue.

On obtient de même pour un exposant 3 :  $P = \frac{X^2(X-1)^2}{4}$ , d'où la formule voulue par télescopage, et pour un exposant 4 :

$$P = \frac{1}{30}(X(X-1)(2X-1)(3X^2-3X-1))$$

puis par télescopage :

$$\sum_{k=0}^n k^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1).$$

**Indications ou solutions pour l'exercice 4.3** – Après quelques manipulations, se rendre compte que la racine se simplifie bien et part. Utiliser une décomposition de  $\frac{1}{k(k+1)}$  puis un télescopage. Réponse :  $n+1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n(n+2)}{n+1}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 4.4** – Regrouper les termes consécutifs de la somme pour lesquels la partie entière de la racine est la même. La somme vaut  $-2m$

Notant  $S_n$  la somme étudiée, comprendre les variations de  $S_n$  lorsque  $n \in [(2m)^2 - 1, (2m+2)^2 - 1]$ , et en déduire que sur cet intervalle  $|S_n|$  est majoré par  $2m+2$ . Conclure par la résolution d'une certaine inégalité. Les valeurs initiales de  $n$  doivent être étudiées à part.

**Indications ou solutions pour l'exercice 4.5** – Exprimer  $s$  et  $t$  comme sommes faisant intervenir les chiffres  $x_i$  de  $N$ .

Solution :  $t = 11(n-1)s$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 4.6** – Couper la somme interne au niveau de  $i$  pour expliciter le minimum.

Solution :  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 4.7** – On prouve la formule de dérivation par récurrence. La pseudo-formule du binôme se montre aussi par récurrence. Pour la montrer au rang  $n+1$ , commencer

par montrer l'égalité des dérivées par rapport à  $x$  des deux expressions (utiliser la question précédente pour exprimer ces dérivées). Primitiver, sans oublier la constante d'intégration, qui peut dépendre de  $y$ . Déterminer cette constante.

**Indications ou solutions pour l'exercice 4.8** – Invertir les deux sommes pour se ramener à la formule du binôme. On trouve :

$$\sum_{p=0}^{n-1} \sum_{k=0}^m \binom{n}{p} k^p = (m+1)^n.$$

Remarquer que cet argument permet de retrouver rapidement la relation de récurrence permettant de calculer de proche en proche les sommes de puissances d'entiers.

**Indications ou solutions pour l'exercice 4.9** –

De façon directe, en utilisant la somme des entiers, on est ramené à sommer un polynôme de degré 2 en  $i$ , qu'on peut exprimer en fonction de la somme  $S_2(n)$  des carrés

En intervertissant d'abord les deux sommes, on a directement  $S_2(n)$ .

On donne l'égalité des deux expressions, et on isole  $S_2(n)$ .

Même chose pour la somme des cubes en partant de  $\sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^n k^2$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 4.10** – De façon directe : on obtient le terme de gauche

En intervertissant les signes  $\sum$ , on calcule une somme géométrique, puis une deuxième somme géométrique.

De même pour la somme de la question suivante :

De façon directe, on obtient une somme d'entiers  $j$ , ce qui donne, à un facteur 2 près, une somme sur  $i$  des  $(i+1)(i+2)x^i$ .

On fait passer la somme sur  $i$  devant, on effectue les différentes sommes, on passe à la limite avec la question 1, et on trouve :

$$\sum_{i=2}^{+\infty} i(i-1)x^{i-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Nous avons obtenu les deux premières séries géométriques dérivées. Le résultat obtenu montre qu'au moins jusqu'à l'ordre 2 (et c'est vrai au-delà), on peut dériver les séries géométriques terme à terme.

**Indications ou solutions pour l'exercice 4.11** – Invertir les deux sommes, en remarquant que le choix d'un indice  $(X, x)$  tel que  $x \in X$ , peut se faire en commençant d'abord par choisir  $x$  quelconque, puis  $X$  contenant  $x$ , ce qui revient à choisir  $X'$  quelconque ne contenant pas  $x$  et lui ajouter  $x$ .

On peut aussi se servir des fonctions caractéristiques pour intervertir plus formellement les deux signes.

On obtient

$$\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} |X| = n2^{n-1}.$$

Même principe pour la deuxième somme. Solution :  $\sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} |X \cap Y| = n4^{n-1}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 4.12** – Pour la question 2, penser à la symétrie du coefficient binomiale, permettant de se ramener à la somme complète du 1.

Question 3 : sommer l'égalité précédente, et regrouper les 2 sommes de  $S_{n,i}$ .

Question 4 : penser à exprimer  $2^n$  comme somme de coefficients binomiaux (qu 1), exprimer la somme obtenue comme somme sur un triangle, intervertir les deux signes somme.

Question 5 : par dérivation.

**Indications ou solutions pour l'exercice 4.13** – Pour la deuxième question, regrouper les termes suivant leur parité dans la formule du binôme. Pour la dernière  $a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$ , définir  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  en discutant suivant la parité de  $n$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 4.14** – Considérer la somme  $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 4.15** – Comité-président pour les deux premières (en se ramenant à  $\sum k(k-1)\binom{n}{k}$  pour la seconde, et en comitant 2 fois). Comité président dans l'autre sens pour la seconde. On est alors ramené à des formules du binôme

On peut aussi procéder par dérivation de  $(1+X)^n$  et identification, ou par primitivation pour la dernière. Les deux premières (ou la version réduite de la seconde) peuvent se démontrer combinatoirement, en n'imposant pas de taille pour le comité.

**Indications ou solutions pour l'exercice 4.16** – Par récurrence sur  $n$ .

On peut aussi poser  $P = \sum_{k=1}^n \frac{X^k}{k}$  et  $Q = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \binom{n}{k} X^k$ , et montrer que  $P'(X) = -Q'(1-X)$ , d'où l'existence de  $C$  tel que  $P(X) = Q(1-X) + C$ . Évaluer  $C$  de deux manières et conclure.

**Indications ou solutions pour l'exercice 4.17** – Par symétrie, montrer d'abord que

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left( \binom{n}{k} - \binom{n}{k-1} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n+1} \left( \binom{n}{k} - \binom{n}{k-1} \right)^2$$

(on pourra distinguer suivant la parité de  $n$ )

Ensuite, développez le carré pour vous ramener à la formule de Vandermonde

$$\sum_{k=0}^{n \text{ ou } p} \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}.$$

**Indications ou solutions pour l'exercice 4.19** – Bidouillage de factorielles, pour se ramener à une somme sur une colonne du triangle de Pascal, qu'on calcule par télescopage. Solution : 2.

**Indications ou solutions pour l'exercice 4.20** –

1. Commencer par écrire  $k = n + k - n$ , comité-président des deux côtés, formule de Pascal, et on est ramené à une somme télescopique.
2. Soit  $M$  la somme avec les max,  $m$  la somme avec les min. Calculer  $M + m$  (facile) et  $M - m$  (un peu moins). Pour la première, on trouve  $n2^n$ , pour la seconde, séparer les indices  $k \leq \ell$  et  $k > \ell$ , et constater que c'est égal. Par interversions et changements d'indices, se ramener à une somme de Vandermonde, puis à la question 1. On obtient  $2n\binom{2n-1}{n}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 4.21** – On peut supposer  $x \leq y$ . On a, par le binôme,  $(y+1)^n - y^n \geq ny^{n-1}$ . En déduire que  $x^n \geq ny^{n-1}$ , et sachant  $x \leq y$ , conclure.

**Indications ou solutions pour l'exercice 4.22** – L'exercice n'est pas si dur que cela avec un peu de recul sur les notions. Plus tard dans l'année, il n'aurait pas mérité ses étoiles. La difficulté provient ici du fait qu'il est (volontairement) un peu prématuré.

1. Utiliser la décroissance de  $x \mapsto \frac{1}{x^3}$  pour encadrer l'intégrale  $\int_{n-1}^n \frac{1}{t^3} dt$ , ou ici, simplement, pour la minorer par  $\frac{1}{n^3}$ . Sommer avec Chasles, et calculer l'intégrale obtenue.
2. (a) De même, inverser (en mettant bout-à-bout) l'encadrement de l'intégrale obtenu précédemment pour encadrer  $\frac{1}{n^3}$  par deux intégrales. Sommer de  $n+1$  à  $N$ , calculer, faire tendre  $N$  vers  $+\infty$ .  
 (b)  $n_0 \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 10^{-4}$ .  
 (c) On somme les erreurs d'arrondi sur chaque somme, on obtient au final une erreur excédant  $10^{-8}$ .
3. Foncer tête baissée : faire la différence des deux membres, réduire au même dénominateur, développer, identifier. On obtient :

$$\frac{1}{n^3} = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{11}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} + \varepsilon_n,$$

où

$$\varepsilon_n = \frac{50n + 24}{n^3(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}.$$

4. Remarquer que

$$\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+m-1)} - \frac{1}{(n+1)\cdots(n+m)} = \frac{m}{n(n+1)\cdots(n+m)}.$$

Cela permet de calculer  $\zeta(3)$  à partir de l'expression précédente, en effectuant un télescopage pour les 3 premiers termes. Il ne restera plus que le quatrième terme faisant intervenir  $\varepsilon_n$ . On trouve pour  $\zeta(3)$  l'expression de  $T_n$  en remplaçant la borne  $n$  de la somme par  $+\infty$ . On obtient l'encadrement par majoration du reste de cette série.

5. Meilleur  $n_0$  : 64, ou 65 pour tenir compte des erreurs d'arrondi.

# Relations

**Indications ou solutions pour l'exercice 5.1** – Pour la question 2, une CS est l'injectivité de  $f$ . Pour un contre-exemple, on pourra considérer une fonction constante. Pour la question 3, montrer que  $\mathcal{R}$  n'est pas antisymétrique si  $f$  n'est pas injective (utiliser  $x \neq y$  tels que  $f(x) = f(y)$ ).

**Indications ou solutions pour l'exercice 5.2** –

1. Si une propriété est fausse, elle implique tout ce qu'on veut.
2. Manipulation formelle (distributivité, tiers-exclus).
3. Sans difficulté pour  $\mathcal{S}$ . Pour  $\mathcal{A}$ , raisonner par l'absurde en supposant  $z\mathcal{R}x$ .  
Réciproque : on peut trouver un contre-exemple avec 3 éléments (complet sur 2 et par sur le troisième)

**Indications ou solutions pour l'exercice 5.3** –

1. Considérer  $x\mathcal{R}x\mathcal{S}x$
2. (a) Ne pas oublier de construire sur l'objectif. Poser  $x$  et  $y$  tel que  $x\mathcal{S} \circ \mathcal{R}y$ , échanger  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{S}$ , introduire  $z$  au milieu, utiliser la symétrie de  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{S}$  et conclure.  
(b) Deux croix un peu décalées.
3. (a) La transitivité nous permet de nous ramener directement à l'antisymétrie de  $\mathcal{R}$   
(b) Aller de  $x$  à  $y$  et de  $y$  à  $x$  en suivant deux chemins (de longueur 2) qui ne sont pas symétriques. Ne mettre que ces deux chemins dans les relations.
4. (a) Trop facile  
(b) Avec 3 points, s'arranger pour obtenir, avec un minimum de flèches, une composée décrite par  $x_1 \rightarrow x_2$  et  $x_2 \rightarrow x_3$ .
5. Une inclusion provient de la transitivité, l'autre de la réflexivité qui permet d'ajouter une étape.

**Indications ou solutions pour l'exercice 5.4** –

1. Concaténer les deux chemins allant de  $x$  à  $y$  et de  $y$  à  $z$ .
2. Pour la symétrie, lire le chemin de  $x$  à  $y$  dans l'autre sens, en retournant toutes les flèches.
3. Considérer une autre  $\mathcal{T}'$ , et montrer  $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$  (au sens des graphes), c'est-à-dire  $x\mathcal{T}y \implies x\mathcal{T}'y$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 5.5** –

1. Montrer séparément  $(i) \iff (ii)$  et  $(i) \iff (iii)$ . La propriété  $(iii)$  affirme (après réexpression en passant au complémentaire) que si un sous-ensemble est tel qu'il ne contient pas d'élément admettant tous ses antécédents hors de cet ensemble (donc pas d'antécédent dans cet ensemble), alors cet ensemble est vide. Comparer à (i)!

2. Sinon, il n'est pas difficile de construire des chaînes infinies.
3. (a) Considérer une partie à 2 éléments.
- (b) Montrer (i), en utilisant le minimum.
- (c)  $\mathbb{N}$  muni de l'ordre usuel.

**Indications ou solutions pour l'exercice 5.6 –**

1. oui
2. non
3. non
4. oui
5. oui
6. oui
7. oui

**Indications ou solutions pour l'exercice 5.7 –**

1. Par les éléments. Discuter suivant que  $x \in C$  ou non.
2. Reflexivité car  $X \triangle X = \emptyset$ , transitivité par question 1.

**Indications ou solutions pour l'exercice 5.8 –**

1. Transitivité : remarquer qu'on ne peut pas avoir  $x = y = 0$  et  $yz > 0$ .  
Classes d'équivalence :  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $\mathbb{R}_-^*$  et  $\{0\}$
2. Le fait que  $\mathcal{R}$  est une congruence traduit les règles de signe pour le produit de deux réels.

**Indications ou solutions pour l'exercice 5.9 –** Pour la transitivité, utiliser le fait que l'union de deux ensembles au plus dénombrable est encore au plus dénombrable.

**Indications ou solutions pour l'exercice 5.10 –** Un couple  $(a, b)$  va représenter l'entier relatif  $a - b$ . Deux couples sont équivalents si et seulement s'ils représentent le même entier relatif. Tout entier relatif est représenté par au moins un couple.

**Indications ou solutions pour l'exercice 5.11 –**

1. Poser les éléments  $(X, Y, x$  et  $\varepsilon)$ . Pour la transitivité,  $\varepsilon$  est à voir comme une marge d'erreur à répartir entre les différents points où l'on sera amené à faire une approximation : couper  $\varepsilon$  en 2 et utiliser les hypothèses avec  $\frac{\varepsilon}{2}$ .
2. Montrer que si l'un est non borné, l'autre aussi. Dans le cas où ils sont tous deux bornés, utiliser la caractérisation par  $\varepsilon$  de la borne supérieure. Pour montrer que  $M$  est inférieur à la borne sup de  $Y$  il suffit de montrer que pour tout  $\varepsilon$ , on peut trouver  $y$  tel que  $y \geq M - \varepsilon$ . Trouver d'abord  $x$  puis  $y$  par définition de la relation. Il y a deux marges d'erreur à utiliser, donc couper  $\varepsilon$  en 2.
3. Passage au quotient de l'application qui à  $X$  associe son sup.

**Indications ou solutions pour l'exercice 5.12 –**

1. Vérifier les 3 points, ou alors remarquer qu'il s'agit de la relation d'inclusion de  $\mathcal{P}(E \times E)$ , restreinte à l'ensemble des graphes des relations d'ordre.
2. L'ordre discret  $x \leq x$  ssi  $x = x$ .
3. Les ordres totaux, qui ne peuvent pas être prolongés strictement. Tout autre ordre peut être prolongé en un ordre total (c'est le résultat d'un autre exercice), donc n'est pas maximal.

**Indications ou solutions pour l'exercice 5.13** – Contredire la réflexivité.

**Indications ou solutions pour l'exercice 5.14** –

1. Voir  $X$  et  $Y$  comme deux étages ; de tout élément de  $x$  part un ascenseur vers  $Y$ . De là, on peut éventuellement repartir vers  $Z$  pour la transitivité. Pour l'antisymétrie, qui est le plus délicat, construire  $x \leq y \leq x'$ , et montrer  $x = x' = y$  en utilisant la liberté de  $X$  et l'antisymétrie de  $\leq$ . cela prouve une des deux inclusions requises.
2. Il s'agit juste de comprendre ce que ça signifie : il faut montrer que  $X \subset Y \implies X\mathcal{R}Y$ , ce qui est évident.
3. Il est facile de construire  $X\mathcal{R}Y$  et  $X$  non inclus dans  $Y$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 5.15** – Commencer par montrer que tout ensemble ordonné non vide fini admet au moins un élément maximal. Construire  $\varphi$  par récurrence : à quel entier peut-on associer cet élément maximal ?

**Indications ou solutions pour l'exercice 5.16** – On a évidemment  $\sup(A \cup B) = \sup(\sup(A), \sup(B))$ . On pourra commencer par montrer que cette dernière expression est un majorant de  $A \cup B$ , puis que tout autre majorant lui est supérieur.

**Indications ou solutions pour l'exercice 5.17** – L'ensemble des majorants est non vide (pourquoi ?). Considérer sa borne inférieure.

**Indications ou solutions pour l'exercice 5.18** – Il s'agit respectivement de l'union et l'intersection. Traduire la stabilité sur les éléments : pour tout  $x \in X$ ,  $f(x) \in X$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 5.19** – Utiliser le lemme de Zorn, en montrant que l'ensemble des chaînes, ordonné par inclusion, est inductif. Pour cela, étant donnée une chaîne de chaîne, montrer que l'union est encore une chaîne, en remarquant que si  $x$  et  $y$  appartiennent à cette union, on peut trouver une chaîne les contenant les 2.

**Indications ou solutions pour l'exercice 5.20** – Par l'absurde, construire une suite croissante infinie, en énumérant tous les éléments de  $E$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 5.21** – On obtient facilement une inégalité en remarquant que deux éléments de la chaîne maximale ne peuvent pas être dans la part de la partition en cochaîne. Pour montrer l'égalité, il suffit de trouver une partition ayant nombre de parts égal à la longueur d'une chaîne maximale. Pour cela, considérer les éléments minimaux, les enlever, et recommencer récursivement.

**Indications ou solutions pour l'exercice 5.22** –

1. Montrer que si  $T^k u < u$  alors  $T^{2k} u < u$ , et idem pour l'autre inégalité. Montrer alors la propriété par récurrence forte sur  $k$ , en se ramenant au cas  $k$  impair, et en discutant suivant la parité de la dernière séquence de 1.
2. Montrer que si  $\varepsilon$  est admissible minimale, elle débute par 110. En déduire que chaque séquence  $\varepsilon_{2n} \quad \varepsilon_{2n+1}$  est égale à 10 ou 01 (on commencera par remarquer que cette propriété est aussi satisfaite pour  $u$ ). Remarquer ensuite que si  $(\varepsilon_n)$  est admissible minimale,  $(\varepsilon_{2n})$  aussi. Montrer alors par récurrence forte que  $u = \varepsilon$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 5.23** –

1. Sans difficulté
2. (a) Supposer  $y\mathcal{R} \subset x\mathcal{R}$  et montrer  $\mathcal{R}x \subset \mathcal{R}y$ . Pour  $z \in \mathcal{R}x$ , montrer  $z \in \mathcal{R}y$  en raisonnant par l'absurde et en utilisant l'antisymétrie. De même pour l'autre implication. Ne pas oublier de montrer l'antisymétrie.

Remarquer également qu'un tournoi est réflexif.

- (b) La minimalité de  $x$  implique l'existence de  $z \in y\mathcal{R}$  tel que  $z \notin x\mathcal{R}$ . Utiliser l'asymétrie pour conclure.

Réciproquement, étant donné  $y \neq x$ , en supposant l'existence d'un  $z$  convenable, montrer  $z = y$ , puis contredire l'inclusion  $x\mathcal{R} \subset y\mathcal{R}$  en considérant  $x$ .

- (c) Si  $\mathcal{R}$  est transitif,  $\mathcal{R} = T$ .

# Nombres réels

## Indications ou solutions pour l'exercice 6.1 –

- Si  $a < -\frac{1}{4}$ ,  $\mathcal{S} = \emptyset$
  - Si  $a \geq -\frac{1}{4}$ ,  $\mathcal{S} = \left[ \frac{3 - \sqrt{1+4a}}{2}, \frac{3 + \sqrt{1+4a}}{2} \right]$ .
- Si  $a > -2$ ,  $\mathcal{S} = \mathbb{R}$
  - Si  $a \leq 2$ ,  $\mathcal{S} = ]-\infty, 1 - \sqrt{-2-a}] \cup [1 + \sqrt{-2-a}, +\infty[$ .
- Si  $n$  est impair,  $\mathcal{S} = [ \sqrt[n]{a}, +\infty[$ .
  - Si  $n$  est pair et  $a < 0$ ,  $\mathcal{S} = \mathbb{R}$
  - Si  $n$  est pair et  $a \geq 0$ ,  $\mathcal{S} = ]-\infty, -\sqrt[n]{a}] \cup [ \sqrt[n]{a}, +\infty[$ .

Justifications par les variations.

- $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{30} + \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{30} + \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .
- Se ramener à  $2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 1$ ; Solution :  $x \equiv \frac{\pi}{8} \pmod{\pi}$  ou  $x \equiv \frac{3\pi}{8} \pmod{\pi}$ .
- $\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[ \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right]$ .
- $\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[ -\frac{5\pi}{8} + k\pi, \frac{\pi}{8} + k\pi \right]$ .
- $\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 6.2** – Réduire le terme du milieu au même dénominateur, factoriser, et multiplier en haut et en bas par  $(1 + \sqrt{x})^2$ .

## Indications ou solutions pour l'exercice 6.3 –

- Élever au carré (pourquoi est-ce une équivalence?). Solution :  $x \geq 1$ .
- Disjonction de cas, pour se ramener à des membres positifs.  $\mathcal{S} = ]-\infty, 1]$ .
- $\mathcal{S} = \left] \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \right[$ .
- $\mathcal{S} = \left] -\infty, \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \right[$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 6.4** – Nécessairement,  $x \geq -m$ . Élever alors au carré, et isoler  $x$ , en faisant une disjonction de cas.

- Si  $m > 0$ ,  $\mathcal{S} = \left[ \frac{1 - m^2}{2m}, +\infty \right[$
- Si  $m \leq 0$ ,  $\mathcal{S} = \emptyset$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 6.5** – Tout passer du même côté, réduire au même dénominateur, puis étudier le signe du dénominateur et du numérateur. Grosse disjonction de cas, car il faut réussir à placer l'un par rapport à l'autre les 0 du numérateur et du dénominateur, qu'on note respectivement  $x_1$  et  $x_2$ , et à placer les signes suivant les signes des coefficients dominants. On peut regrouper certains cas en considérant  $\min(x_1, x_2)$  et  $\max(x_1, x_2)$ .

- Si  $a < 6$  et  $a \neq \pm\sqrt{2}$ ,  $\mathcal{S} = ]-\infty, \min(x_1, x_2)[ \cup ]\max(x_1, x_2), +\infty[ \cup \{x_1\}$
- Si  $a > 6$ ,  $\mathcal{S} = ]x_2, x_1]$
- Si  $a = \pm\sqrt{2}$ ,  $\mathcal{S} = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{a}{2}\}$ .
- Si  $a = 6$ ,  $\mathcal{S} = ]-\frac{a}{2}, +\infty[$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 6.6** – Traduire par un encadrement. Solution  $]-\sqrt{8}, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \sqrt{8}[$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 6.7** –

Discuter suivant la parité de  $\lfloor x \rfloor$ . On pourra exprimer  $x$  sous la forme  $n + d$ .

Plus généralement, on discutera suivant la classe de congruence modulo  $m$  de  $\lfloor x \rfloor$ , et on exprimera  $\lfloor \frac{x+i}{m} \rfloor$  en fonction du quotient de  $\lfloor x \rfloor$  par  $m$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 6.8** – Encadrer la racine interne entre deux entiers consécutifs, puis propager cet encadrement de racine en racine. On continuerait ainsi en rajoutant des racines internes, en multipliant à chaque étape le coefficient par 4.

**Indications ou solutions pour l'exercice 6.9** – Écrire  $x = m + d$ , puis exprimer le terme de gauche.

**Indications ou solutions pour l'exercice 6.10** –

Justifier que  $x \geq 0$ , et écrire  $x = n + d$ .

Solutions :  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[ n, \frac{-(2n+1) + \sqrt{(2n+1)^2 + 4(n+1)}}{2} \right[$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 6.11** – Par encadrement se ramener à montrer que  $\lfloor \sqrt{4n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+1} \rfloor$ . Utiliser pour cela les classes de congruence modulo 4 des carrés parfaits.

**Indications ou solutions pour l'exercice 6.12** – Changement d'indice  $q \leftarrow q - k$ , et sommer avec la somme initiale. Se ramener à la question 1.

**Indications ou solutions pour l'exercice 6.13** – Poser  $\lfloor \frac{n}{25} \rfloor = k + \frac{\alpha}{25}$ , où  $\alpha \in \llbracket 0, 24 \rrbracket$ , et se ramener à montrer qu'il n'y a pas de multiple de 75 dans  $\llbracket 25\alpha + 50, 24\alpha + 72 \rrbracket$ . Quel est le plus petit multiple de 75 possible strictement supérieur à  $25\alpha + 50$  ?

**Indications ou solutions pour l'exercice 6.14** – Soit  $0 < \varepsilon < y - x$ , considérer  $n_0$  tel que  $f(x+1) - f(x) < \varepsilon$ , pour  $x \geq n_0$ . Faire à partir de là parcourir à  $f(n)$  un intervalle du type  $[n_1, n_1 + 1]$ ; la progression sur cet intervalle se fait à petits pas.

**Indications ou solutions pour l'exercice 6.15** –

1. Sinon, cela contredit l'irrationalité de  $\sqrt{2}$ .
2. Calculer  $\alpha\beta$ . Réponse : 2.
3. Calculer  $a^3$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 6.16** – Argument archi-classique! (sous-groupes de  $\mathbb{R}$ ). Remarquer que  $E$  est stable par somme et différence. Si  $\varepsilon > 0$ , montrer que  $\varepsilon > 0$ , en raisonnant par l'absurde (si ce n'est pas le cas, trouver  $x$  et  $y$  dans  $E$  proches de  $\varepsilon$  tels que  $0 < y - x < \varepsilon$ , et contredire la définition de  $\varepsilon$ . En déduire que  $\mathbb{Z}\varepsilon = E$  (pour la réciproque raisonner par l'absurde, en utilisant le reste de la division de  $x$  par  $\varepsilon$ , qui est aussi dans  $E$ ).

Déduire de ceci que nécessairement,  $\varepsilon = 0$  (exprimer 1 et  $\alpha$  en fonction de  $\varepsilon$  pour trouver une contradiction). Étant donné  $x < y$ , trouver  $u$  et  $v$  suffisamment proches de 0 dans  $E$ , et avancer par petits pas de longueur  $v - u$ , en s'arranger pour tomber dans la rivière  $]x, y[$ , trop large pour être franchie les pieds secs.

**Indications ou solutions pour l'exercice 6.17** – Initialiser pour  $n = 1$  mais aussi  $n = 2$  (car nécessaire pour l'hérédité) : regrouper les 2 membres, développer, simplifier, refactoriser. Hérédité pas trop dure. Utiliser  $H(n)$  puis  $H(2)$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 6.18** – Une normalisation (diviser chaque  $a_i$  et  $b_i$  par  $\|A\|$  et  $\|B\|$  pour se ramener à des coordonnées d'un vecteur unitaire) permet parfois de transformer une somme en produit. Y penser lorsque vous obtenez une somme au lieu d'un produit. Remarquer l'exploit : la première inégalité (celle de la question 2) est moins bonne que celle qu'on veut (dixit l'inégalité arithmético-géométrique), mais on parvient tout de même à montrer ce qu'on veut ! En fait, la normalisation nous a permis de nous raccrocher au cas d'égalité dans l'inégalité arithmético-géométrique.

**Indications ou solutions pour l'exercice 6.19** – Cauchy-Schwarz avec des  $b_i$  tous égaux à 1.

**Indications ou solutions pour l'exercice 6.20** – CS avec  $|a_k| = |a_k|^{1/3}|a_k|^{2/3}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 6.21** – CS avec 1-trick.

**Indications ou solutions pour l'exercice 6.22** – CS (mais vous vous en doutiez...)

**Indications ou solutions pour l'exercice 6.23** – Normalisation et IAG.

**Indications ou solutions pour l'exercice 6.24** – IAG sur plusieurs termes du développement, pour se ramener à des produits permettant d'exploiter l'hypothèse.

**Indications ou solutions pour l'exercice 6.25** – Montrer d'abord que tout  $a$  minore  $B$ , puis que  $\inf(B)$  est un majorant de  $A$ , puis conclure.

**Indications ou solutions pour l'exercice 6.26** – Réponse :  $\sup(A) - \inf(A)$  (répartir la marge d'erreur  $\varepsilon$  en haut et en bas, en la coupant en 2).

**Indications ou solutions pour l'exercice 6.27** – Clairement,  $\sup(A) = \sup(B)$  majore  $A + B$ . Si on le diminue de  $\varepsilon$ , répartir  $\varepsilon$  autour de  $\sup(A)$  et de  $\sup(B)$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 6.28** – Prendre un premier élément  $y$   $\varepsilon$ -proche  $a$ , puis  $x \in ]y, a[$  (pourquoi est-ce possible), pour obtenir 2 points proches. On peut itérer cette construction, pour obtenir une suite strictement croissante convergeant vers  $a$  (donc une infinité de points).

**Indications ou solutions pour l'exercice 6.29** –  $\sup(E) = 2$  et  $\inf(E) = -1$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 6.30** – Assez facilement,  $\inf(A) \leq \inf(B) \leq \sup(B) \leq \sup(A)$ , et  $\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B))$  et  $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$ .

Si  $A$  n'a rien autour de  $\inf(B)$  et réciproquement, on ne peut pas dire grand chose de  $\inf(A \cap B)$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 6.31** – La somme de la série majore chacune des sommes sur  $I$ . Si on la diminue d'un  $\varepsilon$ , une somme partielle (donc somme sur un sous-ensemble fini) passe au-dessus.

**Indications ou solutions pour l'exercice 6.32** –

1. TCSTP

2.  $\sum m_n$  est un majorant. Le diminuer de  $\varepsilon$ , en répartissant  $\varepsilon$  sur chacun des  $m_n$  (en coupant en  $\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ ).

---

**Indications ou solutions pour l'exercice 6.33** – Un majorant des  $(u_{i,j})$  est aussi un majorant des  $\sup_j(u_{i,j})$ ,  $i \in I$ , et vice-versa. Les deux ensembles ont donc même ensemble de majorants donc même borne supérieure.

**Indications ou solutions pour l'exercice 6.34** –

1. On pourra raisonner par la contraposée, et supposant que  $E$  n'est pas fermé, considérer un point  $x \notin E$  tel que pour tout  $r \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $B(x, r) \cap E \neq \emptyset$ .
2. Considérer un recouvrement par des boules de même rayon  $r > 0$ .
3. Les méthodes précédentes s'adaptent bien.

**Indications ou solutions pour l'exercice 6.35** –

1. Considérer l'union des intervalles ouverts contenant  $x$  et inclus dans  $U$ . Justifier que c'est un intervalle ouvert.
2. Montrer que soit  $I_x = I_y$ , soit  $I_x \cap I_y = \emptyset$ . Étant donnée une description de  $U$  comme union d'intervalles disjoints  $I_j$  indexés sur  $J$ , construire une injection  $J \rightarrow \mathbb{Q}$  en choisissant un rationnel dans  $I_j$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 6.36** – Après avoir éliminé le cas où un intervalle est inclus dans un autre, considérer un intervalle de borne sup maximale. Si c'est possible, choisir un intervalle incluant sa borne sup.

**Indications ou solutions pour l'exercice 6.37** – Tout élément  $x$  de  $U$  appartient à un pavé à coins rationnels inclu dans  $U$ .

# Nombres complexes

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.1** – Module :  $\left| \frac{1}{\cos(\theta)} \right|$ .

Argument :  $-\theta + \varepsilon\pi$ , où  $\varepsilon = 0$  si  $\theta \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \pmod{2\pi}$  et 1 si  $\theta \in ]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[ \pmod{2\pi}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.2** – Reconnaître l'intervention d'exponentielles complexes.

Module  $|\cotan(\frac{\theta}{2})|$ , argument  $-\frac{\pi}{2}$  ou  $\frac{\pi}{2}$ , selon le signe de la cotangente.

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.3** – Ecrire le numérateur et le dénominateur en forme trigonométrique.

partie réelle :  $2^9$ , partie imaginaire :  $-2^9\sqrt{3}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.4** –

1. Écrire la partie réelle à l'aide du conjugué, factoriser. Solution : union de l'axe réel et d'un cercle.
2. Résoudre à l'aide du discriminant. Pour la seconde partie de la question, revenir à l'équation !

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.5** –

1. Utiliser les conjugués et développer les carrés.
2. Poser  $z = \zeta^2$ ,  $z' = \zeta'^2$ , et se ramener à la question 1.

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.6** – Écrire la partie réelle avec le conjugué de  $z$ . Se ramener à une comparaison entre  $1 - \operatorname{Re}(z)$  et  $1 - 2\operatorname{Re}(z) + |z|^2$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.7** – Traduire l'appartenance à  $\mathbb{R}$  par l'égalité avec le conjugué.

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.8** –

1.
  - Justifier que  $f|_P$  est bien à valeurs dans  $D$  (calculer  $|f(z)|^2$  en utilisant le conjugué, et se ramener à  $\frac{x}{y}$  où  $x$  et  $y$  sont deux quantités positives telles que  $x < y$ , ce qu'on obtient grâce à l'hypothèse sur la partie imaginaire de  $z$ . Évitez les écritures avec  $a + ib$ , trop lourdes.
  - Résolvez en  $z$  l'équation  $f(z) = z'$ , afin de trouver une expression de la réciproque voulue,  $g$ .
  - Justifier que  $g|_D$  est à valeurs dans  $P$ , en exprimant la partie imaginaire à l'aide du conjugué, en réduisant au même dénominateur, et en développant (on arrive à exprimer le numérateur à l'aide de  $|z'|^2$ , ce qui permet d'utiliser l'appartenance de  $z'$  à  $D$ ).
  - On justifie que  $f|_P$  et  $g|_D$  sont réciproques l'une de l'autre.
2. Calcul simple en exprimant la partie imaginaire à l'aide de  $h(z)$  et son conjugué, et en utilisant l'hypothèse sur  $ad - bc$ .

3. Comme précédemment, on montre d'abord que  $h$  envoie  $P$  dans  $P$ , ce qui provient de la question précédente, on inverse l'expression, et on fait de même sur cette nouvelle expression (on remarquant qu'elle vérifie la même hypothèse sur  $ab - bc$ ).

#### Indications ou solutions pour l'exercice 7.9 –

1. Provient de  $|f(e^{i\theta})| = 1$ , en développant, regrouper les termes variant en  $\theta$  : cette partie s'annule, car  $|f(e^{i\theta})|$  constante.
2. Ces couples ont carrés ayant même somme et même produit, donc solutions de la même équation de degré 2.
3. Étudier les deux cas : poser  $c = e^{-i\alpha}a$  dans le premier cas et conclure à son impossibilité ; poser  $d = e^{-i\alpha}\bar{a}$  dans le second cas.
4. Vérification en calculant le module de  $f(e^{i\theta})$ , puis en vérifiant la surjection sur  $\mathbb{U}$ .

#### Indications ou solutions pour l'exercice 7.10 –

1. réponse :  $2 + 3i$  et  $-(2 + 3i)$ . N'oubliez pas votre méthode algébrique de recherche de la racine, en posant  $a + ib$  pour cette racine, en calculant son carré, en identifiant, et en rajoutant à cela l'égalité obtenue par les modules.
2. réponse :  $1 - 2i$  et  $-1 + 2i$ .

#### Indications ou solutions pour l'exercice 7.11 –

1. Remarquer que  $\Delta = -(10 + 5i)^2$  (se devine facilement, ou sinon, méthode de recherche algébrique d'une racine, un peu fastidieux ici). On a  $z^2 = -2i$  ou  $z^2 = 5 - 12i$ , puis  $z = 1 - i$  ou  $z = -1 + i$  ou  $z = 3 - 2i$  ou  $z = -3 + 2i$ .
2. Remarquer qu'on doit avoir  $3z^2 + z + 1 = i(z^2 + 2z + 2)$  ou  $3z^2 + z + 1 = -i(z^2 + 2z + 2)$ , et que  $z$  est solution de la première équation si et seulement si  $\bar{z}$  est solution de la deuxième (ce qui évite d'avoir à résoudre les 2). On obtient, pour la première,  $\Delta = (3 + 4i)^2$ , puis  $z_1 = i$ ,  $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ , et donc pour la deuxième  $z_3 = -i$  et  $z_4 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ .
3. Si  $n = 0$ , tout  $z$  est solution. Sinon,  $i$  n'est pas solution, divisez par  $(z - i)^n$ , et utilisez les racines  $n$ -ièmes de 1. N'oubliez pas le principe de symétrisation des arguments.  
Solution :  $z = \frac{1}{\tan(\frac{k\pi}{n})}$ ,  $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.12 –** Équation bicarrée.  $Z = z^2$  est égal à  $3 - 4i$  ou  $3 + 4i$ . On cherche les racines de ces deux complexes, soit par la méthode algébrique, soit en devinant, en se souvenant que la partie réelle doit s'exprimer comme différence de 2 carrés, et que les nombres impairs sont différences de 2 carrés successifs (ici  $3 = 2^2 - 1^2$ ). On trouve facilement

$$z_1 = 2 - i \quad z_2 = -2 + i \quad z_3 = 2 + i \quad z_4 = -2 - i.$$

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.13 –** Il s'agit d'une équation bicarrée. Chercher d'abord les solutions de  $Z^2 - (3 + 2i)Z + (8 - 6i) = 0$ .

Solutions :  $Z_1 = -2i$  et  $Z_2 = 3 + 4i$ , puis  $x_1 = -x_2 = (1 - i)$ ,  $x_3 = -x_4 = 2 + i$ .

#### Indications ou solutions pour l'exercice 7.14 –

1.  $\Delta = 3 - 4i = (1 - 2i)^2$  (à deviner en essayant d'écrire 3 comme différence de carrés d'entiers divisant  $\frac{4}{2}$ .  
Réponse :  $z_1 = i$ ,  $z_2 = 1 - i$
2.  $\Delta = -8 + 6i = (1 + 3i)^2$  (se devine aussi sur le même principe)  
Réponse :  $z_1 = 1 - 2i$ ,  $z_2 = 2 + i$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.15** – Factorisation quasi-immédiate  $(z^2 - e^{i\theta})(z^2 - e^{-i\theta})$ .

Solution :  $\pm e^{\pm i \frac{\theta}{2}}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.16** –

1. Pensez à la forme trigonométrique ! Réponse :  $\sqrt{2} \cdot e^{i \frac{\pi}{8}}$ .
2.  $\left\{ e^{i \frac{\pi}{5}}, e^{i \frac{3\pi}{5}}, e^{i \frac{5\pi}{5}} = -1, e^{i \frac{7\pi}{5}}, e^{i \frac{9\pi}{5}} \right\}$ .
3.  $\left\{ e^{i \frac{\pi}{16}}, e^{i \frac{5\pi}{16}}, e^{i \frac{9\pi}{16}}, e^{13i \frac{\pi}{16}}, e^{i \frac{17\pi}{16}}, e^{i \frac{21\pi}{16}}, e^{i \frac{25\pi}{16}}, e^{i \frac{29\pi}{16}} \right\}$
4.  $\left\{ e^{-i \frac{\pi}{2n} + i \frac{2k\pi}{n}}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$
5.  $\left\{ \sqrt[n]{2} e^{i \frac{2\pi}{3n} + i \frac{2k\pi}{n}}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.17** – Se ramener à  $Z^n = e^{\frac{i\pi}{3}}$ . En notant  $\alpha_k = \frac{\pi}{n} \left( \frac{1}{6} + k \right)$ , obtenir d'abord

$$z = \frac{(1+i) + (1-i)e^{2i\alpha_k}}{e^{2i\alpha_k} - 1}.$$

Écrire  $1+i$  et  $1-i$  sous forme trigonométrique, et symétriser les arguments au numérateur et au dénominateur. On peut simplifier l'expression obtenue en utilisant une formule d'addition du cosinus.

Solution :  $i(1 - \cotan(\alpha_k))$ ,  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.18** – Calculer  $A + B + C$ ,  $A + jB + j^2C$  et  $A + j^2B + jC$ . Pour résoudre le système obtenu, combiner convenablement de 3 manières différentes les 3 équations, de sorte à ne garder à chaque fois qu'une équation, en se servant de l'identité  $1 + j + j^2 = 0$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.19** – Introduire  $T_n$ , la somme alternée des termes impairs et considérer  $S_n + iT_n$ .

Réponse :  $(\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ .

On peut ensuite essayer de voir si on peut exprimer la même somme avec un  $\cos(2k\theta)$  en plus.

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.20** –

1. Multiplier le terme de droite par  $j^3 = 1$ , et distribuer les facteurs  $j$  convenablement.
2. Traiter d'abord  $u = 0$ , puis pour  $u \neq 0$ , évaluer le polynôme de la question précédente en  $\frac{u}{u}$ , en remarquant qu'il s'agit du polynôme de degré 3 dont les 3 racines sont les 3 racines cubiques de  $-1$ . De quel polynôme s'agit-il ?

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.21** – Forme trigo : classique. On obtient :

$$\left\{ e^{-i \frac{\pi}{8}}, e^{i \frac{3\pi}{8}}, e^{i \frac{7\pi}{8}}, e^{i \frac{11\pi}{8}} \right\}.$$

Pour la forme algébrique, calculer  $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ , ou alors appliquer à 2 reprises la méthode de calcul des racines carrées sous forme algébrique.

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.22** – Solution :  $2^{\frac{1}{2n}} e^{i \frac{\pi}{n} \left( \frac{1}{3} + 2k\pi \right)}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.23** –

1. Remarquer que  $\sum_k \omega_k^\ell = \sum_k \omega_\ell^k$ .
2. Par l'absurde, contredire la question 1.

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.24** –

1. Suite géométrique. On obtient 0
2. (a) Commencer par calculer  $A + B$  et  $AB$ , et en déduire un polynôme dont  $A$  et  $B$  sont racines.  
(b) À part un calcul un peu bourrin, je ne vois pas.

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.25** – Écrire  $z = e^{i\theta}$  (pourquoi ?), et montrer que  $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm \frac{1}{2}$ . Réponse :  $z = e^{\pm \frac{2i\pi}{3}}$ , si  $n \equiv 0 [6]$ , sinon pas de solution.

À retrouver par un argument purement géométrique.

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.26** – Se ramener au cas où  $\alpha = 1$ . En déduire  $\beta = j$  et  $\gamma = j^2$ , ou l'inverse.

Au passage, remarquez qu'on a obtenu le fait que pour des points du cercle unité, l'égalité  $\alpha + \beta + \gamma = 0$  caractérise les triangles équilatéraux.

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.27** –

1. Chercher les racines de  $P_n$  à l'aide des racines de l'unité.  $P_n$  doit avoir  $n - 1$  racines. On obtient les racines  $i \cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ . Ne pas oublier de fixer le bon coefficient dominant
2. Prendre  $n = 2p + 1$ , évaluer en 0.

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.28** – Constater que  $\omega^{k^2} = \omega^{(k+n)^2}$ , en déduire que  $Z$  est la somme prise sur n'importe quel ensemble de  $n$  entiers consécutifs.

Calculer  $|Z|^2$  à l'aide du conjugué, décaler les indices de la somme interne comme expliqué ci-dessus, de sorte qu'après changement d'indice, on soit ramené à une somme sur un carré d'un terme géométrique par rapport à un des deux indices.

Solution :  $n$  si  $n$  est impair,  $2n$  si  $n \equiv 2 \pmod{4}$  et  $0$  si  $n \equiv 0 \pmod{4}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.29** – Partir du terme de droite, en remarquant qu'ajouter le terme  $x = 0$  à la somme permet d'incorporer le terme  $p^{n-1}$  à l'expression générale.

Intervertir alors le produit et la somme interne (c'est l'expression de la distributivité généralisée,  $\prod_{i=1}^n \sum_j a_{i,j} =$

$$\sum_{j_1, \dots, j_n} \prod_i a_{i, j_i}.$$

Intervertir alors les deux sommes, et remarquer qu'on est ramené à des sommes de puissances de racines de l'unité, qui s'annulent, sauf lorsque la racine de l'unité en question est égale à 1. Remarquer que cette situation se produit justement lorsque les  $y_i$  sont solution de l'équation.

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.30** – Par l'absurde. Considérer la partie imaginaire modulo  $4^2$ . En déduire  $n \equiv 0 [4]$ . Développer  $(3 + 4i)^{4m}$  par la formule du binôme, extraire la partie réelle et la partie imaginaire, et travailler modulo 5, en simplifiant en utilisant  $4^2 \equiv 1 [5]$  et  $3^2 \equiv -1 [5]$ . Recombiner les deux sommes de sorte à obtenir  $2^{4m+1} \equiv 0 [5]$  et conclure.

Ceux qui connaissent un peu l'arithmétique de  $\mathbb{Z}[i]$  peuvent se rendre compte que c'en est une conséquence directe : les nombres premiers dans  $\mathbb{Z}[i]$  (premiers de Gauss) sont, à multiplication près par  $1, i, -1, -i, 1 + i$ , les nombres premiers congrus à 3 modulo 4,  $a + ib$ , et  $a - ib$ , où  $a^2 + b^2 = p$ ,  $p$  étant un nombre premier congru à 1 modulo 4. On peut montrer que  $\mathbb{Z}[i]$  est factoriel (ce qui signifie que la décomposition en facteurs premiers existe et est unique, à inversibles près). Ainsi, l'unique décomposition de  $5^n$  est :

$$5^n = (2 + i)^n (2 - i)^n.$$

Or,  $(3 + 4i)^n = (2 + i)^{2n}$ . L'égalité entre les deux contredirait l'unicité de la décomposition primaire dans  $\mathbb{Z}[i]$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.31** – Évaluer en  $z = 1$ ,  $z = -1$ ,  $z = i$  et  $z = -i$ . En combinant, obtenir  $b = c$  et  $a = d = 0$ . Conclure  $a = b = c = d = 0$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.32** – Conjuguer l'équation, et combiner les 2 de manière à récupérer  $z$  en fonction de  $j$ . Faire la synthèse pour s'assurer de l'équivalence. Symétriser les arguments pour obtenir l'expression sous forme trigonométrique.

Solution :  $\frac{1}{\sqrt{3}} e^{-i\frac{\pi}{6}}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.33** – Traiter les cas  $n = 0$  et  $n = 1$ , puis supposer  $n \geq 2$ . Montrer que si  $z \neq 0$ ,  $z$  est une racine  $n^2 - 1$ -ième de l'unité, puis en revenant à l'équation initiale, montrer que  $z$  est racine  $n + 1$ -ième.

Alternative plus simple : montrer que si  $z \neq 0$ ,  $|z| = 1$ . Exprimer alors  $\bar{z}$  en fonction de  $z$  et conclure.

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.34** – Minorer  $|\cos(k)|$  par  $\frac{1+\cos(2k)}{2}$ , et calculer la somme de ces termes.

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.35** – À voir comme partie imaginaire d'une somme géométrique d'exponentielles. Solution :

$$\forall n \geq 2, \quad S_n = \frac{\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \cotan\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

On obtient  $\frac{2}{\pi}$  ;

Comprendre géométriquement la signification de  $\frac{S_n}{n}$ , et en déduire une expression intégrale de cette limite. À vérifier ensuite par le calcul de l'intégrale.

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.36** – Remarquer que  $\omega_k = \omega_1^k$ . On est donc ramené à la dérivée d'une somme géométrique d'une part, et, à un terme près, à une somme du binôme (qu'on fait suivre d'une symétrisation des arguments). Pour la somme géométrique dérivée, on peut s'en sortir par dérivation, mais cela nécessite un argument de dérivation d'une fonction de la variable complexe, ce que vous ne pouvez pas bien justifier. Plus tard, on pourra justifier ce calcul par les règles de dérivation formelle dans le corps  $\mathbb{C}(X)$  des fractions rationnelles. Pour l'instant, on peut aussi faire ce calcul par une méthode vue dans une feuille antérieure, en introduisant une somme double.

Solutions : somme 1 :  $\frac{-n}{1-\omega_1}$  ; somme 2 :  $-(1 + (2 \cos(\frac{\pi}{n}))^n)$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.37** – Pour la première somme, écrire avec le conjugué, développer, et se servir des propriétés des sommes des racines. Réponse  $2n$

Pour la seconde, écrire le terme général sous forme d'un sinus. On est ramené à une somme de sinus. Réponse :  $2 \cotan\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.38** – Voir le sinus comme la partie imaginaire de l'exponentielle, et utiliser la formule du binôme, puis symétrisation des arguments.

Réponse :  $2^n \cos^n\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right)$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.39** – On écrit le cosinus du haut comme partie réelle de l'exponentielle, et on calcule la somme géométrique. Simplifier le dénominateur (qui est imaginaire pur).

Solution :  $\frac{\sin(nx)}{\cos^{n-1}(x) \sin(x)}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.40** – Utiliser les formules d'Euler, et poser  $z = e^{ix}$ . Réponse :  $z = 1, -1, -j, -j^2$ , d'où  $x = \dots$

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.41** –

- Factoriser dans  $\mathbb{C}$  par les racines de l'unité, les associer 2 à 2 pour obtenir une factorisation dans  $\mathbb{R}$ .
- Factoriser par  $X - 1$ , puis écrire le quotient comme polynôme du second degré en  $X^2 - 1$ . Factoriser ce polynôme.
- Solution :  $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.42** – Linéariser  $\sin^{2m}(t)$ , puis encore transformation de produit en somme :

$$\sin^{2m}(t) = \frac{(-1)^m}{2^{2m-1}} \sum_{k=0}^m \binom{2m}{k} \cos(2(m-k)t) + \frac{1}{4^m} \binom{2m}{m}.$$

Remarquer ensuite, par transformation d'un produit en somme, que sauf si  $k = \ell$ , pour tout  $k$  et  $\ell$  positifs,

$$\int_0^\pi \cos(kt) \cos(\ell t) dt = 0$$

Si  $m > 0$ , ne subsiste alors de la somme que le terme  $k = 0$ . On a à calculer  $\int_0^\pi \cos^2(2mt) dt$ , par linéarisation.

Réponse :  $\frac{(-1)^m \pi}{4^m}$ , valable aussi si  $m = 0$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.43** –  $\cos(3\theta) = 4 \cos^3(\theta) - 3 \cos(\theta)$  et  $\cos(4\theta) = 8 \cos^4(\theta) - 8 \cos^2(\theta) + 1$ .

Avec  $\theta = \frac{2\pi}{7}$ , on a  $\cos(3\theta) = \cos(4\theta)$ , d'où on déduit que  $\cos(\theta)$  est racine d'un certain polynôme de degré 4. Par l'absurde, supposer  $\cos(\theta) = \frac{p}{q}$ , irréductible. À l'aide de l'équation polynomiale, montrer que  $p = 1$  et  $q$  pair, et en écrivant  $q = 2\ell$ ,  $\ell$  divise 1. Conclure.

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.44** –

1. Récurrence
2. Récurrence et Formules de trigonométrie
3. Formule de Moivre et formule du binôme, puis on exprime tous les sin avec cos. On passe à une identité polynomiale par propriété de rigidité.

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.45** –

1. Récurrence facile
2. En prenant  $z = e^{i\theta}$ ,  $U_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.46** –

1. Linéarisation, c'est classique (Moivre + binôme).  
 Pour  $p = 1$  :  $\sin(3x) = 3 \sin(x) - 4 \sin^3(x)$ .  
 Pour  $p = 2$  :  $\sin(5x) = 5 \sin x - 20 \sin^3 x + 16 \sin^5 x$ .
2. (a) Avec  $t = \sin(\theta)$ , remarquer que  $\varphi(t)$  est aussi un sinus.  
 (b) Majorer  $|\varphi'|$ , puis inégalité des accroissements finis, si on connaît, sinon, intégrer  $\varphi'$  entre  $t$  et  $t'$ .
3. (a) Récurrence immédiate. Degré :  $3^{n-1}$   
 (b) Récurrence en appliquant 2(b) pour l'hérédité. Pour l'initialisation, il faut contrôler  $\sin(x) - x$ , voir par étude de fonction tant qu'on ne connaît pas les formules de Taylor (déterminer pour  $x \geq 0$  le signe de  $x - \sin(x) - \frac{x^3}{6}$ ).
4. Même principe. Cette fois,  $0 \leq \sin(x) - x + \frac{x^3}{6} \leq \frac{x^5}{120}$ , par formule de Taylor (ou étude de fonction, mais ça devient fastidieux).

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.47** –

1. Archi-classique : il s'agit des polynômes de Tchébychev de première et seconde espèce. Partir de la formule de Moivre et développer à l'aide du binôme.
2. L'égalité provient de  $U_{n-1}\left(\frac{1}{p}\right) = 0$ . Étudier ensuite la parité des termes de la somme.
3. Justifier que  $T_{n/2}(1/p) = 0$ , et simplifier. Montrer que la somme est paire. Conclure.

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.48** – Exprimer sous forme d'un rapport le fait que l'angle des sommets est  $\frac{\pi}{3}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.49** – Choisir convenablement son repère de sorte à ce que le triangle soit celui formé par les racines cubiques de 1 (on peut toujours le faire) Exprimer ensuite

les rotations par des applications complexes, et distinguer les cas  $ABD$  direct et  $ABC$  indirect. On peut aussi se souvenir qu'une composée de rotation est une rotation, ce qui évite certains calculs.

Solutions :

- Cas  $ABC$  direct : symétrie centrale de centre  $B$
- Cas  $ABC$  indirect : symétrie de centre le milieu de  $[AC]$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.50** – Exprimer  $b$  (affixe de  $B$ ) à l'aide de  $c$  et  $d$  (par rotation). De même pour  $a$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.51** – Supposons  $a$  et  $b$  à coordonnées entières et  $ABC$  direct. Exprimer  $c$  en fonction de  $a$  et  $b$  (par une rotation), et conclure.

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.52** – Exprimer  $e$  en remarquant que  $B$  se déduit de  $A$  par une rotation simple de centre  $E$ . De même pour les autres. Utiliser la condition d'orthogonalité donnée dans le cours.

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.53** –

1. On a égalité entre 2 angles ; le triangle est donc isocèle. Comparer les longueurs des côtés
2. Déterminer les affixes  $a'$ ,  $b'$  et  $c'$  de  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  en remarquant qu'on passe de  $B$  à  $C$  par une certaine rotation de centre  $A'$ . Si  $\omega$  est l'élément de  $\mathbb{U}$  décrivant cette rotation, montrer que dire que le triangle est équilatéral équivaut à dire que  $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ , et conclure.

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.54** –

1. Calculer le rapport  $\frac{b-a}{c-a}$ .  
Réponse :  $z = 1$ .
2. Calculer (avec conjugué) la partie réelle de  $(b-a)(\overline{c-a})$ , et exprimer sa nullité. Cela donne une équation sur  $z$  et  $\bar{z}$ , d'un type à reconnaître.  
Réponse : cercle de centre  $-j^2$  de rayon 1.
3. Même principe. Réponse :  $\mathbb{R}$ .
4. Ne pas oublier tous les cas (triangle rectangle en chacun des sommets). Exprimer l'orthogonalité à l'aide de l'expression complexe du produit scalaire. Encore une fois, à exprimer comme équation en  $z$  et  $\bar{z}$ , et reconnaître la figure géométrique.  
Réponse : triangles dégénérés :  $z = 0$ ,  $z = 1$ , rectangle en  $z$  : droite  $\operatorname{Re}(z) = -1$  ; rectangle en  $z^2$  : droite  $\operatorname{Re}(z) = 0$  ; rectangle en  $z^3$  : cercle de centre  $-\frac{1}{2}$  de rayon  $\frac{1}{2}$ .
5. On doit avoir  $OA$  orthogonal à  $BC$ , à exprimer à l'aide du produit scalaire complexe (comme vu dans le cours), et de même pour les autres hauteurs. Cela donne 3 équations (mais redondantes, ce qui exprime le fait que les hauteurs d'un triangle sont toujours concourantes).  
Réponse :  $z = j$  ou  $z = j^2$ .
6. Exprimer la relation entre les sommes par une rotation exprimée par une multiplication par  $i$  ou  $-i$ .  
Réponse :  $z = \frac{1+i}{2}$
7. De même avec une rotation donnée par  $-j^2$  ou  $-j$ .  
Réponse :  $z = -\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}e^{i\frac{\pi}{4}}$  ou  $z = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}e^{i\frac{\pi}{4}}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.55** –

1. Inégalité triangulaire
2. Utiliser la question précédente, en posant de nouveaux paramètres égaux à des différences de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $w$  ;

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.56** –

1. Exprimer l'orthogonalité de  $(EP)$  et  $(AB)$ , et l'alignement de  $A$ ,  $P$  et  $B$ . Ne pas oublier que  $\bar{a} = \frac{1}{a}$ .
2. Se ramener au cercle unité et  $M$  d'affixe 1. Utiliser alors la question 1.

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.57** – Choisir le repère de sorte que le centre soit 0, ce sera plus simple. Ainsi,  $a + b + c = 0$ . Exprimer des relations de rotation permettant de définir  $d$ ,  $e$  et  $f$ , les subdivisions internes des segments correspondant par exemple à  $\frac{a+2b}{3}$  et  $2a + b3$  (barycentres). Une combinaison judicieuse permet déjà d'obtenir  $d + e + f = 0$ . Par ailleurs, calculer  $d - f$  et  $-j^2(d - e)$  et comparer (se servir de  $a + b + c = 0$ ).

**Indications ou solutions pour l'exercice 7.58** – Exprimer la rotation de centre  $D$  et celle de centre  $E$  qui permettent de définir ces points en déduire une relation entre  $d - e$  et  $a - c$ . Réponse :  $\frac{\pi}{4}$  (angle absolu).

# Limites, dérivation

## Indications ou solutions pour l'exercice 8.1 –

1. Étudier limite à gauche et à droite ; Pas de limite.
2. Quantité conjuguée.  $\frac{1}{2}$ .
3. Quantités conjuguées.  $-\frac{1}{6}$ .
4. Diviser en haut et en bas à droite pour se ramener à des limites remarquables. Si on a déjà vu les équivalents, sommer les équivalents du numérateur et du dénominateur, en utilisant  $o$ .  $\frac{1}{2}$ .
5. Se ramener en 0 puis limite remarquable. 1.
6. Encadrer la partie entière. Pour manipuler les inégalités convenablement, distinguer limite à gauche et limite à droite. 0.
7. Même principe que plus haut. Limite 1.

**Indications ou solutions pour l'exercice 8.2** – Si  $f$  non constante, critère séquentiel avec  $u_n = a + nT$  et  $v_n = b + nT$ , en choisissant bien  $a$  et  $b$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 8.3** – Exprimer  $\frac{f(x) - f(\{x\})}{x}$  à l'aide des  $f(\{x\} + k + 1) - f(\{x\} + k)$ , par télescopage. Couper la somme en 2, à une valeur  $N$  ne dépendant que de  $\varepsilon$ , contrôler le début de la somme par  $\frac{1}{x} \rightarrow 0$  et le fait que  $f$  reste bornée, sur un intervalle de longueur 1, et la fin par  $\varepsilon$  grâce à la limite de  $f(x + 1) - f(x)$  (c'est ce contrôle qui permet de définir  $N$ ).  
On retrouvera ce type d'arguments plus tard (moyenne de Cesaro, grand classique sur les suites).

**Indications ou solutions pour l'exercice 8.4** – Si on connaît le critère de Cauchy de la convergence, c'est immédiat. Sinon, on le retrouve dans ce cas particulier : remarquer d'abord que la convergence de  $f$  permet de montrer que  $g$  est bornée sur  $]0, \alpha[$ . Poser  $\varphi(x) = \sup_{t \in ]0, x[} g(t)$ , et justifier l'existence d'une limite  $\ell$  en 0 de  $\varphi$ . Travailler avec  $\varepsilon$  en considérant  $g(x) - g(t_0) + g(t_0) - \varphi(x) + \varphi(x) - \ell$ , pour  $x$  assez petit et  $t_0$  bien choisi.

**Indications ou solutions pour l'exercice 8.5** – Intuitivement, la condition est à rapprocher d'une hypothèse de convexité (même si ce n'est pas tout à fait cela). Sur un dessin, on se rend compte que pour une fonction convexe passant par l'origine,  $\frac{f(t)}{t}$  est croissante, et sa limite en  $+\infty$  est donc sa borne supérieure. Montrer que c'est aussi le cas ici : poser  $\beta = \sup \frac{f(t)}{t}$ , prendre  $x$  tel que  $\frac{f(x)}{x} \geq \beta - \frac{\varepsilon}{2}$ , et en considérant  $y = qx + r$ , justifier que  $f(y) \geq qf(x) + f(r)$ . En déduire que pour  $y$  assez grand,  $\frac{f(y)}{y} \geq \beta - \varepsilon$ . Étude similaire en 0, en faisant cette fois la division euclidienne de  $x$  par  $y$  :  $x = py + r$ .

## Indications ou solutions pour l'exercice 8.6 –

1. Continuité sur  $\mathbb{R}$  (étudier la limite à gauche et la limite à droite en tout point entier).

2. Continue sur  $\mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z}^* \pi)$  (limite à droite et à gauche, en utilisant le fait que  $\pi$  est irrationnel pour obtenir  $\sin(n) \neq 0$ )
3. Continue sur  $\mathbb{R}$  (limite à gauche et à droite).

**Indications ou solutions pour l'exercice 8.7** –

1. Discontinue en tout point (critère séquentiel avec  $u_n \rightarrow x$  composée de rationnels ou d'irrationnels)
2. Discontinue en tout point sauf 0 (Comme 1, et majorer en v.a. par  $|x|$  en 0)
3. Discontinue en tout point sauf  $\frac{1}{2}$  (majorer  $|f(x) - \frac{1}{2}|$ )
4. Discontinue en tout rationnel, continue en tout irrationnel  $x$  : sinon, trouver  $\varepsilon$  tel que  $B(x, 1)$  contienne une infinité de rationnels donc le dénominateur est  $< \frac{1}{\varepsilon}$ . Est-ce possible ?

**Indications ou solutions pour l'exercice 8.8** –

1. par exemple  $f$  constante sur  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ...
2. Tracer un graphe par morceaux sur  $\mathbb{Q}$  et sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , sous forme de segments, de sorte à ce que ces segments ne s'intersectent pas.

**Indications ou solutions pour l'exercice 8.9** –

1. Montrer  $f(0) = 0$ . Montrer  $f(nx) = nf(x)$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ . Poser  $a = f(1)$ , montrer  $f(n) = an$ , pour  $n \in \mathbb{N}$  puis  $n \in \mathbb{Z}$ . En considérant  $f(qx)$ , pour  $q$  bien choisi, montrer  $f(x) = ax$  pour  $x \in \mathbb{Q}$ . Passer à  $\mathbb{R}$  par continuité. Réponse :  $f(x) = ax$
2. Considérer  $g(x) = f(x) - f(0)$ . Montrer que  $g(\frac{x}{2^n}) = \frac{g(x)}{2^n}$ . En déduire que  $g(\frac{k+\ell}{2^n}) = g(\frac{k}{2^n}) + g(\frac{\ell}{2^n})$ . En utilisant la continuité de  $g$  et la densité des dyadiques, montrer que  $g$  vérifie la relation du 1. Conclusion :  $f(x) = ax + b$ .
3. Même type d'étude qu'en 1.  $f(x) = a^x$ ,  $a \geq 0$  (car  $a = f(1) = f(\frac{1}{2})^2$ ). On peut aussi se ramener au 1, en remarquant, par le même argument que pour  $a = f(1)$ , que  $f(x) \geq 0$ , et que si  $f(x) = 0$ , on obtient  $f(x+y) = 0$  pour tout  $y$ , donc  $f = 0$ . Ainsi, si  $f$  n'est pas la fonction nulle,  $f > 0$ , et on peut considérer  $x \mapsto \ln(f(x))$  qui vérifie l'équation du 1.
4. Considérer cette fois  $f \circ \exp$ , vérifiant 1 :  $f(x) = a \ln(x)$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 8.10** – On peut s'y prendre par  $\varepsilon$ . C'est un peu fastidieux, il faut distinguer suivant que  $\varphi(x) = f(x)$  ou non, et dans le premier cas, regarder à gauche et à droite. On peut aussi s'en sortir (avec AC) en remarquant que si  $x < y$ , on peut trouver  $t_{x,y} \in [x, y]$  tel que

$$0 \leq \varphi(y) - \varphi(x) \leq f(t_{x,y}) - f(x),$$

en prenant  $t_{x,y} = x$  si  $\varphi(y) = \varphi(x)$ , et en remarquant que si  $\varphi(y) \neq \varphi(x)$  (donc  $\varphi(y) > \varphi(x)$ ), la valeur  $\varphi(y)$  est atteinte par  $f$  (théorème de compacité) en un point  $t_{x,y}$  de  $[x, y]$ . Fixer  $x$  et faire  $y \rightarrow x^+$  pour obtenir la continuité à droite et fixer  $y$  et faire  $x \rightarrow y^-$  pour obtenir la continuité à gauche.

On peut aussi simplifier un peu le raisonnement en utilisant le théorème de la limite monotone.

**Indications ou solutions pour l'exercice 8.11** –

1. Écrire les inégalités sur les limites à gauche et droite pour les deux fonctions monotones  $f$  et  $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ .
2. Si  $f(x_0) = 0$ , la croissance de  $f$  impose le signe de  $f$  qui contredit la décroissance de  $\frac{f(x)}{x}$  sauf si  $f$  est nulle.
3. Racine.

**Indications ou solutions pour l'exercice 8.12** –  $f + g$  admet une limite en  $+\infty$ , donc  $g$  aussi. On est ramené à un exercice connu (fonction périodique admettant une limite en  $+\infty$  :  $g$  est constante, par l'absurde, en considérant 2 suites tendant vers l'infini, d'image constante différente par  $g$ .)

**Indications ou solutions pour l'exercice 8.13** – On peut utiliser le théorème de la classe  $\mathcal{C}^n$  par prolongement. Ou alors former les différents taux d'accroissement.

Réponse :  $a = 2$ ,  $b = -1$ ,  $c = 0$ . La fonction  $f$  n'est pas  $\mathcal{C}^3$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 8.14** – Grosse récurrence, en progressant sur les intervalles  $]2k, 2k + 2]$ . Un peu technique, mais sans difficulté.

**Indications ou solutions pour l'exercice 8.15** –

1. Calcul et majoration.
2. Montrer que  $f'(x)$  est majorée par  $3x^2 - 4x^3 + 2(1-x)$  sur  $[0, \frac{3}{4}]$ , et  $4x^3 - 3x^2 + 2(1-x)$  sur  $[\frac{3}{4}, 1]$ . En déduire, par étude de fonction, que  $f'(x) < 2$ . Trouver  $x_n \rightarrow 0$  telle que  $f'(x_n) \rightarrow 2$ , en remarquant que le terme 2 provient du terme en cos.

**Indications ou solutions pour l'exercice 8.16** – Étudier les limites à gauche et droite en 0, puis la dérivabilité à gauche et à droite, etc.

**Indications ou solutions pour l'exercice 8.17** –

1.  $f'(x) = \frac{6x}{(1-x^2)^2}$
2.  $f'(x) = \frac{-5x^2 + 2x + 5}{(1-x^2)^2}$
3.  $f'(x) = \frac{-3x^2 + 2x + 3}{(x^2 - 3x + 2)^2}$
4.  $f'(x) = \frac{-2x^2 + 2x + 4}{(x^2 + 2)^2} e^{\frac{2x-1}{x^2+1}}$
5.  $f'(x) = \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$
6.  $f'(x) = -3e^{3x \sin(\ln(x))} \sin(e^{3x \sin(\ln(x))}) (\sin(\ln(x)) + \cos(\ln(x)))$
7.  $f'(x) = \frac{10x}{x^2 + 1} (\ln^3(x^2 + 1) - \ln(x^2 + 1))^4 (3 \ln^2(x^2 + 1) - 1)$
8.  $f'(x) = \frac{2x \cos(x^2)(x + \ln(x)) - 9(1 + \frac{1}{x}) \sin(x^2)}{(x + \ln(x))^{10}}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 8.18** – Exprimer  $f$  comme fonction réciproque et utiliser des résultats du cours.

**Indications ou solutions pour l'exercice 8.19** – Récurrence pour l'expression. S'en servir pour former les taux d'accroissement, en utilisant les CC.

**Indications ou solutions pour l'exercice 8.20** – Par récurrence sur  $n$ , en écrivant  $f_{n+1}(x) = (x - 1)f_n(x)$ , puis Leibniz. On peut le faire aussi de façon directe avec Leibniz et le binôme.

**Indications ou solutions pour l'exercice 8.21** –

- Leibniz. Rép :  $(-1)^n (x - n)e^{-x}$ .
- Rép :  $\frac{1}{a} \cdot \frac{(-1)^n n!}{(x + \frac{b}{a})^{n+1}}$
- Décomposition en éléments simples; Rép :  $\frac{n!}{2} (-1)^n \left( \frac{1}{(x-1)^{n+1}} + \frac{1}{(x+1)^{n+1}} \right)$
- Rép :  $\frac{(x-a)^2 (-1)^{n-1} (n-1)!}{(x-b)^n} + 2n \frac{(x-a) (-1)^n (n-2)!}{(x-b)^{n-1}} + n(n-1) \frac{(-1)^{n-1} (n-3)!}{(x-b)^{n-2}}$  pour  $n \geq 3$ .

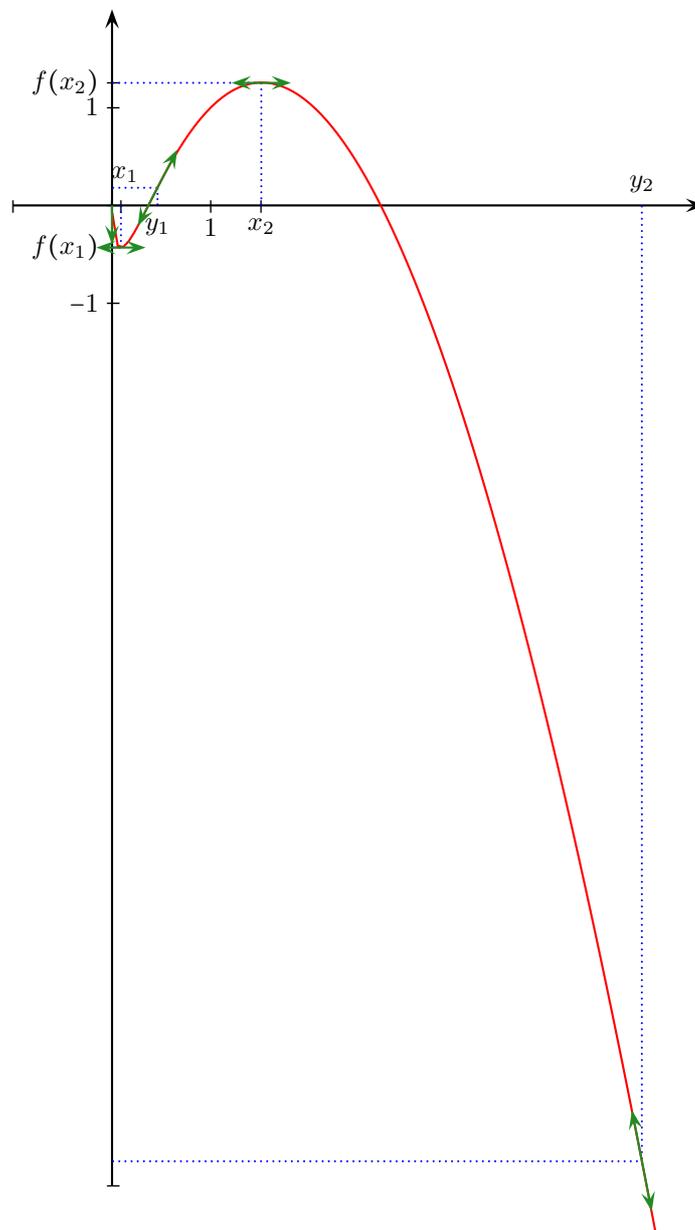
**Indications ou solutions pour l'exercice 8.22** –

1.  $f$  est croissante puis décroissante, maximum en 0, et points d'inflexion en  $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

2. Récurrence sur  $n$ . On trouve une relation de récurrence entre  $P_{n+1}$  et  $P_n$ , faisant intervenir aussi  $P'_n$ .
3. Par récurrence d'ordre 2. On commence par réécrire, grâce à l'HR, la relation sans  $P'_n$ , mais avec  $P_{n-1}$ . On dérive et utilise l'HR et encore une fois la relation de récurrence initiale.

**Indications ou solutions pour l'exercice 8.23 –**

1. Demi-tangente verticale vers le bas en 0.
2. Pour la convexité, calculer la dérivée seconde, et étudier la fonction auxiliaire  $g(x) = x - 2\ln(x) - 2$ . Les zéros de  $g$  sont à peu près  $y_1 \simeq 0.46$  et  $y_2 \simeq 5.36$ . La fonction est alors convexe sur  $[0, y_1]$  et  $[y_2, +\infty[$  et concave sur  $[y_1, y_2]$ .



3. Récurrence sur  $n$ . Calculer la dérivée troisième pour l'initialisation.
4. L'équation  $f(x) = x f'(\theta x)$  équivaut à une équation du second degré en  $\ln(\theta)$ . Exprimer la somme et le produit des  $\ln(\theta_i)$  à l'aide des relations coefficients/racines. Étudier le signe du produit pour discuter suivant que  $\ln(\theta_1)$  et  $\ln(\theta_2)$  sont de même signe (si  $x < \frac{1}{e}$ , ce qui implique leur négativité d'après la valeur de leur somme) ou non (si  $x > \frac{1}{e}$ ).

**Indications ou solutions pour l'exercice 8.24** – Passer en complexe pour se ramener à la dérivée itérée de  $e^{\alpha x}$ .

Réponse :  $2^{\frac{n}{2}} \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) e^x$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 8.25** – Dérivée  $f + ig$ , évidemment !

Réponse :  $2^n \cos\left(\sqrt{3} \cdot x + \frac{2n\pi}{3}\right) e^{-x}$  pour  $f$ , de même pour  $g$  avec  $\sin$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 8.26** – Écrire  $1+x^2 = (x+i)(x-i)$  et décomposer la fraction.

Rép :  $P_n = \frac{(-1)^n n!}{2i} \left( (x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1} \right)$ .

Racines :  $\cotan\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$

**Indications ou solutions pour l'exercice 8.27** –

1. Par récurrence : initialisation d'après la formule de dérivation des composées. Hérédité en remarquant que  $f_{n+1}(x) = x \times f_n(x)$ , et en utilisant Leibniz.

2. Réponses :

$$g_n^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}} \quad h_n^{(n)} = -\frac{1}{x}.$$

**Indications ou solutions pour l'exercice 8.28** – Leibniz. Pour le deuxième, choisir l'ordre pour qu'il ne reste que le produit correspondant aux  $k$  minimaux pour lesquels la dérivée de s'annule pas pour chaque fonction.

**Indications ou solutions pour l'exercice 8.29** – Considérer  $f : x \mapsto e^{ax}$  et  $g : x \mapsto e^{bx}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 8.30** – Analogie avec la formule du multinôme. À démontrer ensuite par récurrence sur  $k$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 8.31** – Par récurrence. Initialisation immédiate au rang 0. Dérivée soigneusement l'expression au rang  $n$ , ne pas avoir peur d'utiliser plusieurs lignes (si possible, ne pas écrire trop gros). On a une somme interne de termes obtenus en dérivant successivement l'un des termes du produit, ce qui fournit un terme similaire, avec une puissance  $m_j - 1$ , une puissance  $m_{j+1} + 1$  et un facteur multiplicatif  $(m_{j+1} + 1)(j + 1)$  (pour avoir les bonnes factorielles) ; il y a aussi le terme obtenu en dérivant la composition, fournissant alors un terme similaire, avec un exposant  $m_1 + 1$ , et un facteur correctif  $m_1 + 1$ . Remarque que tout cela peut s'écrire sous une somme indexée par des  $m'_i$  tels que  $m'_1 + 2m'_2 + \dots + (n+1)m'_{n+1} = n+1$ , mais avec seulement une  $n!$  (le reste de l'expression étant comme voulue), et chaque terme étant multiplié par un facteur  $\lambda_{m'_1, \dots, m'_{n+1}}$ . En regroupant tous les termes donnant les mêmes indices  $m'_1, \dots, m'_{n+1}$  dans l'expression initiale en  $m_1, \dots, m_n$  (chaque indice de la somme interne en fournit un ainsi que le dernier terme obtenu par dérivation de la composition), remarquer que

$$\lambda_{m'_1, \dots, m'_{n+1}} = m'_1 + 2m'_2 + \dots + (n+1)m'_{n+1} = n+1,$$

et conclure.

**Indications ou solutions pour l'exercice 8.32** – Réponse :  $y = 3x - 3$  en  $+\infty$  et  $-\infty$ , et bien sûr,  $x = 1$  et  $x = -2$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 8.33** –

- $f$  est décroissante sur  $] -\infty, -2[$ , croissante sur  $] -2, +\infty[$ , il y a deux points d'inflexion en 1 et en  $-1$ .
- $f$  est décroissante sur  $] -\infty, \frac{5-\sqrt{5}}{2}[$ , croissante sur  $] \frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}[$ , puis décroissante jusqu'à l'infini. Points d'inflexion : 2 et 5.
- $f$  croissante. Un unique point d'inflexion en  $2\sqrt{3} - 3$ , la courbe est d'abord convexe puis concave.

4. Fonction paire, croissante sur  $[0, 1]$ , décroissante sur  $[1, +\infty[$ . Points d'inflexion :

$$x_1 = \sqrt[4]{2 - \frac{1}{3}\sqrt{33}} \quad \text{et} \quad x_2 = \sqrt[4]{2 + \frac{1}{3}\sqrt{33}}$$

5.  $f$  est croissante sur  $] -\infty, 1[$  et sur  $]1, +\infty[$  ; Deux points d'inflexion : 0 et  $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ .

6. Fonction impaire. Croissante sur  $[0, x_0]$  puis décroissante de limite nulle.  $x_0$  ne peut pas être déterminé explicitement  $x_0 \simeq 0.765$ . Montrer par le théorème de la bijection l'existence et l'unicité d'un point d'inflexion.

7. Invariance de la courbe par translation de vecteur  $(2\pi, 2\pi)$ . Fonction croissante, points d'inflexion en tous les 0 modulo  $\pi$ .

8. Utiliser une fonction auxiliaire pour justifier que  $f'$  s'annule une unique fois dans  $[-3, 1]$ , en  $x_0$ . Alors,  $f$  est décroissante jusqu'à  $x_0$  puis croissante. Justifier l'existence d'un unique point d'inflexion.

#### Indications ou solutions pour l'exercice 8.34 –

1. Domaine de définition  $\mathbb{R}_+^*$ .

2. Justifier que  $f'(x)$  s'annule ssi  $x^2 - 2 + \ln x = 0$ . Étudier les variations de la fonction ainsi définie, et montrer l'existence d'un unique 0. Calculer les valeurs en 1.3 et 1.35 pour conclure (avec la calculatrice)

3. Asymptote en  $+\infty$  :  $y = x$ . La courbe est au-dessus de l'asymptote sur  $]0, e]$ , et en-dessous sur  $[e, +\infty[$ .

$$4. y = f'(e)(x - e) + f(e) = \left(1 - \frac{2}{e^2}\right)(x - e) + e = \left(1 - \frac{2}{e^2}\right)x + \frac{2}{e}.$$

#### Indications ou solutions pour l'exercice 8.35 –

- Sur  $] -\infty, -1[$ ,  $f$  est décroissante puis croissante, avec un minimum en  $-2 - \sqrt{3}$
- Sur  $] -1, 1[$ ,  $f$  est croissante puis décroissante, avec un maximum en  $-2 + \sqrt{3}$ .
- Sur  $]1, +\infty[$ ,  $f$  est décroissante.
- Montrer l'existence et l'unicité d'un point d'inflexion en étudiant une fonction auxiliaire (numérateur de  $f''$ ).

## Fonctions usuelles

**Indications ou solutions pour l'exercice 9.1 –**

- |  |              |
|--|--------------|
| 1. $+\infty$   | 1. $+\infty$ |
| 2. $+\infty$   | 2. 0         |
| 3. 0 si $\alpha > 1$ , 1 si $\alpha = 1$ , $+\infty$ si $\alpha < 1$ . | 3. $+\infty$ |
| 4. 0   | 4. 0         |
| 5. $+\infty$   | 5. 0         |

**Indications ou solutions pour l'exercice 9.2 –** Faire apparaître des limites remarquables. On verra plus tard comment présenter ces calculs de façon beaucoup plus naturelle avec des développements limités.

1. 0
2.  $-\frac{3\sqrt{2}}{4}$
3. 2.

**Indications ou solutions pour l'exercice 9.3 –** N'oubliez pas les étages de composées dans la dérivation. N'oubliez pas la constante d'intégration lorsque vous primitivez.

Solution :  $f = \frac{\pi}{2} + \text{Arcsin}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 9.4 –**

1.  $\tan(a+b+c) = \frac{\tan(a) + \tan(b) + \tan(c) - \tan(a)\tan(b)\tan(c)}{1 - \tan(a)\tan(b) - \tan(a)\tan(c) - \tan(b)\tan(c)}$ .
2. On applique  $\tan$  à l'expression  $\alpha$  de l'énoncé. Grâce à la question 1, on obtient

$$\tan(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ne pas conclure trop vite que  $\alpha = \frac{\pi}{6}$  (on n'obtient  $x$  que modulo  $\pi$ ). Encadrer suffisamment finement les Arctan initiales pour pouvoir conclure que  $\alpha = \frac{7\pi}{6}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 9.5 –**

- sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .
- Attention au fait que le domaine est constitué de 2 intervalles : on primitive séparément sur chaque intervalle, avec une constante éventuellement différente ;

$$f(x) = \begin{cases} \text{Arctan}(x) + \frac{\pi}{4} & \text{si } x < 1 \\ \text{Arctan}(x) - \frac{3\pi}{4} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

**Indications ou solutions pour l'exercice 9.6 –**

- Pour 2b : utiliser  $\tan(y) \sim y$  avec  $y$  égal au terme de gauche.
- Pour 3b : théorème de la bijection sur chaque intervalle de monotonie de  $f'$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 9.7** – Vérifier la formule pour  $n = 1$ , puis récurrence. Pour  $n = 1$ , il faut bien sûr essayer d'exprimer avec des tan.

**Indications ou solutions pour l'exercice 9.8** – Remarquer que  $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$ , en déduire une solution, puis justifier que c'est la seule.

**Indications ou solutions pour l'exercice 9.9** – Exercice de type archi-classique. Principe : dériver, simplifier, reprimitive !

En dérivant, ça se simplifie en  $\frac{2}{1+x^2}$ , on retrouve donc  $2 \operatorname{Arctan}(x) + c$ , arranger la constante.

**Indications ou solutions pour l'exercice 9.10** – Se contenter de l'étude sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$  (périodicité). Pour  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ , utiliser  $\sin(x) = \sin(\pi - x)$ . On obtient une fonction triangle.

**Indications ou solutions pour l'exercice 9.11** –

1. Si  $x_0 \notin [0, \pi]$ , pas de solution, sinon  $y \equiv \pm x_0 [2\pi]$ .
2. Solution : tous les réels de  $[0, \pi]$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 9.12** –

1. Solution  $f(x) = \operatorname{Arctan}(x) + \frac{\pi}{4}$  sur  $]-\infty, 1]$ , et  $-\operatorname{Arctan}(x) + \frac{3\pi}{4}$  sur  $[1, +\infty[$ .
2. Solution  $f(x) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{Arcsin}(x)$  sur  $[-1, 1[$
3.
  - Invariance par translation de  $(2\pi, -\pi)$  : étude sur un intervalle de longueur  $2\pi$ , disons  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ .
  - $f'(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{\cos(x)}{|\cos(x)|} - 1 \right)$  en tout  $x \neq \frac{\pi}{2} [2\pi]$ .
  - $f$  constante de valeur  $\frac{\pi}{4}$  sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,
  - $f(x) = \frac{3\pi}{4} - x$ .
4.  $f'(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin(x)}{|\sin(x)|} - \frac{\cos(x)}{|\cos(x)|} \right)$ . On obtient sur  $[-\pi, \pi]$  (prolongé ensuite par périodicité) :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{si } x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}] \\ -\frac{\pi}{4} - x & \text{si } x \in [-\frac{\pi}{2}, 0] \\ -\frac{\pi}{4} & \text{si } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -\frac{3\pi}{4} + x & \text{si } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

**Indications ou solutions pour l'exercice 9.13** – Nécessairement  $x \in [-1, 1]$ . Faire le changement de variable  $\theta = \operatorname{Arcsin}(x)$ , donc  $x = \sin(\theta)$ , avec  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . L'équation est alors :

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{Arcsin}(\sin(2\theta)).$$

Solution :  $\sin([\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]) = [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 9.14** –

1. Le sinus de l'expression de droite vaut  $\frac{63}{65}$ . Vérifier que la somme des Arcsin est dans  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , (car  $\frac{4}{5} \leq \frac{\pi}{3}$  et  $\frac{5}{12} \leq \frac{\pi}{6}$ ), et conclure  $x = \operatorname{Arcsin} \frac{63}{65}$ .
2. Nécessairement  $x \in [-1, 1]$ . Faire le changement de variable  $\theta = \operatorname{Arcsin}(x)$ , donc  $x = \sin(\theta)$ , avec  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . L'équation est alors :

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{Arcsin}(\sin(2\theta)).$$

Solution :  $\sin([\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]) = [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ .

3. Appliquer  $\sin$ . Solution  $\frac{1}{\sqrt{5}}$ .
4. Appliquer  $\sin$  à l'expression de droite : on obtient 0. Donc la fonction est égale en tout point de  $[1, +\infty[$  (son domaine) à 0 modulo  $\pi$  puis constante, par continuité. Essayer en une valeur bien choisie.  $\mathcal{S} = [1, +\infty[$ .
- On peut aussi justifier que la fonction est constante par dérivation. Essayez, c'est un bon entraînement.

**Indications ou solutions pour l'exercice 9.15 –**

1. Exprimer  $\operatorname{th}(x) + \frac{1}{\operatorname{th}(x)}$  avec des exponentielles, réduire et simplifier.
2. Télescopage d'après question. Réponse :  $\frac{2^{n+1}}{\operatorname{th}(2^{n+1}x)} - \frac{1}{\operatorname{th}(x)}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 9.16 –** Analogie avec les formules d'Euler.  $\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x) = e^x$  et  $\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) = \dots$ . Former la somme et la différence des deux sommes. Adapter l'argument de l'arc moitié.

$$\text{Solution : } C = \frac{\operatorname{ch}\left(a + \frac{(n-1)b}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{nb}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{b}{2}\right)} \text{ et } S = \frac{\operatorname{sh}\left(a + \frac{(n-1)b}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{nb}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{b}{2}\right)}$$

**Indications ou solutions pour l'exercice 9.17 –** Exprimer l'équation comme équation en  $X = e^x$ .

Solution :

- $\emptyset$  si  $a + b \neq 0$  et  $\frac{b-a}{a+b} \leq 0$
- $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{b-a}{a+b}\right)$  et  $a + b \neq 0$  et  $\frac{b-a}{a+b} > 0$ .
- $\emptyset$  si  $a + b = 0$  et  $(a, b) \neq (0, 0)$
- $\mathbb{R}$  si  $a = b = 0$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 9.18 –**

Introduire  $g : x \mapsto e^{x\operatorname{ch}(a)} \operatorname{sh}(x\operatorname{sh}(a))$ . Calculer les dérivées de  $f + g$  et  $f - g$ .

Réponse :  $f^{(n)}(x) = e^{x\operatorname{ch}(a)} \operatorname{ch}(x\operatorname{sh}(a) + na)$ .

## Indications ou solutions pour l'exercice 10.1 –

1. Primitivation à vue.

$$\text{Solution : } F(x) = \ln x + \frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + C, \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.$$

2. Primitivation à vue
- $u' u^{-\frac{1}{3}}$

$$\text{Solution : } F(x) = \frac{3}{2}(\text{Arctan } x)^{\frac{2}{3}} + C, \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ (éventuellement sur } \mathbb{R}_-^* \text{)}$$

3. Primitivation à vue
- $\frac{u'}{u}$

$$\text{Solution : } F(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5} + C, \text{ sur } \mathbb{R}.$$

4. Primitivation à vue,
- $\frac{u'}{u}$

$$\text{Solution : } F(x) = \ln(|\ln x|) + C \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.$$

5. Primitivation à vue
- $u' \sin(u)$

$$\text{Solution : } F(x) = -\cos(e^x) + C \text{ sur } \mathbb{R}$$

6. cdv
- $x = e^y$
- : on est ramené au 8.

$$\text{Solution : } F(x) = \frac{x}{2}(\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x))) + C.$$

7. Sortir la racine de ln puis IPP très simple.

$$\text{Solution : } F(x) = \frac{1}{12}((2x^3 - 6)\ln(1 - x) - (2x^3 + 3x^2 + 6)) + C$$

8. 2 IPP, ou alors écrire
- $f(x) = \text{Im}(e^{(1+i)x})$
- , et primitiver dans
- $\mathbb{C}$
- . Solution :
- $F(x) = \frac{1}{2}e^x(\sin(x) - \cos(x)) + C$

9. Se débarrasser du
- $x$
- dans une intégration
- $u' u^{\frac{1}{2}}$
- , puis mise sous forme canonique et changement de variable en sh. Autre possibilité : intégration par partie, pour se ramener (après inévitable mise sous forme canonique) à la dérivée de Argsh. Dans les deux cas, on est amené à exprimer le résultat à l'aide de la fonction Argsh.

$$\text{Solution : } F(x) = \frac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}(2x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{3}{16}\text{Argsh}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

10. Primitivation à vue
- $u' \tan'(u)$

$$\text{Solution : } F(x) = \tan(\ln x) + C.$$

11. Primitivation à vue
- $\frac{u'}{u}$

$$\text{Solution : } F(x) = \ln(e^x + e^{-x}) + C$$

On peut aussi reconnaître  $\text{th}(x)$  et primitiver sous la forme  $\ln(\text{ch}(x)) + C$ .

12. DES sous la forme
- $\frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+3}$
- .

$$\text{Solution : } b = 3, a = -2, \text{ d'où :}$$

$$F(x) = 3 \ln|x + 3| - 2 \ln|x + 2| + C, \text{ sur chacun des intervalles } ]-\infty, 2[, ]2, 3[, ]3, +\infty[.$$

13. DES :  $f(x) = 3x + \frac{1}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{x+1}$ .  
 Solution :  $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + \ln|x| + 3\ln|x-1| + \ln|x+1| + C$ , sur chaque intervalle  $]-\infty, -1[$ ,  $] -1, 0[$ ,  $]0, 1[$ ,  $]1, +\infty[$ .
14. DES :  $f(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1}$ .  
 Solution :  $F(x) = \frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln|x+1| - \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} x + C$  sur  $]-\infty, -1[$ ,  $]1, -1[$  ou  $]1, +\infty[$ .
15. Constatez que la dérivée de  $x \mapsto \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$  est  $x \mapsto \frac{-1}{1+x^2}$ , d'où primitivation à vue.  
 Solution :  $F(x) = -\frac{1}{2} \left( \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} \right)^2 + C$ , sur  $\mathbb{R}_-^*$ , ou  $\mathbb{R}_+^*$ .
16. 2 IPP.  
 Solution :  $F(x) = \frac{1}{2} (\sin(x)\operatorname{ch}(x) - \cos(x)\operatorname{sh}(x)) + C$
17. IPP puis DES. On peut éviter la DES par le cdv  $y = x^2$   
 Solution :  $F(x) = \frac{x^3}{3} \ln \left( \frac{1-x}{1+x} \right) + \frac{x^2}{3} + \frac{1}{3} \ln|1-x^2|$
18. cdv  $y = \sqrt{\frac{x+1}{x+3}}$ , soit  $x = \varphi(y)$ , avec  $\varphi : y \mapsto \frac{1-3y^2}{y^2-1}$ . Faire le cdv sans calculer  $\varphi'$ , et faire suivre d'une IPP pour revenir à  $\varphi$ , ou mieux, à  $\varphi$  plus une constante, de sorte à se ramener à un numérateur constant ! On est alors ramené à la question 14. On peut même encore mieux choisir la constante de sorte à ce que le numérateur ne soit pas constant, mais un multiple de  $y^2 + 1$ , pour se simplifier avec ce terme dans l'intégrale (prendre  $\varphi(y) + 2$ ).  
 Solution :  $F(x) = (x+2) \operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{x+1}{x+3}} - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} \right)$
19. DES :  $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{x+1}{1+x+x^2}$ , puis :  
 Solution :  $F(x) = \ln|x| + \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \left( x + \frac{1}{2} \right) \right) + C$ , sur  $\mathbb{R}_-^*$ , ou  $\mathbb{R}_+^*$ .
20. CDV  $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$  puis IPP  
 Solution :  $F(x) = \frac{2y}{1-y^2} + \ln|1-y| - \ln|1+y| + C$ , avec  $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$
21. IPP  
 Solution :  $F(x) = -\frac{1 + \ln x}{x} + C$ .
22. Exprimer sous la forme  $\sin(x)P(\cos(x))$  puis primitiver à vue (ou cdv  $y = \cos(x)$ )  
 Solution :  $F(x) = \frac{1}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + C$ , sur  $\mathbb{R}$ .
23. Tout exprimer avec sin puis linéarisation. On peut éviter la linéarisation en baissant le degré de sin petit à petit par IPP (voir intégrales de Wallis).  
 Solution :  $F(x) = \frac{t}{16} - \frac{\sin 2x}{64} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin 6x}{192} + C$
24. IPP puis cdv  $y = \sqrt{x^2-1}$ , soit  $y^2 + 1 = x^2$  (et en particulier,  $y \, dy = x \, dx$ ).  
 Solution :  $F(x) = \frac{x^4}{4} \operatorname{Arcsin} \frac{1}{x} + \frac{1}{12} \sqrt{x^2-1} (x^2+3) + C$
25. cdv  $y = \sqrt{\tan x}$ , donc  $x = \operatorname{Arctan}(y^2)$ . On est ramené à  $\int \frac{2y^2}{1+y^4} \, dy$  puis DES :  

$$\frac{x/\sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} - \frac{x/\sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}$$
 Solution :  $F(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{y^2 - \sqrt{2}y + 1}{y^2 + \sqrt{2}y + 1} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \operatorname{Arctan}(\sqrt{2}y - 1) + \operatorname{Arctan}(\sqrt{2}y + 1) \right) + C$ , où  $y = \sqrt{\tan(x)}$
26. CDV  $y = \sqrt{e^x - 1}$ ,  $x = \ln(1 + y^2)$ . On est ramené à  $\int \frac{2y^2}{1+y^2} \, dy$ .  
 Solution :  $F(x) = 2\sqrt{e^x - 1} - 2 \operatorname{Arctan} \sqrt{e^x - 1} + C$ .

27. IPP.

$$\text{Solution : } F(x) = x \operatorname{Arcsin}(x) + \sqrt{1-x^2} + C.$$

**Indications ou solutions pour l'exercice 10.2** – Merci de me signaler toute erreur. On donne à chaque fois UNE primitive. Rajouter une fonction localement constante pour les trouver toutes.

1. Transformer les cos sauf 1 un sin.

$$\text{Réponse : } \ln|\sin x| - \frac{1}{2} \sin^2 x$$

2. CDV  $u = \cos x$  puis DES.

$$\text{Réponse : } \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln|\cos x - \sqrt{2}| - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln|\cos x + \sqrt{2}|.$$

3. CDV  $y = \cos x$ . DES par rapport à  $z = y^2$ , IPP, puis terminer DES par rapport à  $y$ . Réponse :

$$-\frac{1}{3} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{6} \ln(1 - \cos x) - \frac{1}{6} \ln(1 + \cos x) - \frac{1}{3} \operatorname{Arctan} \cos x$$

4. Changement de variable  $t = \tan x$ , puis discussion. Réponse :

- Si  $\alpha = \beta = 0$ , ce n'est pas défini;
- Si  $\alpha = 0, \beta \neq 0, -\frac{1}{\beta \tan x}$
- Si  $\alpha \neq 0, \beta = 0, \frac{\tan x}{\alpha}$
- Si  $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \alpha\beta > 0, \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \tan x\right)$
- Si  $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \alpha\beta < 0, \frac{1}{2\sqrt{|\alpha\beta|}} \left( \ln\left|1 + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \tan x\right| - \ln\left|1 - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \tan x\right| \right).$

5. Traiter avec la question suivante. Calculer la somme et la différence des deux intégrales.

$$\text{Réponse : } \frac{1}{2} \ln|\sin x + \cos x| + \frac{x}{2} \text{ pour (5) et } -\frac{1}{2} \ln|\sin x + \cos x| + \frac{x}{2} \text{ pour (6).}$$

6. Voir question précédente.

7. CDV  $y = \cos(x)$ . Réponse :  $\ln\left(\frac{\cos^2(x) - 2}{\cos^2(x)}\right)$

8. IPP puis s'arranger pour retomber sur la même intégrale et regrouper. Autre solution : CDV  $y = \tan(x)$ .

$$\text{Réponse : } \tan(x) + \frac{1}{3} \tan^3(x).$$

9. CDV  $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ . Autre solution : formules de duplication de l'angle...

$$\text{Réponse : } \tan\left(\frac{x}{2}\right).$$

10. CDV  $y = \operatorname{sh}(x)$ , puis DES (fastidieux), ou mieux : CDV  $z = \frac{1}{y}$ .

$$\text{Réponse : } -\frac{1}{3\operatorname{sh}^3(x)} + \frac{1}{\operatorname{sh}(x)} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\operatorname{sh}(x)}\right).$$

11. CDV  $y = \operatorname{th}(x)$ , puis éventuellement  $z = \frac{1}{1-y}$  pour faire sauter les plus hauts degrés.

$$\text{Réponse : } \frac{z}{2} + \frac{1}{2} \ln|2z - 1|, \text{ où } z = \frac{1}{1-\operatorname{th}(x)}.$$

12. CDV  $y = \operatorname{sh}(x)$ .

$$\text{Réponse : } \frac{1}{2} \operatorname{sh}^2(x) - \operatorname{sh}(x) + 2 \ln|1 + \operatorname{sh}(x)|.$$

13. Analogie avec  $\frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$ . Réponse :  $-\operatorname{coth}(x)$ .

14.  $\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sh}(2x)$ , et utiliser question précédente.

$$\text{réponse : } -2 \operatorname{coth}(2x).$$

15. CDV  $y = \operatorname{sh}(x)$

$$\text{Réponse : } \frac{1}{2} \operatorname{Arctan}\left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{2}\right)$$

16. Formules de duplication, ou CDV  $y = e^x$

$$\text{Réponse : } \operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)$$

17. Formules de duplication de l'angle.

Réponse :  $2\sqrt{2}\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)$  sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $-2\sqrt{2}\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)$  sur  $\mathbb{R}_-$ . Recoller en 0 par ajustement de constante.

18. CDV  $y = \operatorname{sh}(x)$ , puis faire  $1 + y^2 - y^2$  au numérateur, puis IPP en séparant le  $y^2$  en 2.

Réponse :  $\frac{1}{2} \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x)) + \frac{\operatorname{sh}(x)}{2\operatorname{ch}^2(x)}$

**Indications ou solutions pour l'exercice 10.3** – Merci de me signaler toute erreur.

1.  $u'u^{-3}$ . Réponse :  $\frac{1}{2\ln^2 2} - \frac{1}{2\ln^2 3}$

2. Primitive connue. Réponse :  $-\frac{1}{2}\ln 2$ .

3.  $\frac{u'}{u}$  (dérivez  $\ln \circ \ln$ ). Réponse :  $\ln|\ln \ln x|$

4.  $+1 - 1$  pour se ramener à une dérivée classique. Réponse :  $1 - \frac{\pi}{4}$ .

5. 1 IPP puis primitive de  $\ln$  (ou 2e IPP). Réponse :  $2(\ln^2 2 - \ln 2 + 1)$ .

6. Quatre IPP successives (ou directement IPP itérée). Réponse :  $24e - 39$ .

7. Deux IPP successives, puis regrouper. On peut aussi passer en complexe. Réponse :  $\frac{1}{2}(e^\pi + 1)$

8. IPP pour retrouver  $\tan$  : Réponse :  $\sqrt{3} - \ln 2$ .

9.  $-1 + 1$  sur  $\tan^2$  pour avoir une dérivée classique, puis IPP. Réponse :  $\sqrt{3} - \frac{\pi^2}{18} + \ln 2$ .

10. CDV  $x = y^6$ , puis division euclidienne. Réponse :  $14 - 6\ln 3 + 6\ln 2$ .

11. CDV  $x = \sin t$  puis linéarisation. Réponse :  $\frac{3\pi}{16}$ .

12.  $\frac{u'}{1+u^2}$ ... Réponse :  $\frac{\pi}{4}$ .

13. CDV  $y = \sqrt{x+1}$ . Réponse :  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

14. CDV  $y = x^n$ . Réponse :  $\frac{n-2}{3}\ln 2 + \frac{1}{3}\ln\left(3 + \frac{1}{2^n}\right)$

15. DES (en commençant par DES en  $y^2$ ). Réponse :  $\frac{1}{4}(\ln 3 - \ln 2) - \frac{1}{2}(\operatorname{Arctan} 3 - \operatorname{Arctan} 2)$ .

16. DES :  $\frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2} \cdot x + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2} \cdot x + 1)^2 + 1}$

Réponse :  $\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \operatorname{Arctan}(\sqrt{2}+1) - \operatorname{Arctan}(\sqrt{2}-1) \right)$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 10.4** – Merci de m'indiquer toute erreur (pour conserver la forme, j'ai fait tous les calculs à la main).

Attention, certaines bornes ont été modifiées par rapport à l'énoncé distribué.

1. IPP (la fraction rationnelle à côté du  $\ln$  se primitive bien). On continue par DES, ou on peut éviter cette DES par changement de variable  $y = \frac{1}{x}$ .

Réponse :  $\frac{3}{40}\ln(2) + \frac{1}{4}\operatorname{Arctan}(3) - \frac{1}{4}\operatorname{Arctan}(2)$ .

2. Cvd  $y = \ln(x)$  puis DES.

Réponse :  $\frac{1}{6}\ln(3) - \frac{1}{3}\ln(2) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6}$ .

3. Cdv  $y = \frac{1}{x^2}$ .

Réponse :  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

4. Mettre  $\cos^2(x)$  en facteur au dénominateur et faire le cdv  $y = \tan(x)$ .

Réponse :  $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ .

5. Fonction impaire (et définie avec les nouvelles bornes considérées) sur l'intervalle d'intégration.  
Réponse : 0.
6. Cdv  $y = \sin(x)$  puis linéarisation du  $\cos^6$ . On peut aussi isoler un terme  $1 - x^2$ , et faire une IPP, de sorte à réduire l'exposant, et recommencer jusqu'à obtenir la dérivée de l'Arcsin (ou à l'étape précédente, l'aire d'un quart de disque).  
Réponse :  $\frac{5\pi}{32}$ .
7. Mise sous forme canonique, cdv  $y : \frac{x+1}{2}$  puis  $y = \sin(t)$ , et enfin linéarisation. On peut s'arrêter après le premier cdv et reconnaître, à un facteur près, l'aire d'un demi-disque.  
Réponse :  $\pi$ .
8. Cdv  $x = y^6$ .  
Réponse :  $\frac{3\pi}{2} - \frac{47}{35}$ .
9. cdv  $y = \ln(x)$  et IPP itérée.  
Réponse :  $2 \sum_{k=0}^n (-1)^k (\ln(2))^{n-k} \frac{n!}{(n-k)!}$ .
10. Le polynôme sous la racine se factorise en  $(x+2)^2(x-4)$ . Poser alors  $y = x-4$ . Remarquer au passage qu'il s'agit d'une intégrale impropre.  
Réponse :  $\frac{2}{\sqrt{6}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ .
11. cdv  $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ , puis IPP pour diminuer le degré des pôles.  
Réponse :  $\frac{\pi}{2} - 1$ .
12. Faire partir le  $x$  du numérateur dans une intégration  $u'/u^2$ , pour le reste, faire une mise sous forme canonique, puis écrire au numérateur  $1 = 1 + x^2 - x^2$  afin de pouvoir faire une IPP.  
Réponse :  $\frac{-3}{130} + \frac{7}{6} \left( \operatorname{Arctan} \frac{2}{3} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{3} \right)$
13. cdv  $y = \sqrt{x+1}$ ,  
Réponse :  $2\sqrt{2} - 2 + 2 \ln(2\sqrt{2} - 2)$ .
14. IPP, puis changement de variable  $y = \sqrt{x}$ . On est ramené à une fraction rationnelle dont le dénominateur est  $1 + y^4 = (1 + \sqrt{2}y + y^2)(1 - \sqrt{2}y + y^2)$ . Terminer avec une DES.  
Réponse : attendre l'année prochaine.
15. Plusieurs façons de procéder : IPP puis cdv, ou cdv puis IPP, ou encore cdv global  $y = \ln(1 + \sqrt{x})$ , soit  $x = (e^y - 1)^2$ . Terminer par une IPP pour les  $ye^y$ .  
Réponse :  $\frac{1}{2}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 10.5** – Cdv  $y = \sqrt{x}$ , puis mise sous forme canonique de ce qui reste sous la racine, et cdv adéquat. On est ramené à l'aire du quart de disque  $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$ .  
Réponse :  $\frac{\pi}{8}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 10.6** –

1. Changement de variable  $u = a + b - t$ .  $\int tf(t) = \frac{a+b}{2} \int f$ .
2. Utiliser 1, puis primitivation à vue. Réponse :  $\frac{\pi^2}{8}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 10.7** – C'est ce qu'on a fait en cours de façon plus générale avec la formule de Taylor avec reste intégral. Le retrouver par IPP itérée (c'est ainsi qu'on avait montré la FTI), et majorer l'intégrale pour montrer qu'elle tend vers 0. L'irrationalité de  $e$  s'obtient en majorant  $n! \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$  par 1, pour obtenir un encadrement strict de  $n!e$  entre deux entiers consécutifs. Choisir convenablement  $n$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 10.8** –

1.  $I_n + I_{n+2}$  nous donne quelque chose de la forme  $u' \times u^n$  à primitiver.

Réponse :  $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ , d'où  $I_n \rightarrow 0$  par encadrement. En progressant de 2 en 2 :

$$I_{2n} = (-1)^n \frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}, \quad I_{2n+1} = (-1)^n \frac{\ln 2}{2} + (-1)^n \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{2k}.$$

2. On passe à la limite :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln(2).$$

À comparer aux développements en série de  $\ln(1+x)$  et  $\text{Arctan}$ , obtenus par primitivation de sommes de suites géométriques de raison  $-x$  et  $-x^2$  respectivement. Ici, on est au bord du domaine de convergence, donc ce ne sont pas des résultats anodins.

**Indications ou solutions pour l'exercice 10.9** – IPP pour former une relation de récurrence :  $I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n$ .

Réponse :  $I_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 10.10** – Former une relation entre  $I(p, q)$  et  $I(p+1, q-1)$  (par IPP), et itérer jusqu'à  $I(p+q, 0)$ .

Réponse :  $I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 10.11** – Faire 2 IPP :  $K_{n+2} = -(n+1)(n+2)K_n + (n+2) \frac{\pi^{n+1}}{2^{n+1}}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 10.12** – Pour  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ , majorer par  $x^n \tan 1$ . Réponse : 0.

Pour  $\lim n I_n = \lim (n+1) I_n$ , intégrer par parties, puis s'inspirer du premier calcul. Réponse :  $\tan(1)$

**Indications ou solutions pour l'exercice 10.13** –

- La limite en 0 (et par périodicité aux  $2m\pi$ ) s'obtient par limites remarquables.
- $I$  ne dépend pas de son dernier paramètre (intégralton d'une fonction périodique). En déduire par  $cdv$   $t' = t + x' - x$  que  $I$  ne dépend pas non plus de sa deuxième variable.
- Intégrer par parties en primitivant  $\frac{1}{\sin^2(\frac{t}{2})}$  (cela donne de la cotangente). On obtient l'égalité avec l'intégrale de l'énoncé, à un facteur  $\frac{1}{16\pi}$  près.
- $I_{n+1} - I_n$  s'écrit comme l'intégrale d'une fonction impaire.
- Réponse : 1.

**Indications ou solutions pour l'exercice 10.14** – Intégration par parties, pour faire apparaître un  $\frac{1}{n}$ , puis majorer l'intégrale,  $f'$  étant bornée (pourquoi?)

**Indications ou solutions pour l'exercice 10.15** –

- (a) Majorer l'intégrande par  $\frac{M^n}{n!}$ , où  $M$  est un majorant de  $x \mapsto x(bx-a)$ .
  - (b) Leibniz, ou plus simplement, écrire  $P(X) = a_n X^n + \dots + a_{2n} X^{2n}$ , et voir ce qu'il se passe lorsqu'on dérive  $k$  fois et qu'on évalue en 0. Pour les évaluations en  $\frac{a}{b}$ , on pourra faire le changement de variables  $y : x - \frac{b}{a}$ .
2. IPP itérée à l'ordre  $2n+1$ , et question précédente. La contradiction provient des propriétés des suites convergentes d'entiers.

**Indications ou solutions pour l'exercice 10.16** –

1. Dérivation des intégrales dépendant de leurs bornes.

2. Primitivation à vue. Encadrer  $\frac{1}{t}$  entre  $\frac{1}{x^2}$  et  $\frac{1}{x}$ , pour obtenir un encadrement de  $f$  à partir de l'intégrale calculée.
3. Déterminer les dérivées par taux d'accroissement, en majorant les intégrales (0 en 0, 1 en 1). Pour le taux d'accroissement en 1, voir  $f(1)$  comme l'intégrale de la question 2, et encadrer  $\frac{t-1}{\ln(t)}$  par  $\varepsilon$  pour  $x$  proche de 1.

Comparer avec les limites de la dérivée.

On peut remarquer (mais c'est un peu tôt dans l'année) que le théorème de prolongement des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  permet d'éviter le calcul des dérivées en 0 et en 1 (la limite de la dérivée suffit).

**Indications ou solutions pour l'exercice 10.17** – Idée : l'intégrande est à peu près comme  $\frac{1}{x}$  en 0, donc on peut imaginer que la limite sera le même que celle de  $\int_u^{3u} \frac{1}{x} dx$ .

Première méthode : On approche cos par 1 par  $\varepsilon$ , valable pour  $u$  assez petit. Ça marche bien.

Deuxième méthode : on fait apparaître notre ln par IPP, puis on a des limites à calculer en faisant apparaître les limites remarquables du cos (afin d'approcher cos par 1). On majore l'intégrale restante également. Donne quelques calculs de limites, un peu plus long que la méthode précédente, mais permet d'éviter entièrement les  $\varepsilon$ .

Adapter l'une ou l'autre méthode pour la deuxième limite.

Réponses :  $\ln(3)$  et  $\ln(2)$ .

Pouvez-vous imaginer un énoncé plus général ?

**Indications ou solutions pour l'exercice 10.18** – Dériver, après avoir réduit le domaine d'étude à  $[0, \frac{\pi}{2}]$  (on remarquera la symétrie par rapport à  $\frac{\pi}{2}$ ). On peut aussi s'en sortir par changement de variable. Calculer avec  $x = 0$  par exemple, par cdv puis IPP. On peut choisir  $x$  encore mieux que cela.

Réponse :  $\frac{\pi}{4}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 10.19** – Pour plus de sécurité, et en attendant mieux, travailler d'abord sur l'intervalle  $[1, A]$ . On peut faire un cdv  $y = \frac{1}{x}$ , qui nous ramène à de l'Arcsin.

Réponse :  $\frac{\pi}{2}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 10.20** – cdv  $y = \sqrt{x}$ , puis cela se primitive à vue.

Réponse :  $\left(\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{6}\right) \pi^{\frac{3}{2}}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 10.21** – Grand classique. Pas très difficile dans l'absolu lorsqu'on maîtrise bien les techniques liées aux intégrales impropres.

Prolonger par continuité en 0 et faire une IPP en  $+\infty$ , de sorte à récupérer la convergence absolue, grâce à une comparaison avec  $\frac{1}{x^2}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 10.22** – Exercice de bon niveau lorsqu'on n'a pas beaucoup de technique sur les intégrales impropres.

Exprimer de deux façons  $\int \ln(\sin(2t)) dt$  en fonction de  $\int \ln(\sin(t)) dt$  et  $\int \ln(\cos(t))$ , en utilisant la formule de duplication de l'angle, ou un changement de variable. Comparer ces deux dernières intégrales.

On prendra garde à bien justifier la convergence des intégrales en restreignant les intervalles, puis en faisant tendre les bornes, à défaut de méthode plus efficace pour le moment.

Réponse :  $-\frac{\pi}{2} \ln(2)$ . Vérifiez la logique du signe.

# Équations différentielles linéaires

## Indications ou solutions pour l'exercice 11.1 –

1. Utiliser la méthode de variation de la constante pour la solution particulière.

Réponse :  $y(x) = (1 + x^2)(K + \text{Arctan}(x))$

2. Sur  $]-\infty, -1[$ ,  $]-1, 1[$  et  $]1, +\infty[$  (et tout  $I$  inclus dans l'un de ces 3 intervalles) :  $y(x) = K\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$   
Les solutions ne se recollent pas en 1 et  $-1$ , sauf si  $K = 0$  : sur tout intervalle ouvert contenant  $-1$  ou 1, l'unique solution est la fonction nulle.

3. Sur  $\mathbb{R}_+^*$  ou  $\mathbb{R}_-^*$  :  $y(x) = (\ln(|x|) + \frac{K}{x})$ . Pas de solution définie en 0, puisque l'équation ne l'est pas.  
Remarque : la valeur absolue de la primitivation du  $\ln$  passe dans la constante  $K$ .

4.  $y(x) = \frac{K + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)}{\text{Arctan}(x)}$ , sur  $\mathbb{R}_+^*$  ou  $\mathbb{R}_-^*$ .

Sur  $I$  contenant 0, se prolonge uniquement si  $K = 0$  :  $y(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{2\text{Arctan}(x)}$ ,  $y(0) = 0$  (par équivalent).

Vérifier que cette fonction est dérivable en 0, et que l'ED est vérifiée en 0.

5.  $y(x) = Ke^{\frac{(x+1)^2}{2}} - 1$ .

Ici, la solution particulière est évidente, inutile d'utiliser la méthode de variation de la constante !

6.  $y(x) = Ke^{-x}$  ou  $y(x) = K'e^x$  sur tout  $I$  sur lequel  $y$  est de signe constant (avec  $K \leq 0$ ,  $K' \geq 0$ , discuter suivant le signe). Par TVI, si  $y$  s'annule en  $x_0$ ,  $y$  étant croissante, elle est de signe constant sur  $]-\infty, x_0[$  et  $]x_0, +\infty[$ . La continuité assure alors  $K = K' = 0$ . Ainsi, la description ci-dessus est valable sur  $\mathbb{R}$  entier, on ne peut pas recoller les deux descriptions, sauf pour la fonction nulle.

7. Même principe, en résolvant sur des  $I$  sur lesquels  $y - 1$  est de signe constant.

$y(x) = Kx + 1$ ,  $K \geq 0$ , ou  $y(x) = \frac{K}{x} + 1$ ,  $K \leq 0$ . Les solutions ne peuvent pas se recoller en  $x_0 > 0$ .

8. Changement de fonction  $z = e^y$ .  $y(x) = -\frac{1}{2}\ln|x| + \ln\left(K + \frac{|x|^{\frac{3}{2}}}{3}\right)$ . Pour que ce soit défini sur  $\mathbb{R}$ ,  $K > 0$ , sinon, ce n'est pas défini sur un intervalle centré en 0.

9. Changement de fonction  $z = \ln\left(\frac{y}{x}\right)$ ,  $z = \frac{K}{x^2} + \frac{1}{x}$ ,  $y = x \exp\left(\frac{K}{x^2} + \frac{1}{x}\right)$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 11.2 –**  $f'' = f'$ , donc par double quadrature,  $f = Ke^x + L$ , puis calculer l'intégrale, remplacer dans l'équation, cela donne une équation linéaire en  $K$  et  $L$ . La valeur en 0 en donne une autre. Solution :  $K = \frac{1}{3-e}$ ,  $L = \frac{2-e}{3-e}$ .

## Indications ou solutions pour l'exercice 11.3 –

1. Soit  $A = \int_0^x a(t) dt$ . Justifier à l'aide de la méthode de variation de la constante que la solution générale s'écrit sous la forme :

$$e^{-A(x)} \left( C + \int_0^x b(t)e^{A(t)} dx \right).$$

Justifier que pour tout  $t \leq x$ ,  $A(t) \leq A(x) - (x - t)$ . En déduire que pour tout  $\varepsilon$ , il existe  $x_0$  tel que pour tout  $x > x_0$ ,  $e^{-A(x)} \int_0^x |b(t)|e^{A(t)} dx < \varepsilon$  et conclure.

2. Même type d'argument, en justifiant d'abord la convergence de  $\int_{-\infty}^0 b(t)e^{A(t)} dt$ . Comme  $e^{-A(x)} \rightarrow +\infty$ , il est nécessaire de poser  $C = \int_{-\infty}^0 b(t)e^{A(t)} dt$ , d'où la seule solution possible admettant une limite nulle :

$$e^{-A(x)} \int_{-\infty}^x b(t)e^{A(t)} dt.$$

On termine à peu près comme en 1.

dans le cas où  $b$  n'est pas positive, on montre la convergence absolue de l'intégrale par les techniques usuelles sur les intégrales impropres.

#### Indications ou solutions pour l'exercice 11.4 –

1. Solution :  $y(x) = \frac{1}{4}e^{2x} + e^x - xe^x - \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$ .
2. Chercher d'abord une solution particulière pour un second membre égal à  $e^{ix}$ , sous la forme  $\alpha e^{ix}$ , puis prendre la partie imaginaire. On peut aussi chercher directement sous la forme  $a \cos(x) + b \sin(x)$ .

$$\text{Solution : } y(x) = \frac{4}{5}e^{-x/2}(\cos(x/2) + 2\sin(x/2)) - \frac{4}{5}\cos(x) - \frac{2}{5}\sin(x).$$

3. Résoudre sur  $\mathbb{R}_+$  et sur  $\mathbb{R}_-$ , puis exprimer les conditions de recollement pour que la fonction obtenue soit 2 fois dérivable en 0.

$$\text{Solution : } y(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} + \alpha \cos(x) + (\beta + \varepsilon(x)) \sin(x), \text{ où } \varepsilon(x) = 0 \text{ si } x < 0 \text{ et } 1 \text{ sinon.}$$

4. Poser pour  $t \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ,  $z(t) = y(\tan(t))$ , c'est-à-dire  $y(x) = z(\text{Arctan}(x))$ . Utiliser l'une ou l'autre de ces relations pour obtenir  $z'' + z = 0$ .

$$\text{Solution : } y(x) = a \cos(\text{Arctan}(x)) + b \sin(\text{Arctan}(x)) = \frac{a + bx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

5. Justifier qu'une solution polynomiale non nulle est de degré 1 ou 2, puis poser des coefficients. Une solution est  $y_0(x) = x^2 - 1$ . Utiliser alors une méthode adaptée du cours pour trouver les autres solutions, en les cherchant sous la forme  $y_0 \times z$ .

$$\text{Solution : } z \text{ vérifie } 2(x^2 + 1)z'' + x(x^2 - 1)z' = 0, \text{ d'où } z' = K \frac{x^2}{x^2 - 1} \text{ puis } y = K(-2x + (x^2 - 1) \ln \frac{x-1}{x+1}) + c(x^2 - 1).$$

#### Indications ou solutions pour l'exercice 11.5 –

1. Montrer que  $y'' = y - x^2 + 2x$ . Chercher une solution particulière polynomiale de degré 2.

$$\text{Solution : } y(x) = \lambda e^x = \mu e^{-x} + x^2 - 2x + 2, \quad z(x) = \lambda e^x - \mu e^{-x} - x^2 + 2x - 2.$$

2. Dériver la première, substituer  $z'$  puis  $z$  à l'aide de l'équation initiale :  $y'' - 2y' - 15y = 8e^{-3t}$ . On obtient :

$$y(t) = \lambda e^{5t} + \mu e^{-3t} - t e^{-3t}, \quad z(t) = \frac{\lambda}{2} e^{5t} - \frac{\mu}{2} e^{-3t} + \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{8}\right) e^{-3t} - \frac{1}{8} e^t.$$

Certains exercices de cette feuille nécessitent d'avoir vu certaines notions du chapitre suivant (équivalents,  $O$ ). Ces notions sont utilisées ici de façon élémentaire, ne nécessitant pas de dextérité technique. On pourra par exemple partir des définitions suivantes :

- Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  ne s'annulent pas pour  $n$  assez grand, elles sont dites équivalentes si  $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 1$ . On note  $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ .
- Sous les mêmes hypothèses,  $(u_n)$  est dite dominée par  $(v_n)$  si  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$  est bornée. On note  $u_n = O(v_n)$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 12.1** – Si  $\ell < 1$ , comparer à une suite géométrique de raison  $\ell' \in ]\ell, 1[$ , à partir d'un certain rang.

**Indications ou solutions pour l'exercice 12.2** – Si  $u_n$  non constante, disons  $u_k$  différent de la limite  $\ell$ , pour se fixer les idées  $u_k > \ell$ . Justifier que  $[x_k, +\infty[$  contient un nombre fini de termes de la suite.

**Indications ou solutions pour l'exercice 12.3** – Pour la minoration, isoler un petit intervalle sur lequel  $f$  est compris entre  $M - \varepsilon$  et  $M$ , et minorer l'intégrale sur cet intervalle. Voir ce qu'il se passe lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , et traduire cela par un  $\varepsilon$  supplémentaire.

**Indications ou solutions pour l'exercice 12.4** – Développer  $\sin(n+1)$  et en déduire que si la limite existe, celle de  $\cos(n)$  aussi. Utiliser ensuite  $\sin(2n)$  et  $\cos(2n)$  pour conclure, sauf si  $\ell = 0$ . Obtenir dans ce cas  $\ell' = 0$  (limite du cos), et conclure.

**Indications ou solutions pour l'exercice 12.5** – Par  $\varepsilon$ , contrôler d'abord  $\frac{1}{k}$  puis  $\frac{k}{n}$ . Ou alors, choisir convenablement  $k$  en fonction de  $n$ , de sorte que les deux termes tendent vers 0.

**Indications ou solutions pour l'exercice 12.6** – Par encadrement !

**Indications ou solutions pour l'exercice 12.7** – Montrer que  $\max(u_n, u_{n+1})$  converge (on fait un lissage), puis  $\min(u_n, u_{n+1})$  aussi.

**Indications ou solutions pour l'exercice 12.8** –

1. Si  $\ell$  fini, se ramener à 0 par translation. Contrôler les derniers termes par  $\frac{\varepsilon}{2}$  dès que possible ; le début de l'expression tend vers 0, donc peut être mise dans un autre  $\frac{\varepsilon}{2}$  pour  $n$  assez grand. Principe à adapter pour une limite infinie.
2. Cesàro appliqué à  $u_n = v_{n+1} - v_n$ .
3. Se ramener à 2 par ln
4. Utiliser 3. Réponse : 4.

**Indications ou solutions pour l'exercice 12.9** – On peut couper la somme en deux, contrôler la moitié par la convergence de  $a_n$  l'autre par la convergence de  $b_n$  (par  $\varepsilon$ ). Il faut juste savoir où couper

et comment utiliser l'hypothèse un peu asymétrique. Cette hypothèse nous assurera un contrôle facile des termes pour  $a_n$  petit, et surtout en nombre aussi important qu'on veut. On commence donc par trouver une module  $N$  pour  $a_n$ , contrôler les  $N$  premiers termes grâce à  $(b_n)$ , et tous les autres grâce à la convergence de  $(a_n)$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 12.10 –**

1. Soit  $v_n = \frac{u_n}{n}$ . Tout d'abord, en prenant  $n = m$ , on se rend compte que pour tout  $n$ , il existe  $n' > n$  tel que  $v'_n \leq v_n$ . Ainsi, si  $\ell$  existe c'est nécessairement  $\ell = \inf(v_n)$ .  
Fixer  $n$  tel que  $v_n$  soit proche de  $u_n$ , puis, pour tout  $m = qn + r$ , utiliser l'inégalité  $u_m \leq qu_n + u_r$ .
2. Application de la question précédente en passant au logarithme.

**Indications ou solutions pour l'exercice 12.11 –**

- Si pour tout  $\varepsilon$ ,  $\{n \mid u_n < \varepsilon\}$  est de densité nulle, montrer qu'on peut trouver une suite croissante  $N_0 < N_1 < N_2 < \dots$  telle que pour tout  $n \geq N_k$ ,  $B_k = \{m \mid u_m < \frac{1}{2^k}\}$  vérifie

$$\frac{|B_k \cap \llbracket 0, n-1 \rrbracket|}{n} \geq 1 - \frac{1}{2^k}.$$

En considérant  $B'_k = A_k \cap \llbracket 0, N_{k+1} - 1 \rrbracket$  et  $B = \cup B'_k$ , montrer que le complémentaire  $A$  de  $B$  permet d'assurer (ii).

- Ainsi, si (ii) n'est pas réalisé, il existe  $\varepsilon$  tel que  $\{n \mid u_n < \varepsilon\}$  ne soit pas de densité nulle. Écrire la somme de Cesàro en isolant ces termes et contredire (i).
- (ii)  $\implies$  (i) est plus simple, en séparant dans la somme les indices de  $A$  : certains termes sont contrôlés par Cesàro classique, les autres par le fait que  $u_n$  est borné et la densité de  $A$  est nulle.

**Indications ou solutions pour l'exercice 12.12 –**

1. Étudier la monotonie de  $u_{n+1} - u_n$ , et si la CV ne se fait pas vers 0, montrer que  $u_n$  franchit des marches trop hautes (ou trop basses) pour rester bornée.
2. La question 1 fournit le signe de  $u_{n+1} - u_n \dots$

**Indications ou solutions pour l'exercice 12.13 –** Le plus dur est d'exprimer de façon rigoureuse des faits qui semblent évidents.

1.  $u_n(a)$  est une composée d'itérée de fonctions croissantes (définies en fonction de  $a_0, \dots, a_{n-1}$ ), appliquées à  $a_n$ ;  $u_{n+1}(a_n)$  est la même itérée, appliquée à  $a_n + \sqrt{a_{n+1}}$  qui est plus grand.
2. Remarquer que  $u_{n+1}((1)_k) = \sqrt{1 + u_n((1)_k)}$ .
3. De façon évidente, mais délicate à justifier rigoureusement,  $u_n((\lambda^{2^k})_k) = \lambda u_n((1)_k)$ . Peut se justifier rigoureusement en montrant par récurrence sur  $p \geq 0$  que pour tout  $n$ ,

$$u_p((\lambda^{2^{n+1+k}})_k) = \lambda^{2^n} u_p((1)_k)$$

(l'exprimer par radicaux pour comprendre).

4. Pour une comparaison rigoureuse, récurrence descendante pour chacun des termes  $u_n(k)$ .  
Ensuite, comparer à la suite de la question 3. Ces suites lui sont négligeable (montrer que le quotient tend vers 0).
5. Comparer à la suite dont les premiers termes sont tous nuls. Ensuite s'arranger pour que  $a_n^{\frac{1}{2^{n+1}}}$  diverge vers  $+\infty$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 12.14 –** Justifier que pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ , et en déduire la monotonie de  $(u_n)$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 12.15 –** Montrer que les suites sont adjacentes. Pour la limite, trouver une CL des deux qui soit constante.

**Indications ou solutions pour l'exercice 12.16 –**

1. (a) Par récurrence immédiate, les suites sont strictement positives puis croissantes à partir du rang 2. Remarquer qu'on a alors un minorant  $(4n+2)u_2$
- (b) Par récurrence
- (c) Exprimer  $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$  comme somme d'une série alternée (utiliser un télescopage à partir de 2). Les deux suites sont alors adjacentes (technique usuelle)
- (d) Remarquer que la différence à la limite est majorée par la différence entre deux termes consécutifs.
2. Trouver  $\lambda$  et  $\mu$  par les conditions initiales, puis récurrence
3. Exprimer 1(c) sous forme d'un équivalent, et en déduire en fonction de  $\beta_n$ , un équivalent de  $u_n$  lorsque  $\lambda\ell + \mu \neq 0$ . Discuter suivant le signe. Le cas où c'est nul nécessite qu'on y regarde de plus près. Utiliser pour cela 1(d). Dans ce cas, la limite est nulle.

**Indications ou solutions pour l'exercice 12.17** –

1. Montrer par récurrence que  $u_n \leq v_n \leq w_n$
2. Montrer que  $(u_n)$  et  $(w_n)$  sont adjacentes. Pour montrer que leur différence tend vers 0, on pourra montrer que  $(w_n - u_n)$  est sous-géométrique.
3. Exprimer  $\alpha u_{n+1} + \beta v_{n+2} + \gamma w_{n+1}$  en fonction de  $u_n, v_n$  et  $w_n$ , et identifier les coefficients obtenus à  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ . On trouve  $\alpha = 10, \beta = 16$  et  $\gamma = 21$  (et les triplets multiples de celui-ci).
4. Passer à la limite dans  $\alpha u_n + \beta v_n + \gamma w_n = \alpha u_0 + \beta v_0 + \gamma w_n$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 12.18** – Utiliser les résultats et méthodes du cours. Pour les dernières, résoudre d'abord l'équation homogène puis trouver une solution particulière.

**Indications ou solutions pour l'exercice 12.19** – Montrer que la seule limite possible est 4 et former  $u_{n+2} - 4$ ; factoriser par  $(a+b)(a-b)$ , et donner une inégalité satisfaite par les termes de la suite  $w_n = \sqrt{u_n} - 2$ , après avoir justifié que  $u_n$  est supérieure à 1 à partir d'un certain rang. Conclure par majoration.

**Indications ou solutions pour l'exercice 12.20** – Études à savoir faire. S'entraîner. Les réponses ci-dessous :

1.
  - si  $u_0 \in [-\frac{3}{2}, 3]$ ,  $(u_n)$  croît vers 3.
  - si  $u_0 \in [3, +\infty[$ ,  $(u_n)$  décroît vers 3.
2. Étudier  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  :
  - si  $u_0 \in ]0, \sqrt[3]{2}[$ ,  $u_{2n} \rightarrow 0$  et  $u_{2n+1} \rightarrow +\infty$
  - si  $u_0 \in [\sqrt[3]{2}, +\infty[$ , de même en inversant le rôle de  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$ .
  - si  $u_0 = \sqrt[3]{2}$ , la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est stationnaire, de valeur et donc de limite  $\sqrt[3]{2}$ .
3. Pas de point fixe, les seules limites possibles sont  $-\infty, +\infty$  et 1. Vérifier que ce n'est pas le cas :  $(u_n)$  n'admet pas de limite.
4.
  - Si  $u_0 \in ]-\infty, -4[$ ,  $u_n \rightarrow -\infty$ .
  - Si  $u_0 \in ]0, \frac{4}{3}[$ ,  $u_n \rightarrow 1$  (seul point fixe de  $f \circ f$  dans l'intervalle fermé)
  - Si  $u_0 \in ]-4, 0[$ , elle finit par dépasser 0 (sinon elle convergerait sans point fixe).  $u_n \rightarrow 1$
  - si  $u_0 \in ]\frac{4}{3}, 4[$ ,  $(u_n) \rightarrow 1$ .
  - si  $u_0 \in ]4, +\infty[$ ,  $u_n \rightarrow -\infty$ .
5.
  - Si  $u_0 \in ]-2, +\infty[$ , alors  $u_n \rightarrow 1$ .
  - si  $u_0 \in ]-\infty, -5[$ ,  $u_n \rightarrow 1$ .
  - si  $u_0 \in ]-5, -2[$ , on ne peut pas y rester,  $u_n \rightarrow 1$ , sauf si on tombe sur  $-5$
6. Utiliser l'IAF, et en déduire que  $(u_n)$  est de Cauchy. La limite est l'unique réel  $\ell$  tel que  $\cos(\ell) = \ell$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 12.21** – Étudier  $u_{4n}$  (étudier les composées de  $f$  et  $g$ ). Une étude un peu pénible de point fixe (mais on pourra pour cela remarquer que  $f$  et  $g$  ont des points

fixes communs, qui sont également points fixes de leur composée, cela permet de trouver facilement une factorisation).

**Indications ou solutions pour l'exercice 12.22 –**

1. Remarquer que  $[a, +\infty[$  est stable par  $f$  définissant la récurrence, que  $f$  est croissante sur cet intervalle, et que tout s'y ramène. On obtient  $u_n \rightarrow \sqrt{a}$ .
2. Récurrence.
3. Par itération, on obtient :  $|u_n - \sqrt{a}| \leq \frac{(u_1 - a)^{2^{n-1}}}{(2\sqrt{a})^{2^{n-1}-1}}$ .
4. Réponse :  $n = 8$ . La convergence est extrêmement rapide : on double à peu près le nombre de décimales correctes à chaque itération. C'est en fait un cas particulier de méthode de Newton pour la résolution d'équations numériques, et cette convergence rapide est une caractéristique de cette méthode (en cas de convergence...)

**Indications ou solutions pour l'exercice 12.23 –**

1. Étudier la monotonie et les points fixes. Réponse :  $+\infty$ .
2. Regrouper les 2 logarithmes (en faisant passer un facteur 2 à l'intérieur sous forme d'un carré). Remplacer  $u_{n+p+1}$  par son expression en fonction de  $u_{n+p}$ , et terminer en utilisant la positivité et la croissance de  $(u_n)$ .
3. Utiliser l'équivalence entre la convergence de la suite  $(v_n)$  et la convergence de la série de terme général  $(v_{n+1} - v_n)$ . Établir cette convergence par TCSTP.
4. En majorant le reste de la série précédente, montrer que  $2^{nb}(v_n - \alpha) = o(1)$ . Passer à l'exponentielle.
5. Réinjecter cet équivalent dans la majoration de la somme partielle de  $\sum(v_{k+1} - v_k)$ , pour montrer que  $\beta_n$  est bornée. En déduire la convergence vers 0 de la suite de l'énoncé. L'exprimer en réexprimant  $\beta_{n+1}$ . Conclure que  $\beta_n \rightarrow \frac{1}{2}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 12.24 –**

2. Par télescopage d'une part, et en remplaçant  $u_k$  par son expression en  $u_{k-1}$  d'autre part ; se débarrasser des termes constants par un argument de négligeabilité.

Réponse :  $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$

On pourra remarquer qu'il s'agit d'un cas particulier dégénéré d'une méthode plus générale utilisant le théorème de Cesàro pour obtenir la limite de la somme télescopique (l'exposant étant choisi de sorte à ce que cette limite soit finie non nulle). Cette méthode est développée dans certains autres exercices.

**Indications ou solutions pour l'exercice 12.25 –**

1. Classique (théorème de Cesàro) : par  $\varepsilon$ , encadrer la somme de  $n_0 + 1$  à  $n$  ; contrôler les premiers termes en faisant tendre  $n$  vers l'infini, et en traduisant cette limite par un deuxième  $\varepsilon$ . Cela peut être considéré comme du cours, mais il faut savoir refaire la démonstration.
2. (b) On pourra utiliser  $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$  au voisinage de 0, et exprimer  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$ . Se ramener à l'équivalent classique de  $(1 + u_n)^\alpha - 1$  lorsque  $u_n \rightarrow 0$ .

Réponse :  $\alpha = -2$ .

- (c) Exprimer la somme télescopique  $\sum u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ , et déterminer sa limite à l'aide de Cesàro.

Réponse :  $\sqrt{\frac{3}{n}}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 12.26 –** Méthode générale de calcul d'un équivalent de suite récurrente en utilisant le théorème de Cesàro.

1. Pour  $u_0$  assez petit  $[0, u_0]$  est stable par  $f$  et  $(u_n)$  décroît.

2. Déterminer  $\beta$  tel que  $u_{n+1}^\beta - u_n^\beta \rightarrow \ell \neq 0, \pm\infty$ . Utiliser le théorème de Cesàro sur la somme  $\frac{1}{n} \sum (u_{k+1}^\beta - u_k^\beta)$ .

Réponse :  $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(na(\alpha-1))^{1/\alpha-1}}$

3. Respectivement  $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$  et  $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 12.27 –**

- Calculer la dérivée (somme géométrique). Calculer le signe de  $P_n(2)$  en regroupant les termes 2 par 2.
- Minorer  $t^{2n} - 1$  par  $t^2 - 1$ .
- Remarquer que l'intégrande est égale à  $P'_n$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 12.28 –**

- Théorème de la bijection.
- Étudier la monotonie en déterminant le signe de  $P_{n+1}(x_n)$  (ce qui permet de comparer  $P_{n+1}(x_n)$  et  $P_{n+1}(x_{n+1})$ ).
- Réexprimer  $P_n$  en utilisant la formule de sommation des suites géométriques. Passer à la limite, sachant que  $\ell < 1$  (car  $(x_n)$  décroît).
- Récupérer l'expression de  $x_n - \frac{1}{2}$  à partir de l'égalité  $P_n(x_n) = 0$ , réexprimé par sommation. Montrer que  $\ln(2x_n) \underset{+\infty}{\sim} x_n^{n+1}$ , et en déduire  $(n+1)\ln(x_n) = -(n+1)\ln(2) + o(1)$ , ce qui permet de passer à l'exponentielle.

**Indications ou solutions pour l'exercice 12.29 –**

- Théorème de la bijection.
- $f_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n^{n+1} - \alpha_n^n - \alpha_n \leq 0 = f_n(\alpha_n)$ , car  $\alpha_n \in ]0, 1[$ . On en déduit la décroissance de  $(\alpha_n)$ . En déduire  $n\alpha_n \rightarrow 1$ , ce qui permet de répondre à cette question et la suivante.
- Minorer  $f\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)$  en ne gardant que 3 termes du développement du binôme. Conclure que  $\beta_n \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$ , puis  $\beta_n \rightarrow 1$ .
- Appliquer  $\ln$  à la relation  $f_n(\beta_n)$ . Réponse :  $\beta_n - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 12.30 –**

- Théorème de la bijection.
- $f_{n+1}(x_n) < 0$ , donc  $(x_n)$  croît.
- Par l'absurde  $x_n \rightarrow +\infty$ .
- $x_n^k = o(x_n^{k+1})$ , d'où  $x_n^{k+1} + x_n^k \underset{+\infty}{\sim} x_n^{k+1}$ . Réponse :  $n^{\frac{1}{k+1}}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 12.31 –**

- $x \tan(x)$  est croissante sur tout intervalle  $]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ ,  $x > 0$ .
- Exprimer la relation avec  $\text{Arctan}$ , et utiliser  $x_n \underset{+\infty}{\sim} n\pi$ . Ensuite, faire un DL.

**Indications ou solutions pour l'exercice 12.32 –** Encadrer par des intégrales. Pour les restes (question 2), encadrer d'abord la somme entre  $n+1$  et  $m$ , puis faire tendre  $m$  vers  $+\infty$ . Vérifier que les encadrants ont même équivalent simple.

Réponses :

- $\frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha}$  si  $\alpha < 1$ ,  $\ln(n)$  si  $\alpha = 1$ .

2.  $\frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}$
3.  $\frac{1}{2} \ln(n)^2$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 12.33 –**

1. En supposant  $\alpha \neq 0$ , et en notant  $\ell$  la limite de  $u_n + \alpha u_{2n}$ , montrer que si  $a$  est valeur d'adhérence,  $\frac{\ell-a}{\alpha}$  aussi. En déduire une suite non bornée de valeurs d'adhérences, sauf pour une unique valeur de  $a$ , donnant la seule valeur d'adhérence possible.

Alternative : considérer  $u_n = \sum_k (-1)^k \alpha^n (x_{2^k n} + \alpha x_{2^{k+1} n})$  : (justifier la convergence de cette somme telescopique vers  $x_n$ , et pour  $n$  assez grand, encadrer par  $\varepsilon$ )

Réponse :  $x_n \rightarrow \frac{\ell}{1+\alpha}$ .

2.  $u_n = (-1)^{v_2(n)}$ , ou  $(-1)^{\lg(n)}$ .

3. Appliquer la question 1 à  $nu_n$

Réponse :  $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n(2+\beta)}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 12.34 –** Essentiellement technique. Donner le rang de la première et de la dernière valeur  $k$  (s'exprime sous forme de somme d'entiers consécutifs). En résolvant une équation de degré 2, en déduire

$$u_n = \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{1 + 8(n-1)}}{2} \right\rfloor,$$

puis  $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2n}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 12.35 –** Faire des essais avec différentes initialisations, et observer ce qu'il se passe.

Remarquer qu'une fois qu'on passe en dessous de 0 en retranchant  $n$ , on a  $u_{n+2} = u_n + 1$ . Réponse :  $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{2}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 12.36 –** Réponse :  $e$  et  $\frac{1}{e}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 12.37 –** Considérer une suite  $(a_n)$  de valeurs d'adhérences convergeant avec  $a$ , et une suite extraite  $u_{\varphi(n)}$  telle que pour tout  $n$ ,  $|u_{\varphi(n)} - a_n| \leq \frac{1}{2^n}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 12.38 –** Remarquer que pour tout  $n$ ,  $A_n = \{n \mid u_n > \frac{1}{2^n}\}$  est fini. Parcourir les  $A_n \setminus A_{n-1}$  dans l'ordre, rangés chacun par ordre décroissant.

**Indications ou solutions pour l'exercice 12.39 –**

1. Utiliser le fait que l'image réciproque d'un ouvert est un ouvert.
2. Par l'absurde, considérer autour de chaque point, une boule ne contenant qu'un nombre fini de termes de la suite  $(u_n)$ .
3. Sinon, construire  $(u_n)$  tq  $u_n$  se soit pas dans l'union des boules de centre les  $x_i$ ,  $i < n$ , et de rayon  $\varepsilon$ .
4. Sinon, il existerait des  $x_n$  tels que  $B(x_n, \frac{1}{n})$  ne soit inclus dans aucun  $U_i$ . En extraire une suite convergente, et considérer  $U_j$  contenant sa limite, et en déduire que pour  $n$  assez grand  $B(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{\varphi(n)}) \subset U_j$ .
5. Utiliser la précompacité avec  $r$  nombre de Lebesgue.

**Indications ou solutions pour l'exercice 12.40 –** Justifier que l'ensemble des valeurs d'adhérence est un intervalle. Si  $a < b$  sont valeurs d'adhérence, prendre  $x$  entre les 2, et une suite extraite  $u_{\varphi(n)}$  convergeant vers  $x$ . Remarquer que  $u_{\varphi(n)+1} \rightarrow x$  aussi, et en déduire que  $x$  est point fixe. Conclure.

**Indications ou solutions pour l'exercice 12.41** –

1. Par l'absurde, utiliser Bolzano-Weierstrass pour trouver une suite  $x_n$  d'éléments de  $D_\varepsilon$  convergeant vers une valeur  $a$ , puis  $y_n$  s'approchant de plus en plus de  $x_n$ , en restant différent de  $a$ , et tel que  $|f(y_n) - f(x_n)| > \varepsilon/2$ . Comparer les limites de  $f(x_n)$  et  $f(y_n)$ .
2. Prendre une suite d' $\varepsilon$  tendant vers 0 et faire l'union.

**Indications ou solutions pour l'exercice 12.42** – Considérer  $D_\varepsilon$  l'ensemble des  $a$  tels que soit la limite à gauche, soit la limite à droite en  $a$  diffère de  $f(a)$  de plus de  $\varepsilon$ . Supposant  $D_\varepsilon$  infini, montrer l'existence d'une suite  $(x_n)$  strictement monotone (disons croissante) de  $D_\varepsilon$  convergeant vers  $a$ . Considérer  $y_n$  se resserrant vers  $x_n$ , restant inférieure à  $a$  et telle que  $f(y_n)$  ne s'approche pas trop de  $f(x_n)$ . Obtenir une contradiction en passant à la limite. Pour terminer, considérer une suite  $\varepsilon_n$  tendant vers 0.

**Indications ou solutions pour l'exercice 12.43** – Si  $|p_n|$  admet une valeur d'adhérence finie, extraire une suite convergeant vers cette valeur, et réextraire de sorte à assurer également la CV de  $(|q_{\psi(n)}|)$  (dans  $\overline{\mathbb{R}}$ ). Contredire l'irrationalité de  $|x|$ ; On en déduit la limite de  $|p_n|$  puis de  $|q_n|$ .

## Calcul asymptotique

### Indications ou solutions pour l'exercice 13.1 –

1.  $-\ln(x)$  ( $\text{th}(x) \sim_{+\infty} 1$ )
2.  $x$  (utiliser  $\text{sh}(x) \sim_{+\infty} e^x$ , mettre le terme prépondérant en facteur et couper le  $\ln$  en 2)
3.  $\ln(x)$
4.  $\frac{5x}{12}$  (tout rentrer dans  $\ln$ , pour se ramener à un équivalent classique ; puis un autre ; sommer avec  $o$ ).
5.  $x$  (factoriser par le terme prépondérant dans le  $\ln$ )
6.  $\frac{x}{2}$  (tout grouper dans  $\ln$ , utiliser équivalent du  $\ln$  puis sommer équivalents de  $\exp$  avec  $o$ ).
7.  $\frac{x}{e}$  (équ du  $\ln$  externe puis regrouper tout dans le même  $\ln$  et à nouveau équ du  $\ln$ )
8.  $-\frac{x}{4}$  (vérifier que le deuxième terme est en  $o(x)$ , donc n'intervient pas).
9.  $\sqrt[4]{x}$
10.  $\frac{\sqrt{2}}{8} \cdot x$ .
11.  $\frac{x}{4} \cdot \frac{e^{\sqrt{\ln(2)}}}{\sqrt{\ln(2)}}$ .
12.  $\pi x$ , aucune difficulté (enchaîner les équivalents en commençant par l'extérieur)
13.  $\frac{ex^2}{4}$  (factoriser par  $e$ , utiliser l'éq de  $e$ , puis de la racine, puis du  $\cos$ , en sommant avec  $o$ ).
14.  $x$
15.  $-\frac{x^3}{2}$
16.  $\frac{1}{2}(x-1)$  (se ramener à au taux d'accroissement)
17.  $4(\ln(2)+1)(x-2)$  (factoriser pour utiliser un équ de  $\exp$ , puis cdv  $y = x+2$ ; mettre de côté un terme  $y(\ln(y+2))$ , et pour le reste, regrouper les  $\ln$  et équ; on somme les équ avec  $o$ ).
18.  $(x-1)^2$  (factoriser par  $x$ , équ de l' $\exp$ , puis du  $\ln$ ).
19.  $x^{2x}$  (le deviner et former le quotient dont on calcule la limite en l'écrivant sous forme exponentielle; ou alors, tout écrire au départ sous forme exponentielle, et développer l'exposant à  $o(1)$  près, ce qui peut se faire ici uniquement avec la connaissance des équivalents)

**Indications ou solutions pour l'exercice 13.2 –**

1.  $\frac{x}{2}$
2.  $-\frac{x^2}{2}$
3.  $x \ln(x)$
4.  $\frac{x}{12}$
5.  $\frac{1}{x^2}$
6.  $\frac{a}{x \ln(x)}$
7.  $\pi - x$
8.  $\frac{(\pi-x)^2}{2}$
9.  $x$
10.  $\frac{a}{e} \left(x - \frac{e-b}{a}\right)$

**Indications ou solutions pour l'exercice 13.3 –**

1. Séparer le  $\ln$  en 2 :  $\ln 2n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$ .
2.  $\ln \left(1 + \frac{a}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{a}{n}$ .
3.  $\left(1 + \sqrt{n^2 + 1}\right) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n}$ .
4. C'est déjà la forme la plus simple possible!
5. Mettre le terme prépondérant en facteur, couper le  $\ln$  en 2, et étudier les prépondérances :  $\ln(n^2 + n + 1) \underset{+\infty}{\sim} 2 \ln n$ .
6.  $\ln(n^3 + n) \underset{+\infty}{\sim} 3 \ln(n) = o(n^2)$ , donc  $u_n \underset{+\infty}{\sim} n^2$ .
7.  $u_n \underset{+\infty}{\sim} -\sqrt{n}$ .
8.  $n^6 = (\sqrt{n})^{12} = o(e^{\sqrt{n}})$ , donc  $u_n \underset{+\infty}{\sim} e^{\sqrt{n}}$ .
9.  $\ln n = o(n)$ , donc :  $u_n \underset{+\infty}{\sim} n$ .
10. Factoriser pour faire apparaître des équivalents classiques, ou alors, de façon plus souple, écrire chaque équivalent des 4 termes qui interviennent avec  $o$  (sous forme d'un DL), afin de pouvoir faire la sommation au numérateur et au dénominateur. Revenir à des équivalents pour faire le quotient.  
Réponse :  $u_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{3}$  (c'est donc la limite de  $(u_n)$ )
11. Introduire  $+1 - 1$ , pour récupérer les équivalents classiques du  $\cos$  et de  $\exp$ . Comparer les deux équivalents obtenus, afin d'obtenir un équivalent de la somme.  
Réponse :  $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2 \ln^2 n}$ .
12. Enchaîner les équivalents, en commençant par l'extérieur :  $u_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 13.4 –**

1.  $2x$  (sommer avec  $o$ )
2.  $\sqrt{x}$  (idem)
3.  $2x^2$  (encore ; factoriser  $1 - \cos^2(x)$ )

**Indications ou solutions pour l'exercice 13.5 –**

1.  $2x \ln(x)$  (chercher un équivalent de chaque terme et étudier les prépondérances)
2.  $-\frac{x^2}{2}$  (enchaîner les équivalents, dans le bon ordre (effeuiller, ne pas commencer par le coeur).
3.  $\frac{x}{2}$  ( $-1 + 1$  et étudier les prépondérances)

**Indications ou solutions pour l'exercice 13.6 –**

1. En divisant par  $\frac{1}{n}$ , on a le taux d'accroissement de  $\tan$  en  $\frac{\pi}{4}$ . On peut aussi développer  $\tan(a+b)$ , mettre sur le même dénominateur, utiliser les équivalents classiques et comparer les termes les uns aux autres.  
Réponse :  $\frac{2}{n}$ .

2. Mettre  $\sqrt{e}$  en facteur, et utiliser l'équivalent de  $e^x - 1$  en 0. Déterminer un équivalent du terme restant par développement du cos, et utilisation des équivalents classiques, exprimés sous forme de développement limités, ou comme avant, en introduisant un taux d'accroissement.

Réponse :  $\frac{\sqrt{3e}}{2\ln(n)}$ .

3. Utiliser la formule liant  $\text{Arctan}(n)$  et  $\text{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right)$ . On peut aussi appliquer  $\tan$  à l'expression initiale, en utilisant un équivalent de  $\tan$ .

Réponse :  $\frac{1}{n}$ .

4. Écrire sous forme exponentielle, développer le sinus, et former un développement à  $o(1)$  de l'exposant, pour pouvoir obtenir un équivalent par passage à l'exponentielle.

Réponse :  $e\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 13.7** – Écrire sous forme exponentielle, et calculer la limite de l'exposant.

Réponse :  $e^2$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 13.8** – Écrire sous forme exponentielle.

- Si  $\alpha < 2$ ,  $\lim u_n = 1$ .
- si  $\alpha > 2$ ,  $\lim u_n = 0$  ;
- si  $\alpha = 2$ ,  $\lim u_n = \frac{1}{\sqrt{e}}$  ;

**Indications ou solutions pour l'exercice 13.9** – Déterminer la limite de  $f$  en  $x_0$  dans les cas suivants :

- |                     |                                      |
|---------------------|--------------------------------------|
| 1. $-\frac{1}{2}$   | 9. $e^2$                             |
| 2. $-\frac{25}{12}$ | 10. $\frac{1}{2}$ (QC + équivalents) |
| 3. $-5$             | 11. $e^{-\frac{1}{2}}$               |
| 4. $\frac{12}{33}$  | 12. $\frac{1}{8}$                    |
| 5. $0$              | 13. $1$                              |
| 6. $-2$             | 14. $\frac{5}{2}$                    |
| 7. $e^2$            | 15. $\frac{1}{4}$                    |
| 8. $\frac{1}{2}$    | 16. $1$                              |

**Indications ou solutions pour l'exercice 13.10** – Des limites simples, utilisant diverses techniques (règles usuelles, croissances comparées, équivalents...)

1. Réponse : 0 ;
2. Réponse : 0 ;
3. Réponse :  $\frac{1}{3}$
4. Réponse : 0
5. Réponse : 0
6. Réponse : 0
7. Réponse :  $+\infty$
8. Réponse : 0
9. Réponse :  $-\infty$

**Indications ou solutions pour l'exercice 13.11** –

1. Écrire sous forme exponentielle, puis déterminer un équivalent de l'exposant. Pour l'exponentielle, faire un développement à  $o(1)$  de l'argument.  
Réponse : 0.
2. Tout écrire sous la même exponentielle et étudier les prépondérances par CC.  
Réponse : 0
3. Sous forme exponentielle, puis équivalents classiques dans l'exposant.  
Réponse :  $\sqrt{e}$
4. Développer  $\tan(a+b)$ , puis appliquer le logarithme, et l'équivalent classique associé, sous forme de DL pour pouvoir sommer. Garder  $o(1)$ .  
Réponse :  $e^{8/\sqrt{3}}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 13.12** –

1.  $\frac{a}{b} \left(\frac{a+b}{2}\right)^{a-b}$
2.  $\frac{n+1}{2}$
3.  $e^{-\tan(a)}$
4. 1
5.  $a$  si  $a > 1$  ; 1 si  $a < 1$
6.  $\sup(a, b)$
7.  $\sqrt{ab}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 13.13 –**

- |                           |  |
|---------------------------|--|
| 1. $-\infty$              | 23. $e^{\frac{2}{\pi}}$                |
| 2. $\frac{1}{2}$          | 24. $e^{\frac{2}{\pi}}$                |
| 3. 0                      | 25. $e^{-\frac{\pi^2}{32}}$            |
| 4. 0                      | 26. $e^2$                              |
| 5. $-\frac{6}{\pi}$       | 27. 1                                  |
| 6. $\frac{1}{\pi}$        | 28. e                                  |
| 7. 0                      | 29. $e^{-\frac{2}{\pi}}$               |
| 8. 0                      | 30. $1/e$                              |
| 9. $\frac{\pi}{4}$        | 31. 1                                  |
| 10. $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ | 32. $1/e$                              |
| 11. 1                     | 33. $e^{\frac{2}{3}}$                  |
| 12. 0                     | 34. 1                                  |
| 13. -3                    | 35. 1                                  |
| 14. $e \cos(e)$           | 36. $e^{1/e}$                          |
| 15. 0                     | 37. $(2^4 \cdot 3^9)^{-\frac{4}{\pi}}$ |
| 16. 1                     | 38. e                                  |
| 17. 1                     | 39. 1                                  |
| 18. -2                    | 40. $+\infty$                          |
| 19. $\frac{\pi}{8}$       | 41. $e^2$                              |
| 20. $-\frac{1}{2}$        | 42. 1                                  |
| 21. 0                     | 43. $1/e$                              |
| 22. 1                     | 44. e                                  |
|                           | 45. $\sqrt{e}$                         |
|                           | 46. 1.                                 |

**Indications ou solutions pour l'exercice 13.14 – Étudier la convergence des suites définies par :**

1.  $u_n \rightarrow 1$
2.  $u_n \rightarrow +\infty$
3. Avec Stirling :
  - $u_n \rightarrow 0$  si  $|x| < \frac{1}{\alpha}$ , où  $\alpha = \frac{p^p}{q^q(p-q)^{1-q}}$ .
  - $u_n \rightarrow +\infty$  si  $x > \frac{1}{\alpha}$
  - $u_n \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{p}{q(p-q)}}$  si  $x = \frac{1}{\alpha}$
  - $(u_n)$  n'admet pas de limite sinon.
4.  $u_n \rightarrow \frac{2}{e}$
5.  $u_n \rightarrow 1$
6.  $u_n \rightarrow e$
7.  $u_n \rightarrow 1$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 13.15 –**

1. NON. Considérer  $\ln(1+x)$  et  $\ln(1+2x)$  en 0.
2. Écrire  $g = f + o(f) = f \times (1 + o(1))$ , puis  $\ln(g) = \ln(f) + \ln(1 + o(1))$ . Comparer les deux termes de cette somme.

**Indications ou solutions pour l'exercice 13.16** –

1. Considérer  $e^n$  et  $e^{n+1}$ .
2. Remarquer que  $o(f) = o(1)$ , donc  $g = f + o(1)$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 13.17** – Par la contraposée, si  $P \neq Q$ , justifier l'existence de  $k \leq n$  et  $\lambda \neq 0$  tel que  $P(x) - Q(x) \underset{x_0}{\sim} \lambda(x - x_0)^k$ . On peut même dans un premier temps se ramener à un voisinage de 0, par changement de variable, si on est plus à l'aise dans ce contexte.

**Indications ou solutions pour l'exercice 13.18** – Argument de type Cesàro. Couper en  $N$  à partir duquel  $|u_n| \leq \varepsilon v_n$ . On obtient un cas particulier du théorème de sommation des  $o$ . L'autre moitié est le cas des séries convergentes (dans ce cas, on a une négligeabilité entre les restes). On en déduit un résultat similaire pour la sommation des équivalents.

**Indications ou solutions pour l'exercice 13.19** – Former le quotient, majorer simplement tous les termes sauf le dernier. On pourra aussi s'amuser à le voir comme conséquence du théorème de sommation des équivalents, en écrivant  $n! - 1$  sous forme d'une somme télescopique.

**Indications ou solutions pour l'exercice 13.20** –

1. Remarquer que si  $a^m \leq x$ , avec  $a \geq 2$  et  $m \geq 2$ , alors  $a \leq \sqrt{x}$  et  $m \leq \log_2(x)$ .
2. De même, il faut simultanément  $a^b \leq x$  et  $c^d \leq x$  (mais ce n'est évidemment pas une condition suffisante).  $c$  vérifiant cela vérifie nécessairement  $c \leq \sqrt[3]{x}$  (car  $d \geq 3$ ).
3. Trier les  $(a, b, c, d)$  selon que  $a = 0$  ou  $a = 1$  ou  $c = 0$  ou  $c = 1$  (majorer par  $N_1(x)$  ou  $N_1(x - 1)$ ),  $a \geq 2$ ,  $c \geq 2$ ,  $b$  ou  $d \geq 3$  (en comptant plusieurs fois si à la fois  $b$  et  $d$  sont  $\geq 3$ , majorer en fonction de  $N_2$ ), et dernier cas,  $b = d = 2$ . Utiliser les congruences modulo 4 des carrés pour majorer ce dernier cas par  $\frac{3}{4}x$ . Le reste étant négligeable devant  $x$ , il peut être majoré par  $\varepsilon x$  pour  $x$  assez grand.

## Approximations polynomiales

**Indications ou solutions pour l'exercice 14.1** – Utiliser une formule de Taylor pour l'exponentielle, contrôlant le reste à  $10^{-4}$  près (pour déterminer l'ordre nécessaire).

**Indications ou solutions pour l'exercice 14.2** – Par ITL, en se servant du signe des dérivées successives. Pour le membre de droite, on n'obtient pas tout-à-fait la constante  $\frac{1}{16}$ , mais elle se compare facilement à  $\frac{1}{16}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 14.3** – Lorsque  $n \rightarrow +\infty$ ,  $\sin\left(\frac{1}{n} \sin x\right) \approx \frac{1}{n} \sin(x)$ , et on se doute que la limite sera alors  $\int_0^\pi \sin(x) dx = 2$ .  
Pour le justifier rigoureusement, former la différence, et la majorer par une formule de Taylor.

**Indications ou solutions pour l'exercice 14.4** – L'encadrement s'obtient en utilisant l'ITL, en contrôlant le signe des dérivées successives.

Pour le produit infini, passer à l'exponentielle, et encadrer chacun des termes grâce à ce qui précède. On obtient des sommes qui se calculent explicitement (sommes d'entiers ou de puissances d'entiers).

**Indications ou solutions pour l'exercice 14.5** – Exploiter la symétrie en considérant  $g(x) = f(x) - f(1-x)$ . Si on applique mal la formule de Taylor, on peut se retrouver avec un facteur 2 en trop. En quel point appliquer la formule de Taylor pour diviser les longueurs par 2 ?

**Indications ou solutions pour l'exercice 14.6** – Grand classique ! Majorer le reste de la série exponentielle, en remarquant que  $\frac{1}{(n+1+k)!} \leq \frac{1}{(n+1)!k!}$ , l'inégalité étant la plupart du temps stricte, et que  $e \geq \frac{1}{n}$ .

Conclure en essayant de trouver à partir de cet encadrement un encadrement strict de l'entier  $m$  entre deux entiers consécutifs.

**Indications ou solutions pour l'exercice 14.7** – Formule de Taylor en  $a$  à l'ordre  $n$  (donc avec reste nul).

**Indications ou solutions pour l'exercice 14.8** – Inégalité de Taylor-Lagrange en  $a$  pour montrer que  $N(f) \leq \frac{N(f^{(n)})}{n!}$ , puis série exponentielle.

**Indications ou solutions pour l'exercice 14.9** –

1. ITL entre  $x$  et  $x+h$ , entre  $x$  et  $x-h$ , et on somme.
2. Inégalité triangulaire sur la première question, et majoration des deux termes  $f(x+h)$  et  $f(x-h)$ .
3. L'inégalité est valable pour tout  $h$ , donc pour  $h$  réalisant le minimum du majorant. Rechercher ce minimum par étude de fonction.

**Indications ou solutions pour l'exercice 14.10** – FTY centrée en  $x$ , pour obtenir un DL à l'ordre 2 de  $f(x+y)f(x-y)$  lorsque  $y \rightarrow 0$ . Terminer par un argument de conservation de signe (à partir d'un équivalent de  $f(x+y)f(x-y) - f(x)^2$ ).

**Indications ou solutions pour l'exercice 14.11** –

1. Méthode 1 : faire une IPP sur  $\int_a^b (x-a)(x-b)f(t) dt$ , pour relier cette intégrale au problème. Problème : c'est un peu parachuté, et il faut y penser (c'est en fait une formule connue, la formule de MacLaurin, mais quand on ne la connaît pas...)

Méthode 2 : faire une IPP sur l'intégrale initiale  $\int_a^b f(x) dt$  en essayant de garder le rôle symétrique de  $a$  et  $b$ . On peut bien sûr retrouver ainsi la formule de MacLaurin, mais il est plus naturel de se ramener à des monômes centrés en  $\frac{a+b}{2}$ , pour préserver la symétrie (c'est un peu équivalent, notamment pour la première IPP). On s'en sort aussi.

Méthode 3 : formule de Taylor entre  $a$  et  $x$  (centrée en  $a$ ), entre  $b$  et  $x$ , et on somme les 2. On s'en sort aussi, mais avec une constante un peu moins bonne.

2. Manipulations élémentaires de somme, et majoration à l'aide de la question 1.

**Indications ou solutions pour l'exercice 14.12** – Voici une méthode pour justifier une dérivation sous le signe  $\int$  (c'est-à-dire passer la dérivation sur  $x$  à l'intérieur de l'intégrale). Vous verrez en Spé des théorèmes efficaces pour permettant de le faire. En attendant, comprenez bien cet exemple.

1. Il s'agit d'étudier pour quelles valeurs de  $x$  l'intégrale est bien définie. Ici, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
2. Écrire  $F$  sous forme intégrale regrouper les intégrales, majorer avec l'inégalité triangulaire, reconnaître le début d'un développement de Taylor, et le majorer par ITL. Il faut pour cela un majorant de  $f_t''$  entre  $x$  et  $x+h$ . Montrer que pour tout  $y \in \mathbb{R}$  et tout  $t \in [0, 1]$ ,  $|f_t''(y)| \leq 4e^{|y|}$ , puis majorer  $|y|$  par  $|x| + |h|$  entre  $x$  et  $x+h$ . Il reste alors encore à intégrer entre 0 et 1 sur la variable  $t$ .
3. Par limite du taux d'accroissement, obtenu par la question précédente.

**Indications ou solutions pour l'exercice 14.13** –

1. Écrire  $g$  sous forme intégrale, et se retrouver à intégrer une ITL. Pour contrôler la convergence, il faut réussir à bien maîtriser un majorant de  $|f_t''|$  entre  $x$  et  $x+u$ . Pour faire cette majoration, on peut se contenter de  $|u| < 1$ , le but étant de faire tendre ensuite  $u$  vers 0. Montrer qu'on peut alors majorer  $f_t''$  entre  $x$  et  $x+u$  (pour  $t \in [0, 1]$ ) par  $(4 + 16(|x| + 1)^2)$ . Conclure en intégrant entre 0 et 1. Il reste un facteur multiplicatif  $|u|$  dans le majorant assurant la convergence vers 0.

On en déduit que  $g'$  s'obtient par dérivation sous le signe  $\int$ .

2. Calculer  $h'$  (carré d'une primitive), et comparer à  $g'$  par changement de variable.
3. Calculer  $(h+g)(0)$  et exprimer la limite en  $+\infty$ . La limite de  $g$  est nulle par majoration de l'intégrande (par  $e^{-x}$  par exemple, pour  $x \geq 1$ ).

**Indications ou solutions pour l'exercice 14.14** –

Certains DL sont donnés à un ordre un peu plus élevé que demandé (si vous voulez vous entraîner en augmentant un peu la difficulté des calculs)

1.  $\sin x \cos 2x = x - \frac{13}{6}x^3 + o(x^4)$
2.  $e^{\sin 2x} = 1 + 2x + 2x^2 - 2x^4 + o(x^4)$
3.  $\ln(1 + \sin x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ .
4. Attention, pensez à sortir un facteur  $e$ , pour vous ramener à une composition par une expression **de limite nulle**.  
 $e^{\cos x} = e - \frac{e}{2} \cdot x^2 o(x^3)$ .

5. De même, mettez 2 en facteur dans la racine.

$$\sqrt{1 + \cos(x)} = \sqrt{2} \left( 1 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{384}x^4 \right) + o(x^4)$$

6. Diviser numérateur et dénominateur par  $x^3$  pour se ramener à un DL à élever à une puissance judicieuse.

$$\frac{x^3}{\sin^3 x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{17}{120}x^4 + o(x^5).$$

7. Commencer par  $\frac{x}{\sin(x)}$  à un ordre augmenté de 1, puis diviser par  $x$ .

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{7!} + o(x^6),$$

puis :

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} = - \left( \frac{x}{6} + \frac{7}{360}x^3 + \frac{31}{15120}x^5 \right) + o(x^5).$$

8.  $\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + o(x^6)$

9. Utiliser la  $\pi$ -périodicité de  $\tan$  pour se ramener en 0.

$$\tan(\pi e^x) = \pi x + \frac{\pi}{2}x^2 + \left( \frac{\pi}{6} + \frac{\pi^3}{3} \right) x^3 + \left( \frac{\pi}{24} + \frac{\pi^3}{2} \right) x^4 + o(x^4).$$

10. Écrire sous forme exponentielle. Diviser l'exposant par  $x$  nécessite d'augmenter l'ordre de 1 avant cette division.

$$(1 - x \sin x)^{\frac{1}{x}} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{3}{8}x^4 - \frac{7}{20}x^5 + o(x^5).$$

11. De même :  $(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \left( 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3) \right)$ .

12. Mettre 4 en facteur, et sortir un facteur  $e^2$  :

$$e^{\sqrt{4+x}} = e^2 \left( 1 + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64} + \frac{x^3}{1536} + o(x^3) \right)$$

13. Du calcul ! Les étapes (tout est au voisinage de 0) :

- $\sqrt{1 - x - x^2} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}x^2 - \frac{3}{16}x^3 - \frac{45}{128}x^4 - \frac{95}{256}x^5 - \frac{465}{1024}x^6 + o(x^6)$ .
- $(1 + u)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}u - \frac{1}{9}u^2 + 581u^3 + o(u^3)$
- $(\cos x)^{\frac{1}{3}} = 1 - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{72} - \frac{43}{6480}x^6 + o(x^6)$
- $\sqrt{1 + x - x^2} - (\cos x)^{\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{19}{24}x^2 - \frac{3}{16}x^3 - \frac{421}{1152}x^4 - \frac{95}{256}x^5 - \frac{1315523}{2903040}x^6 + o(x^6)$ .

À vos souhaits.

14. Séparer le  $\ln$  en 2, développer d'abord par rapport à  $\tan(x)$  pour faire quelques simplifications.

$$\ln \left( \frac{1 + \tan(x)}{1 - \tan(x)} \right) = 2x + \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^5 + o(x^5).$$

15. On a  $\sin x - \sin 5x = -4x + o(x)$ , donc en divisant par  $x$ , on est ramené à une forme  $\frac{1}{1-a}$ . Ainsi, on peut écrire :

$$\frac{\cos x - \cos 5x}{\sin x - \sin 5x} = \frac{1}{x} (\cos x - \cos 5x) \cdot \frac{x}{\sin x - \sin 5x}.$$

Il faut donc aller jusqu'à l'ordre 6, avant de diviser par  $x$ . La fraction en sinus donne un terme constant non nul, donc il faudra bien aller à l'ordre 6 pour les cosinus. En revanche, les termes constant des cosinus se compensent, et le premier terme non nul dans la différence des cosinus est un terme en  $x^2$ . Ainsi, il suffira d'aller à l'ordre 4 pour la fraction des sinus. Comme on divise la différence des sinus par  $x$ , il faut aller à l'ordre 5 pour les sinus. On obtient :

- $ds \frac{x}{\sin x - \sin 5x} = -\frac{1}{4} \left( 1 + \frac{31}{6}x^2 + \frac{7267}{360}x^4 + o(x^4) \right)$
- $\cos x - \cos 5x = 12x^2 - 26x^4 + \frac{217}{10}x^6 + o(x^6)$

- $(\cos x - \cos 5x) \cdot \frac{x}{\sin x - \sin 5x} = -3x^2 - 9x^4 - \frac{519}{10}x^6 + o(x^6)$
  - $\frac{\cos x - \cos 5x}{\sin x - \sin 5x} = -3x - 9x^3 - \frac{519}{10}x^5 + o(x^5)$ .
- 16.
- $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2^3} + \frac{x^3}{2^4} + o(x^3)$ .
  - $\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = \sqrt{2} \left( 1 + \frac{x}{2^3} - \frac{5}{2^7}x^2 + \frac{21}{2^{10}}x^3 + o(x^3) \right)$
  - $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}} = \sqrt{1+\sqrt{2}} \cdot \left( 1 + \frac{2-\sqrt{2}}{2^4}x - \frac{13-12\sqrt{2}}{2^8}x^2 + \frac{124-69\sqrt{2}}{2^{12}}x^3 + o(x^3) \right)$

**Indications ou solutions pour l'exercice 14.17 –**

1. Dériver :  $f'(x) = -\frac{2}{1+4x^2}$ . On obtient :  $f(x) = \text{Arctan}(2) - 2x + \frac{8}{3}x^3 - \frac{32}{5}x^5 + \frac{128}{7}x^7 + o(x^8)$ .
2.  $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( 1 + \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}x^2 + \frac{56}{27}x^3 + o(x^3) \right)$  puis primitiver.
3. Exprimer d'abord le DL de  $\text{Arcsin}(x)$  (en dérivant), puis composer et ne pas craindre les calculs. Calculer séparément les DL des puissances de  $\text{Arcsin}(x)$  (en multipliant à chaque fois le résultat par  $\text{Arcsin}(x)$ ). Être ordonné et soigneux dans les calculs. Sans garantie :

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{11}{60}x^5 - \frac{583}{5040}x^7 + o(x^8).$$

4. Multiplier par  $x$  et dériver. Un peu de calcul et :

$$f(x) = -\sqrt{3} \left( \frac{2}{9} - \frac{23}{405}x^2 + o(x^3) \right)$$

5. Dériver  $xf(x)$ , puis faire un peu de calcul. J'obtiens :

$$f(x) = \sqrt{3} \left( 1 + \frac{x^2}{90} - \frac{169x^4}{63000} + o(x^5) \right).$$

6.  $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \frac{19}{162}x^9 + \frac{41}{330}x^{11} + o(x^{11})$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 14.18 –**

1. Poser  $y = x - 1$ , puis DL à l'ordre 2. Attention à sortir un terme  $e$  pour le DL de  $\exp$  en 1 !  
Réponse :  $\frac{e^2}{2}(x-1)^2$ .
2. Poser  $y = x - e$ . Attention à sortir les constantes de l'exponentielle pour faire les compositions.  
Réponse :  $\frac{1}{2}e^{e-1}(x-e)^2$ .
3. Factoriser par  $\sqrt{x}$  puis utiliser un équivalent classique. Terminer en utilisant un DL du sinus.  
Réponse :  $\frac{-x^{\frac{5}{2}}}{12}$
4. Factoriser par  $x^x$  puis utiliser un équivalent classique. On se retrouve à devoir faire un DA de  $\ln(\sin(x))$ . Pour cela développer  $\sin(x)$ , mettre  $x$  en facteur, et le sortir additivement du  $\ln$ .  
Réponse :  $\frac{x^{3+x} \ln x}{6}$ .
5. Par mise en facteur, et utilisation d'équivalents classiques, se ramener d'abord à

$$(\tan x)^x - x^{\tan x} \underset{0}{\sim} x \ln \tan x - \tan x \ln x.$$

Développer ensuite  $\ln(\tan(x))$ , comme dans la question précédente, en sortant un terme  $\ln(x)$ . On obtient :

$$(\tan x)^x - x^{\tan x} \underset{0}{\sim} -\frac{x^3 \ln x}{3}$$

Faire de même pour le dénominateur.

Réponse : limite (donc aussi équivalent) :  $-1$ .

6. Compositions de DL sans difficulté, il faut juste savoir à quel ordre aller (après quelques essais : l'ordre 7) :

$$\operatorname{sh}(\sin x) = x - \frac{x^5}{15} + \frac{x^7}{90} + o(x^7) \quad \text{et} \quad \sin(\operatorname{sh}(x)) = x - \frac{x^5}{15} - \frac{x^7}{90} + o(x^7).$$

Réponse :  $\frac{x^7}{45}$ .

7. On s'en sort simplement en enchaînant les équivalents.

Réponse :  $\frac{x^3}{2}$ .

8. Utiliser  $\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} y \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{y}$  (obtenu en composant le terme de gauche par  $\tan$  et en utilisant un équivalent de  $\tan$ ).

Réponse :  $-\sqrt{x}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 14.19** – DA de l'exposant à l'ordre 0, après mise sous forme exponentielle. Développer le quotient de  $\ln$  à l'ordre 2 chacun, simplifier par  $x$ . On peut alors terminer avec des équivalents.

Réponse :  $\frac{1}{\sqrt{e}}$

**Indications ou solutions pour l'exercice 14.20** – DA de  $f$  à l'ordre 0 :

$$f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{6} + o(1).$$

$f(x) \rightarrow -\infty$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 14.21** –

1. En factorisant, commencer par remarquer que

$$f(x) \underset{\frac{\pi}{4}}{\equiv} -\frac{n(\tan(x) - 1)}{\cos(2x)}.$$

Poser  $x = \frac{\pi}{4} + y$ . Utiliser la formule d'addition pour  $\tan$  et les symétries pour  $\cos$ . Travailler avec des équivalents. On obtient  $f(x) \rightarrow n$ .

2. Poser  $y = \frac{\pi}{2} - x$  puis DA de chacun des 2 termes à l'ordre 0.  $f(x) \rightarrow \frac{1}{2}$ .
3. Factoriser chaque terme par  $\sin(x) - 1$ . Simplifier par  $\sin(x) - 1$ . Cela lève toute indétermination.  $f(x) \rightarrow -\infty$ .
4. Écrire sous forme exponentielle, et DA de l'exposant à l'ordre 0.  $f(x) \rightarrow e^{\frac{1}{3}}$ .
5. DA en la variable  $y = \frac{1}{x}$ .  $f(x) \rightarrow \frac{1}{2}$ .
6. Commencer par mettre  $e$  en facteur et utiliser un équivalent. Puis DL pour l'expression obtenue au numérateur.  $f(x) \rightarrow -\frac{e}{2}$ .
7. DL du numérateur au plus petit ordre pour obtenir un équivalent (récupérer la partie principale de chaque terme). Équivalent direct du dénominateur.  $f(x) \rightarrow \frac{1}{6}$ .
8. DL du numérateur et du dénominateur séparément, au plus petit ordre pour obtenir un équivalent.  $f(x) \rightarrow -\frac{3}{2}$ .
9.  $x = 2 + y$ , puis factoriser par les constantes et utiliser des équivalents.  $f(x) \rightarrow \frac{3}{2} \cdot 2^{\frac{1}{6}}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 14.22** – Rechercher un DA en  $\frac{1}{x}$  à l'ordre qu'il faut pour obtenir le premier terme non nul après le terme constant (essayer l'ordre 1) :

$$f(x) = x + 1 - \frac{1}{6x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Asymptote :  $y = x + 1$ , la courbe de  $f$  est sous son asymptote au voisinage de  $+\infty$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 14.23** – Méthode usuelle : DA en  $\frac{1}{x}$  à l'ordre  $k$ , où  $k$  est le premier terme non nul après le terme constant (pour récupérer le signe de la différence entre  $f$  et l'équation de l'asymptote). On essaye  $k = 1$ . Ici :

$$f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

donc l'asymptote est  $y = x - \frac{1}{2}$ , la courbe est au dessus au voisinage de  $+\infty$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 14.24** – Les deux propriétés déterminent le DL à l'ordre  $n$  de  $f$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 14.25** – Par CC,  $f(x) = o(x^n)$  pour tout  $n$ .

Vérifier que  $f'$  n'admet pas de limite en 0, donc ne peut pas être continue, donc pas dérivable non plus.

**Indications ou solutions pour l'exercice 14.26** – DL, puis identification des coefficients par TY. Pour le DL de  $\text{Arctan}(y)$  en 1, commencer par trouver un DL en 1 de la dérivée (ne pas hésiter à faire un changement de variable). Ce DL suffit à l'ordre 1,5 (cela donne un DL à l'ordre 2,5 de la primitive, qu'on compose ensuite en gagnant un facteur 2 sur l'ordre, sachant que  $\cos(x) - 1$  étant d'ordre 2, puis on gagne encore 1 en multipliant par sin.

Réponse :  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = \frac{\pi}{4}$ ,  $f''(0) = 0$ ,  $f^{(3)}(0) = -\frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}$ ,  $f^{(4)}(x) = 0$ ,  $f^{(5)}(x) = \frac{\pi}{4}$ ,  $f^{(6)}(x) = 0$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 14.27** –

1. Dénombrement : partitionner selon que  $n$  est point fixe (reste à choisir une involution sur les  $n - 1$  autres) ou non (choisir l'image de  $n$ , qui s'échange avec  $n$ , puis une involution sur les  $n - 2$  autres).
2. Se ramener à un produit de deux DL (c'est plus facile qu'une composition!) et éviter la formule de Faà di Bruno... Montrer, grâce à une relation entre  $f$  et  $f'$ , que les coefficients du DL de  $f$  vérifient la même relation de récurrence que  $(d_n)$ . Conclure. Le résultat obtenu peut aussi se démontrer combinatoirement (classer suivant le nombre de points fixes, choisir les points points fixes, et associer les autres éléments par paires).

**Indications ou solutions pour l'exercice 14.28** – TY pour chaque  $f(a + ph)$  :

$$\Delta(h) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{h^k}{k!} \sum_{p=0}^n (-1)^{n-p} \binom{n}{p} p^k + o(h^{n+1}).$$

Poser  $A_{n,p} = \sum_{p=0}^n (-1)^{n-p} \binom{n}{p} p^k$ , indépendant de  $f$ .

Considérer ensuite le cas particulier de  $f = \exp$  : calculer explicitement  $\Delta(h)$ , en faire un DL et utiliser l'unicité des DL pour déterminer les  $A_{n,k}$  (tous nuls sauf  $A_{n,n}$ ).

Réponse :  $\lim_{h \rightarrow 0} \Delta(h) = f^{(n)}(a)$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 14.29** – Existence du DL par TY (dérivabilité des fonctions réciproques). Exprimer  $f^{-1} \circ f = \text{id}$ , En déduire les coefficients du DL de  $f^{-1}$  par identification. On peut simplifier les calculs en remarquant que  $f^{-1}$  est impair.

Solution :  $f^{-1}(x) = x + \frac{x^3}{162} + o(x^3)$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 14.30** – Se ramener au calcul du DL d'une fonction réciproque, puis travailler par identification.

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3).$$

**Indications ou solutions pour l'exercice 14.31** –

1. Trouver une contradiction en formant le DL à l'ordre 2 en 0.
2. Y aller petit à petit en augmentant l'ordre.

$$f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{48} - \frac{x^5}{160} + o(x^5).$$

**Indications ou solutions pour l'exercice 14.32** – DL à l'ordre 2 grâce à Taylor-Young. Réponse :  $e^{-a^2}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 14.33** – Utiliser le théorème de la limite de la dérivée, en montrant par récurrence que  $g^{(n)}(0) = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$  et  $g$  de classe  $\mathcal{C}^n$ . Appliquer l'HR avec la différence entre  $f$  et le début de son DL, pour avoir des dérivées nulles, puis faire un DL de chaque terme.

Pour la question 2, remarquer que  $f'(0) = 0$  avec les hypothèses, et appliquer la question 1 avec  $f(x)/x^2$ . On peut aussi procéder directement en injectant TY dans Leibniz, puis en utilisant un argument combinatoire en comptant les couples  $(E, f)$  où  $E$  est un sous-ensemble de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  et  $f$  une injection de  $\llbracket 1, \ell-1 \rrbracket$  dans  $E$ . On pourra penser à un interrupteur sur un élément qui n'est pas dans l'image de  $f$ .

## Séries numériques

Indications ou solutions pour l'exercice 15.1 – F-V-V-F

Indications ou solutions pour l'exercice 15.2 – F-F-F-F

Indications ou solutions pour l'exercice 15.3 –

1. CV :  $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$
2. CV :  $n^2 u_n \rightarrow 0$
3. CV :  $u_n = o(e^{-n})$  ou  $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$
4. DV :  $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n}$ .
5. CV :  $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$
6. DVG :  $u_n \rightarrow e$ .
7. CV :  $|u_n| \leq \frac{1}{n^2}$
8. DV :  $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{-1}{2n}$  (par quantité conjuguée)
9. CV :  $n^2 u_n \rightarrow 0$ , en mettant tout sous forme exponentielle et en étudiant les négligeabilités dans l'exposant).
10. CV :  $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$
11. CV :  $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$
12. CV :  $n^{\frac{3}{2}} u_n \rightarrow 0$  (tout mettre sous forme exponentielle)
13. CV :  $n^2 |u_n| \rightarrow 0$ . Il est maladroit d'utiliser les séries alternées ici.
14. DVG :  $(\sin(n))$  n'admet pas de limite.
15. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = a^{-n^\alpha} = e^{-n^\alpha \ln a}$ ,  $a > 0$ . On distingue plusieurs cas :
  - Si  $\alpha \leq 0$ , DVG :  $u_n \rightarrow 1$  ou  $\frac{1}{a}$ .
  - Si  $\alpha > 0$  et  $a > 1$  : CV :  $n^2 u_n \rightarrow 0$
  - Si  $\alpha > 0$  et  $a < 1$  : DVG :  $u_n \rightarrow +\infty$
  - Si  $\alpha > 0$  et  $a = 1$  : DVG.
16. CV :  $n^2 u_n \rightarrow 0$
17.  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \frac{e}{a}$ 
  - Si  $|a| < e$  : DVG (d'Alembert)

- Si  $|a| > e$  : CVA (d'Alembert)
  - Si  $a = e$  : DV :  $u_n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$  (Stirling)
  - Si  $a = |e|, a \neq e$  : CV (Abel)
18. CV :  $u_n \sim \frac{\ln(n)}{n^2}$ , puis  $n^{\frac{3}{2}}u_n \rightarrow 0$ .
19. DV :  $u_n \sim \frac{e}{2n}$ , par DL
20. CV :  $u_n \sim -\frac{1}{2n^2}$ .
21. CV :  $n^2u_n \rightarrow 0$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 15.4 –**

1. CV :  $u_n \sim \frac{1}{n^2}$
2. DVG :  $u_n \rightarrow 1$
3. CV :  $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2^n}$
4. CV :  $0 \leq u_n \leq \frac{\pi^4}{n^4}$
5. CV :  $n^2u_n \rightarrow 0$
6. DV :  $nu_n \rightarrow +\infty$
7. CVA :  $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$
8. CV :  $u_n \sim \frac{1}{n^2}$
9. DV :  $nu_n \rightarrow +\infty$
10. CV :  $u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{4^n \sqrt{\pi n}} = o\left(\frac{1}{4^n}\right)$  (Stirling).  
On peut aussi utiliser le critère de d'Alembert.
11.
  - CVA si  $|z| < \frac{1}{4}$  par d'Alembert
  - DVG si  $|z| > \frac{1}{4}$  par d'Alembert
  - DV si  $z = \frac{1}{4}$  (équivalent, par Stirling)
  - CV si  $|z| = \frac{1}{4}, z \neq \frac{1}{4}$  (Abel)
12. CV :  $u_n \sim e^{-n}$
13. CV :  $u_n \sim \frac{1}{2n^2}$
14. CV :  $n^2u_n \rightarrow 0$
15. DVG : écrire  $u_n$  sous forme exponentielle + Cesaro

**Indications ou solutions pour l'exercice 15.5 –**  $u_n = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ , puis séries alternées. CV.

**Indications ou solutions pour l'exercice 15.6 –**

1. Former un DL du tg pour en trouver un équivalent
2. Comment relier cela à la série précédente ?

**Indications ou solutions pour l'exercice 15.7 –**

1. SCV (série alternée, mq  $x \mapsto \frac{1}{x-\sqrt{x}}$  est décroissante)
2. CVA ( $n^2|u_n| \rightarrow 0$ )
3. DV ( $u_n \sim_{+\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$ )
4. DVG!
5. SCV : DA  $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ , puis série alternée + série absolument convergente.

6. SCV :  $u_n = (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} + O\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$ ; SCV + CVA.
7. SCV :  $u_n = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .
8. L'intégrale se calcule, elle est décroissante de limite nulle; D'où SCV (alternée). L'expression de l'intégrale permet de montrer que la convergence n'est pas absolue.
9. DV :  $u_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n \ln(n)}$ , CV + DV (comparaison série/intégrale).
10. DVG :  $u_{2n} \rightarrow -1$
11. CV : cdv  $t = x - n\pi$ , puis étudier la suite d'intégrales.

**Indications ou solutions pour l'exercice 15.8** – CV :  $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  : SCV + CVA

**Indications ou solutions pour l'exercice 15.9** – Dans les deux cas, développer jusqu'au premier terme absolument convergent, ou jusqu'au premier terme de signe constant assurant la divergence. Pourquoi cela suffit-il pour conclure ?

**Indications ou solutions pour l'exercice 15.10** – Dans les deux cas, d'Alembert. Pour le cas limite, dans la première, utiliser Abel.

**Indications ou solutions pour l'exercice 15.11** –

1. CVA si  $|x| < 3$ , DV si  $|x| \geq 3$
2. CVA si  $|x| < 1$ , DV si  $|x| > 1$ , converge en  $-1$  diverge en  $1$ .
3. CVA si  $|x| < \frac{1}{2}$ , DV si  $|x| > \frac{1}{2}$ , CV en  $1$ , DV en  $-1$ .
4. CVA si  $|x| < 1$ , DV si  $|x| > 1$ , converge en  $-1$  diverge en  $1$ .
5. DV sauf si  $x = 0$ .
6. CVA si  $|x| < 1$ , DV si  $|x| > 1$ , converge en  $1$  diverge en  $-1$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 15.12** – Regrouper les termes de la série en paquets  $\sum_{k=\alpha_n+1}^{\alpha_{n+1}} u_n = S_{\alpha_{n+1}} - S_{\alpha_n}$  de termes consécutifs de même signe, et montrer que ça ne tend pas vers 0.

**Indications ou solutions pour l'exercice 15.13** – Regrouper les termes de la série en paquets  $\sum_{k=\alpha_n+1}^{\alpha_{n+1}} u_n = S_{\alpha_{n+1}} - S_{\alpha_n}$  de termes consécutifs de même signe. Montrer que ces paquets forment une suite décroissante de limite nulle. Quel théorème semble alors adapté ?

**Indications ou solutions pour l'exercice 15.14** – Justifier (par des méthodes élémentaires) que  $\binom{n}{3}$  est impair si et seulement si  $n \equiv 1 [4]$ , puis grouper en paquets de 4 termes. Diverge.

**Indications ou solutions pour l'exercice 15.15** –

1. Solution :  $\frac{21}{8}$
2. Solution :  $55e^2$

**Indications ou solutions pour l'exercice 15.16** –  $\cos((n-1)x) = \operatorname{Re}(e^{i(n-1)x})$ , puis formule du binôme négatif.

**Indications ou solutions pour l'exercice 15.17** – Considérer  $f_n(\theta)$  la somme partielle, calculer explicitement  $f'_n(\theta)$ , puis intégrer entre  $\pi$  et  $\theta$ . Utiliser le lemme de Riemann-Lebesgue pour passer à la limite. Réponse :  $\ln\left(2 \left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|\right)$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 15.18** – La convergence de la suite s'obtient facilement en recherchant les points fixes. 2 cas possibles. Dans un cas, la série diverge, dans l'autre, c'est presque une série de type connu.

**Indications ou solutions pour l'exercice 15.19** –

1.  $\sin$  croissante sur l'intervalle stable  $[-1, 1]$ ...
2.  $u_n - u_{n+1} \sim \frac{u_n^3}{6}$ , et comparaison suite/série
3. Comparaison suite/série + équivalent.
4.  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow 1$  d'où
  - $|x| < 1 \implies$  CVA (d'Alembert)
  - $|x| > 1 \implies$  DVG (d'Alembert)
  - $x = 1 \implies$  DV ( $u_n \geq u_n^2$ )
  - $x = -1 \implies$  CV (série alternée)

**Indications ou solutions pour l'exercice 15.20** –

1. Théorème de la bijection puis  $\ln(x_n) \sim n\pi$ .
2.  $x_n \geq e^{n\pi}$ . CV.

**Indications ou solutions pour l'exercice 15.21** – Même nature que  $\sum \frac{\mathbf{1}_E(n)}{n}$ , où  $E$  est l'ensemble des nombres s'écrivant sans 9. Compter ces nombres dans une tranche  $[[10^n, 10^{n+1} - 1]]$ , et majorer la somme sur cette tranche

**Indications ou solutions pour l'exercice 15.22** – Justifier que la série diverge ssi  $\prod_{k=1}^n \sum_{i_k=1}^{+\infty} \frac{1}{p_k^{i_k}}$  tend vers  $+\infty$ . En considérant d'abord les sommes partielles de rang  $m$ , montrer que ce produit est minoré par  $\sum_{j=1}^s \frac{1}{j}$ , où  $[[1, s]]$  est constitué d'entiers dont la décomposition en facteurs premiers n'utilise que les  $n$  premiers nombres premiers, en multiplicité inférieure ou égale à  $m$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 15.23** –  $0 \leq \max(a_n, b_n) \leq a_n + b_n$  puis TCSTP, puis  $\sqrt{a_n b_n} \leq \max(a_n, b_n)$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 15.24** – Montrer que dans un sens ou dans l'autre, on aboutit à  $u_n \rightarrow 0$ , donc  $u_n \sim \frac{u_n}{1 + u_n}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 15.25** – Minorer  $\sum_{n+1-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^n u_n$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 15.26** – Une implication est vraie, mais on peut avoir la divergence des deux pour tout  $x$  (contre-exemple en assurant la DVG soit sur les termes pairs, soit sur les termes impairs).

**Indications ou solutions pour l'exercice 15.27** –

- $\sum_{k=1}^n b_k = a_0 - na_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k$ .
- Si  $\sum a_n$  converge, avec  $a_n$  décroissante,  $na_n \rightarrow 0$
- Si  $\sum b_n$  converge majorer  $na_n$  par le reste de la série  $\sum b_n$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 15.28** –

- Si  $\alpha > 1$ , comparer  $\frac{u_n}{U_n^\alpha}$  et  $\int_{U_{n-1}}^{U_n} \frac{dt}{t^\alpha}$ .
- Si  $\alpha = 1$ , en éliminant le cas de divergence grossière, comparer à  $\sum \ln(U_{n-1}) - \ln(U_n)$ .
- Si  $\alpha < 1$ , comparer à  $\sum \frac{u_n}{U_n}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 15.29** –

1. Justifier que si  $(u_{\varphi_1(n)})$  représente la suite extraite des termes  $\geq 0$  et  $(u_{\varphi_2(n)})$  la suite extraite des termes négatifs, alors  $\sum u_{\varphi_1(n)}$  et  $\sum -u_{\varphi_2(n)}$  divergent vers  $+\infty$ . Construire la bijection en considérant d'abord une série de termes positifs (pris dans l'ordre dans la suite  $(u_{\varphi(n)})$ ), jusqu'à ce que la somme dépasse  $x$ , puis des termes négatifs jusqu'à revenir en dessous de  $x$ , puis de nouveau des termes positifs jusqu'à revenir au-dessus de  $x$  etc.
2. De même avec le procédé suivant : imposer que la  $n$ -ième série de termes positifs permette de dépasser la valeur  $n$ , et ne considérer à chaque fois qu'un terme dans la série suivante de termes négatifs. On obtient alors une divergence vers  $+\infty$ .

En symétrisant l'argument, on peut obtenir une divergence vers  $-\infty$ , et en considérant des séries de termes positifs permettant à chaque étape de dépasser 1, suivis de séries de termes négatifs jusqu'à passer en dessous de 0, on obtient une série dont la somme partielle n'admet pas de limite dans  $\mathbb{R}$ . Grossièrement, elle oscille entre 0 et 1.

**Indications ou solutions pour l'exercice 15.30** – Justifier qu'on peut trouver  $n$ , minimal, tel que  $u_{\varphi(0)} < x$ , et justifier que  $u_{\varphi(0)} + \sum_{n>\varphi(0)} u_n \geq x$ , puis itérer cet argument.

**Indications ou solutions pour l'exercice 15.31** –

- Utiliser l'inégalité arithmético-géométrique sur le  $n$ -uplet  $(a_1 b_1, \dots, a_n b_n)$ , où les  $b_i$  sont bien choisis. Prendre directement  $(a_1, \dots, a_n)$  ne convient pas car on n'a pas de convergence. Donner un poids plus fort à  $a_n$  qu'à  $a_1$  par choix des  $b_i$ . Par ailleurs, faire apparaître une factorielle est toujours une bonne idée lorsqu'on recherche une exponentielle. On a alors une petite majoration fine à faire par comparaison avec une intégrale et en utilisant une DES de  $\frac{1}{k(k+1)}$ .
- Définir  $a_n$  en se ramenant au cas d'égalité dans l'inégalité arithmético-géométrique de sorte à optimiser l'inégalité précédente. Tronquer la suite obtenue pour assurer la convergence (cela donnera une famille de suite pour laquelle la constante optimale de la majoration s'approchera de  $e$ ). Un petit coup de Stirling plus tard, on conclut en utilisant le fait que les sommes partielles de 2 séries divergentes à termes positifs équivalents sont elles-mêmes équivalentes.

**Indications ou solutions pour l'exercice 15.32** –

1. Encadrer  $\sum_{k=p^{n-1}}^{p^n-1} u_k$ .

2. Montrer que  $\sum \min(2^n u_{2^n}, 1)$  converge ssi  $\sum 2^n u_n$  converge.

Grâce à ce critère de condensation, on peut obtenir une preuve très rapide de la nature des séries de Riemann, puis des séries de Bertrand  $\sum \frac{1}{n \ln^\beta n}$  (le critère de condensation nous ramène pour ces dernières à des séries de Riemann). Faites-le pour voir !

**Indications ou solutions pour l'exercice 15.33** – Évaluer  $R_{2n}$  en se ramenant à l'étude asymptotique d'une série à termes positifs (grouper des termes), qu'on étudie par comparaison série/intégrale.

**Indications ou solutions pour l'exercice 15.34** –  $u_{n+1} - u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ , d'où CV de  $\sum u_{n+1} - u_n$ . On obtient  $S_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$ , donc  $S_n \sim \ln(n)$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 15.35** – Encadrer par des intégrales. Pour les restes (question 2), encadrer d'abord la somme entre  $n+1$  et  $m$ , puis faire tendre  $m$  vers  $+\infty$ . Vérifier que les encadrants ont même équivalent simple.

Réponses :

1.  $\frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha}$  si  $\alpha < 1$ ,  $\ln(n)$  si  $\alpha = 1$ .

2.  $\frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}$
3.  $\frac{1}{2} \ln(n)^2$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 15.36 –**

1. Par  $\varepsilon$ . Si  $(S_n)$  et  $(T_n)$  sont les 2 sommes partielles, encadrer  $T_n - T_N$  par  $(S_n - S_N) \times (1 \pm \frac{\varepsilon}{2})$ . Puis encadrer  $T_n$  en fonction de  $S_n$  et  $\varepsilon$ , indépendamment de  $N$ , en choisissant  $N$  assez grand.
2. Par l'absurde, en exprimant un équivalent de  $u_n$  à l'aide de la somme totale  $S$
3. Exprimer  $w_n$  à l'aide des sommes partielles  $S_n$ , et utiliser la question 1, avec  $S_n = anu_n$ . On obtient  $w_n = v_n - aw_n + o(w_n)$ , puis  $(a+1)w_n \sim v_n \sim a$
4.  $w_n \rightarrow \frac{a}{a+1}$ .

# Continuité et dérivabilité sur un intervalle

**Indications ou solutions pour l'exercice 16.1** – Que peut-on dire du signe de  $fg$ ?

**Indications ou solutions pour l'exercice 16.2** – Considérer  $f(x) - x$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 16.3** – Considérer les deux points particuliers  $a$  et  $f(a)$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 16.4** – Quel théorème du cours donne l'existence de solutions d'équations numériques? Introduire  $g$  convenable.

**Indications ou solutions pour l'exercice 16.5** – Montrer que l'ensemble des points fixes est  $\text{Im}(f)$ . Les fonctions de ce type sont  $[0, 1] \rightarrow [a, b] \subset [0, 1]$ , égales à l'identité sur  $[a, b]$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 16.6** – Que sait-on de l'image d'un intervalle? Utiliser une propriété de densité.

**Indications ou solutions pour l'exercice 16.7** –

1. Considérer  $g(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{2})$ .
2. Que dire du signe des  $f(\frac{k}{n}) - f(\frac{k+1}{n})$ .
3. Non, monter périodiquement, une période incomplète permet de se recalculer plus bas.

**Indications ou solutions pour l'exercice 16.8** – Si  $f(x) > x$ , considérer  $[\alpha, \beta]$  l'intervalle tel que  $f(\alpha) = \alpha$ ,  $f(\beta) = \beta$ , et  $f(x) > x$  sur  $] \alpha, \beta [$ . Remarquer que  $[\alpha, \beta]$  est stable (sinon trouver une contradiction à l'aide d'un antécédent de  $\beta$ ). Puis considérer la suite récurrente de fonction  $f$ , initialisée par  $x$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 16.9** – Par l'absurde. On sait décrire  $f(\mathbb{R}_+^*)$  et  $f(\mathbb{R}_-^*)$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 16.10** – Quel théorème du cours donne l'existence de solutions d'équations dans  $\mathbb{R}$ ? Pour la dernière question, c'est plus simple en introduisant des réciproques.

**Indications ou solutions pour l'exercice 16.11** –  $x_{n,0} = 1$ ,  $x_{n,1}$  par TVI sur  $[0, 1]$ . Pour obtenir  $x_{n,2}$  supérieur à  $x_{n,1}$ , utiliser le TVI mais pas sur  $[0, 1]$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 16.12** – Injectivité immédiate.

On en déduit la monotonie puis en discutant suivant le sens, en en considérant  $y = 0$ , les limites en  $+\infty$

et  $-\infty$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 16.13** –  $f + g$  admet des limites à gauche et droite en tous points et  $f(x^-) \leq f(x) \leq f(x^+)$ . Considérer  $\inf\{x \mid f(x) \leq 0\}$ , et remarquer qu'en un tel point,  $f(x^-) \geq 0 \geq f(x^+)$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 16.14** – Montrer que  $\bigcap_{n>0} f\left(\left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right]\right) = \{f(x)\}$ . Une inclusion est facile. Pour l'autre, considérer  $y$  dans l'intersection et en déduire une certaine suite, qui converge nécessairement vers un antécédent de  $y$  (pourquoi?)

**Indications ou solutions pour l'exercice 16.15** – Se restreindre à un intervalle  $[A, B]$  tel que hors de cet intervalle,  $f \geq f(0) + 1$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 16.16** – Théorème de la borne atteinte.

**Indications ou solutions pour l'exercice 16.17** – La fonction  $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$  est continue sur  $[a, b]$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 16.18** – Prendre  $c$  dans l'image, et ses deux antécédents, prendre un max ou min distinct de  $c$  dans le segment délimité. Étudier la monotonie sur les deux moitiés d'intervalle. Montrer que le maximum n'est atteint qu'une fois.

C'est faux pour la généralisation. Peut-être en imposant le nombre d'antécédants constants? Je vous laisse réfléchir à ça.

**Indications ou solutions pour l'exercice 16.19** – Sens direct : utiliser un module de continuité uniforme pour contrôler  $f(x_n) - f(y_n)$ .

Sens réciproque : par contraposée, si  $f$  n'est pas uniformément continue, fixer  $\varepsilon$  convenable, et considérer des  $m_n$  tendant vers 0, permettant de construire  $x_n$  et  $y_n$  vérifiant une certaine propriété.

**Indications ou solutions pour l'exercice 16.20** – Utiliser le critère séquentiel. Localiser le problème pour chaque fonction aux endroits où on a de fortes variations.

**Indications ou solutions pour l'exercice 16.21** – Par critère séquentiel, en construisant  $(x_n)$  convergente tq  $f(x_n) \rightarrow +\infty$ , puis extraire  $(y_n)$  de  $(x_n)$  convenable.

Ou alors, par contraposée : on contrôle  $f$  en des points assez régulièrement répartis, puis entre ces points par continuité uniforme.

**Indications ou solutions pour l'exercice 16.22** – Couper les infinis. Attention aux jonctions.

**Indications ou solutions pour l'exercice 16.23** – Justifier d'abord que  $f$  est bornée. Puis par critère séquentiel, en considérant  $x_n \rightarrow a$  et BW pour obtenir un candidat à être la limite, puis une autre  $y_n \rightarrow a$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 16.24** – La continuité uniforme permet de contrôler les variations sur un intervalle de longueur  $t$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 16.25** – Regrouper 2 par 2.

**Indications ou solutions pour l'exercice 16.26** – Partitionner  $\mathbb{R}$  en petits intervalles.

**Indications ou solutions pour l'exercice 16.27** – Considérer  $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$  sur  $[a, +\infty[$  où  $|f'(x)| < \varepsilon$  pour  $x \geq a$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 16.28** – Rolle. Montrer que  $x \mapsto P(x) - e^x$  admet une dérivée d'un certain ordre sans zéro.

**Indications ou solutions pour l'exercice 16.29** – Récurrence sur  $n$  : simplifier par  $e^{Q_n(x)}$  et dériver.

**Indications ou solutions pour l'exercice 16.30** –

1. Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $a < b$ , soit  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  deux applications continues sur  $[a, b]$ , dérivables sur  $]a, b[$ , et telles que :

$$\forall x \in ]a, b[, \quad g'(x) \neq 0.$$

- (a) TAF
  - (b) Écrire l'équation recherchée sous la forme  $g'(c)(f(b) - f(a)) - f'(c)(g(b) - g(a))$ , et introduire la fonction adéquate de sorte que ceci soit sa dérivée en  $c$ .
2. Application de ce qui précède entre  $a$  et  $x$ , en faisant tendre  $x$  vers  $a$  ( $c$  tend vers  $a$  aussi).

**Indications ou solutions pour l'exercice 16.31** – De quelle fonction  $x \mapsto \alpha f'(x)f(1-x) - \beta f(x)f'(1-x)$  est-il un facteur de la dérivée ? (Penser à un produit de certaines puissances de  $f(x)$  et  $f(1-x)$ )

**Indications ou solutions pour l'exercice 16.32** – Deux possibilités :

- Exprimer le problème par une équation :  $f(c) = cf'(c)$ .
- Introduire  $\frac{f(x)}{x}$  (tout ça se résume à une étude de taux d'accroissement : on recherche un minimum ou maximum, au moins local, du taux d'accroissement).

**Indications ou solutions pour l'exercice 16.33** – Récurrence sur  $n$ . Si  $f$  est nulle sur  $\mathbb{R} \setminus [a, b]$ , pour passer au rang  $n+1$ , TAF sur les intervalles  $[a, a_{n,0}]$ ,  $[a_{n,i}, a_{n,i+1}]$  et  $[a_{n,n}, b]$ . Faire un dessin pour essayer de comprendre la situation (graphe de  $f^{(n)}$ ).

**Indications ou solutions pour l'exercice 16.34** – En retranchant une fonction affine, on se ramène au cas où  $f(a) = f(b)$ . Supposant  $f'(a) > 0$ , montrer qu'au voisinage de  $b$ , le taux d'accroissement  $F_a(x)$  est négatif. Étudier l'existence d'un minimum de  $F_a$ . Conclure et le tour est joué ! Si  $f'(a) = 0$ , un autre exercice apporte la réponse.

**Indications ou solutions pour l'exercice 16.35** – La condition en  $a$  impose que  $f$  admette un extremum sur  $]0, a[$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 16.36** – Mettre en équation, et introduire  $g$  telle que l'équation soit équivalente à  $g'(c) = 0$ . Penser à introduire une exponentielle.

**Indications ou solutions pour l'exercice 16.37** –

1. TAF sur des intervalles bien choisis de sorte à assurer la limite de  $c_n$ .
2. Justifier que  $f$  est décroissante, puis étudier ses limites en  $+\infty$  et  $-\infty$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 16.38** – Qu2 : on a des informations en 2 points. Les exploiter ! Qu3 : L'IAF revient à intégrer un majorant constant de  $|f'|$ . On se rend compte que ce n'est pas suffisant pour conclure. Mais ici, on dispose d'un majorant non constant, donc potentiellement meilleur qu'un majorant constant. On peut donc espérer améliorer l'IAF. Qu4 : Pour quelle valeur de  $\alpha$  le majorant précédent est-il le moins bon ?

**Indications ou solutions pour l'exercice 16.39** – TAF puis caractérisation des fonctions continues injectives. Trouver la propriété des VI (toute valeur intermédiaire à 2 valeurs obtenues est réalisée) en faisant une translation sur  $f'$ , ce qui revient à faire quoi sur  $f$  ?

**Indications ou solutions pour l'exercice 16.40** –

1. Il nous faut une infinité de marges d'erreur  $\varepsilon_n$ , dont la somme totale vaut  $\varepsilon$ . Il faut donc les prendre de plus en plus petits.
2. Le faire d'abord sur un intervalle  $[-n, n]$ . Considérer  $U = f^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon]$ . Quelle est sa description géométrique? Que peut-on dire de  $f$  sur les sous-intervalles de  $U$ ?

**Indications ou solutions pour l'exercice 17.1** – L'ensemble des  $\frac{k}{2^n}$  est dense dans  $[0, 1]$ , le complémentaire (qui contient les irrationnels) aussi. Puis même argument que la fonction caractéristique de  $\mathbb{Q}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 17.2** – Pour l'intégrabilité de  $f$ , considérer pour tout  $n$  une subdivision telle que sur chaque part ouverte,  $f$  soit majorée par  $\frac{1}{n}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 17.3** – Approximer  $f$  par des fonctions en escalier, et composer par  $g$ . Comme  $g$  n'est pas monotone, bien choisir la forme de l'approximation initiale. Un encadrement n'est peut-être pas le bon point de départ.

**Indications ou solutions pour l'exercice 17.4** – Couper les extrémités et les faire entrer dans un morceau d' $\varepsilon$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 17.5** – Étudier l'intégrale sur  $[a, b]$  contenant  $E$ . Couper autour des points d'accumulation de sorte à avoir une coupe de longueur total  $\frac{\varepsilon}{2}$ . L'intégrale est alors nulle. Généralisation par récurrence au cas où en itérant le fait de prendre les points d'accumulations, on tombe sur un ensemble fini.

**Indications ou solutions pour l'exercice 17.6** – En notant  $M = \sup f$ , montrer que pour tout  $x$ ,  $f(x) \leq \frac{Mx^2}{2}$ . En déduire  $M = 0$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 17.7** – Dans un premier  $\frac{\varepsilon}{2}$ , approcher  $f$  par une fonction en escalier, puis dans un deuxième  $\frac{\varepsilon}{2}$ , rendre cette fonction en escalier continue, en remplaçant les points de discontinuité par des segments de droite de forte pente.

**Indications ou solutions pour l'exercice 17.8** – Par contraposée, remarquer que pour tout  $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ , on a alors  $\int_a^b f = 0$ . Construire par récurrence  $(I_n)$  suite d'intervalles fermés emboîtés, tels que  $\int_{I_n} f = 0$  et  $f \leq \frac{1}{2^n}$  sur cet intervalle.

**Indications ou solutions pour l'exercice 17.9** – Approcher  $f$  par une fonction en escalier (définition de l'intégrabilité), puis utiliser sur chaque palier le lemme correspondant pour les fonctions  $\mathcal{C}^1$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 17.10** – Montrer que  $g$  est continue, puis justifier que pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'ensemble  $\{x \mid |g(x) - f(x)| > \alpha\}$  est fini. Utiliser ce résultat pour construire une fonction en escalier.

**Indications ou solutions pour l'exercice 17.11** –  $f$  constante positive saut en un nombre fini de points où ses valeurs sont presque quelconques mais pas tout à fait quand même. Utiliser les propriétés de croissance.

**Indications ou solutions pour l'exercice 17.12** – Montrer d'abord  $|f| \leq 1$ , en raisonnant par l'absurde, et en considérant  $f^{2p}$ .

En considérant  $p$  et  $q$  tels que  $\int f^{2p} = \int f^{2q}$ , montrer que pour tout  $x$ ,  $f(x) \in \{-1, 0, 1\}$ . Utiliser la continuité pour conclure.

**Indications ou solutions pour l'exercice 17.13** – Considérer une suite de  $g$ , dont la variation est de plus en plus concentrée en 1. Contrôler l'intégrale par  $\varepsilon$ , en utilisant la continuité de  $f$  en 0.

**Indications ou solutions pour l'exercice 17.14** – Sinon, construire un polynôme  $P$  de degré au plus  $n$ , tel que  $Pf$  soit de signe constant.

**Indications ou solutions pour l'exercice 17.15** –

- Après IPP, il reste une intégrale qui vaut  $\ln(3)$  et une intégrale qu'on peut majorer en utilisant la croissance de  $\tan$ , et qui tend vers 0
- Par DL de  $\tan$ . Terminer soit en majorant  $f$ , soit en utilisant la continuité d'une primitive de  $f$ , ce qui se rédige peut-être plus rapidement.

Réponse :  $\ln(3)$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 17.16** –

1. Calculer l'intégrale pour les polynômes d'une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ , puis combiner comme il faut. Réponse :  $\frac{X^2}{2\pi} - X$ .
2. Sommer les intégrales finies. Calculer plus explicitement la somme partielle, et utiliser le lemme de Riemann-Lebesgue.

**Indications ou solutions pour l'exercice 17.17** – Montrer que  $\int_a^b f(t)g(t) \in [\min(f)I, \max(f)I]$ , où  $I$  est l'intégrale de  $g$ , puis utiliser un théorème d'analyse.

**Indications ou solutions pour l'exercice 17.18** – Pour tout intervalle  $[c, d] \subset [a, b]$ , construire une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  positive, et nulle hors de  $[c, d]$ . On pourra recoller des fonctions polynomiales.

**Indications ou solutions pour l'exercice 17.19** – Changement de variable  $y = x^n$ , et encadrement de  $\sqrt[n]{y}$  sur l'intervalle considéré. On se ramène à la continuité d'une primitive de  $y \mapsto \frac{f(y)}{y}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 17.20** – Introduire une subdivision  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ , sur les intervalles ouverts de laquelle  $f$  est de signe constant et ne s'annule pas. Montrer que

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)e^{nx} dx = O(e^{nx_{i+1}}) \quad \text{et} \quad e^{nx_i} = o\left(\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)e^{nx} dx\right|\right).$$

Pour ce dernier, isoler un sous-intervalle  $[\alpha, \beta]$  de  $]x_i, x_{i+1}[$  sur lequel  $|f|$  reste supérieur à un certain  $y_0 > 0$ .

En déduire que le comportement général de l'intégrale est donnée par le dernier tronçon et conclure par la deuxième égalité.

**Indications ou solutions pour l'exercice 17.21** – Sommes de Riemann :

1.  $\sqrt{3} - 1$
2.  $2e^{\frac{\pi}{2}} - 2$
3.  $1 - \frac{2}{e}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 17.22** – Inégalité de Taylor, puis utiliser l'inégalité pour ramener le calcul de la limite de  $(v_n)$  à celui de la suite  $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}\right)$ .

Réponse :  $\ln(2)$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 17.23** – Encadrer la somme en utilisant un encadrement de  $\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$ , et se ramener, des deux côtés, à des sommes de Riemann. Réponse :  $\sin(1) - \cos(1)$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 17.24** – Sommer d'abord sur  $1 \leq k, \ell \leq n$ , (somme Riemann), montrer que la somme sur la diagonale tend vers 0, et comparer la somme sur les deux parties strictement au-dessus, et en-dessous de la diagonale.

**Indications ou solutions pour l'exercice 17.25** – Exprimer  $x_k^{(k)}$  à l'aide de  $F^{-1}$ , où  $F$  est la primitive de  $f$  s'annulant en  $a$ . Utiliser les sommes de Riemann, puis un changement de variable. Réponse :

$$\frac{\int_a^b t f(t) dt}{\int_a^f f(t) dt}.$$

**Indications ou solutions pour l'exercice 17.26** – Utiliser la continuité uniforme.

**Indications ou solutions pour l'exercice 17.27** – Sortir ce qu'il faut pour écrire la somme en fonction de la variable  $\frac{k}{n}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 17.28** – Sommes de Riemann. Que faire ensuite d'une somme de logarithmes.

**Indications ou solutions pour l'exercice 17.29** – La seule difficulté est de penser aux sommes de Riemann.

## Pivot de Gauss

**Indications ou solutions pour l'exercice 18.1 –**

$$1. \mathcal{S} = \left\{ \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} 9 \\ 17 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2. N'introduisez pas de fractions dans votre pivot, il vaut mieux multiplier les lignes par ce qu'il faut.

Solutions :

$$\frac{1}{11} \left( \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 13 \\ 12 \\ 15 \\ 11 \end{pmatrix} \right), \quad t \in \mathbb{R}$$

3. Faites cette question et la suivante en même temps, en faisant le pivot sur la matrice obtenue en juxtaposant la matrice du système aux deux matrices colonnes des deux seconds membres. Cela vous évite de faire plusieurs fois les mêmes calculs. Le système est compatible. L'unique solution est  $x = 1$ ,  $y = 0$ .

4. Cette fois le système n'est pas compatible.

5. De même, cette question est à faire avec la suivante.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z, t, u \in \mathbb{R}.$$

6. Système incompatible.

**Indications ou solutions pour l'exercice 18.2 –** Le système est incompatible pour tout  $m \neq \frac{1}{2}$ . Lorsque  $m = \frac{1}{2}$ , on obtient l'unique solution  $(-\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2})$ .

# Structures algébriques

**Avertissement :** les exercices de cette feuille ne sont pas tous indépendants les uns des autres

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.1** – En multipliant de façon adéquate, montrer que  $y = x^{-1}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.2** – Considérer le produit  $x(xy)^{-1} \cdot y$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.3** –

1. simplifier  $(x \star x) \star x = (x \star x) \star (x \star x)$
2. simplifier  $(x \star x) \star y = x \star y$ , et montrer que tout idempotent est neutre.

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.4** – Montrer que  $xy = (xy)^{n^2} = yx$ . Pour la deuxième, écrire  $(xy)^n$  comme produit de deux termes.

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.5** – Un peu fastidieux à faire. Se servir du fait que dans le premier cas, l'ordre de tout élément est 1, 2 ou 4 (éliminer 4 qui fournit  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ . Dans le second cas, l'ordre de tout élément est 1, 2, 3 ou 6 (de même, évacuer le cas  $n = 6$ ). On pourra montrer que si l'ordre de tout élément différent du neutre est 2, le groupe est abélien. Construire alors la table de la loi, en remarquant que chaque ligne et chaque colonne est constituée d'une permutation des éléments de  $G$  (on les a tous une et une seule fois), puisque  $x \mapsto gx$  et  $x \mapsto xg$  sont bijectives. Lorsqu'on a des choix à faire entre 2 éléments jouant pour le moment des rôles symétriques, on peut en choisir un arbitrairement (l'autre donnera un cas isomorphe). Le lemme de Cauchy, si on le connaît, permet d'éviter quelques études pour le cas  $n = 6$ , mais sinon, on le retrouve à la main : si on essaye de construire une table pour un groupe d'ordre 6 n'ayant pas d'élément d'ordre 2 ou 3, on arrive vite à une contradiction.

Réponse :  $n = 4$  :  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  (Virergruppe, ou groupe de Klein)

$n = 6$  :  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  et  $\mathfrak{S}_3$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.6** –

- Commencer par définir  $e = a/a$ , aussi égal à  $z/z$  pour tout  $z$ . Traduire les 3 premiers points avec  $e$
- Définir assez logiquement  $a \times b = a/(e/b)$ .
- Pour l'associativité, on doit comparer  $(a/(e/b))/(e/c)$  et  $(a/((e/c)/b))$ . Introduire dans la seconde expression au « numérateur » et au « dénominateur » une division par  $(e/b)$  pour se rapprocher de la première expression (quelle règle permet de le faire ?) puis simplifier le dénominateur.
- Les dernières vérifications ( $e$  neutre et  $e/a$  inverse de  $a$ ) ne posent pas de problème.

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.7** – Montrer que pour tout  $g \in E$ ,  $x \mapsto gx$  est une bijection. En déduire d'une part un candidat à être élément neutre (et prouver que ça l'est effectivement), puis un inverse à droite de  $g$  (et montrer que c'est aussi un inverse à gauche).

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.8** – Vérification immédiate, neutre  $(0, 0)$ , associativité facile à vérifier, symétrique :  $(-x, -ye^{-2x})$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.9** – Simple vérification. Attention à bien revenir à la définition, il ne s'agit pas d'un sous-groupe !  
Le neutre est  $(e_G, e_H)$  et  $(g, h)^{-1} = (g^{-1}, h^{-1})$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.10** –

1. Sans difficulté par les règles de composition et d'inversion.
2. Écrire les choses proprement et comparer :
  - Pour l'associativité, écrire les 2 expressions à comparer, en faisant attention aux parenthésages, et à la signification des évaluations des applications. Utiliser le fait que  $\varphi$  est un morphisme.
  - $(e_g, e_H)$  est neutre
  - $(g, h)^{-1} = (\varphi(h^{-1})(g^{-1}), h^{-1})$
 On pourra remarquer que la structure de morphisme de  $\varphi$  nous donne  $\varphi(hk)(x) = \varphi(h) \circ \varphi(k)(x)$ , et que le fait que  $\varphi(h) \in \text{Aut}(G)$  assure que  $\varphi(h)(xy) = \varphi(h)(x)\varphi(h)(y)$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.11** – Même démo que pour le groupe des inversibles d'un anneau (voir cours)

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.12** –

1. Montrer que c'est un sous-groupe de l'ensemble des permutations de  $\mathbb{C}$ .
2. Par définition du groupe engendré, il suffit de vérifier que  $r$  et  $s$  sont dans  $D_n$ .
3. Considérer l'image de 1 égal à  $\omega^k$ , où  $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ . Comparer l'image de  $\omega$  (deux possibilités), et suivant le cas, montrer que  $f$  est égal à  $r^k$  ou  $r^k s$ .
4.  $D_n$  n'est pas abélien !
5. Restreindre  $f$  en une permutation de  $P_n$ .
6. Considérer  $\varphi(\varepsilon) = (-1)^\varepsilon$ . Remarquer que  $s^k r = r s^{-k}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.13** – On peut le faire « à la main » ou remarquer que si  $G < \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ,  $\varphi^{-1}(G)$  est un sous-groupe de  $\mathbb{Z}$ , où  $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est la projection canonique. On obtient  $d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  où  $d \mid n$ , ce qui est isomorphe à  $\mathbb{Z}/(n/d)\mathbb{Z}$ . Ainsi, il y a autant de sous-groupe de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  que de diviseurs de  $n$ , et ils sont isomorphes aux  $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.14** –

1.  $x^i$  et  $x^j$  commutent ! Considérer  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \langle x \rangle$  donné par  $n \mapsto x^n$ . On a alors  $\langle x \rangle \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , où  $n\mathbb{Z} = \text{Ker}(f)$ .
2. engendré par  $x^i$  avec  $i > 0$  minimal (double-inclusion, avec de la division euclidienne, ou considérer  $f^{-1}H$ , avec  $h$  de tout-à-l'heure, et remarquer que c'est un  $k\mathbb{Z}$ ).

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.15** –

- Réciproque classique : un élément non neutre est nécessairement d'ordre  $p$  (Lagrange),  $G$  est le groupe monogène (fini donc cyclique) engendré par  $x$
- Sens direct : tout  $x \neq e$  doit être d'ordre  $|G|$ , sinon  $\langle x \rangle$  est un sous-groupe propre. Cela entraîne la cyclicité. Si  $|G|$  non premier, trouver un élément d'ordre plus petit.

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.16** –

1.  $G$  contient un élément d'ordre  $\neq 1$ , donc d'ordre  $p$  (Lagrange). Conclure  $G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
2. Considérer  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.17** –

- Si  $G$  non cyclique, considérer  $x$  d'ordre maximal dans  $G$  et  $y \in G \setminus \langle x \rangle$ .
- Si  $G$  cyclique d'ordre  $n \neq p^\alpha$ , considérer  $x$  et  $y$  d'ordres  $p$  et  $q$  avec  $p$  et  $q$  premiers distincts
- Si  $G$  cyclique d'ordre  $p^\alpha$ , décrire les sous-groupes de  $G$  et conclure.

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.18** – Considérer l'ordre d'un élément de l'intersection.

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.19** – Soit  $\varphi_g : x \mapsto gx$ . Montrer que  $\varphi_g \in \mathfrak{S}_G$ , puis que  $\psi : g \mapsto \varphi_g$  est un morphisme injectif. En déduire que  $G$  est isomorphe à  $\psi(G)$ . On peut passer ensuite à  $\mathfrak{S}_n$  au lieu de  $\mathfrak{S}_G$ , en remarquant qu'une bijection  $f : X \mapsto Y$  induit un isomorphisme entre les groupes symétriques.

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.20** – Vérifications élémentaires.

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.21** –

- Cas de 2 sous-groupes : si les inclusions ne sont pas satisfaites, considérer  $x$  tel que  $x \in H \setminus K$ ,  $y \in K \setminus H$ , puis trouver une contradiction avec  $x + y$ .
- Cela ne se généralise pas facilement. En tout cas, on ne peut pas dire qu'un des sous-groupes contient tous les autres. Par exemple, tout groupe est union de ses sous-groupes cycliques. Si  $G$  n'est pas cyclique et fini, cela donne un contre-exemple (voir par exemple  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , union de 3 sous-groupes propres).

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.22** –

1.  $HK$  sous-groupe : vérification facile. Montrer que si  $G'$  est un sous-groupe contenant  $H$  et  $K$ , on a  $HK \subset G'$
2. montrer que  $(iii) \iff (iv)$  (en passant à l'inverse). Montrer que  $(i) \implies (iii)$  et  $(iii) \wedge (iv) \implies (ii)$ .
3. Montrer que  $(HK) \cap L = H(K \cap L)$ , et en déduire que  $H(K \cap L)$  est un sous-groupe de  $G$ . En déduire l'autre égalité.

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.23** – Si  $G$  est infini, soit il possède un sous-groupe monogène isomorphe à  $\mathbb{Z}$ , soit on peut contruire une suite infinie d'éléments  $x_i$  tels que les  $\langle x_i \rangle$  soient finis est 2 à 2 distincts (prendre  $x_{n+1}$  n'appartenant pas à l'union des groupes monogènes engendrés par les précédents).

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.24** –

1. Montrer que  $xy$  est d'ordre  $ab$  si  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux. Dans le cas général, se ramener à cette situation, en distribuant les puissances de  $p^\alpha$  dans la décomposition de  $a \vee b$  de sorte à définir  $a'$  et  $b'$  tels que  $a'|a$ ,  $b'|b$ ,  $a' \wedge b' = 1$  et  $a'b' = a \vee b$ . Trouver ensuite dans  $\langle x \rangle$  un élément d'ordre  $a'$  et dans  $\langle y \rangle$  un élément d'ordre  $b'$ .
2. Soit itérer, soit considérer l'élément  $x$  d'ordre maximal, et appliquer ce qui précède à  $(x, y)$ , pour tout  $y$ .
3. Considérer  $\mathfrak{S}_3$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.25** – Pour la question 2, montrer que si  $(x_1, \dots, x_p) \in E$ , il en est de même de toute ses permutations circulaires. En prolongeant périodiquement  $x_i$  à  $i \in \mathbb{N}$ , justifier que la période minimale est 1 ou  $p$ . Si une classe d'équivalence n'est pas de cardinal 1 ou  $p$ , trouver une contradiction sur la période.

Pour la question 3, considérer la partition de  $E$  formée des classes d'équivalence, en n'oubliant pas celle de  $(e, \dots, e)$ . Remarquer pour dénombrer  $E$  que le choix quelconque des premiers termes détermine le dernier.

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.26** –

1. Étudier la parité de l'ensemble des  $x \in G$  tels que  $x \neq x^{-1}$ .

2. Pour le dernier point, éliminer le cas où un sous-groupe propre est d'ordre divisible par  $p$ . On peut donc supposer l'ordre de  $H$  non divisible par  $p$ . Le nombre de classes  $\ell$  modulo  $H$  est alors divisible par  $p$ . Prendre  $x \in G \setminus H$ , et  $K = \langle x \rangle$ . Justifier  $\langle H \cup K \rangle = G$ , et en déduire que  $|K| = \ell|K'|$ . Trouver  $y$  d'ordre  $p$  dans  $K$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.27** – Le cardinal de la classe de conjugaison de  $x$  est le nombre de classes modulo  $C_x$ , donc  $|G|/|C_x|$ . Considérer alors la partition formée par les classes de conjugaison, et remarquer que celle de  $e$  est triviale. Par étude de la divisibilité par  $p$ , ce ne peut pas être la seule.

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.28** – Tout  $x \neq 1$  est d'ordre  $p$  ou  $q$ . Si  $x$  est d'ordre  $p$ , considérer  $G/H$ , d'ordre  $q$ . En déduire l'existence d'un élément d'ordre  $q$  ou directement  $pq$ . Conclure avec un autre exercice.

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.29** – On pourra considérer le commutateur de chaque élément, afin de montrer que  $G$  est constitué d'éléments d'ordre 1 ou 2. En déduire  $G$  abélien.

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.30** –

1. Parité par Lagrange. Commutativité en considérant  $xyxy = e$ , aboutir à  $xy = yx$ .
2. Par récurrence sur  $|G|$ , en considérant  $H = \{e, x\}$ , et  $G/H$ , satisfaisant à la même propriété.  
Autre méthode : utiliser le lemme de Cauchy stipulant que si  $p$  est un nombre premier divisant l'ordre du groupe  $G$ , alors il existe un élément d'ordre  $p$ . Plus précisément, il y en a un nombre congru à  $p-1$  modulo  $p$ . Pour cela, considérer les  $p$ -uplets tq  $x_1 \cdots x_n = 1$ , mettre une relation d'équivalence sur ces  $p$ -uplets traduisant l'invariance par permutation circulaire. Remarquez que le nombre de ces  $p$ -uplets est divisible par  $p$  (entièrement déterminé par le choix des  $p-1$  premiers termes) et que les classes d'équivalence sont toutes de cardinal  $p$  ou 1. À quoi correspondent les classes de cardinal 1 ?

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.31** – Soit  $K$  distingué dans  $G$ . On pourra considérer  $H = G/K$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.32** – Qu2 : considérer un système de représentants de  $G/Z$  de la forme  $e, a, a^2, \dots, a^{n-1}$  (on a alors  $a^n \in Z$ ), écrire  $x = a^k z$  et  $y = a^\ell z'$  et comparer  $xy$  et  $yx$ .

Qu3 : considérer l'ordre de l'intersection : si le résultat est faux,  $\langle x \rangle = \langle y \rangle$ .

Qu4 : Si  $|Z| = p$  ou  $p^2$ ,  $G$  est abélien. Si pas cyclique, trouver  $x$  et  $y$  tel que dans la question précédente, et montrer que  $G$  est isomorphe au produit de  $\langle x \rangle$  et  $\langle y \rangle$ . Le cas  $|Z| = 1$  est impossible d'après un lemme d'un DM (centre d'un  $p$ -groupe divisible par  $p$ ).

Ce fait peut se retrouver sans évoquer d'action de groupe (mais c'est la même preuve déguisée) : notant  $C_x$  le commutant de  $x$  (les  $z$  tels que  $zx = xz$ ), montrer que c'est un sous-groupe, et considérer les classes modulo  $C_x$ . Montrer que la classe d'équivalence de  $x$  modulo la relation de conjugaison est de cardinal le nombre de ces classes modulo  $C_x$  (la valeur  $zxz^{-1}$ , ne dépend pas de  $z$  dans une de ces classes, et diffère d'une classe à l'autre). Sachant que  $e$  est seul dans sa classe d'équivalence, et que toutes les classes non réduites à un singleton sont de cardinal divisible par  $p$ , montrer qu'il existe  $x$  tel que  $C_x$  est de cardinal  $p^2$  et conclure.

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.33** –

1. C'est une histoire de Bézout.
2. Sans difficulté.
3.
  - Si  $g$  n'est pas dans l'intersection, il complète au moins un maximal en  $G$  entier.
  - Si  $g$  est dans l'intersection, considérer un maximal contenant le groupe engendré par  $A$  (pourquoi existe-t-il?).

4. La question un peu délicate de l'exercice. Si  $a \neq 0$  n'est pas non générateur, considérer  $H$  tel que  $H + a\mathbb{Z} = \mathbb{R}$ . Alors  $\mathbb{R}/H$  est monogène
- Si  $\mathbb{R}/H = \mathbb{Z}$ , considérer la classe de  $\frac{a}{2}$
  - Si  $\mathbb{R}/H = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , considérer la classe de  $\frac{a}{n}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.34** – Si  $a'$  est inverse à droite de  $a$ , et  $ab = ac$ , considérer  $a(b - c + a')$ . Puis considérer  $aa'a$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.35** – À considérer comme du cours. Vérifier que c'est un sous-anneau.

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.36** –

1. Associativités vues en cours, distributivité sans difficulté, neutre additif :  $\emptyset$ , neutre multiplicatif :  $E$ . Opposé de  $X$  :  $X$ .
2. (a) Non (pas le neutre).  
(b) Vérifier la stabilité des lois, et changer de neutre (prendre  $Y$ ) on retrouve la loi définie en 1.
3. Sans difficulté
4. Considérer la partition de la relation d'équivalence  $x \sim y$  ssi pour tout  $a \in A$ ,  $x \in A \iff y \in A$  (i.e.  $x$  et  $y$  ne sont séparés par aucun élément de  $A$ ).

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.37** – Sous-groupe : oui, sans difficulté.

Sous-anneau : non : pas stabilité par produit (calculer  $J^2$ ), sauf dans le cas  $n = 2$ . Dans ce cas, c'est un sous-anneau.

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.38** – Stabilité par différence en utilisant le binôme, pour un exposant bien choisi.

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.39** – Comment exprimer, dans  $\mathbb{R}$ ,  $\frac{1}{1-x}$  sous forme d'une somme (infinie) ? Analogisez...

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.40** – Considérer  $b(ab)^na$

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.41** – Stabilité par produit : développer avec le binôme  $(x + y(1+x))^{2n}$  pour  $n$  assez grand. Inverser  $1+x$  en faisant une analogie avec les séries géométriques.

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.42** – Inverser en se servant d'une somme géométrique.

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.43** –

1. Écrire  $P$  et  $Q$  comme somme de monômes, écrire le produit en regroupant les 2 sommes.
2. Récurrence, à la façon de la formule du binôme.

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.44** – En considérant  $(ab)^{-1}ab$ , déduire un inverse à gauche  $c$  de  $b$ . Justifier que  $bc = e$  ssi  $bcb = ba$  et conclure.

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.45** –

1. La division euclidienne des entiers et des polynômes vérifie cette propriété.
2. Soit  $A = a + ib$  et  $B \in \mathbb{Z}[i]$ . Remarquer que l'ensemble  $\{z \times A, z \in \mathbb{Z}[i]\}$  forme un réseau de sommets de carrés dont le côté est  $|A|$ , et que  $B$  est contenu au sens large dans un de ces carrés. Il existe alors un sommet du carré à distance  $\leq \frac{\sqrt{2}}{2}|A|$  de  $B$ . Conclure.
3. Considérer  $b \in I \setminus \{0\}$  tel que  $v(x)$  soit minimal. Justifier que  $(b) = I$  (pour  $a \in I$ , faire la division de  $a$  par  $b$  et conclure).

---

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.46** – Sens direct : Si  $I$  contient  $x \neq 0$ , il contient  $x^{-1}x = 1$ .  
Sens réciproque : Si  $I$  est un idéal différent de  $\{0\}$  et  $A$ , il ne contient pas 1 donc ses éléments ne peuvent pas être inversibles dans  $A$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.47** – Considérer l'image de  $i$  par un isomorphisme de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.48** –

- Par trop dur en pensant à la quantité conjuguée.
- Utiliser le fait que les  $\sqrt{n}$  sont soit entiers soit irrationnels. Ici si  $\varphi$  est un morphisme de  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  dans  $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ , et si  $x$  désigne  $\sqrt{2}$ , il faut avoir  $\varphi(x^2 - 2) = 0$ , donc  $\varphi(x)^2 = 2$ . Montrer que ceci implique que  $\sqrt{3}$  est irrationnel.

**Indications ou solutions pour l'exercice 19.49** – Sous-corps : facile. Non isomorphes : considérer par l'absurde  $\varphi(i)^2$ , et justifier que  $i$  et  $-i$  ne sont pas dans  $\mathbb{Q}(j)$  (contredire l'irrationalité de  $\sqrt{3}$ ).

## Groupes symétriques

**Indications ou solutions pour l'exercice 20.1** – Écrire une transposition  $(k, \ell)$  comme produit de 3 telles transpositions (pourquoi 3) ? On pourra le voir sous forme d'une conjugaison.

**Indications ou solutions pour l'exercice 20.2** – Réponse : oui. On pourra commencer par composer  $(1234)$  par lui-même, puis voir comment composer par un 4-cycle pour obtenir une transposition. Renommer ensuite convenablement les éléments.

**Indications ou solutions pour l'exercice 20.3** – Décomposer en transpositions et regrouper 2 par 2. On pourra même utiliser un ensemble restreint de transposition, pour trouver une sous-famille de 3-cycles engendrant  $\mathfrak{A}_n$ , par exemple les  $(1 \ i \ j)$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 20.4** – Non si  $n$  est impair et différent de 1 (quel objet permet d'exploiter la parité ?)

Si  $n$  est pair, composer un grand cycle par lui-même puis composer par un autre cycle de sorte à remettre presque tous les éléments à leur place initiale.

Cas de  $\mathfrak{A}_n$  pour  $n$  impair : retrouver de même un système de générateurs connu de  $\mathfrak{A}_n$  en composant des grands cycles.

**Indications ou solutions pour l'exercice 20.5** – Se ramener à  $(1 \ 2 \ \dots \ n)$  et  $(1 \ 2)$ , puis construire un élément du groupe engendré ayant 1 comme point fixe et envoyant 2 sur  $i$  quelconque supérieur à 2. Terminer par un argument de conjugaison.

**Indications ou solutions pour l'exercice 20.6** – Réponse :  $n-1$ . Montrer que si un ensemble de transpositions de la famille génératrice a un support total de  $X$  distinct de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , il existe une transposition de la famille dont le support est à cheval sur  $X$  et son complémentaire. Construire alors itérativement une suite de  $n-1$  transpositions distincts.

**Indications ou solutions pour l'exercice 20.7** –

1. Considérer  $\sigma \neq \text{id}$ ,  $\sigma(i) = j \neq i$ , et construire  $\tau$  une transposition telle que  $\tau\sigma\tau^{-1} \neq \sigma$ . On pourra éventuellement regarder un cycle de  $\sigma$ .
2. Considérer le noyau de  $\mathfrak{S}_n \rightarrow \text{Int}\mathfrak{S}_n$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 20.8** –

1. Sans difficulté.
2. Sans difficulté.
3. Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . En étudiant les propriétés de commutativité, montrer que les images des transpositions  $(i \ j)$  sont des transpositions dont l'intersection des supports est un singleton. Définir  $\sigma(i)$  de la sorte, et vérifier que  $\varphi$  est la conjugaison par  $\sigma$ .

4. À ramener à un problème de conjugaison. Utiliser une description des cycles du conjugué en fonction des cycles de  $\sigma$  : pour que le conjugué de  $\sigma$  soit égal à  $\sigma$  il peut y avoir permutation circulaire au sein d'un même cycle, ou échanges de cycles de même longueur.
5. Considérer l'ordre de  $\varphi(\tau)$ , puis sa décomposition cyclique.
6. Utiliser le cardinal du centralisateur pour montrer que  $\varphi$  envoie transpositions sur transpositions. On pourra trouver une relation entre le centre de  $\tau$  et le centre de  $\varphi(\tau)$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 20.9 – (Groupes dérivés de  $\mathfrak{S}_n$  et  $\mathfrak{A}_n$ )**

1. Première inclusion sans difficulté. Pour la deuxième, calculer la signature d'un commutateur.
2. Trouver une relation de conjugaison dans  $\mathfrak{S}_n$ , puis adapter éventuellement en composant par une transposition bien choisie.
3.  $\sigma$  et  $\sigma^2$  sont conjugués.
4.  $\mathfrak{A}_n$  est engendré par les 3-cycles, qui sont des commutateurs.

**Indications ou solutions pour l'exercice 21.1** – Considérer aussi  $p_2 \cdots p_n + 2$ , ils ont chacun un diviseur premier différent des  $p_i$ ,  $i \leq n$ , et distincts entre eux. Sommer les 2.

**Indications ou solutions pour l'exercice 21.2** –

1. Discuter suivant que  $n$  est impair, congru à 2 ou à 0 modulo 4.
2. Considérer une décomposition de  $p_1 \cdots p_k$  comme dans la question 1. Un autre exercice de la feuille propose une autre méthode.
3. Considérer  $k_n$  l'unique entier tel que  $p_1 \cdots p_{k_n} \leq n < p_1 \cdots p_{k_n+1}$ , et montrer que  $\frac{q_n}{n} \leq \frac{1}{p_{k_n}}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 21.3** –

1. Adapter la preuve par l'absurde d'Euclide, en posant  $p_1, \dots, p_n$  tous les nombres premiers  $p$  congrus à 3 modulo 4. Avec  $\alpha = 3$ , les facteurs premiers du nombre considérés sont tous congrus à 1.
2.  $a^2 \equiv -1 [d]$ , puis élever à la puissance  $\frac{d-1}{2}$ .
3. Adapter 1 avec  $(p_1 \dots p_n)^2 + 1$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 21.4** – Le vérifier modulo 7, 3 et 2, ce qui découle directement d'une formule du cours.

**Indications ou solutions pour l'exercice 21.5** – À l'aide de la formule du binôme, itérée. À chaque fois qu'on a  $n^\alpha$  congru à 1 modulo  $2^\beta$ , l'écrire  $1 + k2^\beta$ . On obtient  $n^{2^k} \equiv 1/[2^{k+2}]$

Pour la dernière question, vérifier la congruence modulo les puissances de premiers apparaissant dans la décomposition primaire de 16320. On s'aidera des premières questions.

**Indications ou solutions pour l'exercice 21.6** – À l'aide du petit théorème de Fermat, calculer cette somme modulo 3, 7 et 19.

Mais que peut bien représenter 1789? Sans doute la date de création du quintette avec clarinette de Mozart, je ne vois rien d'autre.

**Indications ou solutions pour l'exercice 21.7** –

1. Justifier que  $a$  est d'ordre  $p-1$  dans  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ .
2. Par l'absurde, en considérant un facteur premier  $q$  de  $p$  tel que  $q \leq \sqrt{p}$ . Justifier que  $a^s$  est d'ordre  $r$  dans  $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$  (on pourra d'abord montrer que l'ordre divise  $r$ ), puis obtenir une contradiction sur les cardinaux.

**Indications ou solutions pour l'exercice 21.8** – Calculer les carrés modulo 7, et remarquer qu'on ne peut pas obtenir une somme nulle modulo 7. Mais par cette technique, cela se généralise mal. Deuxième

méthode : en travaillant modulo 7, par l'absurde, contredire le petit théorème de Fermat. Cela se généralise à tout premier congru à 3 modulo 4.

**Indications ou solutions pour l'exercice 21.9** – Avec la formule du binôme constater que la classe modulo 3 détermine la classe modulo 9 du cube, égale à 0, 1 ou  $-1$ . Un 0 au moins est nécessaire.

**Indications ou solutions pour l'exercice 21.10** – Réduire l'exposant  $10^k$  modulo 6. Ça vaut toujours 4 pour  $k \geq 1$ . Réponse : 5.

**Indications ou solutions pour l'exercice 21.11** –

1. Remarquer que  $10^3 \equiv 1/[111]$ .
2. Écrire  $7(49^n - 1) - 48n$  puis factoriser, et simplifier par 48. Il reste à montrer que  $1 + 49 + 49^2 + \dots + 49^{n-1} - n$  est divisible par 6 ce qui est immédiat en réduisant modulo 6.

**Indications ou solutions pour l'exercice 21.12** –

1. Étudier les puissances de 2 modulo 7, puis modulo 3. Observer que de  $4^{2^n}$  et  $2^{2^n}$ , l'un vaut 4, l'autre vaut 2.
2. Remarquer que les puissances de 4 sont 3-périodiques modulo 9, ainsi que  $15n - 1$ , et vérifier l'égalité sur la première période.

**Indications ou solutions pour l'exercice 21.13** – Montrer que ceci équivaut à dire que  $10^n - 1 \equiv 0 [23]$  pour un  $n$ . À quel théorème du cours peut faire penser une telle égalité? Le résultat est-il spécifique à 23?

**Indications ou solutions pour l'exercice 21.14** – Réduire modulo 9 :  $A = B = C$  modulo 9 ( $C$  étant la somme des chiffres de  $B$ ). Majorer  $A \leq 4 \times 4444 \times 9$  (9 fois nombre de chiffres), puis  $B \leq 6 \times 9$ , puis  $C \leq 4 + 9 = 13$ . Conclure  $C = 7$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 21.15** – Pour 3 ou 9, remarquer que  $10^n$  est congru à 1 modulo 3 ou 9 : écrire  $n$  en base 10 et réduire modulo 3 ou 9. La somme des chiffres donne la classe de congruence modulo 3 ou 9.

Même principe pour les autres, mais en pondérant les chiffres de la numération en base 10 par les valeurs des puissances de 10 modulo  $k$  (formant une période).

**Indications ou solutions pour l'exercice 21.16** – Réduire modulo 8. Solutions :  $(m, n) = (1, 0)$  ou  $(2, 1)$

**Indications ou solutions pour l'exercice 21.17** – Écrire  $b = a + nk$  et développer avec la formule du binôme.

**Indications ou solutions pour l'exercice 21.18** – Qu2 : si  $k$  premiers distincts interviennent dans  $n$ , se ramener à  $\sum_{I \subset \llbracket 1, k \rrbracket} (-1)^{|I|}$ , donc comparer sous-ensembles de cardinal impair, et sous-ensembles de cardinal pair.

Qu3 : par récurrence forte, en isolant  $d = n$ .

Qu4 : Partir de  $\sum_{d|n} g\left(\frac{n}{d}\right)\mu(d)$ , et remplacer  $g$  par la somme le reliant à  $f$ . Intervertir les sommes en remarquant que  $d|n$  et  $d'| \frac{n}{d}$  équivaut à  $dd'|n$ , qui est symétrique en  $d$  et  $d'$ .

Qu5 : Montrer que  $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$  et utiliser la formule d'inversion de Möbius. Pour chaque diviseur  $d$  de  $n$ , on pourra compter le nombre d'entiers  $k$  de  $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$  tels que  $k \wedge n = \frac{n}{d}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 21.19** – Inversibilité ssi  $k \wedge n = 1$ . Algorithme d'Euclide étendu pour trouver une relation de Bézout et réduction modulo  $n$ .

Les 6 compositeurs qui se cachent derrière ces dates sont H..., B..., S..., M..., A..., C...

Réponses : 309, pas inversible,  $-908 = 1063, 243, -669 = 1271, -806$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 21.20** – Solution particulière + solution homogène. Partir d'une relation de Bézout pour la SP. Gauss pour la solution homogène.

Solution :  $(-762 + 1981k, 752 - 1955k)$ .

Ces dates ont à voir avec une oeuvre majeure de Bach, et un certain pianiste canadien.

**Indications ou solutions pour l'exercice 21.21** –

1. Il faut compter les non-multiples de  $p$  :  $p^k - p^{k-1}$ .
2. L'isomorphisme suggéré est  $n \mapsto (n, n)$ . Remarquer que  $U(A \times B) = U(A) \times U(B)$ , et l'appliquer à l'isomorphisme précédent.
3.  $\prod p^{\alpha-1}(p-1)$

**Indications ou solutions pour l'exercice 21.22** –

1. Considérer  $n < m$  et un facteur  $p$  premier de  $F_n$ . Justifier que  $2^{2^m} \equiv 1 [p]$ .
2. Chaque  $F_n$  a des facteurs premiers distincts des précédents.

**Indications ou solutions pour l'exercice 21.23** –

1. Remarquer que si  $R$  est le reste de la division euclidienne de  $a^b - 1$  par  $a^c - 1$ , et  $r$  celui de la division de  $b$  par  $c$ , alors  $R = a^r - 1$ . Ainsi, l'algo d'Euclide pour le calcul du pgcd de  $a^b - 1$  et  $a^c - 1$  se déroule parallèlement à celui du calcul du pgcd de  $b$  et  $c$ .
2. Diviser chaque facteur par  $a - 1$  et montrer qu'ils divisent  $\frac{a^{bc}-1}{a-1}$  et sont premiers entre eux.

**Indications ou solutions pour l'exercice 21.24** –

1. Avec les règles de distributivité, se ramener à montrer que les  $\frac{\mu}{a_i}$  sont premiers entre eux. Le contraire contredirait la minimalité de  $\mu$ .
2. Utiliser la décomposition primaire de chacun des entiers.

**Indications ou solutions pour l'exercice 21.25** – Par récurrence, montrer que  $F_n \wedge F_{n+1} = 1$ . Se servir de  $F_{n+m} = F_{n+1}F_m + F_nF_{m-1}$  pour montrer que  $F_a \wedge F_b = F_b \wedge (F_r F_{b-1}^\alpha)$ , et conclure avec le premier point et l'algorithme d'Euclide.

**Indications ou solutions pour l'exercice 21.26** – En notant  $d$  le pgcd des différences 2 à 2 des masses, montrer que  $2d$  divise  $d$ . Pour cela, on pourra isoler 2 vaches, faire les 2 regroupements correspondants, et former la différence des masses des 2 vaches, exprimées comme double de la différence portant la moitié des autres vaches.

**Indications ou solutions pour l'exercice 21.27** – Considérer une relation de Bézout, puis tous les termes  $ax+by$ , et rajouter la relation de Bézout pour récupérer tous les termes entre  $ax+by$  et  $ax+(b+1)y$ , en choisissant  $b$  suffisamment grand pour absorber le signe négatif de la relation initiale. Éventuellement échanger le rôle de  $a$  et  $b$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 21.28** – Décomposer 42 et 1680 en facteurs premiers. Distribuer les puissances maximales et minimales sur  $a$  et  $b$ . Réponse : (1680, 42), (672, 210) et les symétriques.

**Indications ou solutions pour l'exercice 21.29** – Notant  $u_n$  le nombre défini, remarquer que  $u_{n+1} = 2(2n+1)$ . Se calcule bien par récurrence! Legendre marche aussi, mais c'est beaucoup plus lourd et maladroit.

**Indications ou solutions pour l'exercice 21.30** – Formule de Legendre et  $[2x] + [2y] \geq [x] + [y] + [x+y]$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 21.31** – Sens direct : c'est du cours

Réciproque : Considérer  $\binom{p^\alpha \beta}{p^\alpha}$  avec  $\beta \wedge p = 1$ , si  $n$  n'est pas une puissance de  $p$ ,  $\binom{p^\alpha}{p}$  sinon, puis formule de Legendre.

**Indications ou solutions pour l'exercice 21.32** – Montrer  $v_p((n!)^k)$  et  $v_p((k!)^n) \leq v_p(m!)$  avec Legendre.

**Indications ou solutions pour l'exercice 21.33** – Pour la 2, considérer d'abord le cas  $a \wedge r = 1$ . Dans le cas général, s'y ramener en divisant et remultipliant les solutions obtenues par le pgcd.

**Indications ou solutions pour l'exercice 21.34** –

1. Penser à la minimalité de  $n$  (simplifier par  $p$ )
2. Remarquer que  $n$  est nécessairement composé, et que  $p_1^2 \leq n$ .
3.  $p_1$  et  $p_2$  divisent  $N = n - p_1 p_2$ , donc  $p_1 p_2$  aussi (car  $N$  n'est pas anormal). Considérer ensuite  $\frac{n}{q_1}$  pour obtenir une contradiction.

**Indications ou solutions pour l'exercice 21.35** – Décomposer en facteurs premiers  $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ . Montrer que la classe de  $a$  est nilpotente ssi  $p_1 \dots p_n$  divise  $a$ . Réponse :  $p_1^{\alpha_1 - 1} \dots p_k^{\alpha_k - 1}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 21.36** – Justifier que les  $N(p)$ , pour  $p$  premier, déterminent entièrement  $N$ . Montrer que si  $N$  convient,  $x \mapsto b^x N(x)$  aussi, si  $0 < b < 1$ . Montrer qu'on ne peut pas avoir  $N(p) < 1 < N(q)$  pour deux entiers premiers distincts : on pourra pour cela exprimer une certaine quantité tendant vers l'infini en fonction de puissances de  $p$ . En déduire que  $N(p) = N(q)$ .

Réponse :  $x \mapsto x^a$ ,  $0 < a \leq 1$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 21.37** – Commencer par  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , puis  $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ , puis écrire  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  comme produit des  $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ .

Cas  $n = p$  : pas de diviseur de 0 donc factoriser : 2 solutions.

Cas  $n = p^k$  : les diviseurs de 0 sont de la forme  $kp$ , donc si  $x - 1$  est diviseur de 0,  $x + 1$  ne l'est pas sauf si  $p = 2$ .

Cas  $n = 2^k$  :  $x - 1 = 2^\ell$ ,  $(2^\ell)(2^\ell + 2) = 2^{2\ell} + 2^{\ell+1}$ ; Seuls  $\ell = k$  ou  $\ell = k - 1$  conviennent. Donc 4 racines.

Cas général : discuter suivant la décomposition primaire.

**Indications ou solutions pour l'exercice 21.38** –

1. Regrouper par paires,  $k$  avec son inverse, sachant que seuls 1 et  $-1$  vérifient  $x^2 = 1$ .
2. Discuter suivant que  $n = p^k$  ou non, en cherchant les facteurs dans  $(n-1)!$ . Le cas  $2^2$  est particulier.
3. Même démo que 1.

**Indications ou solutions pour l'exercice 21.39** –

1. Considérer  $\varphi : x \mapsto x^2$ , morphisme de noyau de cardinal 2. Considérer les classes modulo  $\text{Ker}(\varphi)$ .
2. Factoriser  $X^{p-1} - 1$  et compter les racines de chaque côté.
3. il faut  $a^{\frac{p-1}{2}}$  carré avec  $a$  non carré. Par l'absurde,  $\frac{p-1}{2}$  doit être pair.

**Indications ou solutions pour l'exercice 21.40** –

1. C'est une équation de degré 2.
2. Montrer que tout  $(x, y)$  tel que  $x \neq -1$  est sur l'une des droites  $y = a(1+x)$  passant par  $(-1, 0)$ . Obtenir la solution  $x = \frac{1-a^2}{1+a^2}$  et  $y = \frac{2a}{1+a^2}$ . D'ailleurs, ça vous rappelle quoi? Justifier que pour chaque valeur de  $a$ , on obtient une solution distincte, mais penser à enlever les racines de  $-1$  (au nombre de 0 ou 2 suivant  $p$ ). Réponse :  $p + 1$  si  $p \equiv 3 \pmod{4}$ ,  $p - 1$  sinon.

# Polynômes et fractions rationnelles

Dans toute cette feuille, on admettra le théorème de Rolle, affirmant que si  $f$  est une fonction continue sur un intervalle  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ , telle que  $f(a) = f(b)$ , alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$ . On dispose du même résultat si  $f$  est continue sur  $[a, +\infty[$ , dérivable sur  $]a, +\infty[$ , et  $f(a) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 22.1** – En considérant le coefficient dominant, montrer que  $\deg(P) = 3$ . Poser les coefficients et remplacer dans l'équation. Réponse :  $P = \lambda(X^3 + X)$ .

Ce type de calcul peut être utile pour trouver une solution particulière d'une ED, ce qui permet ensuite par une méthode de variation de la constante, de trouver les autres solutions.

**Indications ou solutions pour l'exercice 22.2** – Vérifier  $\deg(P) = 2$ . Par une évaluation bien choisie, montrer que 1 est racine de  $P$ , puis  $-1$  aussi. Réponse :  $\lambda(X^2 - 1)$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 22.3** –  $P$  et  $X$  coïncident sur les éléments de la suite  $u_0 = 0$ ,  $u_{n+1} = u_n^2 + 1$ . Réponse :  $P = X$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 22.4** – (CCP) Soit  $n$  un entier naturel non nul.

1. Bézout.
2. Provient de l'unicité
3. Dériver, isoler le terme qui nous intéresse, considérer les racines et les degrés pour simplifier.

$$\text{Réponse : } a = -\frac{(2n-1)!}{(n-1)!} \text{ et } P = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} X^k.$$

**Indications ou solutions pour l'exercice 22.5** – Essayer de construire le plus de racines possibles à partir d'une racine donnée. En conclure qu'une racine est nécessairement de module 1, puis qu'elles sont racines 6-ièmes de 1. Éliminer encore pour arriver finalement aux seules racines 0 et 1. Trouver leur multiplicité à l'aide de l'équation initiale.

**Indications ou solutions pour l'exercice 22.6** – Dériver et montrer que  $P' = nQ$  ou  $P' = -nQ$ , où  $n = \deg(P)$ . En déduire une ED d'ordre 2 satisfaite par  $P$ . En déduire une relation sur les coefficients de  $P$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 22.7** – Considérer un polynôme dont  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont racines.

**Indications ou solutions pour l'exercice 22.8** – Relations de Viète. En notant  $\Sigma_k$  le polynôme symétrique élémentaire homogène de degré  $k$  en les racines (sans le signe), la somme  $S_2$  des carrés est  $\Sigma_1 - 2\Sigma_2$ , et la somme  $S_3$  des cubes vérifie  $\Sigma_3^3 = S_3 + 3(\Sigma_1 S_2 - S_3) + 6\Sigma_3$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 22.9** –

1. Délinéarisation de  $\sin((2n+1)x)$ .
2. Chercher d'abord les racines dans  $\mathbb{R}_+$ , sous la forme  $r = \cotan^2(\alpha)$ . Déterminer les racines de  $P_n$  et leur somme.
3. On peut se ramener à une inégalité de convexité portant sur  $\tan$  d'un côté, et  $\sin$  de l'autre. On peut aussi faire des études de fonction.
4. Partir de l'expression des sommes des racines de  $P_n$ , puis encadrer.

**Indications ou solutions pour l'exercice 22.10** – Évaluer les dérivées successives de  $P$  en 1 jusqu'à obtenir une valeur non nulle. Multiplicité 2 pour (a), 3 pour les 2 autres.

**Indications ou solutions pour l'exercice 22.11** –  $E'_n = E_{n-1}$ , et ces deux polynômes ne peuvent pas avoir de racine commune.

**Indications ou solutions pour l'exercice 22.12** – Première question classique (Rolle + compter les multiplicités). Remarquer ensuite que  $P^2 + 1$  ne peut pas avoir de racine réelle alors que sa dérivée n'a que des racines réelles.

**Indications ou solutions pour l'exercice 22.13** –

1. Degré  $n$ , coefficient dominant  $\frac{1}{2^n} \binom{2n}{n}$ .
2. (a) Leibniz
  - (b) On a *presque* toujours  $B_{n,k}(1) = 0$  et  $B_{n,k}(-1) = 0$ .
  - (c) Utiliser 2(a). On peut aussi étudier la parité de  $F_n = B_{2n,n}$  directement, et utiliser le fait que les propriétés de parité se « dérivent bien ».
3. Rolle en cascade, en utilisant aussi les racines 1 et  $-1$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 22.14** – Justifier que  $P(r) \neq 0$ , exprimer  $P'(r)$  en fonction de  $P(r)$ ,  $Q(r)$  et  $Q'(r)$ , et remplacer dans  $P'(r)^2 + Q'(r)^2$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 22.15** – Les racines de  $P'$  qui ne sont pas racines de  $P$  sont simples (argument classique de localisation des racines de  $P'$ ). L'appliquer aussi à  $P''$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 22.16** –

1. Classique. Rolle.
2. Montrer qu'une des dérivées admettrait sinon 0 comme racine multiple.
3. Montrer que sinon, une des dérivées admettrait plusieurs extrema locaux entre deux racines consécutives. Est-ce possible ?

**Indications ou solutions pour l'exercice 22.17** – Analyse : en exploitant les relations coefficients/racines, montrer que l'autre racine vérifie  $s = -2r$ , puis que  $4p^3 + 27q^2 = 0$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 22.18** – Compter les racines avec multiplicité et comparer avec le degré.

**Indications ou solutions pour l'exercice 22.19** –

1. Écrire la factorisation de  $P$ , en séparant les racines de multiplicité 1 et les racines multiples. Traduire sur les racines la divisibilité de  $P$  par  $P''$ , et compter les racines.
2. Constaté que nécessairement, il existe  $\lambda$  tel que  $P'' = \lambda Q(X-s)^\alpha$ . Exprimer  $\lambda$  en fonction du degré de  $P$ . On trouve une ED en dérivant  $Q(X-s)^\alpha$  deux fois et en comparant à l'expression précédente. Évaluer l'ED en un complexe bien choisi, pour obtenir.
3. Cas  $\deg(P) = 1$  ou 2 faciles. Cas  $\deg(P) = 3$  : les 3 racines de  $P$  se répartissent de sorte qu'une des 3 est le milieu des 2 autres.

**Indications ou solutions pour l'exercice 22.20 –**

1. Exprimer le fait que  $A^2$  possède un minimum en  $c$ .
2. Soit  $R$  l'ensemble des racines de tous les  $P^{(k)}$ , et  $x \notin R$ . Les  $P^{(k)}$  sont continues en  $x$  et non nulles, donc de signe constant sur un voisinage de  $x$ .  
Par ailleurs, si  $x \in R$  et si  $m$  est la multiplicité de  $x$  comme racine de  $P^{(k)}$ , la question 1 montre que pour toute la série des  $m$  dérivées successives s'annulant en  $x$ ,  $P^{(\ell)}P^{(\ell+1)}$  passe d'une valeur négative à une valeur positive. D'où une variation d'au moins  $m$  de  $V$  dû à cela. Il faut éventuellement ajouter un changement de signe supplémentaire (suivant le signe de  $P^{(k-1)}$ ). Il peut y avoir d'autres racines d'autres  $P^{(k)}$  (plusieurs séries de 0 dans la suite des dérivées), dans ce cas, les effets s'ajoutent (chute encore plus importante).
3. Découle de la question précédente :  $V$  est décroissante, et chute davantage que la multiplicité des racines de  $P$ .
4. Se restreindre à un compact englobant toutes les racines positives de  $P$ .
5. Si  $k$  est le nombre de 0 dans la suite des coefficients, il y a au plus  $n - k$  changements de signe stricts. Compter les racines...

**Indications ou solutions pour l'exercice 22.21 –**

1. Compter les zéros communs, puis considérer  $f(x) = Q(x)e^{-ax}$ .
2. Récurrence sur  $n$ , écrire  $P = XR - \alpha R$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 22.22 –** Remarquer que  $\prod (X - b\omega_k) = X^n - b^n$ . Réponse :  $a^n - b^n$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 22.23 –**

1. Dans  $\mathbb{R}$  :  $P(X) = (X - 1)(X + 1) \prod_{i=1}^{n-1} (X^2 - 2X \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1)$ .
2. Factoriser  $P$  par  $X^2 - 1$  :  $Q = \sum_{k=0}^{n-1} X^{2k}$
3. Évaluer  $Q$  en 1, on obtient le carré de l'expression recherchée. Contrôler le signe pour passer à la racine. Réponse :

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^n}.$$

**Indications ou solutions pour l'exercice 22.24 –**

1. Trouver les racines de  $P$  (équation à résoudre : éliminer d'emblée le cas  $z = -i$ ). Un petit travail sur les exponentielles complexes amène :

$$z = \tan\left(\frac{k\pi}{n} + \alpha\right), k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket.$$

2. Factoriser et évaluer en 0.

Le produit est bien défini si et seulement si  $e^{2i\alpha n} \neq (-1)^n$  et :

$$\prod_{k=1}^n \tan\left(\frac{k\pi}{n} + \alpha\right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ pair} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \tan(n\alpha) & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

**Indications ou solutions pour l'exercice 22.25 –** Factoriser d'abord en l'indéterminée  $Y = X^3$ , puis factoriser chaque polynôme de degré 3 obtenu en utilisant des racines cubiques. Regrouper les racines par conjuguées pour trouver la factorisation dans  $\mathbb{R}[X]$ .

Réponse :

$$\begin{aligned} P(X) &= (X+1)(X - e^{\frac{i\pi}{3}})(X - e^{-\frac{i\pi}{3}})(X - e^{\frac{i\pi}{6}})(X - e^{-\frac{i\pi}{6}})(X - e^{\frac{i5\pi}{6}})(X - e^{-\frac{i5\pi}{6}})(X - e^{\frac{i2\pi}{3}})(X - e^{-\frac{i2\pi}{3}}) \\ &= (X+1)(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1) \end{aligned}$$

**Indications ou solutions pour l'exercice 22.26** – Commencer par factoriser dans  $\mathbb{C}$  le polynôme  $Z^2 - 2\cos(na)Z + 1$

**Indications ou solutions pour l'exercice 22.27** –

1. Poser  $R = aX + b$ , écrire  $P = (X^2 - 1)A + R$  et évaluer en 1 et  $-1$ . On obtient :  $R = (-1)^n X + 1 - (-1)^n$ .
2. De même, en évaluant en 1, puis en évaluant l'expression dérivée en 1. On obtient :  $R = (3n + 1)X + (3 - 3n)$ .
3. De même, on posant  $R = aX^3 + bX^2 + cX + d$ , en évaluant en 1 et 0 et en évaluant la dérivée en 1 et 0. On obtient  $R = (2n - 1)X^3 + (2 - 2n)X^2 - X - 1$ .
4. On évalue en  $-1$  et en  $i$  (en identifiant partie réelle et partie imaginaire). Se souvenir que ce polynôme intervient dans une factorisation de  $X^4 - 1$ , dont les racines sont les racines 4-ième de l'unité (cas plus général de  $1 + X + \dots + X^n$ ). Réponse : si  $n$  est pair,  $n = 2p$ ,  $R = \frac{1}{2}(1 - (-1)^p)X^2 + X + \frac{1}{2}(5 + (-1)^p)$ . Si  $n$  est impair,  $n = 2p + 1$ ,  $R = \frac{1}{2}((-1)^p - 1)X^2 + ((-1)^p + 1)X + \frac{1}{2}((-1)^p + 3)$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 22.28** – En considérant  $r$  le reste commun, considérer les racines de  $P - r$  et factoriser. Terminer en évaluant en 1.

**Indications ou solutions pour l'exercice 22.29** – Regrouper les 2 hypothèses en considérant les racines de  $P'$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 22.30** – Équivaut à dire que  $j$  est racine de  $P$  et  $P'$ . Réponse :  $n \equiv 1 \pmod{6}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 22.31** –

1. Expliciter  $P(X^2 + 1)$  et poser la division euclidienne. On obtient un système (non linéaire) de 2 équations à résoudre. Lorsque  $p \neq 0$ , exprimer  $q$  en fonction de  $p$ , remplacer dans la seconde équation : on est ramené à une équation de degré 4 admettant 1 et  $-1$  comme racines.

Solutions :

- $p = 0$  et  $q$  racine de  $X^2 - X + 1$
  - $p \in \{1, -1, -1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}\}$  et  $q = 1 + \frac{p+p^2}{2}$ .
2. Poser la division euclidienne. La nullité du reste donne 3 équations, dont l'une est  $c^2 + c + 1 = 0$ . Ainsi,  $c = j$  ou  $c = j^2$ . Réponse :  $c = j$ ,  $a = 2(j + 1)$ ,  $b = (j + 1)$ , ou  $c = j^2$ ,  $a = 2(j^2 + 1)$ ,  $b = j^2 + 1$ .
  3. Exprimer que 1 est racine double, et utiliser la dérivée. On trouve  $a = n$  et  $b = -n - 1$ . La divisibilité se fait bien dans  $\mathbb{Z}[X]$ , puisqu'on divise par un polynôme dont le coefficient dominant est 1 (donc inversible dans  $\mathbb{Z}$ , condition pour pouvoir faire une division euclidienne dans  $\mathbb{A}[X]$ ).

**Indications ou solutions pour l'exercice 22.32** – Écrire la division euclidienne  $A = BQ + R$ , avec  $B = X^2 + 1$ . Évaluer aux racines de  $B$  : cela suffit à déterminer  $R$ .

$$\text{Réponse : } R = \sin\left(n\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right)X + \cos\left(n\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right)$$

**Indications ou solutions pour l'exercice 22.33** – Les  $L_i$  forment une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ . Écrire le reste dans cette base.

**Indications ou solutions pour l'exercice 22.34** –  $X^2 + X + 1$  divise  $P_n(X)$  si et seulement si les racines de  $X^2 + X + 1$  sont racines de  $P_n(X)$ .

Réponse :  $a = b = 1$  si  $n \not\equiv 0 [3]$ ,  $a + b = -1$  si  $n \equiv 0 [3]$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 22.35 –**

- Se ramener au cas où  $P$ ,  $Q$  et  $R$  sont premiers entre eux 2 à 2, et supposer  $\deg(P) \geq \deg(Q) \geq \deg(R)$ .
- Remarquer que si  $R$  est constant,  $P$  et  $Q$  aussi (factoriser  $P^n + Q^n$  à l'aide des racines  $n$ -ièmes de  $-1$ )
- En supposant  $\deg(R) > 0$ , montrer que  $P^{n-1}$  divise  $Q'R - QR'$
- En déduire  $(n-1)\deg(P) \leq 2\deg(P) - 1$ . Conclure.

**Indications ou solutions pour l'exercice 22.36 –**

1. Exprimer  $P \wedge P'$  en fonction des racines de  $P$ , et compter.
2. Utiliser le fait que  $P - 1$  et  $P$  sont premiers entre eux et que les deux polynômes divisent  $P'$ .
3. Montrer que  $R = P - Q$  a au moins  $n + 1$  zéros,  $n$  étant le degré de  $P$  (les zéros de  $P$  et de  $P - 1$ ).

**Indications ou solutions pour l'exercice 22.37 –**

$$1. F_1(X) = 1 - \frac{8}{X-1} + \frac{13}{X-2}$$

$$2. F_2(X) = \frac{1}{X} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}$$

Pour trouver le dernier coefficient, on peut multiplier par  $X$  et considérer la limite en  $+\infty$ .

$$3. F_3(X) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{(X+1)^2}$$

Même technique qu'avant, ainsi qu'une évaluation en 0.

On peut aussi s'en sortir, pour un pôle multiple, par DL au voisinage de chacun des pôles, puis identification.

$$4. F_4(X) = \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{X-1} + \frac{j}{(X-j^2)^2} - \frac{j^2}{X-j^2} + \frac{j^2}{(X-j)^2} - \frac{j}{X-j}$$

Trouver la partie polaire associée à 1 (par exemple par DL), puis remarquer que  $F_4(jX) = F_4(j^2X) = F_4(X)$ ...

$$5. F_5(X) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} \binom{n}{k}}{X-k}$$

$$6. F_6(X) = \frac{1}{n(X-1)^2} - \frac{n-1}{2n(X-1)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\omega_k}{n(\omega_k-1)(X-\omega_k)}$$

$$7. F_7(X) = \frac{(-1)^n}{X^2} + \frac{n(-1)^n}{X} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-k}(n-k+1)}{(X-1)^k}$$

DL(1) en 0 de  $x^2 f(x)$  et DL à l'ordre  $n-1$  en 1.

$$8. \text{ De même, par DL : } F_8(X) = \sum_{k=1}^p \frac{\binom{p+q-k-1}{p-k}}{X^k} + \sum_{k=1}^q \frac{\binom{p+q-k-1}{q-k}}{(1-X)^k}$$

**Indications ou solutions pour l'exercice 22.38 –**

$$1. F_1(X) = \frac{1}{X+1} + \frac{j}{X+j} + \frac{j^2}{X+j^2} = \frac{1}{X+1} + \frac{-X+2}{X^2-X+1}$$

2. Sauf erreur de calcul de ma part :

$$\begin{aligned} F_2(X) &= \frac{2}{9(X-1)^2} + \frac{4}{27} \cdot \frac{1}{X-1} + \frac{5}{108} \cdot \frac{1}{X+2} - \frac{4+j}{36} \cdot \frac{1}{X+2j} - \frac{4+j^2}{36} \cdot \frac{1}{X+2j^2} \\ &= \frac{2}{9(X-1)^2} + \frac{4}{27} \cdot \frac{1}{X-1} + \frac{5}{108} \cdot \frac{1}{X+2} + \frac{-7X+6}{36(X^2-2X+4)} \end{aligned}$$

3. Le faire d'abord dans  $\mathbb{R}$  :

$$F_3(X) = X^3 - X^2 - X + 2 - \frac{X+1}{X^2+1} + \frac{X}{X^2+X+1}$$

Puis dans  $\mathbb{C}$  :

$$F_3(X) = X^3 - X^2 - X + 2 - \frac{1+i}{2} \frac{1}{X+i} - \frac{1-i}{2} \frac{1}{X-i} + \frac{2+j}{3} \frac{1}{X-j} + \frac{2+j^2}{3} \frac{1}{X-j^2}.$$

4. Utiliser un argument de symétrie pour justifier que dans  $\mathbb{C}$  les coefficients de la DES sont tous égaux.

$$F_4(X) = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{X - \omega^k},$$

où je vous laisse deviner ce qu'est  $\omega$ .

$$F_4(X) = \frac{1}{2n+1} \left( \frac{1}{X-1} + 2 \sum_{k=1}^n \frac{X - \cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right)}{X^2 - 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right)X + 1} \right).$$

**Indications ou solutions pour l'exercice 22.39** – Évident si  $x$  est racine de  $P$ . Sinon, remarquer qu'il s'agit à peu de chose près de la dérivée de  $\frac{P'}{P}$ . Que sait-on sur  $\frac{P'}{P}$  ?

Réciproque : considérer  $X^3 + X$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 22.40** – Montrer que  $P(X)|P(-X)$  et réciproquement. En déduire que  $P$  est pair ou impair, de même pour  $Q$ .  $P$  et  $Q$  peuvent-ils être tous deux impairs ?

**Indications ou solutions pour l'exercice 22.41** – La DES ne doit pas avoir de terme en  $\frac{1}{X-1}$  et  $\frac{1}{X+1}$ . Réponse : les fractions rationnelles  $\frac{X^2+pX+1}{(X^2-1)^2}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 22.42** – Montrer que  $P_1Q_2 - P_2Q_1$  admet une infinité de racines.

**Indications ou solutions pour l'exercice 22.43** –

1. Dans  $\mathbb{C}$ , on peut utiliser un argument analytique, par exemple en considérant la limite en  $+\infty$ . On peut bien sûr utiliser l'argument de la question suivante aussi.
2. Montrer que sinon, il existe un polynôme  $Q$  tel que  $F(Y) = Q\left(\frac{Y}{1-Y}\right)$ . On pourra utiliser un argument de parité et de rigidité.

**Indications ou solutions pour l'exercice 22.44** – Comparer les limites en  $-1^+$  et en  $+\infty$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 22.45** – Utiliser un développement limité de  $\frac{h^3}{P(r_i+h)^3}$

**Indications ou solutions pour l'exercice 22.46** – Utiliser le fait que si  $F$  et  $G$  coïncident sur une infinité de valeurs, alors  $F = G$ . Montrer que  $\frac{a_0}{b_0}$  (terme constant du numérateur / terme constant du dénominateur) est premier et égal à  $F(qa_0)$ , pour tout nombre premier  $q$  différent de  $\frac{a_0}{b_0}$  (considérer la valuation  $p$ -adique).

## Espaces vectoriels

**Indications ou solutions pour l'exercice 23.1** – Oui / Non (pas stable par somme)

**Indications ou solutions pour l'exercice 23.2** – Oui : 2,4,5 ; Non : 1,3,6,7

**Indications ou solutions pour l'exercice 23.3** –

1. Pour étudier  $\lambda x + y$ , considérer  $k$  tel que  $x$  et  $y$  soient dans  $F_k$ .
2. Faux si  $I$  peut être infini. Faux si  $I$  et  $\mathbb{K}$  sont finis, vrai si  $I$  fini et  $\mathbb{K}$  infini. Dans ce cas, on montre que l'un d'eux est égal à  $E$ , donc fournit un  $k$  universel. C'est l'objet d'un autre exercice.

**Indications ou solutions pour l'exercice 23.4** – Soit  $(G, +)$  un groupe abélien.

1. En supposant qu'une telle structure existe. Montrer que si  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $nx$  coïncide nécessairement avec  $x + \dots + x$ , noté également  $nx$  généralement. On sait que la multiplication par un élément de  $\mathbb{Z}$  vérifie toutes les propriétés usuelles d'associativité, distributivité etc.  
Montrer l'associativité de la loi externe implique alors qu'il n'y a pas le choix pour définir la loi externe pour un scalaire  $\alpha \in \mathbb{Q}$  quelconque.
2. Des vérifications fastidieuses, en partant des propriétés satisfaites par la multiplication par un entier (correspondant à l'itération de  $+$ ) et de la relation  $q(\alpha x) = px$ , où  $\alpha = \frac{p}{q}$ , relation caractérisant  $\alpha x$  de façon unique d'après le point 1. Ne pas oublier de montrer que la définition de  $\alpha x$  est indépendante du représentant de  $\alpha$  choisi, et se ramener systématiquement à  $q \times \text{expression} = 0$  pour un certain  $y$ , et  $q \neq 0$ , ce qui amène  $\text{expression} = 0$  d'après le point 1.

**Indications ou solutions pour l'exercice 23.5** – Ne pas hésiter à utiliser le cardinal des familles, ainsi que la caractérisation de la liberté par la non colinéarité pour une famille de 2 vecteurs. Ayez aussi le réflexe de deviner des relations.

1. Libre, pas génératrice
2. Pas libre, génératrice
3. Pas libre, pas génératrice
4. Pas libre, pas génératrice
5. Base

**Indications ou solutions pour l'exercice 23.6** – On peut toujours compléter par ajout de vecteurs de la base canonique d'après le TBI. Les prendre l'un après l'autre, et regarder si on peut les ajouter sans perdre la liberté.

**Indications ou solutions pour l'exercice 23.7** – La méthode est bien balisée : poser des  $\lambda_i$  vérifiant  $\sum \lambda_i f_i = 0$ , et montrer que les  $\lambda_i$  sont alors tous nuls.

1. Plusieurs possibilités parmi lesquelles :
  - Récurrence sur  $n$ , en dérivant et combinant pour se débarrasser du  $e^{nx}$
  - Par l'absurde, en considérant un équivalent.
  - Par une méthode polynomiale (écrire l'expression sous la forme  $P(e^x) = 0$ , et considérer les racines de ce polynôme)
 Challenge : trouver le plus de méthodes possibles.
2. Par l'absurde, par un argument de multiplicité de racine (par exemple)
3. Broderie autour de 1 (qui en est un cas particulier). La méthode polynomiale ne s'applique plus, mais les autres si.

**Indications ou solutions pour l'exercice 23.8** – Comme dans toutes les études de ce type, considérer des coefficients  $\lambda_i$  tels que  $\sum \lambda_i f_i = 0$ , et utiliser tous les moyens du bord pour montrer que les  $\lambda_i$  sont nuls.

1. Libre ssi  $a \neq b [\pi]$ . Évaluer en un 0 de l'une des deux.
2. Lié : à l'aide des formules de trigonométrie, montrer qu'elles sont toutes dans un espace engendré par 2 fonctions bien connues.
3. Libre : méthode polynomiale (écrire la CL comme polynôme en  $\cos$ )
4. Libre d'après le point précédent et le cours.
5. Libre : Méthode polynomiale en écrivant  $P(x) \cos(x) + Q(x) \sin(x) = 0$ . Trouver une infinité de racines de  $P$  et de  $Q$ .
6. Libre : méthode polynomiale
7. Libre : dériver, et considérer un équivalent en 0.

**Indications ou solutions pour l'exercice 23.9** – Méthode polynomiale.

**Indications ou solutions pour l'exercice 23.10** – Étudier la liberté de la famille, et chercher à quelle condition il y a une obstruction à pouvoir achever la preuve.

La famille est liée ssi  $\sum \lambda_i = -1$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 23.11** – Utiliser un argument de dérivabilité.

**Indications ou solutions pour l'exercice 23.12** – Poser le système. La famille est libre ssi le système est de Cramer (en les inconnues  $\lambda, \mu, \mu$ , avec les paramètres  $x, y, z$ ).

C'est le cas ssi  $xyz \neq 0$  (donc aucun des 3 n'est nul) et  $xyz - x - z + 2 = 0$ .

On peut le trouver par un calcul de déterminant, si on connaît déjà, ou alors commencer par éliminer l'une des variables, se ramener à système  $2 \times 2$ , et là, utiliser le déterminant  $2 \times 2$  pour caractériser le fait qu'il soit de Cramer (ça, vous connaissez).

**Indications ou solutions pour l'exercice 23.13** – Encore méthode polynomiale.

**Indications ou solutions pour l'exercice 23.14** – Réponse :  $a = 23, b = 3$ .

À l'aide des deux premières coordonnées, chercher l'unique CL de  $v_1$  et  $v_2$  pouvant donner  $v_3$ . En déduire  $a$ . De même pour  $b$ . Remarquer que  $v_3$  et  $v_4$  ne sont pas colinéaires pour conclure.

**Indications ou solutions pour l'exercice 23.15** –

1.  $\mathbb{K}$  contient le corps premier  $\mathbb{F}_p$ . Vérifier que c'est un  $\mathbb{F}_p$ -ev, donc isomorphe à un  $\mathbb{F}_p^n$ .
2. Considérer les racines de  $X^{p^n-1} - 1$  dans un  $\mathbb{K}'$  sur lequel ce polynôme est scindé. Justifier qu'elles sont simples. L'ensemble de ces racines auquel on joint 0 est un corps de cardinal  $p^n$ .

3. Remarquer que  $\mathbb{K}$  est exactement l'ensemble des racines de ce polynôme : celui-ci est scindé dans  $\mathbb{K}$ , et diminuer  $\mathbb{K}$  fait perdre une racine.

**Indications ou solutions pour l'exercice 23.16** –

1. Remarquer que  $A \cap B \subset A \subset A + B$ . Que déduire alors de l'égalité  $A \cap B = A + B$ ? De même pour  $B$ .
2. Considérer  $b + c$  avec  $b \in A \cap B$  et  $c \in A \cap C$ .
3. . Ou alors, remarquer qu'on a inclusion pour chacun des termes de la somme et terminer par minimalité.
4. De même.
5. Inclusion  $\subset$  toujours vraie (voir terme par terme de la somme). Pour la réciproque, revenir aux éléments.
6. Inclusion  $\subset$  terme par terme de la somme. A-t-on l'inclusion réciproque en général?

**Indications ou solutions pour l'exercice 23.17** – Par l'absurde, et sans perte de généralité, considérer  $x \in F_1 \setminus E_1$ , et le décomposer de deux manières différentes dans  $\bigoplus F_i$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 23.18** – Fait en cours en début d'année (exemple d'analyse-synthèse). C'est l'existence et d'unicité d'une décomposition d'une fonction définie sur un intervalle symétrique en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Remarquez que pour répondre complètement à la question, il faut aussi prouver que  $P$  et  $I$  sont bien des sev.

**Indications ou solutions pour l'exercice 23.19** – Analyse synthèse, ou considérer  $g(x) = f(x) - xf(1)$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 23.20** – Division euclidienne.

**Indications ou solutions pour l'exercice 23.21** – Somme directe évidente. Pour  $x \in C$ , considérer sa décomposition dans  $A \oplus B$  et vérifier qu'elle répond à la question.

**Indications ou solutions pour l'exercice 23.22** – C'est plus ou moins du cours. Considérer une famille libre de cardinal maximal. C'est alors une base.

**Indications ou solutions pour l'exercice 23.23** – Extraire une famille libre de  $S'$ , et compléter en une base de  $\text{Vect}(S)$  par ajout de vecteurs de la famille génératrice  $S$ . Remarquer que ces vecteurs ne peuvent pas être dans  $S'$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 23.24** – Considérer la famille des vecteurs indicateurs des parties  $X_i$ . Utiliser une relation non triviale entre ces vecteurs.

**Indications ou solutions pour l'exercice 23.25** – Adapter la preuve du cours de l'existence d'un supplémentaire : considérer  $H$  de dimension maximale en somme directe à la fois avec  $F$  et  $G$ . Remarquer que si  $H + F \neq E$ , alors  $H + G \neq E$  (par les dimensions), et leur union non plus. Rajouter à  $H$  un vecteur n'appartenant pas à cette union.

**Indications ou solutions pour l'exercice 23.26** – (ENS) Soit  $\mathbb{K}$  un corps infini,  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

1. Raisonner par l'absurde. Considérer  $n$  maximal tel que  $V_1 \cup \dots \cup V_{n-1} \neq E$ . On a alors  $V_1 \cup \dots \cup V_n = E$ . Choisir convenablement (comment ?)  $x \in V_1 \cup \dots \cup V_{n-1}$  et  $y \in V_n$ . Montrer qu'il existe  $\lambda \neq \mu$  et  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $\lambda x + y \in V_i$  et  $\mu x + y \in V_i$ , et obtenir une contradiction, portant sur la façon (convenable) d'avoir choisi  $x$  et  $y$ .
2. Considérer  $H$  de dimension maximale en somme directe avec chacun des  $F_i$ , et si ce n'est pas un supplémentaire, justifier l'existence de  $x$  n'appartenant à aucun des  $F_i \oplus H$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 23.27 –**

1. Sinon, ce serait une base, et la positivité des coefficients contredirait l'unicité de la décomposition. Pour une famille de cardinal  $n + 1$ , considérer la base canonique augmentée de  $(-1, \dots, -1)$ . Vous pouvez trouver un exemple similaire pour toute base, en prenant ajoutant à cette base un certain vecteur.
2. Extraire une base. Écrire le vecteur  $x$  de coordonnée  $(-1, \dots, -1)$  (dans cette base) comme CL à coefficients positifs des éléments de  $\mathcal{F}$ . Écrire une relation entre les  $n + 1$  vecteurs qui ne sont pas dans la base, en déduire une relation

$$\sum \lambda_i b_i + \sum (\alpha \mu_j + \lambda_j) c_j = x,$$

où les  $b_i$  sont les vecteurs de la base, les  $c_i$  les autres, les  $\lambda_i$  sont  $> 0$ , les  $\mu_j$  peuvent être de signe quelconque, et  $\alpha$  est arbitraire. Choisir convenablement  $\alpha$  de sorte à annuler un coefficient de la seconde somme et obtenir des coefficients positifs ou nuls pour les autres.

**Indications ou solutions pour l'exercice 23.28 –**

1. On utilise une caractérisation des isomorphismes en dimension finie du chapitre suivant. En effet,  $x \mapsto ax$  est un endomorphisme injectif en dimension finie, donc un automorphisme.
2. Existence de  $P$  du fait de la dimension finie. Considérer la décomposition en facteurs irréductible de  $P$ .
3. Ce polynôme est irréductible d'après question 2.
4. Mise sous forme canonique de l'expression précédente.
5. Construire  $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow K$  par  $1 \mapsto 1$  et  $i \mapsto i_a$ , et prolonger par linéarité. Montrer le respect du produit. Montrer que  $\mathbb{C}$  est isomorphe à la sous-algèbre  $\text{Vect}(1, i_a)$ . Montrer que pour tout  $b \neq a$ ,  $\text{Vect}(1, i_b) = \text{Vect}(1, i_a)$  (on pourra montrer que  $i_a = \pm i_b$ ), et en déduire que  $\text{Vect}(1, i_a) = K$ .

# Applications linéaires

**Indications ou solutions pour l'exercice 24.1** – Avec les éléments, en revenant aux définitions.

**Indications ou solutions pour l'exercice 24.2** – Tout traduire au niveau des éléments. 1 à 4 ne doivent pas poser de problème.

Pour 5, le sens direct est simple avec les éléments. Pour la réciproque, une inclusion est déjà montrée. Pour l'autre, considérer,  $y = f(x)$  pour  $x \in \text{Ker}(g \circ f)$ .

Pour 6, le sens réciproque est facile. Pour le sens direct, pour  $y \in F$ , considérer  $x$  tel que  $g \circ f(x) = g(y)$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 24.3** –

1. C'est la préservation de la liberté. Remarquer que  $f(G \cap H)$  est réduit à un élément, et l'injectivité nous assure que c'est égal à l'intersection des images.
2. CNS :  $(G \oplus H) \cap \text{Ker}(f) = \{0\}$ , c'est-à-dire  $G \oplus H \oplus \text{Ker}(f)$  directe.

**Indications ou solutions pour l'exercice 24.4** –  $u$  et  $P(v)$  commutent. Il suffit donc de montrer la première assertion. Le faire en revenant aux éléments.

**Indications ou solutions pour l'exercice 24.5** – Faire une « chasse au diagramme » : pour l'injectivité, considérer le noyau, et chercher autant que possible à exploiter la commutativité du diagramme (écrire des composées pour pouvoir changer de chemin) de sorte à pouvoir exploiter l'exactitude des lignes (l'injectivité de  $f$ , la surjectivité de  $g$  ou trouver un élément dans le noyau de  $g$  afin de pouvoir utiliser l'exactitude au centre). Même principe pour la surjectivité.

**Indications ou solutions pour l'exercice 24.6** – Hyper-classique. Comparer le coefficient de colinéarité pour  $x$  et  $y$  en discutant suivant que  $(x, y)$  est libre ou non, et en passant par  $x + y$ . Définir des  $u$  assurant l'hypothèse de la question 1 (on pourra définir  $u$  sur une base, ce qu'on peut faire grâce à l'axiome du choix)

**Indications ou solutions pour l'exercice 24.7** –  $f$  est surjective non injective. Pour construire les  $e_i$ , utiliser la surjectivité. À quelle condition suffisante (mais pas nécessaire) une famille de polynômes est-elle une base ?

**Indications ou solutions pour l'exercice 24.8** – En écrivant  $P = XQ$ , que peut-on dire que  $Q(f)(x)$ , en rapport avec la décomposition recherchée ?

**Indications ou solutions pour l'exercice 24.9** – Il s'agit de comparer le rang d'une composée au rang de chaque terme. La somme est directe, et que vaut sa dimension ?

**Indications ou solutions pour l'exercice 24.10** – Théorème du rang à chaque étage.

**Indications ou solutions pour l'exercice 24.11** – Considérer les inégalités de dimension fournies par les hypothèses. On a d'autres relations sur les dimensions, provenant de...

**Indications ou solutions pour l'exercice 24.12** –

1. Se ramener à l'étude d'une certaine inclusion.
2. Trouver autant de relations possibles (égalités ou inégalités) sur les dimensions des noyaux, des images et de  $E$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 24.13** –

1. Considérer  $u|_{\text{Im}(v)}$ . Comment passe-t-on de la première à la deuxième égalité ?
2. Immédiat.

**Indications ou solutions pour l'exercice 24.14** – Construire les  $f_i$  par rigidité sur les éléments d'une base, en séparant la contribution de chaque vecteur. La base ne doit pas être choisie n'importe comment.

**Indications ou solutions pour l'exercice 24.15** – Montrer que si  $I$  est un idéal non trivial contenant  $u \neq 0$ , toute application de rang 1 est dans  $I$  (l'écrire comme composée d'AL impliquant  $u$ ). Matriciellement on peut utiliser une matrice standard équivalente à la matrice  $M$  de  $u$ , pour obtenir la même chose.

**Indications ou solutions pour l'exercice 24.16** – Suivre l'énoncé, bien détaillé! Vous avez bien sûr reconnu les polynômes  $L_i$ . Pour la dernière question, on pourra remarquer que  $f^n \circ L_3(f) = L_3(f)$ , c'est bien pratique pour simplifier les calculs.

**Indications ou solutions pour l'exercice 24.17** – Sens direct évident. Sens réciproque : il suffit de comparer les noyaux.

**Indications ou solutions pour l'exercice 24.18** – Réciproque évidente. Un examen rapide du sens direct amène à  $pq + qp = 0$ . Exploiter la définition des projecteurs en composant cette relation à gauche et/ou à droite pour obtenir d'autres relations.

**Indications ou solutions pour l'exercice 24.19** – Sens direct facile en revenant aux éléments. Sens réciproque : vérifier la commutation sur  $\text{Ker}(p)$  et sur  $\text{Im}(p)$ . Que peut-on dire de ces deux sous-espaces ?

**Indications ou solutions pour l'exercice 24.20** –

1. N'oublier aucune des propriétés à montrer. Pour la décomposition, comment définir un élément de  $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(g)$  à partir d'un élément de  $\text{Ker}(f \circ g)$  ?
2. De même. Comment construire un élément de  $\text{Ker}(f)$  à partir d'un élément de  $\text{Im}(f \circ g)$  (n'oubliez pas que  $f$  est un projecteur).
3. Comparer les membres aux expressions obtenues dans les deux premières questions. Comment construire un projecteur qui échange le rôle du noyau et de l'image d'un projecteur donné ?

**Indications ou solutions pour l'exercice 24.21** –

1. Par exemple par complétion d'une famille libre, en construisant une famille génératrice adaptée à la décomposition  $E_1 + F_1$ . Ou alors par maximalité, en regardant les sous-espaces de  $F$  vérifiant une certaine propriété. Ou encore (et cela simplifie la suite) en considérant des supplémentaires de  $E_1 \cap F_1$ .

2. Décrire géométriquement en se servant d'une décomposition de  $E$  en somme directe de 3 espaces.
3. Provient directement du calcul de la question précédente.

**Indications ou solutions pour l'exercice 24.22** – Considérer d'un côté un supplémentaire du noyau et de l'autre un supplémentaire de l'image, et construire  $g$  de façon adaptée à ces décompositions.

**Indications ou solutions pour l'exercice 24.23** – Ne pas se tromper dans la caractérisation par les intersections de la somme directe de  $n$  sous-espaces vectoriels. Une fois ce point bien clair, c'est sans difficulté.

**Indications ou solutions pour l'exercice 24.24 – (X) – Idéaux à gauche de  $\mathcal{L}(E)$**

1.
  - $g(F)$  idéal facile.
  - $f \circ g(F) = F$ . Inclusion directe facile. Pour la réciproque, si  $x \notin F$ , construire  $u$  (par morceaux) dont le noyau est exactement  $F$ .
2. (a) Considérer  $E = \text{Ker}(u) \oplus S$ , et compléter l'image par  $u$  d'une base de  $S$  en une base de  $E$ . Construire  $f$  sur la base obtenue, de sorte que  $f \circ u$  et  $v$  coïncide sur les vecteurs d'une certaine base.
- (b) Considérer  $p$  et  $q$  d'images  $F_1$  et  $F_2$ , de noyau  $G_1$  et  $G_2$ , puis en considérant la décomposition  $E = S_1 \oplus G_1 \cap G_2 \oplus S_2 \oplus S_3$  où  $S_1$  est un supplémentaire de  $G_1 \cap G_2$  dans  $G_1$ ,  $S_2$  de même dans  $G_2$ , et  $S_3$  un supplémentaire de  $G_1 + G_2$  dans  $E$ , construire 3 projections de noyaux contenant l'un des  $G_i$ , les combiner pour obtenir un projecteur de noyau  $G_1 \cap G_2$ . Utiliser une question antérieure pour justifier que toutes les projections ainsi construites sont dans  $I$ .
- (c) Justifier qu'on peut se limiter aux projecteurs dans l'intersection définissant  $f$  (pour  $u \in I$ , il existe toujours un projecteur de  $I$  de même noyau), et considérer  $r$  dont la dimension du noyau est minimale. utiliser l'argument de 1(a) pour obtenir la description de  $I$ .
- (d)  $g \circ f(I) = I$ . Ainsi,  $f$  et  $g$  sont des bijections réciproques. Étudier  $g \circ f(I)$  et conclure.

**Indications ou solutions pour l'exercice 24.25** – Construire  $q$  en considérant la moyenne des conjugués de  $p$  par les éléments de  $G$ . Considérer ensuite le noyau de  $q$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 24.26** –

1.  $f$  est surjective non injective,  $g$  est injective non surjective.
2. Récurrence.
3. Trouver une contradiction sur l'existence du polynôme minimal de  $g$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 24.27** – Interdit de sécher sur cet exercice! Considérer la famille formée par les images successives d'un élément  $x$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 24.28** –

1. Sans difficulté.
2. Par récurrence, en utilisant l'HR pour  $u(x)$ . Pour les images, on peut refaire une démo ou utiliser le théorème du rang.
3. Pour contrôler l'intersection, se souvenir que  $u^p$  et  $u^{2p}$  ont même noyau.

**Indications ou solutions pour l'exercice 24.29** –

1. Sans difficulté.

2. Montrer que  $u$  se restreint en une injection sur  $S_P$  et que son image se trouve « entre »  $\text{Ker}(u^{p-1})$  et  $\text{Ker}(u^p)$ .
3. Application simple du théorème.

**Indications ou solutions pour l'exercice 24.30** – Remarquez que cela relève du théorème des noyaux itérés. On peut l'obtenir de façon assez élémentaire en constatant que  $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$ , ce qui ne laisse plus beaucoup de choix d'après le théorème du rang.

**Indications ou solutions pour l'exercice 24.31** – Appliquer le théorème du rang à  $u : \text{Im}(f) \rightarrow E$ , la restriction de  $f$ , ainsi qu'à  $v$ , la restriction de  $f$  à  $\text{Im}(f^2)$ .  
Remarquez que ce résultat relève du théorème des noyaux itérés !

**Indications ou solutions pour l'exercice 24.32** – Voir cet exercice à la lueur du théorème des noyaux itérés. On pourra alors adapter les méthodes, en introduisant des supplémentaires idoines, ou en appliquant le théorème du rang à certaines restrictions (deux approches possibles de la démonstration du théorème des noyaux itérés). La question 1 incite plutôt à la seconde approche.

**Indications ou solutions pour l'exercice 24.33** – Version vectorielle : Construire  $S'$  tel que  $\text{Ker}(f) \oplus S'$  et  $\text{Ker}(g)$  aient même dimension, puis  $S$  un supplémentaire commun. Étant donné  $(b_1, \dots, b_k)$  base de  $S$ , compléter séparément  $(f(b_1), \dots, f(b_k))$ , et  $(g(b_1), \dots, g(b_k))$  en des bases de  $E$ , et définir  $h$  et  $k$  convenablement par rigidité.

Version matricielle, une fois qu'on a le cours du chapitre suivant : se ramener à des matrices équivalentes à  $A$  et  $B$  (matrices de  $f$  et  $g$  dans des bases données), qu'on sait facilement relier entre elles.

**Indications ou solutions pour l'exercice 24.34** –

- Vérifier que  $f \circ g = g \circ f$  implique que  $f$  laisse  $\text{Ker}(g)$  stable, donc  $f$  se restreint en un endomorphisme de  $\text{Ker}(g)$ .
- La nilpotence des  $u_i$  implique que tout endomorphisme induit par  $u_i$  sur un sous-espace stable admet un noyau non nul.
- En déduire que la dimension du noyau augmente strictement à chaque composition supplémentaire.

**Indications ou solutions pour l'exercice 24.35** – Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , justifier  $\text{Ker}(T) \subset \text{Ker}(D)$ , et en déduire une contradiction, en regardant la dimension de  $\text{Ker}(D)$ .

On peut aussi remarquer que  $T$  stabilise  $\mathbb{R}_n[X]$ , puis que c'est un endomorphisme nilpotent de  $\mathbb{R}_n[X]$ . Quel est son indice de nilpotence ?

Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , expliciter un  $T$  qui convient, en dissociant partie réelle et partie imaginaire.

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.1** –

1.  $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

2. Aidez-vous de l'échelonnement de la base d'arrivée, pour décomposer les éléments  $f(b_1)$ ,  $f(b_2)$  et  $f(b_3)$  dans cette base. On obtient la matrice  $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ .

3.  $\left( \binom{k}{i} (-a)^{k-i} \right)_{0 \leq i, k \leq n}$ , (formule du binôme) avec la convention  $\binom{k}{i} = 0$  si  $i > k$ .

4.  $\left( \binom{k}{i} a^{k-i} \right)_{0 \leq i, k \leq n}$  (formule du binôme pour  $X^k = (X - a + a)^k$ , ou formule de Taylor)

5.  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6.  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & \cdots & 2-2^k & \cdots & 2-2^n \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 2^k-1 & \cdots & 2^n-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2^0 & 2-2^1 & 2-2^2 & \cdots & 2-2^k & \cdots & 2-2^n \\ 2^0-1 & 2^1-1 & 2^2-1 & \cdots & 2^k-1 & \cdots & 2^n-1 \end{pmatrix}$

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.2** – Analyse synthèse, incitant à considérer  $b_3$  tel que  $f^2(b_3) \neq 0$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.3** – Analyse-synthèse.

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.4** – Trouver  $\mathcal{C}$  à partir de  $\mathcal{B}$  à l'aide d'une analyse synthèse. La matrice  $B_k$  s'obtient alors par le binôme (fait en cours). Si on a bien choisi  $\mathcal{C}$ ,  $b_n = c_n$  et l'image de  $b_n$  se lit alors facilement sur la matrice  $B^k$ .

Pour terminer, passer à la limite dans  $\int_0^A x^n e^{-x} dx$ , après primitivation. Observer qu'on obtient  $n!$ . L'intégrale calculée s'appelle  $\Gamma(n+1)$  (intégrale gamma).

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.5** – Pour trouver  $A^{-1}$ , raisonner sur  $f$  et non matriciellement !

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.6** – Vous pouvez vérifier vos calculs en exprimant directement la matrice de  $f$  relativement aux bases  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{C}'$ , sans passer par les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.7** – À part pour la dernière question, le plus simple est de procéder par formule de changement de base. Pour la dernière question : analyse-synthèse. Cela revient à chercher des vecteurs non nuls dans certains noyaux. Pour le calcul de  $A^n$ , écrire la formule de changement de base.

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.8** –

1. Il s'agit de résoudre une équation du type  $f(x) = \lambda x$ .
2. Le sens réciproque est facile, en déterminant explicitement  $f(\text{Ker}(g^2))$ . Pour le sens direct, considérer l'endomorphisme  $v$  de  $P$  induit par  $g$ . Vérifier  $v^2 = 0$  (comment optimiser l'exposant?). Lorsque  $v \neq 0$ , on pourra trouver un élément non nul dans  $P \cap \text{Im}(v) \cap \text{Ker}(v)$ , et comparer cet espace à  $\text{Im}(g^2)$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.9** – Pour la base : analyse-synthèse. Exprimer les conditions par l'appartenance à certains noyaux. Pour  $A^n$  : utiliser le fait que  $T^n$  est diagonale par blocs.

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.10** – Méthode du cours : calculer le reste de la division de  $X^n$  par le polynôme annulateur. Extrapoler pour les puissances négatives, et vérifier.

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.11** – Méthode 1 : binôme, séparer termes impairs et pairs ; puis binôme sur les scalaires.

Méthode 2 : Calculer le carré et aviser... Ça en devient beaucoup plus simple !

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.12** – Binôme, puis tester la formule en prenant formellement  $n = \frac{1}{2}$  dans l'expression obtenue.

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.13** –

1. Classique ! considérer la famille  $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ , où  $x \notin \text{Ker}(u^{p-1})$ .
2. Classique ! Penser aux sommes géométriques !
3. Considérer l'indice de nilpotence.

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.14** – On peut poser toutes les équations. Ou remarquer que quelques résultats classiques sur les matrices nilpotentes permettent de déterminer  $M^3$ , ce qui, par description du produit par les lignes et les colonnes, détermine une bonne partie de  $M$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.15** – Écrire la relation de similitude. Quelle relation a-t-on alors entre  $A^n$  et  $B^n$  ?

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.16** – Essayez de vous en sortir sans calcul en minorant le rang (trouvez des vecteurs colonnes linéairement indépendants), et en le majorant (trouvez des relations entre les colonnes). Les relations entre les colonnes fournissent des éléments du noyau, et les familles libres maximales extraites des colonnes fournissent une base de l'image.

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.17** – Si possible, aidez-vous d'une « estimation » du rang et de relations entre les colonnes.

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.18** – Si possible, aidez-vous de relations entre les colonnes pour majorer le rang. Pour les plus grosses matrices, un pivot peut s'avérer nécessaire.

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.19** – Éliminer d'abord les cas triviaux  $a = b = c = 0$  et  $a = b = c \neq 0$ , puis  $a = b \neq c$  et symétriques. Il reste le cas  $a, b$  et  $c$  deux à deux distincts. Échelonner, en commençant par des opérations sur les colonnes.

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.20** – Formules d'addition et observer les colonnes obtenues. Réponse : 2.

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.21** – Pour la matrice  $M_2$ , on pourra remarquer que

$$1 - 3ab + a^3 + b^3 = (a + b + 1)(1 - b - a + b^2 + a^2 - ab),$$

puis montrer que si  $(a, b) \neq (1, 1)$ ,  $a^2 + b^2 - ab - a - b + 1 > 0$ , en effectuant une mise sous forme canonique par rapport à la variable  $a$  (en considérant  $b$  comme une constante), puis par rapport à  $b$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.22** – Pour trouver la base, chercher une base de chaque facteur direct. Pour cela, chercher à construire un carré magique respectant les symétries imposées, et voir ce que cela impose.

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.23** – Considérer un supplémentaire  $S$  de  $\text{Ker}(BC)$  dans  $\text{Ker}(ABC)$ , et considérer  $\varphi : S \rightarrow \text{Ker}(AB)$  définie par  $\varphi(X) = CX$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.24** – Considérer la matrice  $(\mathbb{1}_{E_i}(j))$ , et justifier qu'elle est de rang  $k$ . On pourra introduire du calcul matriciel modulaire.

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.25** – Avec un pivot, où la formule avec comatrice pour  $P_1$  :

$$P_1^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad P_2^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P_4^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & -3 & 5 & 3 \\ -1 & 4 & 3 & -5 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

et  $P_3$  non inversible.

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.26** – Isoler le terme  $I_n$  et mettre  $A$  en facteur.

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.27** – Remarquer que  $B, C$  et  $D$  sont obtenues de  $A$  par des opérations simples sur les lignes et/ou colonnes. À quoi correspondent-elles après inversion ?

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.28** – Utiliser un polynôme annulateur de  $M$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.29** – Inversibilité : par pivot ou par polynôme annulateur. On pourrait aussi se servir de connaissances sur la dimension des sous-espaces propres, mais cela nécessite de connaître un minimum de choses sur la réduction.

Calcul de la puissance : binôme ou polynôme annulateur, ou le chercher sous la forme  $cI + dA$ . Extrapoler pour les négatifs.

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.30** – Penser somme géométrique, ou Bernoulli.

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.31** – Pivot, ou bien rechercher comme polynôme en une matrice de Jordan. Ou bien encore, faire une analogie avec le cas scalaire et remarquer que le polynôme en  $J$  est le début d'une série dont on sait calculer la somme, puis inverser.

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.32** – Sinon, il y a au moins une matrice inversible sur le bord et on simplifie, puis rebelotte.

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.33** – Évitez de procéder par pivot, qui ne permet pas d'exploiter les symétries de la matrice. Procédez par résolution du système  $AX = Y$  en se ramenant à une propriété des sommes des racines de l'unité. On peut aussi, une fois qu'on a  $A_3$ , deviner l'expression générale et vérifier.

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.34** – Faire le produit par colonnes de  $AA^{-1}$ , et justifier que toute colonne est utilisée au moins une fois. En déduire la propriété voulue sur les colonnes.

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.35** – Pour l'inversibilité des  $M(e_i) + J$ , sans effort, considérer  $C_i - C_n$ . Pour l'étude de  $M(a) + J$ , à l'aide d'un pivot, remarquer que cette matrice est inversible sauf si  $\theta$  est racine d'un certain polynôme. La connaissance des déterminants permet de simplifier cet argument.

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.36** – Multiplier par  $A + A^{-1}$  pour obtenir une relation de récurrence. Expliciter et simplifier, ou observer une périodicité.

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.37** –

1. Récurrence
2. En déduire  $AP(B) - P(B)A = P'(B)C$ . Quel polynôme  $P$  peut-on prendre ?

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.38** – Étendre le commutateur dans l'algèbre  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , et se servir de la dimension finie.

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.39** – Se ramener à montrer que pour tout  $A$  non nul,  $I + pA$  est d'ordre infini. Pour cela, montrer  $(I + pA)^k \neq I$ , respectivement pour  $k = p$  et pour  $k \wedge p = 1$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.40** – CN évidente :  $\text{Ker}(B) \subset \text{Ker}(C)$  et  $\text{Im}(C) \subset \text{Im}(A)$ . Montrer que c'est une CS, en revenant aux AL : contruire une application linéaire intermédiaire, en partant d'une décomposition de l'espace en somme directe de  $\text{Ker}(B) \oplus S_1 \oplus S_2$ , où  $\text{Ker}(B) \oplus S_1 = \text{Ker}(C)$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.41** – CNS de bijectivité : étudier le noyau et trouver une CS. Montrer que c'est aussi une CN en trouvant sinon une matrice non nulle dans le noyau. Montrer que si  $T$  n'est pas bijective,  $T$  est une projection, déterminer son noyau et décrire son image à l'aide de la trace.

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.42** – Vérifier la coïncidence sur les vecteurs d'une base simple de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.43** – Exprimer les coefficients diagonaux dans la base  $(E_{i,j} - E_{j,i})$ . Réponse :  $\text{tr}(f) = (n-1)\text{tr}(A)$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.44** –

- Si un des coefficients de la colonne 1 est non nul, annuler le coeff  $a_{1,1}$  par une opération sur les lignes. Vérifier que l'opération correspondante sur les colonnes ne perturbe pas. De même pour la première ligne.
- Sinon, si un coeff non diagonal est non nul, le ramener sur la première colonne ou la première ligne ; même type de vérification. On est ramené au cas précédent.
- Sinon, la matrice est diagonale. Si deux coefficients sont distincts, s'arranger pour obtenir un coefficient non diagonal non nul par une opération sur les lignes.
- Sinon, conclure.
- Puis récurrence.

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.45** – Si  $u$  est de trace nulle, et non homothétique, considérer une base débutant par  $x, u(x)$ .

On pourra montrer que  $\text{Ker}(\varphi)$  est l'ensemble des matrices diagonales. Donner une des deux inclusions intéressantes pour  $\text{Im}(\varphi)$ ...

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.46** –

1. On pourra considérer l'image d'une certaine base.
2. On pourra considérer les matrices  $E_{i,j}$  et utiliser la question 1.

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.47** – Utiliser le fait que tout hyperplan est noyau de  $X \mapsto \text{tr}(AX)$ , et justifier qu'il suffit de trouver  $Y$  inversible tel que  $J_r Y$  soit de trace nulle, où  $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.48** –

On désigne par  $C_i$  les colonnes de la matrice de gauche, et par  $L_j$  les lignes de la matrice de droite. Je me contente de donner la démarche sans expliciter le résultat

1.  $P_1 = (C_2 \mid C_1)$
2.  $P_2 = \begin{pmatrix} -L_1 \\ 2L_2 \end{pmatrix}$
3.  $P_3 = (C_1 \mid -C_2 \mid 2C_1 \mid C_1)$
4.  $P_4 = (-C_2 \mid C_1 \mid 2C_3)$
5.  $P_5 = \begin{pmatrix} L_3 \\ -L_1 \\ -L_2 \end{pmatrix}$
6.  $P_6 = (0 \mid C_1 \mid C_2 \mid C_3)$
7.  $P_7 = (C_4 \mid C_1 \mid C_2 \mid C_3)$
8.  $P_7' = (C_1 + C_4 \mid C_1 + 2C_2 \mid C_2 + C_4 \mid C_2 + C_3)$
9.  $P_8 = (2C_2 + C_4 \mid 2C_2 + C_4 \mid C_2 + C_3 \mid C_1 + 2C_4)$

N'oubliez pas de remarquer que les deux premières colonnes sont identiques. Inutile de faire deux fois le même calcul!

10.  $P_9 = (3L_2 + 4L_3 \mid 3L_2 + 4L_3n \mid L_1 + L_2 + L_4 \mid L_1 + L_2 + L_4)$

De même, il n'y a ici que deux colonnes à calculer!

$$11. P_{10} = \begin{pmatrix} L_2 + L_3 \\ L_1 + 2L_2 \\ 2L_1 + L_4 \\ L_1 + L_3 + L_4 \end{pmatrix}$$

12.  $P_{11} = (C_1 + 2C_2 + 3C_3 + C_4 \mid \text{idem} \mid 4C_1 + C_2 + 2C_3 + 2C_4 \mid \text{idem} * 2)$

On peut aussi faire des CL des lignes de la deuxième matrice, dans ce cas, il y a trois calculs à faire, mais un peu plus rapides. Aucune des deux méthodes n'est vraiment meilleure.

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.49** –

1.  $\text{rg}(M_1) = 2$
2.  $\text{rg}(M_2) = 1$
3.  $\text{rg}(M_3) = 2$
4.  $\text{rg}(M_4) = 1$
5.  $\text{rg}(M_5) = 2$

6.  $\text{rg}(M_6) = 1$
7.  $\text{rg}(M_7) = 2$
8.  $\text{rg}(M_8) = 1$
9.  $\text{rg}(M_9) = 1$
10.  $\text{rg}(M_{10}) = 1$
11.  $\text{rg}(M_{11}) = 2$
12.  $\text{rg}(M_{12}) = 2, C_1 + C_2 = C_3$
13.  $\text{rg}(M'_{12}) = 2, C_1 - C_2 = C_3$
14.  $\text{rg}(M_{13}) = 2, 2C_1 + C_2 = C_3$
15.  $\text{rg}(M_{14}) = 2, 3C_1 - 2C_2 = C_3$ , relation que l'on trouve en considérant la première ligne, qui impose les coefficients de  $C_1$  et  $C_2$ .
16.  $\text{rg}(M_{15}) = 3$  (de même, s'aider de la dernière ligne pour trouver la seule relation possible, qui n'en est pas une)
17.  $\text{rg}(M_{16}) = 3$  (même raisonnement, la seule relation doit faire intervenir  $C_1 + C_2$ , et cette opération ne donne pas un vecteur colinéaire à  $C_3$ )
18.  $\text{rg}(M_{17}) = 2, C_1 = C_4$  et  $C_1 + C_2 = C_3$ .
19.  $\text{rg}(M_{18}) = 3$
20.  $\text{rg}(M_{19}) = 3$
21.  $\text{rg}(M_{20}) = 4$
22.  $\text{rg}(M_{21}) = 3$
23.  $\text{rg}(M_{22}) = 4$
24.  $\text{rg}(M_{23}) = 5$
25.  $\text{rg}(M_{24}) = 4$
26.  $\text{rg}(M_{25}) = 4$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.50 –**

1.  $A_1^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
2.  $A_2^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
3.  $A_3$  non inversible
4.  $A_4^{-1} = -\frac{1}{38} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$
5.  $A_5^{-1} = -\frac{1}{42} \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$
6.  $A_6^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
7.  $A_7^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
8.  $A_8$  non inversible
9.  $A_9^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 7 & 14 & -7 \\ 7 & 10 & -9 \\ -7 & -16 & 13 \end{pmatrix}$

10.  $A_{10}$  non inversible

$$11. A_{11}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$12. (A'_{11})^{-1} = \frac{1}{105} \begin{pmatrix} 15 & -45 & 60 & -30 \\ 4 & 44 & -33 & 13 \\ -28 & 7 & 21 & 14 \\ 18 & -12 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

$$13. (A''_{11})^{-1} = \frac{1}{28} \begin{pmatrix} -38 & -79 & 33 & 45 \\ 30 & 83 & -29 & -37 \\ 20 & 60 & -24 & -20 \\ 16 & 20 & -8 & -16 \end{pmatrix}$$

$$14. A_{12}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 & 16 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$15. A_{13}^{-1} = \frac{1}{85} \begin{pmatrix} 19 & 22 & -20 & -8 & 16 \\ 33 & -11 & 10 & 4 & -8 \\ -45 & 15 & 25 & 10 & -20 \\ -27 & 9 & 15 & -11 & 22 \\ 81 & -27 & -45 & 33 & 19 \end{pmatrix}$$

$$16. A_{14}^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & -3 & -7 & -1 & -3 \\ 15 & -9 & -12 & -12 & -9 \\ -7 & 6 & 8 & 5 & 6 \\ -5 & 3 & 7 & 10 & 3 \\ -16 & 15 & 17 & 23 & 6 \end{pmatrix}$$

$$17. A_{15}^{-1} = \frac{1}{114} \begin{pmatrix} -40 & 20 & 35 & -3 & 13 \\ 74 & -94 & -22 & 54 & 70 \\ -22 & 68 & 5 & -33 & -47 \\ -98 & 106 & -14 & -90 & -28 \\ 70 & -92 & 10 & 48 & 20 \end{pmatrix}$$

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.51 –**

$$1. \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$4. \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$5. \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$6. \begin{pmatrix} 9 & 4 & 4 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

7.  $(F = \mathbb{R}^2) \begin{pmatrix} -7 & -5 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
8. Aidez-vous de l'échelonnement de la base d'arrivée, pour décomposer les éléments  $f(b_1)$ ,  $f(b_2)$  et  $f(b_3)$  dans cette base. On obtient la matrice  $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ .
9.  $\begin{pmatrix} -6 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .
10.  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$
11.  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 0 & & & 0 \\ 0 & n-1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
12.  $\left( \binom{k}{i} (-a)^{k-i} \right)_{0 \leq i, k \leq n}$ , (formule du binôme) avec la convention  $\binom{k}{i} = 0$  si  $i > k$ .
13.  $\left( \binom{k}{i} a^{k-i} \right)_{0 \leq i, k \leq n}$  (formule du binôme pour  $X^k = (X - a + a)^k$ , ou formule de Taylor)
14.  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$
15.  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
16.  $\begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix}$ .
17.  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
18.  $\begin{pmatrix} \cos a & a \cos a & \sin a & a \sin a \\ 0 & \cos a & 0 & \sin a \\ -\sin a & -a \sin a & \cos a & a \cos a \\ 0 & -\sin a & 0 & \cos a \end{pmatrix}$
19.  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .
20.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & \cdots & 2-2^k & \cdots & 2-2^n \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 2^k-1 & \cdots & 2^n-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2^0 & 2-2^1 & 2-2^2 & \cdots & 2-2^k & \cdots & 2-2^n \\ 2^0-1 & 2^1-1 & 2^2-1 & \cdots & 2^k-1 & \cdots & 2^n-1 \end{pmatrix}$
21. Avec la convention  $\binom{j}{i} = 0$  si  $i > j$  ou si  $i < 0$ ,

$$\left( j(j-1)(-j)^{j-i} \binom{j-2}{i-2} - j(-j)^{j-i-1} \binom{j-2}{i-1} + (2j-1)(-j)^{j-i-2} \binom{j-2}{i} \right)_{0 \leq i, j \leq n}.$$

**Indications ou solutions pour l'exercice 25.52** – Vérifiez en expliquant la matrice de façon directe.

**Indications ou solutions pour l'exercice 26.1** – Utiliser la propriété de détermination sur certains vecteurs de la base, vue en cours. Réponse :  $\binom{d}{n}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 26.2** –

1. Utiliser la multilinéarité sur les colonnes. Rép :  $2abcV(a, b, c)$ .
2. Annuler des  $c$ . Rép :  $(a - b)^2(a + b + 2c)(a + b - 2c)$ .
3. Se débarrasser d'un certain nombre de  $a$  et  $b$ . Rép :  $(1 + 2a + 2b)(1 + 2a - 2b)$ .
4. Commencer par faire partir  $a^2$  et  $b^2$  et simplifier encore la dernière colonne. Rép :  $2abc(a + b + c)^3$ .
5. En multipliant les colonnes de façon adéquate, on se ramène facilement à un Vandermonde. Rép :  $-V(a, b, c, d)$ .
6. Faire partir les  $ab$  et  $cd$ , et se ramener à une matrice triangulaire par blocs. Rép :  $(bd - ac)((d - b)^2 - (a - c)^2)$ .
7. Faire partir des 1. Rép :  $(c + a - b)(c - a + b)(c - a - b)(c + a + b)$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 26.3** – On peut trouver explicitement des relations entre les 3 premières colonnes dans le cas 1 et entre les 4 premières dans le cas 2. On peut aussi procéder par opération sur les colonnes.

Rép : 0 sauf pour les petites valeurs de  $n$  (à calculer dans ces cas)

**Indications ou solutions pour l'exercice 26.4** – Rép :  $(-1)^{n-1}n!$ ,  $(-1)^{n-1}n \prod_{i=1}^{n-1} a_i$ ,  $(-1)^{n-1} \frac{n^{n-1}(n+1)}{2}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 26.5** – On peut procéder par pivot, en supposant  $aneq0$  dans un premier temps. On peut former une relation de récurrence en faisant 2 développements suivant une ligne ou colonne bine choisie. On peut enfin réordonner les lignes et les colonnes pour se ramener à une matrice diagonale par blocs.

Rép :  $(a^2 - b^2)^n$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 26.6** – Rép :  $\prod_{i=1}^n (a_i d_i - b_i c_i)$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 26.7** –

1. Que vaut la différence de deux lignes successives ? Réponse : 1
2. Commencer par bien comprendre la répartition des coefficients, puis tenter un échelonnement.  
Réponse :  $a_1(a_2 - a_1) \cdots (a_n - a_{n-1})$ .
3. Développer. À quelle opération matricielle vous fait penser l'expression obtenue ?  
Réponse :  $(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \prod_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} V(a_1, \dots, a_n) V(b_1, \dots, b_n)$ .

4. Réponse :  $\binom{p+n-1}{n}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 26.8** – Développer suivant la dernière ligne, puis redévelopper encore. De même pour la deuxième. La deuxième peut ensuite s'expliciter, mais pas la première.

**Indications ou solutions pour l'exercice 26.9** – Se ramener au cas où  $A = I_{n,n,r}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 26.10** – Faire des opérations sur les colonnes pour n'avoir des  $X$  que sur une colonne, puis développer suivant cette colonne. Évaluer en 2 valeurs pour lesquelles le déterminant est simple à calculer. Attention au cas particulier  $b = c$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 26.11** – Considérer  $V(x_1, \dots, x_n, X)$ , et développer suivant la ligne de l'indéterminée  $X$ .

Réponse :  $\sum_{n-k} V(x_1, \dots, x_n)$ , mais qu'est  $\sum_{n-k}$  ?...

**Indications ou solutions pour l'exercice 26.12** – Développer, et reconnaître un produit de matrices.

Réponse :  $\prod_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} V(x_1, \dots, x_n) V(y_1, \dots, y_n)$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 26.13** –

1. En notant  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ , reconnaître un produit matriciel impliquant la matrice dans  $\mathcal{B}$  de la famille  $(P_1, \dots, P_n)$ .

Réponse :  $\det_{\mathcal{B}}(P_1, \dots, P_n) V(a_1, \dots, a_n)$ .

2. Réponse :  $((n-1)!)^n$  ou  $-((n-1)!)^n$  suivant la classe de congruence de  $n$  modulo 4.

**Indications ou solutions pour l'exercice 26.14** – On peut s'en sortir par opérations sur les lignes et les colonnes, en agissant directement sur des blocs de lignes ou colonnes. Pourquoi est-ce valide ?

**Indications ou solutions pour l'exercice 26.15** – Commencer par le cas  $n = 2$ , par opérations sur les lignes et les colonnes. Les traduire ensuite matriciellement et aviser.

**Indications ou solutions pour l'exercice 26.16** – Opérations sur les lignes, en agissant sur les deux termes  $I_n$  de gauche.

**Indications ou solutions pour l'exercice 26.17** – Réduire le problème à l'étude de l'existence d'une matrice inversible de la forme  $P_1 + \lambda P_2$ , pour certaines matrices  $P_1$  et  $P_2$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 26.18** –

- Retrancher et ajouter une homotétie. Étudier l'inversibilité à l'aide du déterminant.
- On peut aussi faire une construction explicite, en utilisant une décomposition de l'espace de départ en  $\text{Ker}(f) \oplus S$  et de l'espace d'arrivée en  $\text{Im}(f) \oplus T$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 26.19** – Déplacer  $A$  de  $\lambda I_n$  et voir l'effet sur l'inversibilité.

**Indications ou solutions pour l'exercice 26.20** –

1. Vérifier que c'est un sous-anneau. Exprimer l'inversibilité d'un élément à l'aide du déterminant, puis exprimer l'inverse pour vérifier qu'il s'écrit de la bonne forme.
2.  $(x, y) \mapsto M(x, y)$  est injectif. Il suffit de vérifier l'existence d'un  $a \in \mathbb{F}_5$  non carré.
3. De même. On pourra constater que  $x \mapsto x^2$  n'est pas injective dans  $\mathbb{F}_p$ , donc pas surjective.

**Indications ou solutions pour l'exercice 26.21** –

1. Leur déterminant est non nul (étudier leur degré)

2. Le montrer dans le cas inversible. Dans le cas non inversible, se ramener au cas inversible grâce à la question 1.
3. Construire le corps des fractions et utiliser la question 2.

**Indications ou solutions pour l'exercice 26.22** – Utiliser des opérations sur les colonnes pour rendre toutes les colonnes sauf une paires.

**Indications ou solutions pour l'exercice 26.23** – Se ramener à  $\det(I_r + Y) = \det(Y)$  pour tout  $Y$ , où  $r = \text{rg}(A - B)$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 26.24** – Exprimer l'hypothèse sous forme d'un produit matriciel impliquant une matrice  $M$  de diagonale nulle, les autres coefficients étant 1 ou  $-1$ . Montrer que la sous-matrice des  $2n$  premières lignes et  $2n$  dernières colonnes est inversible, en calculant son déterminant après réduction modulo 2. En déduire la dimension du noyau de  $M$  et conclure.

**Indications ou solutions pour l'exercice 26.25** – Factoriser  $A^n + B^n$  avec les racines de l'unité, et regrouper les facteurs conjugués. Utiliser le fait que  $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$ .

# Algèbre bilinéaire

**Indications ou solutions pour l'exercice 27.1** – Mettre la forme quadratique sous forme de combinaison linéaire de carrés (par mises sous forme canoniques successives).

**Indications ou solutions pour l'exercice 27.2** – Mettre la forme quadratique sous forme de combinaison linéaire de carrés, et discuter suivant le signe des coefficients.

**Indications ou solutions pour l'exercice 27.3** – Symétriser l'expression en équilibrant les ordres de dérivation.

**Indications ou solutions pour l'exercice 27.4** – À quelle condition une somme (infinie ou non) de termes positifs est-elle nulle ?

**Indications ou solutions pour l'exercice 27.5** – Exprimer la forme quadratique associée en introduisant des polynômes.

**Indications ou solutions pour l'exercice 27.6** – Conséquence directe d'un autre exercice.

**Indications ou solutions pour l'exercice 27.7** – Considérer un changement de base de la base canonique vers une base orthonormale pour  $C$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 27.8** –

1. Calculer  $B(B - A)^{-1}A(A^{-1} - B^{-1})$ . On pourra faire apparaître un  $B - A$ , pour simplifier le terme  $(B - A)^{-1}$ .
2. Utiliser un autre exercice pour justifier qu'il suffit de montrer que  $B(B - A)^{-1}A$  soit la matrice d'un produit scalaire. Essayer de rendre l'expression symétrique.

**Indications ou solutions pour l'exercice 27.9** – La définition du produit scalaire énonce une propriété équivalente à  $AX = 0$ , s'écrivant à l'aide du produit scalaire.

**Indications ou solutions pour l'exercice 27.10** – Exprimer l'unique candidat à l'aide de la formule de polarisation. Montrer l'additivité en exprimant judicieusement  $\|x + y\|^2 + \|x + z\|^2 + \|y + z\|^2$  à l'aide de la relation de l'énoncé.

Montrer ensuite par récurrence que  $\varphi(x, ky) = k\varphi(x, y)$  pour  $k \in \mathbb{N}$  puis  $k \in \mathbb{Z}$ , puis  $k \in \mathbb{Q}$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 27.11** – Séparer une relation entre  $e_1, \dots, e_n$  en  $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i = \sum_{j \in J} \lambda_j e_j$ , où les  $\lambda_i$  sont tous positifs. Considérer  $\langle x, x \rangle$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 27.12** – Par récurrence en utilisant une inégalité classique.

**Indications ou solutions pour l'exercice 27.13** – Introduire un certain produit scalaire.

**Indications ou solutions pour l'exercice 27.14** – Introduire des produits scalaires adaptés.

**Indications ou solutions pour l'exercice 27.15** – Introduire un produit scalaire adapté.

**Indications ou solutions pour l'exercice 27.16** – Choisir convenablement la matrice  $A$ . Cela s'apparente au 1-trick.

**Indications ou solutions pour l'exercice 27.17** – Il y a une petite inégalité de Cauchy-Schwarz qui se cache derrière, après avoir explicité avec les coefficients.

**Indications ou solutions pour l'exercice 27.18** – Évident matriciellement !

**Indications ou solutions pour l'exercice 27.19** – Utiliser la deuxième égalité avec  $x = e_j$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 27.20** – Pour le caractère défini, montrer par récurrence sur  $n$  que si pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$   $P^{(k)}(a_k) = 0$  et  $\deg(P) \leq n$  alors  $P = 0$ .

Pour trouver une b.o.n., orthonormaliser la base canonique. On pourra faire le calcul préliminaire des  $\langle X^i, X^j \rangle$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 27.21** – Montrer que  $F^\perp = \{0\}$  (par l'absurde). On a donc  $(F^\perp)^\perp \neq F$ , et  $F$  et  $F^\perp$  ne sont pas supplémentaires. À voir comme un contre-exemple du cours.

**Indications ou solutions pour l'exercice 27.22** – Un des sens se fait à l'aide d'une identité remarquable classique en cas d'orthogonalité. Pour l'autre, raisonner par la contraposée en développant  $\|x + \lambda y\|^2$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 27.23** – Pour obtenir la relation, il suffit de montrer que  $XP_{n+1} \in \text{Vect}(P_n, P_{n+1}, P_{n+2})$ , donc que les coordonnées sur les autres vecteurs de la b.o.n. sont nulles. Comment s'expriment ces coordonnées ?

Pour conclure, considérer  $\langle Q, P_n \rangle$ , en remarquant une propriété du signe de  $QP_n$ .

**Indications ou solutions pour l'exercice 27.36** – Décomposer  $E = F' \oplus F \cap G \oplus G'$ , où  $F'$  et  $G'$  sont des supplémentaires orthogonaux de  $F \cap G$  dans  $F$  et  $G$  respectivement.

**Indications ou solutions pour l'exercice 27.40** – Considérer  $\det((A+B)(A-B))$  et se souvenir que le déterminant est invariant par une certaine transformation qui intervient lorsqu'on a affaire avec des matrices orthogonales.