Alain Troesch
Cours de mathématiques, MP2I
Lycée Louis-Le-Grand (Paris)
Année scolaire 2021/2022

Analyse – Chapitre 11

Calcul intégral

Objectif :

Objectif :

- Développer et justifier des techniques calculatoires.

Objectif :

- Développer et justifier des techniques calculatoires.
- Savoir utiliser en pratique ces techniques calculatoires :

Objectif :

- Développer et justifier des techniques calculatoires.
- Savoir utiliser en pratique ces techniques calculatoires :
  - savoir reconnaître les situations adaptées à chaque technique,

Objectif :

- Développer et justifier des techniques calculatoires.
- Savoir utiliser en pratique ces techniques calculatoires :
  - savoir reconnaître les situations adaptées à chaque technique,
  - savoir mettre en oeuvre lesdites techniques

Objectif :

- Développer et justifier des techniques calculatoires.
- Savoir utiliser en pratique ces techniques calculatoires :
  - savoir reconnaître les situations adaptées à chaque technique,
  - savoir mettre en oeuvre lesdites techniques
  - savoir contrôler la cohérence de son résultat.

Objectif :

- Développer et justifier des techniques calculatoires.
- Savoir utiliser en pratique ces techniques calculatoires :
  - savoir reconnaître les situations adaptées à chaque technique,
  - savoir mettre en oeuvre lesdites techniques
  - savoir contrôler la cohérence de son résultat.
- Ainsi, gagner une certaine compétence dans le calcul intégral, alliant savoir-faire, efficacité et fiabilité.

Objectif :

- Développer et justifier des techniques calculatoires.
- Savoir utiliser en pratique ces techniques calculatoires :
    - savoir reconnaître les situations adaptées à chaque technique,
    - savoir mettre en oeuvre lesdites techniques
    - savoir contrôler la cohérence de son résultat.
- Ainsi, gagner une certaine compétence dans le calcul intégral, alliant savoir-faire, efficacité et fiabilité.

L'aspect théorique est laissé à plus tard. Point de départ :

Objectif :

- Développer et justifier des techniques calculatoires.
- Savoir utiliser en pratique ces techniques calculatoires :
  - savoir reconnaître les situations adaptées à chaque technique,
  - savoir mettre en oeuvre lesdites techniques
  - savoir contrôler la cohérence de son résultat.
- Ainsi, gagner une certaine compétence dans le calcul intégral, alliant savoir-faire, efficacité et fiabilité.

L'aspect théorique est laissé à plus tard. Point de départ :

- Théorème fondamental (expression de $\int$ par une primitive)

Objectif :

- Développer et justifier des techniques calculatoires.
- Savoir utiliser en pratique ces techniques calculatoires :
  - savoir reconnaître les situations adaptées à chaque technique,
  - savoir mettre en oeuvre lesdites techniques
  - savoir contrôler la cohérence de son résultat.
- Ainsi, gagner une certaine compétence dans le calcul intégral, alliant savoir-faire, efficacité et fiabilité.

L'aspect théorique est laissé à plus tard. Point de départ :

- Théorème fondamental (expression de $\int$ par une primitive)
- Les règles usuelles supposées connues (Chasles, linéarité...)

I. Calcul intégral et primitivation

I-1. Résultats issus de la théorie

Théorème 1.1 (Linéarité de l'intégrale, admis provisoirement)

Soit f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $f + \lambda g$ est aussi intégrable et

$$\int_a^b f(x) + \lambda g(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \lambda \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

Théorème 1.2 (Chasles, admis provisoirement)

Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $c \in [a, b]$. Alors

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

I. Calcul intégral et primitivation

I-1. Résultats issus de la théorie

Théorème 1.1 (Linéarité de l'intégrale, admis provisoirement)

Soit f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $f + \lambda g$ est aussi intégrable et

$$\int_a^b f(x) + \lambda g(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \lambda \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

Théorème 1.2 (Chasles, admis provisoirement)

Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $c \in [a, b]$. Alors

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Théorème 1.3 (Croissance, positivité de l'intégrale, admis)

1. Soit f et g continues telles que $f \leqslant g$ sur $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Théorème 1.3 (Croissance, positivité de l'intégrale, admis)

1. Soit f et g continues telles que $f \leqslant g$ sur $[a, b]$. Alors :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$
2. Si $f \geqslant 0$ sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

Théorème 1.3 (Croissance, positivité de l'intégrale, admis)

1. Soit f et g continues telles que $f \leqslant g$ sur $[a, b]$. Alors :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$
2. Si $f \geqslant 0$ sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.
3. Enfin, si f est continue positive et non identiquement nulle sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0$.

Théorème 1.3 (Croissance, positivité de l'intégrale, admis)

1. Soit f et g continues telles que $f \leqslant g$ sur $[a, b]$. Alors :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$
2. Si $f \geqslant 0$ sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.
3. Enfin, si f est continue positive et non identiquement nulle sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0$.

Théorème 1.4 (Inégalité triangulaire intégrale, admis)

Soit $a < b$, et f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors
$\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

Théorème 1.5 (Intégrabilité des fonctions continues, admis)

Les fonctions continues sur un intervalle fermé borné $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, sont intégrables.

Théorème 1.5 (Intégrabilité des fonctions continues, admis)

Les fonctions continues sur un intervalle fermé borné $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, sont intégrables.

Définition 1.6 (primitive)

Une primitive F de f sur E ouvert : $F' = f$.

Théorème 1.5 (Intégrabilité des fonctions continues, admis)

Les fonctions continues sur un intervalle fermé borné $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, sont intégrables.

Définition 1.6 (primitive)

Une primitive F de f sur E ouvert : $F' = f$.

Proposition 1.7 (Unicité d'une primitive à constante près)

Deux primitives de f sur un intervalle I ne diffèrent que d'une constante additive.

Théorème 1.5 (Intégrabilité des fonctions continues, admis)

Les fonctions continues sur un intervalle fermé borné $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, sont intégrables.

Définition 1.6 (primitive)

Une primitive F de f sur E ouvert : $F' = f$.

Proposition 1.7 (Unicité d'une primitive à constante près)

Deux primitives de f sur un intervalle I ne diffèrent que d'une constante additive.
Si f admet au moins une primitive, alors, étant donné $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$.

Théorème 1.5 (Intégrabilité des fonctions continues, admis)

Les fonctions continues sur un intervalle fermé borné $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, sont intégrables.

Définition 1.6 (primitive)

Une primitive F de f sur E ouvert : $F' = f$.

Proposition 1.7 (Unicité d'une primitive à constante près)

Deux primitives de f sur un intervalle I ne diffèrent que d'une constante additive.
Si f admet au moins une primitive, alors, étant donné $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$.

Avertissement 1.8

Faux si I n'est pas un intervalle (diffèrent d'une constante sur chaque intervalle du domaine de définition).

Théorème 1.9 (Expression intégrale d'une primitive, Newton)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $x_0 \in I$. Alors la fonction :

$$F : x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x$$

est une primitive de f. Il s'agit de LA primitive s'annulant en x_0.

Théorème 1.9 (Expression intégrale d'une primitive, Newton)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $x_0 \in I$. Alors la fonction :

$$F : x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x$$

est une primitive de f. Il s'agit de LA primitive s'annulant en x_0.

Remarque 1.10

En particulier, toute fonction $\mathcal{C}^0$ admet une primitive.

Théorème 1.9 (Expression intégrale d'une primitive, Newton)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $x_0 \in I$. Alors la fonction :

$$F : x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x$$

est une primitive de f. Il s'agit de LA primitive s'annulant en x_0.

Remarque 1.10

En particulier, toute fonction $\mathcal{C}^0$ admet une primitive.

Remarque 1.11

- Il existe des fonctions non continues admettant des primitives. Par exemple la dérivée de $f : x \mapsto x^2 \sin(\frac{1}{x})$.

Théorème 1.9 (Expression intégrale d'une primitive, Newton)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $x_0 \in I$. Alors la fonction :

$$F : x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x$$

est une primitive de f. Il s'agit de LA primitive s'annulant en x_0.

Remarque 1.10

En particulier, toute fonction $\mathcal{C}^0$ admet une primitive.

Remarque 1.11

- Il existe des fonctions non continues admettant des primitives. Par exemple la dérivée de $f : x \mapsto x^2 \sin(\frac{1}{x})$.
- $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$, ou plus simplement de $x \mapsto \lfloor x \rfloor$, n'ont pas de primitive (Darboux)

Théorème 1.12 (Théorème fondamental du calcul des intégrales)

Soit F une primitive de f continue. Alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Théorème 1.12 (Théorème fondamental du calcul des intégrales)

Soit F une primitive de f continue. Alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Avertissement 1.13

Le théorème fondamental du calcul des intégrales est énoncé pour des fonctions continues uniquement :

Théorème 1.12 (Théorème fondamental du calcul des intégrales)

Soit F une primitive de f continue. Alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Avertissement 1.13

Le théorème fondamental du calcul des intégrales est énoncé pour des fonctions continues uniquement :

- Si f n'est pas continue, $x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x$ peut ne pas être une primitive de f.

Théorème 1.12 (Théorème fondamental du calcul des intégrales)

Soit F une primitive de f continue. Alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Avertissement 1.13

Le théorème fondamental du calcul des intégrales est énoncé pour des fonctions continues uniquement :

- Si f n'est pas continue, $x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x$ peut ne pas être une primitive de f.
- Il existe des fonctions non intégrables f admettant des primitives ; le théorème fondamental tombe en défaut !

Exemples 1.14

- Exemple de fonction intégrable mais non primitivables : fonctions continues par morceaux avec discontinuité (Darboux)

Exemples 1.14

- Exemple de fonction intégrable mais non primitivables : fonctions continues par morceaux avec discontinuité (Darboux)
- La fonction

$$F : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est dérivable sur $[-1, 1]$, mais sa dérivée n'est pas bornée. On justifiera que cela implique la non intégrabilité de la dérivée.

I-2. Techniques élémentaires de primitivation

I-2. Techniques élémentaires de primitivation

Connaître le tableau des primitives !

I-2. Techniques élémentaires de primitivation

Connaître le tableau des primitives !

Notation 1.15

Étant donnée une fonction continue f, on désigne par $\displaystyle\int^x f(t)\,\mathrm{d}t$, ou parfois plus simplement par $\displaystyle\int f$ une primitive de f.

I-2. Techniques élémentaires de primitivation

Connaître le tableau des primitives !

Notation 1.15

Étant donnée une fonction continue f, on désigne par $\displaystyle\int^x f(t)\,\mathrm{d}t$, ou parfois plus simplement par $\displaystyle\int f$ une primitive de f.

Avertissement 1.16

Cette notation n'est définie qu'à une constante près. Il s'agit donc d'un abus de notation, à manipuler avec précautions, comme toute notation abusive.

Proposition 1.17 (primitivation de fonctions composées)

Soit f de primitive F sur I intervalle. Soit u dérivable de J dans I. Alors :

$$\int (u' \times f \circ u) = \left(\int f \right) \circ u.$$

Proposition 1.17 (primitivation de fonctions composées)

Soit f de primitive F sur I intervalle. Soit u dérivable de J dans I. Alors :

$$\int (u' \times f \circ u) = \left(\int f\right) \circ u.$$

Avertissement 1.18

Attention, la fonction $f \circ u$ ne se primitive pas en $\frac{F \circ u}{u'}$! !

Proposition 1.17 (primitivation de fonctions composées)

Soit f de primitive F sur I intervalle. Soit u dérivable de J dans I. Alors :

$$\int (u' \times f \circ u) = \left(\int f\right) \circ u.$$

Avertissement 1.18

Attention, la fonction $f \circ u$ ne se primitive pas en $\frac{F \circ u}{u'}$! !

Exemples 1.19

1. Primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x(1 + \ln x^2)}$.

Proposition 1.17 (primitivation de fonctions composées)

Soit f de primitive F sur I intervalle. Soit u dérivable de J dans I. Alors :

$$\int (u' \times f \circ u) = \left(\int f \right) \circ u.$$

Avertissement 1.18

Attention, la fonction $f \circ u$ ne se primitive pas en $\frac{F \circ u}{u'}$! !

Exemples 1.19

1. Primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x(1+\ln x^2)}$.
2. Primitives de $x \mapsto \dfrac{x^3}{1+x^4}$ et $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^4}$

Corollaire 1.20 (Primitivation de $x \mapsto f(ax+b)$)

Soit F une primitive de f sur un intervalle I, et a et b deux réels, $a \neq 0$. Soit J un intervalle tel que $aJ + b \subset I$. Alors

$$\int f(ax+b) = \frac{1}{a} F(ax+b).$$

Corollaire 1.20 (Primitivation de $x \mapsto f(ax+b)$)

Soit F une primitive de f sur un intervalle I, et a et b deux réels, $a \neq 0$. Soit J un intervalle tel que $aJ + b \subset I$. Alors

$$\int f(ax+b) = \frac{1}{a} F(ax+b).$$

Méthode 1.21 (primitivation de $f : x \mapsto \mathrm{e}^{ax} \cos(bx)$)

Cette méthode s'adapte évidemment aussi pour le sinus.

Corollaire 1.20 (Primitivation de $x \mapsto f(ax+b)$)

Soit F une primitive de f sur un intervalle I, et a et b deux réels, $a \neq 0$. Soit J un intervalle tel que $aJ + b \subset I$. Alors

$$\int f(ax+b) = \frac{1}{a} F(ax+b).$$

Méthode 1.21 (primitivation de $f : x \mapsto \mathrm{e}^{ax} \cos(bx)$)

Cette méthode s'adapte évidemment aussi pour le sinus.

- Voir $f(x)$ comme partie réelle de $\mathrm{e}^{\lambda x}$, avec $\lambda = a + \mathrm{i}\, b$

Corollaire 1.20 (Primitivation de $x \mapsto f(ax+b)$)

Soit F une primitive de f sur un intervalle I, et a et b deux réels, $a \neq 0$. Soit J un intervalle tel que $aJ + b \subset I$. Alors

$$\int f(ax+b) = \frac{1}{a} F(ax+b).$$

Méthode 1.21 (primitivation de $f : x \mapsto \mathrm{e}^{ax} \cos(bx)$)

Cette méthode s'adapte évidemment aussi pour le sinus.

- Voir $f(x)$ comme partie réelle de $\mathrm{e}^{\lambda x}$, avec $\lambda = a + \mathrm{i}\, b$
- Utiliser le corollaire (valide aussi pour des fonctions à valeurs complexes) pour obtenir une primitive

Corollaire 1.20 (Primitivation de $x \mapsto f(ax+b)$)

Soit F une primitive de f sur un intervalle I, et a et b deux réels, $a \neq 0$. Soit J un intervalle tel que $aJ + b \subset I$. Alors

$$\int f(ax+b) = \frac{1}{a} F(ax+b).$$

Méthode 1.21 (primitivation de $f : x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$)

Cette méthode s'adapte évidemment aussi pour le sinus.

- Voir $f(x)$ comme partie réelle de $e^{\lambda x}$, avec $\lambda = a + \mathrm{i}\, b$
- Utiliser le corollaire (valide aussi pour des fonctions à valeurs complexes) pour obtenir une primitive
- Utiliser la quantité conjuguée pour se débarrasser des complexes au dénominateur

Corollaire 1.20 (Primitivation de $x \mapsto f(ax+b)$)

Soit F une primitive de f sur un intervalle I, et a et b deux réels, $a \neq 0$. Soit J un intervalle tel que $aJ + b \subset I$. Alors

$$\int f(ax+b) = \frac{1}{a} F(ax+b).$$

Méthode 1.21 (primitivation de $f : x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$)

Cette méthode s'adapte évidemment aussi pour le sinus.

- Voir $f(x)$ comme partie réelle de $\mathrm{e}^{\lambda x}$, avec $\lambda = a + \mathrm{i}\, b$
- Utiliser le corollaire (valide aussi pour des fonctions à valeurs complexes) pour obtenir une primitive
- Utiliser la quantité conjuguée pour se débarrasser des complexes au dénominateur
- La partie réelle de la fonction obtenue est une primitive de f.

Méthode 1.22 (primitivation d'inverses de trinômes)

Soit $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$ un polynôme de degré 2 ($a \neq 0$).

Méthode 1.22 (primitivation d'inverses de trinômes)

Soit $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$ un polynôme de degré 2 ($a \neq 0$).

1. Cas d'une racine réelle double.

Méthode 1.22 (primitivation d'inverses de trinômes)

Soit $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$ un polynôme de degré 2 ($a \neq 0$).

1. Cas d'une racine réelle double.
2. Si P admet deux racines réelles r_1 et r_2, DES

Méthode 1.22 (primitivation d'inverses de trinômes)

Soit $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$ un polynôme de degré 2 ($a \neq 0$).

1. Cas d'une racine réelle double.
2. Si P admet deux racines réelles r_1 et r_2, DES
3. Si P n'a pas de racine réelle, effectuer une mise sous forme canonique et primitiver avec de l'Arctan.

Méthode 1.22 (primitivation d'inverses de trinômes)

Soit $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$ un polynôme de degré 2 ($a \neq 0$).

1. Cas d'une racine réelle double.
2. Si P admet deux racines réelles r_1 et r_2, DES
3. Si P n'a pas de racine réelle, effectuer une mise sous forme canonique et primitiver avec de l'Arctan.

Exemples 1.23

1. Primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 2x + 3}$

Méthode 1.22 (primitivation d'inverses de trinômes)

Soit $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$ un polynôme de degré 2 ($a \neq 0$).

1. Cas d'une racine réelle double.
2. Si P admet deux racines réelles r_1 et r_2, DES
3. Si P n'a pas de racine réelle, effectuer une mise sous forme canonique et primitiver avec de l'Arctan.

Exemples 1.23

1. Primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 2x + 3}$
2. Primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1 - 2x - x^2}}$.

II. Techniques de calcul intégral

II-1. Intégration par parties

Théorème 2.1 (Intégration par parties, IPP)

Soit f, g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Alors :

II. Techniques de calcul intégral

II-1. Intégration par parties

Théorème 2.1 (Intégration par parties, IPP)

Soit f, g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Alors :

- $\displaystyle\int f'g = fg - \int fg'.$

II. Techniques de calcul intégral

II-1. Intégration par parties

Théorème 2.1 (Intégration par parties, IPP)

Soit f, g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Alors :

- $\displaystyle\int f'g = fg - \int fg'$.
- $\displaystyle\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$

II. Techniques de calcul intégral

II-1. Intégration par parties

Théorème 2.1 (Intégration par parties, IPP)

Soit f, g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Alors :

- $\displaystyle\int f'g = fg - \int fg'$.
- $\displaystyle\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$.

Exemple 2.2

1. Calcul d'une primitive de $x \mapsto \ln(x)$.

II. Techniques de calcul intégral

II-1. Intégration par parties

Théorème 2.1 (Intégration par parties, IPP)

Soit f, g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Alors :

- $\displaystyle \int f'g = fg - \int fg'$.
- $\displaystyle \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$.

Exemple 2.2

1. Calcul d'une primitive de $x \mapsto \ln(x)$.
2. Calcul de $\displaystyle \int_0^1 \mathrm{Arctan}(x)$

Théorème 2.3 (Intégration par parties itérée, HP)

Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b f^{(n)}(x)g(x)\ \mathrm{d}x = \left[\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i f^{(n-1-i)}(x)g^{(i)}(x)\right]_a^b + (-1)^n \int_a^b f(x)g^{(n)}(x)\ \mathrm{d}x.$$

Théorème 2.3 (Intégration par parties itérée, HP)

Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b f^{(n)}(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \left[\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i f^{(n-1-i)}(x)g^{(i)}(x)\right]_a^b + (-1)^n \int_a^b f(x)g^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque 2.4 (Comment retenir cette formule)

- Dans la variation (partie intégrée) : l'ordre total de dérivation est $n-1$.

Théorème 2.3 (Intégration par parties itérée, HP)

Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b f^{(n)}(x)g(x)\ \mathrm{d}x = \left[\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i f^{(n-1-i)}(x)g^{(i)}(x)\right]_a^b + (-1)^n \int_a^b f(x)g^{(n)}(x)\ \mathrm{d}x.$$

Remarque 2.4 (Comment retenir cette formule)

- Dans la variation (partie intégrée) : l'ordre total de dérivation est $n-1$.
- Trouver l'alternance du signe par la première IPP.

Théorème 2.3 (Intégration par parties itérée, HP)

Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b f^{(n)}(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \left[\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i f^{(n-1-i)}(x)g^{(i)}(x)\right]_a^b + (-1)^n \int_a^b f(x)g^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque 2.4 (Comment retenir cette formule)

- Dans la variation (partie intégrée) : l'ordre total de dérivation est $n-1$.
- Trouver l'alternance du signe par la première IPP.
- Il y a autant de signes devant l'intégrale que d'IPP effectuées.

Exemple 2.5

Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ sous forme d'une somme. Déterminer la limite de $F_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

.

Exemple 2.5

Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \int_0^x t^n \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$ sous forme d'une somme. Déterminer la limite de $F_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
Soit la fonction Γ d'Euler :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t.$$

.

Exemple 2.5

Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \int_0^x t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ sous forme d'une somme. Déterminer la limite de $F_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
Soit la fonction Γ d'Euler :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Théorème 2.6 (Formule de Taylor avec reste-intégral)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$. Alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 2.6 (Formule de Taylor avec reste-intégral)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$. Alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Corollaire 2.7 (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soit $a<b$, et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$, telle que $m \leqslant f^{(n+1)} \leqslant M$ sur $[a,b]$. Alors

$$\frac{m(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant f(b) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} \leqslant \frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Remarque 2.8

1. Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$ et $f^{(n+1)} \leqslant M$ sur $[a, b]$, alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} \right| \leqslant \frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Remarque 2.8

1. Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$ et $f^{(n+1)} \leqslant M$ sur $[a, b]$, alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} \right| \leqslant \frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

2. Si $f^{n+1} \geqslant 0$, alors

$$f(b) \geqslant \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!}$$

Remarque 2.8

1. Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$ et $f^{(n+1)} \leqslant M$ sur $[a, b]$, alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} \right| \leqslant \frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

2. Si $f^{n+1} \geqslant 0$, alors

$$f(b) \geqslant \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!}$$

3. Cas $n = 0$ et $n = 1$?

Remarque 2.8

1. Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$ et $f^{(n+1)} \leqslant M$ sur $[a, b]$, alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} \right| \leqslant \frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

2. Si $f^{n+1} \geqslant 0$, alors

$$f(b) \geqslant \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!}$$

3. Cas $n = 0$ et $n = 1$?

Hypothèses suffisantes : f de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$, et $\mathcal{D}^{n+1}$ sur $]a, b[$.

II-2. Changements de variables

Théorème 2.9 (Changement de variables)

Soit f une fonction continue sur $[\alpha, \beta]$, et u une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $[a, b]$ vers $[\alpha, \beta]$. Alors :

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(u(t))u'(t)\,\mathrm{d}t.$$

On dit qu'on a fait le changement de variable $x = u(t)$.

II-2. Changements de variables

Théorème 2.9 (Changement de variables)

Soit f une fonction continue sur $[\alpha, \beta]$, et u une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $[a, b]$ vers $[\alpha, \beta]$. Alors :

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^b f(u(t))u'(t)\, \mathrm{d}t.$$

On dit qu'on a fait le changement de variable $x = u(t)$.

Remarque 2.10 (Comment ne pas s'embrouiller dans les bornes)

On applique le changement de variables aussi aux bornes. D'un côté, les bornes sont des valeurs de t, de l'autre des valeurs de x.

Remarques 2.11

1. Si u est bijective, $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{u^{-1}(\alpha)}^{u^{-1}(\beta)} f(u(t))u'(t)\,\mathrm{d}t.$

Remarques 2.11

1. Si u est bijective, $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{u^{-1}(\alpha)}^{u^{-1}(\beta)} f(u(t))u'(t)\,\mathrm{d}t.$
2. Cette formule peut s'utiliser dans les deux sens.

Remarques 2.11

1. Si u est bijective, $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{u^{-1}(\alpha)}^{u^{-1}(\beta)} f(u(t))u'(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Cette formule peut s'utiliser dans les deux sens.

Exemples 2.12

1. $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{4t^3}{1-t^8}\,\mathrm{d}t$

Remarques 2.11

1. Si u est bijective, $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, \mathrm{d}x = \int_{u^{-1}(\alpha)}^{u^{-1}(\beta)} f(u(t))u'(t)\, \mathrm{d}t$.
2. Cette formule peut s'utiliser dans les deux sens.

Exemples 2.12

1. $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{4t^3}{1-t^8}\, \mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\, \mathrm{d}x$.

Théorème : Dérivation d'intégrales dépendant de leurs bornes

Soit u et v de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans J, et soit f une fonction continue sur J et $\forall x \in I,\quad G(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Alors G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et :

$\forall x \in I,\quad G'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$.

Théorème : Dérivation d'intégrales dépendant de leurs bornes

Soit u et v de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans J, et soit f une fonction continue sur J et $\forall x \in I, \quad G(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t.$

Alors G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et :
$\forall x \in I, \quad G'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)).$

Conclusion : connaître ses primitives, et s'entraîner.

II-3. Conséquences pour les fonctions admettant des symétries

Proposition 2.13 (Intégrale d'une fonction impaire)

Soit $I = [-a, a]$ et f une fonction continue et impaire sur I. Alors

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

II-3. Conséquences pour les fonctions admettant des symétries

Proposition 2.13 (Intégrale d'une fonction impaire)

Soit $I = [-a, a]$ et f une fonction continue et impaire sur I. Alors

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Proposition 2.14 (Intégrale d'une fonction paire)

Soit $I = [-a, a]$ et f une fonction continue et paire sur I. Alors

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

II-3. Conséquences pour les fonctions admettant des symétries

Proposition 2.13 (Intégrale d'une fonction impaire)

Soit $I = [-a, a]$ et f une fonction continue et impaire sur I. Alors
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Proposition 2.14 (Intégrale d'une fonction paire)

Soit $I = [-a, a]$ et f une fonction continue et paire sur I. Alors
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Proposition 2.15 (Intégrale d'une fonction périodique)

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période $T > 0$.

Alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{a}^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{T} f(x)\,\mathrm{d}t.$

Rapide introduction aux intégrales impropres

Définition 3.1 (Convergence d'intégrales impropres)

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$, b pouvant être infini. On dit que l'intégrale (impropre) $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si la fonction

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

admet une limite finie lorsque x tend vers b^-.

Rapide introduction aux intégrales impropres

Définition 3.1 (Convergence d'intégrales impropres)

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$, b pouvant être infini. On dit que l'intégrale (impropre) $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si la fonction

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

admet une limite finie lorsque x tend vers b^-. On note :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$