Alain Troesch
Cours de mathématiques, MP2I
Lycée Louis-Le-Grand (Paris)
Année scolaire 2021/2022

Analyse – Chapitre 12

Équations différentielles

I. Équations différentielles linéaires

Définition 1.1 (Équation différentielle linéaire)

EDL d'ordre r d'une fonction inconnue y :

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_r(x)y^{(r)} = b(x), \text{ où}$$

- a_r n'est pas la fonction nulle,
- les a_i sont des fonctions à valeurs réelles ou complexes,
- y une fonction inconnue définie sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ (souvent à déterminer), à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Équations différentielles linéaires

Définition 1.1 (Équation différentielle linéaire)

EDL d'ordre r d'une fonction inconnue y :

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_r(x)y^{(r)} = b(x), \text{ où}$$

- a_r n'est pas la fonction nulle,
- les a_i sont des fonctions à valeurs réelles ou complexes,
- y une fonction inconnue définie sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ (souvent à déterminer), à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Extensions

- EDL d'ordre r à p fonctions inconnues $y_1, \ldots, y_p$

I. Équations différentielles linéaires

Définition 1.1 (Équation différentielle linéaire)

EDL d'ordre r d'une fonction inconnue y :

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_r(x)y^{(r)} = b(x), \text{ où}$$

- a_r n'est pas la fonction nulle,
- les a_i sont des fonctions à valeurs réelles ou complexes,
- y une fonction inconnue définie sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ (souvent à déterminer), à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Extensions

- EDL d'ordre r à p fonctions inconnues $y_1, \ldots, y_p$
- systèmes d'EDL.

Théorème 1.2 (Structure de l'ensemble des solutions)

Soit $(E) : a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_r(x)y^{(r)} = b(x)$

Théorème 1.2 (Structure de l'ensemble des solutions)

Soit $(E) : a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_r(x)y^{(r)} = b(x)$
$\mathcal{S}$ est soit vide

Théorème 1.2 (Structure de l'ensemble des solutions)

Soit $(E) : a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_r(x)y^{(r)} = b(x)$
$\mathcal{S}$ est soit vide soit de la forme : $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + y_0$, où :

Théorème 1.2 (Structure de l'ensemble des solutions)

Soit $(E) : a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_r(x)y^{(r)} = b(x)$
$\mathcal{S}$ est soit vide soit de la forme : $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + y_0$, où :

- $\mathcal{S}_0$ est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée

Théorème 1.2 (Structure de l'ensemble des solutions)

Soit $(E) : a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_r(x)y^{(r)} = b(x)$
$\mathcal{S}$ est soit vide soit de la forme : $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + y_0$, où :

- $\mathcal{S}_0$ est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée
- y_0 est une solution particulière.

Théorème 1.2 (Structure de l'ensemble des solutions)

Soit $(E) : a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_r(x)y^{(r)} = b(x)$
$\mathcal{S}$ est soit vide soit de la forme : $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + y_0$, où :

- $\mathcal{S}_0$ est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée
- y_0 est une solution particulière.

De plus, $\mathcal{S}_0$ est alors non vide et stable par combinaison linéaire.

Théorème 1.2 (Structure de l'ensemble des solutions)

Soit $(E) : a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_r(x)y^{(r)} = b(x)$
$\mathcal{S}$ est soit vide soit de la forme : $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + y_0$, où :

- $\mathcal{S}_0$ est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée
- y_0 est une solution particulière.

De plus, $\mathcal{S}_0$ est alors non vide et stable par combinaison linéaire.

Structures

- $\mathcal{S}_0$: (sous)-espace vectoriel

Théorème 1.2 (Structure de l'ensemble des solutions)

Soit $(E) : a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_r(x)y^{(r)} = b(x)$
$\mathcal{S}$ est soit vide soit de la forme : $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + y_0$, où :

- $\mathcal{S}_0$ est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée
- y_0 est une solution particulière.

De plus, $\mathcal{S}_0$ est alors non vide et stable par combinaison linéaire.

Structures

- $\mathcal{S}_0$: (sous)-espace vectoriel
- $\mathcal{S}$: espace affine (si non vide) = translaté d'un sous-espace vectoriel.

Proposition 1.3 (Principe de superposition)

Si $b = b_1 + b_2$, pour trouver une solution particulière y_0 de l'équation (E), il suffit de trouver :

Proposition 1.3 (Principe de superposition)

Si $b = b_1 + b_2$, pour trouver une solution particulière y_0 de l'équation (E), il suffit de trouver :

- une solution particulière y_1 de $(E_1) : a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_r(x)y^{(r)} = b_1(x)$

Proposition 1.3 (Principe de superposition)

Si $b = b_1 + b_2$, pour trouver une solution particulière y_0 de l'équation (E), il suffit de trouver :

- une solution particulière y_1 de $(E_1) : a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_r(x)y^{(r)} = b_1(x)$
- une solution particulière y_2 de $(E_2) : a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_r(x)y^{(r)} = b_2(x)$.

Proposition 1.3 (Principe de superposition)

Si $b = b_1 + b_2$, pour trouver une solution particulière y_0 de l'équation (E), il suffit de trouver :

- une solution particulière y_1 de $(E_1) : a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_r(x)y^{(r)} = b_1(x)$
- une solution particulière y_2 de $(E_2) : a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_r(x)y^{(r)} = b_2(x)$.

Une solution particulière de (E) est alors $y_0 = y_1 + y_2$.

II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

II-1. Situation

Mise sous forme normale

- Forme étudiée : $a_1(x)y' + a_0(x)y = \beta(x)$, sur un intervalle I, avec a_1, a_2 continues.

II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

II-1. Situation

Mise sous forme normale

- Forme étudiée : $a_1(x)y' + a_0(x)y = \beta(x)$, sur un intervalle I, avec a_1, a_2 continues.
- Si a_1 ne s'annule pas sur I, on peut se ramener à $y' = a(x)y + b(x)$ (forme normale)

II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

II-1. Situation

Mise sous forme normale

- Forme étudiée : $a_1(x)y' + a_0(x)y = \beta(x)$, sur un intervalle I, avec a_1, a_2 continues.
- Si a_1 ne s'annule pas sur I, on peut se ramener à $y' = a(x)y + b(x)$ (forme normale)
- Sinon : étudier sur plusieurs intervalles séparément, puis essayer de raccorder.

II-2. Solutions de l'équation homogène

Théorème 2.1 (Résolution de $y' = a(x)y$ (a continue))

$\mathcal{S}_0 = \{y : x \mapsto Ce^{A(x)},\ C \in \mathbb{K}\}$, où A est une primitive de a,

II-2. Solutions de l'équation homogène

Théorème 2.1 (Résolution de $y' = a(x)y$ (a continue))

$\mathcal{S}_0 = \{y : x \mapsto Ce^{A(x)},\ C \in \mathbb{K}\}$, où A est une primitive de a,

Remarque 2.2 (Comment retrouver cette formule)

II-2. Solutions de l'équation homogène

Théorème 2.1 (Résolution de $y' = a(x)y$ (a continue))

$\mathcal{S}_0 = \{y : x \mapsto Ce^{A(x)},\ C \in \mathbb{K}\}$, où A est une primitive de a,

Remarque 2.2 (Comment retrouver cette formule)

- Au brouillon : $\frac{y'}{y} = a(x)$.

II-2. Solutions de l'équation homogène

Théorème 2.1 (Résolution de $y' = a(x)y$ (a continue))

$\mathcal{S}_0 = \{y : x \mapsto Ce^{A(x)},\ C \in \mathbb{K}\}$, où A est une primitive de a,

Remarque 2.2 (Comment retrouver cette formule)

- Au brouillon : $\frac{y'}{y} = a(x)$.
- On primitive $\ln|y(x)| = A(x) + k$

II-2. Solutions de l'équation homogène

Théorème 2.1 (Résolution de $y' = a(x)y$ (a continue))

$\mathcal{S}_0 = \{y : x \mapsto Ce^{A(x)},\ C \in \mathbb{K}\}$, où A est une primitive de a,

Remarque 2.2 (Comment retrouver cette formule)

- Au brouillon : $\frac{y'}{y} = a(x)$.
- On primitive $\ln|y(x)| = A(x) + k$
- $|y(x)| = e^k e^{A(x)}$, puis $y = Ce^{A(x)}$.

II-2. Solutions de l'équation homogène

Théorème 2.1 (Résolution de $y' = a(x)y$ (a continue))

$\mathcal{S}_0 = \{y : x \mapsto Ce^{A(x)},\ C \in \mathbb{K}\}$, où A est une primitive de a,

Remarque 2.2 (Comment retrouver cette formule)

- Au brouillon : $\frac{y'}{y} = a(x)$.
- On primitive $\ln|y(x)| = A(x) + k$
- $|y(x)| = e^k e^{A(x)}$, puis $y = Ce^{A(x)}$.
- Au propre : utiliser la formule du cours (pb de justification)

II-2. Solutions de l'équation homogène

Théorème 2.1 (Résolution de $y' = a(x)y$ (a continue))

$\mathcal{S}_0 = \{y : x \mapsto Ce^{A(x)},\ C \in \mathbb{K}\}$, où A est une primitive de a,

Remarque 2.2 (Comment retrouver cette formule)

- Au brouillon : $\frac{y'}{y} = a(x)$.
- On primitive $\ln|y(x)| = A(x) + k$
- $|y(x)| = e^k e^{A(x)}$, puis $y = Ce^{A(x)}$.
- Au propre : utiliser la formule du cours (pb de justification)

Exemples 2.3

1. $y' = ay$ (a constant)

II-2. Solutions de l'équation homogène

Théorème 2.1 (Résolution de $y' = a(x)y$ (a continue))

$\mathcal{S}_0 = \{y : x \mapsto Ce^{A(x)},\ C \in \mathbb{K}\}$, où A est une primitive de a,

Remarque 2.2 (Comment retrouver cette formule)

- Au brouillon : $\frac{y'}{y} = a(x)$.
- On primitive $\ln|y(x)| = A(x) + k$
- $|y(x)| = e^k e^{A(x)}$, puis $y = Ce^{A(x)}$.
- Au propre : utiliser la formule du cours (pb de justification)

Exemples 2.3

1. $y' = ay$ (a constant)
2. $y' = yx^\alpha$ sur $\mathbb{R}$ si $\alpha \geqslant 0$, sur $\mathbb{R}_+^*$ sinon.

II-3. Recherche d'une solution particulière de $y' = a(x)y + b(x)$

Dans un premier temps : essayer de deviner ! Parfois il y a une solution qui saute au yeux.

Méthode 2.4 (Méthode de variation de la constante)

1. Recherche sous la forme $x \mapsto C(x)\mathrm{e}^{A(x)}$.

II-3. Recherche d'une solution particulière de $y' = a(x)y + b(x)$

Dans un premier temps : essayer de deviner ! Parfois il y a une solution qui saute au yeux.

Méthode 2.4 (Méthode de variation de la constante)

1. Recherche sous la forme $x \mapsto C(x)\mathrm{e}^{A(x)}$.
2. En remplaçant dans l'équation différentielle, $x \mapsto C(x)$ s'obtient par primitivation.

II-3. Recherche d'une solution particulière de $y' = a(x)y + b(x)$

Dans un premier temps : essayer de deviner ! Parfois il y a une solution qui saute au yeux.

Méthode 2.4 (Méthode de variation de la constante)

1. Recherche sous la forme $x \mapsto C(x)\mathrm{e}^{A(x)}$.
2. En remplaçant dans l'équation différentielle, $x \mapsto C(x)$ s'obtient par primitivation.

Exemples 2.5

II-3. Recherche d'une solution particulière de $y' = a(x)y + b(x)$

Dans un premier temps : essayer de deviner ! Parfois il y a une solution qui saute au yeux.

Méthode 2.4 (Méthode de variation de la constante)

1. Recherche sous la forme $x \mapsto C(x)\mathrm{e}^{A(x)}$.
2. En remplaçant dans l'équation différentielle, $x \mapsto C(x)$ s'obtient par primitivation.

Exemples 2.5

1. Résoudre $y' = 2y + \sin(x) + \mathrm{e}^x + x$ sur $\mathbb{R}$

II-3. Recherche d'une solution particulière de $y' = a(x)y + b(x)$

Dans un premier temps : essayer de deviner ! Parfois il y a une solution qui saute au yeux.

Méthode 2.4 (Méthode de variation de la constante)

1. Recherche sous la forme $x \mapsto C(x)\mathrm{e}^{A(x)}$.
2. En remplaçant dans l'équation différentielle, $x \mapsto C(x)$ s'obtient par primitivation.

Exemples 2.5

1. Résoudre $y' = 2y + \sin(x) + \mathrm{e}^x + x$ sur $\mathbb{R}$
2. Résoudre $y' = -\frac{y}{x} + \mathrm{Arctan}(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Remarque 2.6

Ne pas foncer vers la méthode de variation de la constante

Remarque 2.6

Ne pas foncer vers la méthode de variation de la constante

Exemples 2.7

1. Solution particulière de $y' = ay + b$ (a, b constants)

Remarque 2.6

Ne pas foncer vers la méthode de variation de la constante

Exemples 2.7

1. Solution particulière de $y' = ay + b$ (a, b constants)
2. Solution particulière de $y' = ay + b\mathrm{e}^{\alpha x}$.

II-4. Problème de Cauchy associé à une EDL du premier ordre

Théorème 2.8 (Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations linéaires d'ordre 1)

Soit a et b deux fonctions continues sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$. Alors il existe une et une seule solution y de l'équation différentielle $y' = a(x)y + b(x)$ telle que $y(x_0) = y_0$.

II-5. Problèmes de raccordement (ou recollement)

Principe général pour $ay' + by = c$

- Enlever du domaine les points x_i qui annulent a.

II-5. Problèmes de raccordement (ou recollement)

Principe général pour $ay' + by = c$

- Enlever du domaine les points x_i qui annulent a.
- Sur chaque intervalle du domaine qui en résulte, mettre sous forme normale, et résoudre sur le principe précédent.

II-5. Problèmes de raccordement (ou recollement)

Principe général pour $ay' + by = c$

- Enlever du domaine les points x_i qui annulent a.
- Sur chaque intervalle du domaine qui en résulte, mettre sous forme normale, et résoudre sur le principe précédent.
- Essayer de raccorder aux points x_i, la fonction devant être dérivable (donc aussi continue) en x_i :

II-5. Problèmes de raccordement (ou recollement)

Principe général pour $ay' + by = c$

- Enlever du domaine les points x_i qui annulent a.
- Sur chaque intervalle du domaine qui en résulte, mettre sous forme normale, et résoudre sur le principe précédent.
- Essayer de raccorder aux points x_i, la fonction devant être dérivable (donc aussi continue) en x_i :
  - Prolonger par continuité (cela contraint en général les paramètres)

II-5. Problèmes de raccordement (ou recollement)

Principe général pour $ay' + by = c$

- Enlever du domaine les points x_i qui annulent a.
- Sur chaque intervalle du domaine qui en résulte, mettre sous forme normale, et résoudre sur le principe précédent.
- Essayer de raccorder aux points x_i, la fonction devant être dérivable (donc aussi continue) en x_i :
  - Prolonger par continuité (cela contraint en général les paramètres)
  - Vérifier la dérivabilité à l'aide du théorème de la limite de la dérivée, en comparant la limite de y' à gauche et à droite de x_i.

II-5. Problèmes de raccordement (ou recollement)

Principe général pour $ay' + by = c$

- Enlever du domaine les points x_i qui annulent a.
- Sur chaque intervalle du domaine qui en résulte, mettre sous forme normale, et résoudre sur le principe précédent.
- Essayer de raccorder aux points x_i, la fonction devant être dérivable (donc aussi continue) en x_i :
  - Prolonger par continuité (cela contraint en général les paramètres)
  - Vérifier la dérivabilité à l'aide du théorème de la limite de la dérivée, en comparant la limite de y' à gauche et à droite de x_i.

Exemple 2.9

1. $\sqrt{|x|}y' = y$

II-5. Problèmes de raccordement (ou recollement)

Principe général pour $ay' + by = c$

- Enlever du domaine les points x_i qui annulent a.
- Sur chaque intervalle du domaine qui en résulte, mettre sous forme normale, et résoudre sur le principe précédent.
- Essayer de raccorder aux points x_i, la fonction devant être dérivable (donc aussi continue) en x_i :
  - Prolonger par continuité (cela contraint en général les paramètres)
  - Vérifier la dérivabilité à l'aide du théorème de la limite de la dérivée, en comparant la limite de y' à gauche et à droite de x_i.

Exemple 2.9

1. $\sqrt{|x|}y' = y$
2. $xy' = y$.

II-6. Résolution des EDL d'ordre 1 à coefficients constants

Théorème 2.10 (Résolution d'une équation linéaire $y' = ay + b$ à coefficients constants)

- $\mathcal{S} = \left\{ y : x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}, \quad C \in \mathbb{K} \right\},$

II-6. Résolution des EDL d'ordre 1 à coefficients constants

Théorème 2.10 (Résolution d'une équation linéaire $y' = ay + b$ à coefficients constants)

- $\mathcal{S} = \left\{ y : x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}, \quad C \in \mathbb{K} \right\}$,
- Unique solution telle que $y(x_0) = y_0$: $\left(\frac{b}{a} + y_0 \right) e^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}$.

III. Résolution des EDL d'ordre 2 à coefficients constants

III-3. Position du problème

Le problème étudié ici

- Les outils matriciels permettent de mettre toute EDL linéaire d'ordre r (sous forme normale) sous forme d'une EDL matricielle d'ordre 1, pour laquelle les méthodes ci-dessus s'adaptent.

III. Résolution des EDL d'ordre 2 à coefficients constants

III-3. Position du problème

Le problème étudié ici

- Les outils matriciels permettent de mettre toute EDL linéaire d'ordre r (sous forme normale) sous forme d'une EDL matricielle d'ordre 1, pour laquelle les méthodes ci-dessus s'adaptent.
- En attendant : on résout les EDL à coefficients constants $y'' + ay' + by = f(x)$.

III. Résolution des EDL d'ordre 2 à coefficients constants

III-3. Position du problème

Le problème étudié ici

- Les outils matriciels permettent de mettre toute EDL linéaire d'ordre r (sous forme normale) sous forme d'une EDL matricielle d'ordre 1, pour laquelle les méthodes ci-dessus s'adaptent.
- En attendant : on résout les EDL à coefficients constants $y'' + ay' + by = f(x)$.
- Théorème de structure et de superposition valides.

Une méthode valide aussi pour des coefficients non constants :

Méthode 3.1 (Solutions de $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$)

Nécessite la connaissance d'une solution particulière y_0 de l'équation homogène.

Une méthode valide aussi pour des coefficients non constants :

Méthode 3.1 (Solutions de $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$)

Nécessite la connaissance d'une solution particulière y_0 de l'équation homogène.

- On pose $y = y_0 z$ (variation de la constante)

Une méthode valide aussi pour des coefficients non constants :

Méthode 3.1 (Solutions de $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$)

Nécessite la connaissance d'une solution particulière y_0 de l'équation homogène.

- On pose $y = y_0 z$ (variation de la constante)
- z vérifie l'équation (d'ordre 1 en z') :

$$2y_0' z' + y_0 z'' + a y_0 z' = f(x).$$

Une méthode valide aussi pour des coefficients non constants :

Méthode 3.1 (Solutions de $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$)

Nécessite la connaissance d'une solution particulière y_0 de l'équation homogène.

- On pose $y = y_0 z$ (variation de la constante)
- z vérifie l'équation (d'ordre 1 en z') :

$$2y_0' z' + y_0 z'' + a y_0 z' = f(x).$$

- Trouver z' par les méthodes précédentes, puis et primitiver encore pour obtenir z.

Une méthode valide aussi pour des coefficients non constants :

Méthode 3.1 (Solutions de $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$)

Nécessite la connaissance d'une solution particulière y_0 de l'équation homogène.

- On pose $y = y_0 z$ (variation de la constante)
- z vérifie l'équation (d'ordre 1 en z') :

$$2y_0' z' + y_0 z'' + a y_0 z' = f(x).$$

- Trouver z' par les méthodes précédentes, puis et primitiver encore pour obtenir z.
- Deux quadratures, donc deux paramètres sur chaque intervalle (dimension 2)

Une méthode valide aussi pour des coefficients non constants :

Méthode 3.1 (Solutions de $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$)

Nécessite la connaissance d'une solution particulière y_0 de l'équation homogène.

- On pose $y = y_0 z$ (variation de la constante)
- z vérifie l'équation (d'ordre 1 en z') :

$$2y_0' z' + y_0 z'' + a y_0 z' = f(x).$$

- Trouver z' par les méthodes précédentes, puis et primitiver encore pour obtenir z.
- Deux quadratures, donc deux paramètres sur chaque intervalle (dimension 2)
- Éventuels raccordements à faire si y_0 s'annule.

Exemples 3.2

- Il peut arriver qu'une solution soit évidente, mais pas les autres. La méthode ci-dessus est adaptée dans ce cas.

Exemples 3.2

- Il peut arriver qu'une solution soit évidente, mais pas les autres. La méthode ci-dessus est adaptée dans ce cas.
- Si a et b sont polynomiaux, on peut espérer trouver une solution polynomiale. Essayer de déterminer *a priori* le degré du polynôme.

Théorème 3.3 (Résolution de $y'' + ay' + by = 0$)

Soit Δ le discriminant de $X^2 + aX + b$ et r_1 et r_2 ses racines (réelles ou complexes)

Théorème 3.3 (Résolution de $y'' + ay' + by = 0$)

Soit Δ le discriminant de $X^2 + aX + b$ et r_1 et r_2 ses racines (réelles ou complexes)

- $\mathcal{S}_0 = \{y : x \mapsto ce^{r_1 x} + de^{r_2 x},\ c, d \in \mathbb{C}\}$ si $\Delta \neq 0$.

Théorème 3.3 (Résolution de $y'' + ay' + by = 0$)

Soit Δ le discriminant de $X^2 + aX + b$ et r_1 et r_2 ses racines (réelles ou complexes)

- $\mathcal{S}_0 = \{y : x \mapsto ce^{r_1 x} + de^{r_2 x},\ c, d \in \mathbb{C}\}$ si $\Delta \neq 0$.
- $\mathcal{S}_0 = \{y : x \mapsto (c + dx)e^{rx}\ c, d \in \mathbb{C}\}$ si $\Delta = 0$.

Théorème 3.3 (Résolution de $y'' + ay' + by = 0$)

Soit Δ le discriminant de $X^2 + aX + b$ et r_1 et r_2 ses racines (réelles ou complexes)

- $\mathcal{S}_0 = \{y : x \mapsto ce^{r_1 x} + de^{r_2 x},\ c, d \in \mathbb{C}\}$ si $\Delta \neq 0$.
- $\mathcal{S}_0 = \{y : x \mapsto (c + dx)e^{rx}\ c, d \in \mathbb{C}\}$ si $\Delta = 0$.

Terminologie 3.4 (polynôme caractéristique)

$X^2 + aX + b$ est le polynôme caractéristique de l'ED $y'' + ay' + by = 0$.

Théorème 3.3 (Résolution de $y'' + ay' + by = 0$)

Soit Δ le discriminant de $X^2 + aX + b$ et r_1 et r_2 ses racines (réelles ou complexes)

- $\mathcal{S}_0 = \{y : x \mapsto ce^{r_1 x} + de^{r_2 x},\ c, d \in \mathbb{C}\}$ si $\Delta \neq 0$.
- $\mathcal{S}_0 = \{y : x \mapsto (c + dx)e^{rx}\ c, d \in \mathbb{C}\}$ si $\Delta = 0$.

Terminologie 3.4 (polynôme caractéristique)

$X^2 + aX + b$ est le polynôme caractéristique de l'ED $y'' + ay' + by = 0$.

Remarques 3.5

1. Si $\Delta \neq 0$, la méthode 3.1 ne sert qu'à justifier qu'il n'y a pas d'autre solution que les exponentielles

Théorème 3.3 (Résolution de $y'' + ay' + by = 0$)

Soit Δ le discriminant de $X^2 + aX + b$ et r_1 et r_2 ses racines (réelles ou complexes)

- $\mathcal{S}_0 = \{y : x \mapsto ce^{r_1 x} + de^{r_2 x},\ c, d \in \mathbb{C}\}$ si $\Delta \neq 0$.
- $\mathcal{S}_0 = \{y : x \mapsto (c + dx)e^{rx}\ c, d \in \mathbb{C}\}$ si $\Delta = 0$.

Terminologie 3.4 (polynôme caractéristique)

$X^2 + aX + b$ est le polynôme caractéristique de l'ED $y'' + ay' + by = 0$.

Remarques 3.5

1. Si $\Delta \neq 0$, la méthode 3.1 ne sert qu'à justifier qu'il n'y a pas d'autre solution que les exponentielles
2. Dans le cas où $\Delta = 0$, on en trouve d'autres.

Proposition 3.6 (des solutions complexes aux solutions réelles)

Soit $y'' + ay' + by = 0$ une équation différentielle linéaire à coefficients constants réels.

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{\mathrm{Re}(y) \mid y \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}\}.$$

Proposition 3.6 (des solutions complexes aux solutions réelles)

Soit $y'' + ay' + by = 0$ une équation différentielle linéaire à coefficients constants réels.

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{\mathrm{Re}(y) \mid y \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}\}.$$

Théorème 3.7 (Solutions réelles de $y'' + ay' + by = 0$)

On suppose $a, b \in \mathbb{R}$.

Proposition 3.6 (des solutions complexes aux solutions réelles)

Soit $y'' + ay' + by = 0$ une équation différentielle linéaire à coefficients constants réels.

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{\mathrm{Re}(y) \mid y \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}\}.$$

Théorème 3.7 (Solutions réelles de $y'' + ay' + by = 0$)

On suppose $a, b \in \mathbb{R}$.

- $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto ce^{r_1 x} + de^{r_2 x} \mid (c,d) \in \mathbb{R}^2\}$ si $\Delta > 0$;

Proposition 3.6 (des solutions complexes aux solutions réelles)

Soit $y'' + ay' + by = 0$ une équation différentielle linéaire à coefficients constants réels.

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{\mathrm{Re}(y) \mid y \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}\}.$$

Théorème 3.7 (Solutions réelles de $y'' + ay' + by = 0$)

On suppose $a, b \in \mathbb{R}$.

- $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto ce^{r_1 x} + de^{r_2 x} \mid (c,d) \in \mathbb{R}^2\}$ si $\Delta > 0$;
- $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto (cx + d)e^{rx} \mid (c,d) \in \mathbb{R}^2\}$ si $\Delta = 0$;

Proposition 3.6 (des solutions complexes aux solutions réelles)

Soit $y'' + ay' + by = 0$ une équation différentielle linéaire à coefficients constants réels.

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{\mathrm{Re}(y) \mid y \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}\}.$$

Théorème 3.7 (Solutions réelles de $y'' + ay' + by = 0$)

On suppose $a, b \in \mathbb{R}$.

- $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto ce^{r_1 x} + de^{r_2 x} \mid (c,d) \in \mathbb{R}^2\}$ si $\Delta > 0$;
- $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto (cx+d)e^{rx} \mid (c,d) \in \mathbb{R}^2\}$ si $\Delta = 0$;
- $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \mapsto e^{\alpha x}\left(c\cos(\omega x) + d\sin(\omega x)\right) \mid (c,d) \in \mathbb{R}^2\right\}$ si $\Delta < 0$, où $r_1 = \alpha - \mathrm{i}\,\omega$ et $r_2 = \alpha + \mathrm{i}\,\omega$.

Proposition 3.6 (des solutions complexes aux solutions réelles)

Soit $y'' + ay' + by = 0$ une équation différentielle linéaire à coefficients constants réels.

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{\mathrm{Re}(y) \mid y \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}\}.$$

Théorème 3.7 (Solutions réelles de $y'' + ay' + by = 0$)

On suppose $a, b \in \mathbb{R}$.

- $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto ce^{r_1 x} + de^{r_2 x} \mid (c,d) \in \mathbb{R}^2\}$ si $\Delta > 0$;
- $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto (cx+d)e^{rx} \mid (c,d) \in \mathbb{R}^2\}$ si $\Delta = 0$;
- $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \mapsto e^{\alpha x}\left(c\cos(\omega x) + d\sin(\omega x)\right) \mid (c,d) \in \mathbb{R}^2\right\}$ si $\Delta < 0$, où $r_1 = \alpha - \mathrm{i}\omega$ et $r_2 = \alpha + \mathrm{i}\omega$.

Cas $\Delta < 0$:

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \mapsto Ae^{\alpha(x-x_0)}\cos\left(\omega(x-x_0) - \varphi\right) \mid (A,\varphi) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

III-3. Solution générale du système non homogène

Pas de méthode générale au programme

Proposition 3.8 (Second membre $Q(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$, admis)

- Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$, et $(E) : y'' + ay' + by = Q(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$.
- Soit P le polynôme caractéristique de l'équation (E), et m la multiplicité de λ comme racine de P.

Il existe une solution particulière de (E) de la forme :

$$y_P(x) = x^m R(x)\mathrm{e}^{\lambda x}, \text{ où } \deg(R) = \deg(Q).$$

III-3. Solution générale du système non homogène

Pas de méthode générale au programme

Proposition 3.8 (Second membre $Q(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$, admis)

- Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$, et $(E) : y'' + ay' + by = Q(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$.
- Soit P le polynôme caractéristique de l'équation (E), et m la multiplicité de λ comme racine de P.

Il existe une solution particulière de (E) de la forme :

$$y_P(x) = x^m R(x)\mathrm{e}^{\lambda x}, \text{ où } \deg(R) = \deg(Q).$$

Ce résultat reste valide pour des équations d'ordre plus important.

III-3. Solution générale du système non homogène

Pas de méthode générale au programme

Proposition 3.8 (Second membre $Q(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$, admis)

- Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$, et $(E) : y'' + ay' + by = Q(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$.
- Soit P le polynôme caractéristique de l'équation (E), et m la multiplicité de λ comme racine de P.

Il existe une solution particulière de (E) de la forme :

$$y_P(x) = x^m R(x)\mathrm{e}^{\lambda x}, \text{ où } \deg(R) = \deg(Q).$$

Ce résultat reste valide pour des équations d'ordre plus important.

Exemple 3.9

- Solution particulière de $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^x$

III-3. Solution générale du système non homogène

Pas de méthode générale au programme

Proposition 3.8 (Second membre $Q(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$, admis)

- Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$, et $(E) : y'' + ay' + by = Q(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$.
- Soit P le polynôme caractéristique de l'équation (E), et m la multiplicité de λ comme racine de P.

Il existe une solution particulière de (E) de la forme :

$$y_P(x) = x^m R(x)\mathrm{e}^{\lambda x}, \text{ où } \deg(R) = \deg(Q).$$

Ce résultat reste valide pour des équations d'ordre plus important.

Exemple 3.9

- Solution particulière de $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^x$
- Solution particulière de $y'' + y' + y = \sin(x)$