

Alain Troesch

Cours de mathématiques, MP2I 3 Lycée Louis-Le-Grand (Paris)

Année scolaire 2021/2022

Fondements – Chapitre 4

Sommes

└ I. Manipulation des signes $\sum$ et $\prod$

└ I-1. Définition des notations

I. Manipulation des signes $\sum$ et $\prod$

I-1. Définition des notations

I. Manipulation des signes $\sum$ et $\prod$

I-1. Définition des notations

Notation 1.1 (signes $\sum$ et $\prod$: définition générale)

Soit I un ensemble fini et $(a_i)_{i \in I}$ une famille (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

- ▶ $\sum_{i \in I} a_i$: somme de tous les a_i ($i \in I$)

I. Manipulation des signes $\sum$ et $\prod$

I-1. Définition des notations

Notation 1.1 (signes $\sum$ et $\prod$: définition générale)

Soit I un ensemble fini et $(a_i)_{i \in I}$ une famille (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

- ▶ $\sum_{i \in I} a_i$: somme de tous les a_i ($i \in I$)
- ▶ $\prod_{i \in I} a_i$ désigne le produit de tous les a_i ($i \in I$).

I. Manipulation des signes $\sum$ et $\prod$

I-1. Définition des notations

Notation 1.1 (signes $\sum$ et $\prod$: définition générale)

Soit I un ensemble fini et $(a_i)_{i \in I}$ une famille (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

- ▶ $\sum_{i \in I} a_i$: somme de tous les a_i ($i \in I$)
- ▶ $\prod_{i \in I} a_i$ désigne le produit de tous les a_i ($i \in I$).
- ▶ Lorsque $I = \llbracket n, m \rrbracket$, on note $\sum_{i=n}^m a_i$ et $\prod_{i=1}^m a_i$.

Remarques 1.2

1. La lettre i est muette : elle peut être remplacée par une autre :

Remarques 1.2

1. La lettre i est muette : elle peut être remplacée par une autre :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in I} a_j = \sum_{\beta \in I} a_\beta$$

Remarques 1.2

1. La lettre i est muette : elle peut être remplacée par une autre :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in I} a_j = \sum_{\beta \in I} a_\beta$$

En revanche, $\sum_{n \in \llbracket 1, n \rrbracket} a_n$ n'a pas de sens.

Remarques 1.2

1. La lettre i est muette : elle peut être remplacée par une autre :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in I} a_j = \sum_{\beta \in I} a_\beta$$

En revanche, $\sum_{n \in \llbracket 1, n \rrbracket} a_n$ n'a pas de sens.

2. Une loi notée additivement est (presque) toujours commutative et associative, donc $\sum$ est bien définie.

Remarques 1.2

1. La lettre i est muette : elle peut être remplacée par une autre :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in I} a_j = \sum_{\beta \in I} a_\beta$$

En revanche, $\sum_{n \in \llbracket 1, n \rrbracket} a_n$ n'a pas de sens.

2. Une loi notée additivement est (presque) toujours commutative et associative, donc $\sum$ est bien définie.
3. Une loi $\times$ peut ne pas être commutative : la notation produit n'est bien définie que si on se donne un **ordre de produit**, bijection $\sigma : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow I$.

définition par récurrence

On suppose $+$ commutative et associative.

- Si I est de cardinal $n > 0$, soit $i_0 \in I$, et $J = I \setminus \{i_0\}$, on définit par récurrence

$$\sum_{i \in I} x_i = x_{i_0} + \sum_{i \in J} x_i.$$

définition par récurrence

On suppose $+$ commutative et associative.

- ▶ Si I est de cardinal $n > 0$, soit $i_0 \in I$, et $J = I \setminus \{i_0\}$, on définit par récurrence

$$\sum_{i \in I} x_i = x_{i_0} + \sum_{i \in J} x_i.$$

- ▶ **Indépendance** vis-à-vis du **choix de i_0** (par commutativité et associativité)

définition par récurrence

On suppose $+$ commutative et associative.

- ▶ Si I est de cardinal $n > 0$, soit $i_0 \in I$, et $J = I \setminus \{i_0\}$, on définit par récurrence

$$\sum_{i \in I} x_i = x_{i_0} + \sum_{i \in J} x_i.$$

- ▶ Indépendance vis-à-vis du choix de i_0 (par commutativité et associativité)
- ▶ De même pour $\prod$.

définition par récurrence

On suppose $+$ commutative et associative.

- ▶ Si I est de cardinal $n > 0$, soit $i_0 \in I$, et $J = I \setminus \{i_0\}$, on définit par récurrence

$$\sum_{i \in I} x_i = x_{i_0} + \sum_{i \in J} x_i.$$

- ▶ Indépendance vis-à-vis du choix de i_0 (par commutativité et associativité)
- ▶ De même pour $\prod$.

Pour une bonne initialisation :

définition par récurrence

On suppose $+$ commutative et associative.

- ▶ Si I est de cardinal $n > 0$, soit $i_0 \in I$, et $J = I \setminus \{i_0\}$, on définit par récurrence

$$\sum_{i \in I} x_i = x_{i_0} + \sum_{i \in J} x_i.$$

- ▶ Indépendance vis-à-vis du choix de i_0 (par commutativité et associativité)
- ▶ De même pour $\prod$.

Pour une bonne initialisation :

Convention 1.3 (somme vide, produit vide)

$$\sum_{i \in \emptyset} a_i = 0;$$

définition par récurrence

On suppose $+$ commutative et associative.

- ▶ Si I est de cardinal $n > 0$, soit $i_0 \in I$, et $J = I \setminus \{i_0\}$, on définit par récurrence

$$\sum_{i \in I} x_i = x_{i_0} + \sum_{i \in J} x_i.$$

- ▶ Indépendance vis-à-vis du choix de i_0 (par commutativité et associativité)
- ▶ De même pour $\prod$.

Pour une bonne initialisation :

Convention 1.3 (somme vide, produit vide)

$$\sum_{i \in \emptyset} a_i = 0; \quad \prod_{i \in \emptyset} a_i = 1.$$

Remarque 1.4

Une somme n'est en général pas prise sur un ensemble d'entiers consécutifs, ni même sur un ensemble d'entiers.

Seule condition importante : L'ensemble des indices doit être fini.

Remarque 1.4

Une somme n'est en général pas prise sur un ensemble d'entiers consécutifs, ni même sur un ensemble d'entiers.

Seule condition importante : L'ensemble des indices doit être fini.

Note historique 1.5

- ▶ $\sum$: introduit par Euler en 1755
- ▶ $\prod$: utilisé par Gauss, mais déjà présent chez Descartes.

Exemples 1.6

1. $\sum_{k=1}^4 k(k-1) = ?$

Exemples 1.6

1. $\sum_{k=1}^4 k(k-1) = 1(1-0) + 2(2-1) + 3(3-1) + 4(4-1)$

Exemples 1.6

1. $\sum_{k=1}^4 k(k-1) = 1(1-0) + 2(2-1) + 3(3-1) + 4(4-1) = 20.$

Exemples 1.6

1. $\sum_{k=1}^4 k(k-1) = 1(1-0) + 2(2-1) + 3(3-1) + 4(4-1) = 20.$
2. $\sum_{i \in \{2,3,5\}} i^2 = ?$

Exemples 1.6

1. $\sum_{k=1}^4 k(k-1) = 1(1-0) + 2(2-1) + 3(3-1) + 4(4-1) = 20.$
2. $\sum_{i \in \{2,3,5\}} i^2 = 2^2 + 3^2 + 5^2$

Exemples 1.6

1. $\sum_{k=1}^4 k(k-1) = 1(1-0) + 2(2-1) + 3(3-1) + 4(4-1) = 20.$
2. $\sum_{i \in \{2,3,5\}} i^2 = 2^2 + 3^2 + 5^2 = 38.$

Exemples 1.6

1. $\sum_{k=1}^4 k(k-1) = 1(1-0) + 2(2-1) + 3(3-1) + 4(4-1) = 20.$

2. $\sum_{i \in \{2,3,5\}} i^2 = 2^2 + 3^2 + 5^2 = 38.$

3. si $E = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid i+j=5\} = \{(0,5), (1,4), \dots, (5,0)\},$
alors

$$\sum_{(i,j) \in E} \frac{i}{j+1} = ?$$

Exemples 1.6

1. $\sum_{k=1}^4 k(k-1) = 1(1-0) + 2(2-1) + 3(3-1) + 4(4-1) = 20.$

2. $\sum_{i \in \{2,3,5\}} i^2 = 2^2 + 3^2 + 5^2 = 38.$

3. si $E = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid i + j = 5\} = \{(0, 5), (1, 4), \dots, (5, 0)\},$
alors

$$\sum_{(i,j) \in E} \frac{i}{j+1} = \frac{0}{6} + \frac{1}{5} + \frac{2}{4} + \frac{3}{3} + \frac{4}{2} + \frac{5}{1}$$

Exemples 1.6

1. $\sum_{k=1}^4 k(k-1) = 1(1-0) + 2(2-1) + 3(3-1) + 4(4-1) = 20.$

2. $\sum_{i \in \{2,3,5\}} i^2 = 2^2 + 3^2 + 5^2 = 38.$

3. si $E = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid i+j=5\} = \{(0,5), (1,4), \dots, (5,0)\},$
alors

$$\sum_{(i,j) \in E} \frac{i}{j+1} = \frac{0}{6} + \frac{1}{5} + \frac{2}{4} + \frac{3}{3} + \frac{4}{2} + \frac{5}{1} = \frac{87}{10}.$$

Exemples 1.6

$$1. \sum_{k=1}^4 k(k-1) = 1(1-0) + 2(2-1) + 3(3-1) + 4(4-1) = 20.$$

$$2. \sum_{i \in \{2,3,5\}} i^2 = 2^2 + 3^2 + 5^2 = 38.$$

3. si $E = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid i + j = 5\} = \{(0, 5), (1, 4), \dots, (5, 0)\}$,
alors

$$\sum_{(i,j) \in E} \frac{i}{j+1} = \frac{0}{6} + \frac{1}{5} + \frac{2}{4} + \frac{3}{3} + \frac{4}{2} + \frac{5}{1} = \frac{87}{10}.$$

$$4. \sum_{i \in E} 1 = ?$$

Exemples 1.6

$$1. \sum_{k=1}^4 k(k-1) = 1(1-0) + 2(2-1) + 3(3-1) + 4(4-1) = 20.$$

$$2. \sum_{i \in \{2,3,5\}} i^2 = 2^2 + 3^2 + 5^2 = 38.$$

3. si $E = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid i + j = 5\} = \{(0, 5), (1, 4), \dots, (5, 0)\}$,
alors

$$\sum_{(i,j) \in E} \frac{i}{j+1} = \frac{0}{6} + \frac{1}{5} + \frac{2}{4} + \frac{3}{3} + \frac{4}{2} + \frac{5}{1} = \frac{87}{10}.$$

$$4. \sum_{i \in E} 1 = 1 + \dots + 1$$

Exemples 1.6

$$1. \sum_{k=1}^4 k(k-1) = 1(1-0) + 2(2-1) + 3(3-1) + 4(4-1) = 20.$$

$$2. \sum_{i \in \{2,3,5\}} i^2 = 2^2 + 3^2 + 5^2 = 38.$$

3. si $E = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid i + j = 5\} = \{(0, 5), (1, 4), \dots, (5, 0)\}$,
alors

$$\sum_{(i,j) \in E} \frac{i}{j+1} = \frac{0}{6} + \frac{1}{5} + \frac{2}{4} + \frac{3}{3} + \frac{4}{2} + \frac{5}{1} = \frac{87}{10}.$$

$$4. \sum_{i \in E} 1 = 1 + \dots + 1 = |E|.$$

Définition 1.7 (Factorielle)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la **factorielle de n** par :

$$n! = \prod_{k=1}^n k.$$

Définition 1.7 (Factorielle)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la **factorielle de n** par :

$$n! = \prod_{k=1}^n k.$$

$n!$ peut être définie par récurrence par $0! = 1$ (convention du produit vide) et la relation :

$$n! = n \times (n-1)!.$$

I-2. Changements d'indice

Théorème 1.8 (Changements d'indice)

Soit I et J deux ensembles, et $f : I \rightarrow J$ une **bijection** de I sur J .
Alors, pour toute famille $(b_j)_{j \in J}$,

$$\sum_{j \in J} b_j = \sum_{i \in I} b_{f(i)}$$

Même règle pour les produits.

I-2. Changements d'indice

Théorème 1.8 (Changements d'indice)

Soit I et J deux ensembles, et $f : I \rightarrow J$ une **bijection** de I sur J .
Alors, pour toute famille $(b_j)_{j \in J}$,

$$\sum_{j \in J} b_j = \sum_{i \in I} b_{f(i)}$$

Même règle pour les produits.

Cas particulier d'une énumération $\varphi : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow J$:

$$\sum_{j \in J} b_j = \sum_{i=1}^n b_{\varphi(i)}$$

Corollaire 1.9 (changements d'indices par translation)

Soit n, p et ℓ trois entiers tels que $n \leq p$. Soit $(a_i)_{i \in \llbracket n, p \rrbracket}$ une famille. Alors :

$$\sum_{i=n}^p a_i = \sum_{i=n-\ell}^{p-\ell} a_{i+\ell}.$$

Corollaire 1.9 (changements d'indices par translation)

Soit n, p et ℓ trois entiers tels que $n \leq p$. Soit $(a_i)_{i \in \llbracket n, p \rrbracket}$ une famille. Alors :

$$\sum_{i=n}^p a_i = \sum_{i=n-\ell}^{p-\ell} a_{i+\ell}.$$

Exemple 1.10

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2 = \sum_{k=1}^n k^2.$$

I-3. Additivité par rapport aux bornes

Lemme 1.11

Soit n et m deux entiers tels que $n \leq m$. Alors

$$\sum_{k=1}^m a_k = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=n+1}^m a_k.$$

I-3. Additivité par rapport aux bornes

Lemme 1.11

Soit n et m deux entiers tels que $n \leq m$. Alors

$$\sum_{k=1}^m a_k = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=n+1}^m a_k.$$

Proposition 1.12 (Somme indexée dans une union disjointe)

On suppose que $I = I_1 \cup I_2$, avec $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. Alors :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I_1} a_i + \sum_{i \in I_2} a_i.$$

Exemples 1.13

1. Soit $E = \{0, \dots, 2n - 1\}$. Calculer $\sum_{i=0}^{2n-1} \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor$.

Exemples 1.13

1. Soit $E = \{0, \dots, 2n - 1\}$. Calculer $\sum_{i=0}^{2n-1} \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor$.
2. En considérant $\sum_{i \in I_1 \sqcup I_2} 1$, exprimer le cardinal d'une union disjointe.

Exemples 1.13

1. Soit $E = \{0, \dots, 2n - 1\}$. Calculer $\sum_{i=0}^{2n-1} \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor$.
2. En considérant $\sum_{i \in I_1 \sqcup I_2} 1$, exprimer le cardinal d'une union disjointe.

Proposition 1.14 (Somme par groupement de termes)

Soit $I = I_1 \sqcup \dots \sqcup I_n = I$.

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I_1} a_i + \sum_{i \in I_2} a_i + \dots + \sum_{i \in I_n} a_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i \in I_j} a_i.$$

I-4. Linéarité

Proposition 1.15 (Linéarité du symbole $\sum$)

Soit I un ensemble fini et $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ deux familles (réelles ou complexes), et λ, μ deux nombres réels ou complexes. Alors :

$$\lambda \sum_{i \in I} a_i + \mu \sum_{i \in I} b_i =$$

I-4. Linéarité

Proposition 1.15 (Linéarité du symbole $\sum$)

Soit I un ensemble fini et $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ deux familles (réelles ou complexes), et λ, μ deux nombres réels ou complexes. Alors :

$$\lambda \sum_{i \in I} a_i + \mu \sum_{i \in I} b_i = \sum_{i \in I} (\lambda a_i + \mu b_i).$$

I-4. Linéarité

Proposition 1.15 (Linéarité du symbole $\sum$)

Soit I un ensemble fini et $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ deux familles (réelles ou complexes), et λ, μ deux nombres réels ou complexes. Alors :

$$\lambda \sum_{i \in I} a_i + \mu \sum_{i \in I} b_i = \sum_{i \in I} (\lambda a_i + \mu b_i).$$

Cette proposition énonce le fait que $\sum$ est une forme linéaire.

I-4. Linéarité

Proposition 1.15 (Linéarité du symbole $\sum$)

Soit I un ensemble fini et $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ deux familles (réelles ou complexes), et λ, μ deux nombres réels ou complexes. Alors :

$$\lambda \sum_{i \in I} a_i + \mu \sum_{i \in I} b_i = \sum_{i \in I} (\lambda a_i + \mu b_i).$$

Cette proposition énonce le fait que $\sum$ est une forme linéaire.

Corollaire 1.16 (somme de termes constants)

Soit E un ensemble fini et a un nombre réel ou complexe. Alors :

$$\sum_{i \in E} a = a \cdot \sum_{i \in E} 1$$

I-4. Linéarité

Proposition 1.15 (Linéarité du symbole $\sum$)

Soit I un ensemble fini et $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ deux familles (réelles ou complexes), et λ, μ deux nombres réels ou complexes. Alors :

$$\lambda \sum_{i \in I} a_i + \mu \sum_{i \in I} b_i = \sum_{i \in I} (\lambda a_i + \mu b_i).$$

Cette proposition énonce le fait que $\sum$ est une forme linéaire.

Corollaire 1.16 (somme de termes constants)

Soit E un ensemble fini et a un nombre réel ou complexe. Alors :

$$\sum_{i \in E} a = a \cdot \sum_{i \in E} 1 = a \cdot |E|.$$

Exemples 1.17

1. $\sum_{k=0}^n k(k+1) =$.

Exemples 1.17

$$1. \sum_{k=0}^n k(k+1) = \sum_{k=0}^n k^2 + \sum_{k=0}^n k .$$

Exemples 1.17

$$1. \sum_{k=0}^n k(k+1) = \sum_{k=0}^n k^2 + \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exemples 1.17

$$1. \sum_{k=0}^n k(k+1) = \sum_{k=0}^n k^2 + \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Remarque 1.18

Attention à prendre des sommes **indexées sur le même ensemble !**

Exemples 1.17

$$1. \sum_{k=0}^n k(k+1) = \sum_{k=0}^n k^2 + \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Remarque 1.18

Attention à prendre des sommes indexées sur le *même* ensemble !
Sinon, se restreindre à l'intersection !

Exemples 1.17

$$1. \sum_{k=0}^n k(k+1) = \sum_{k=0}^n k^2 + \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Remarque 1.18

Attention à prendre des sommes indexées sur le *même* ensemble !
Sinon, se restreindre à l'intersection !

Exemples 1.19

$$1. \sum_{i=0}^n a_i + \sum_{i=1}^{n+1} b_i = a_0 + \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) + b_{n+1}.$$

Exemples 1.17

$$1. \sum_{k=0}^n k(k+1) = \sum_{k=0}^n k^2 + \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Remarque 1.18

Attention à prendre des sommes indexées sur le *même* ensemble !
 Sinon, se restreindre à l'intersection !

Exemples 1.19

$$1. \sum_{i=0}^n a_i + \sum_{i=1}^{n+1} b_i = a_0 + \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) + b_{n+1}.$$

$$2. \text{Transformation d'Abel, avec } B_n = \sum_{k=0}^n b_k :$$

$$\sum_{k=0}^n a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} B_k (a_k - a_{k+1}) + a_n B_n$$

I-5. Sommes télescopiques

Définition 1.20 (Sommes télescopiques)

C'est une somme de la forme $\sum_{k=m}^n b_{k+1} - b_k$.

I-5. Sommes télescopiques

Définition 1.20 (Sommes télescopiques)

C'est une somme de la forme $\sum_{k=m}^n b_{k+1} - b_k$.

I-5. Sommes télescopiques

Définition 1.20 (Sommes télescopiques)

C'est une somme de la forme $\sum_{k=m}^n b_{k+1} - b_k$.

Proposition 1.21 (calcul des sommes télescopiques)

Soit $\sum (b_{k+1} - b_k)$ une somme télescopique. Alors :

$$\sum_{k=0}^n (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_0.$$

I-5. Sommes télescopiques

Définition 1.20 (Sommes télescopiques)

C'est une somme de la forme $\sum_{k=m}^n b_{k+1} - b_k$.

Proposition 1.21 (calcul des sommes télescopiques)

Soit $\sum (b_{k+1} - b_k)$ une somme télescopique. Alors :

$$\sum_{k=0}^n (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_0.$$

Et plus généralement

$$\sum_{k=m}^n (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_m.$$

Exemples 1.22

1. $\sum_{k=0}^n k \cdot k!,$

Exemples 1.22

1. $\sum_{k=0}^n k \cdot k!$,
2. Trouver un polynôme P de degré 2 tq $P(x+1) - P(x) = x$.
En déduire $\sum_{k=n}^m k$.

Exemples 1.22

1. $\sum_{k=0}^n k \cdot k!,$

2. Trouver un polynôme P de degré 2 tq $P(x+1) - P(x) = x$.

En déduire $\sum_{k=n}^m k.$

3. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$

Exemples 1.22

1. $\sum_{k=0}^n k \cdot k!$,
2. Trouver un polynôme P de degré 2 tq $P(x+1) - P(x) = x$.
En déduire $\sum_{k=n}^m k$.
3. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$
4. Calculer $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

On peut adapter ces résultats au cas des produits :

On peut adapter ces résultats au cas des produits :

Proposition 1.23 (règles pour les produits)

Avec des notations cohérentes, on obtient les règles suivantes :

► Si $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, $\prod_{i \in I_1} a_i \prod_{i \in I_2} a_i = \prod_{i \in I_1 \cup I_2} a_i$.

On peut adapter ces résultats au cas des produits :

Proposition 1.23 (règles pour les produits)

Avec des notations cohérentes, on obtient les règles suivantes :

► Si $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, $\prod_{i \in I_1} a_i \prod_{i \in I_2} a_i = \prod_{i \in I_1 \cup I_2} a_i$.

► $\left(\prod_{i \in I} a_i \right)^\lambda \left(\prod_{i \in I} b_i \right)^\mu = \prod_{i \in I} (a_i^\lambda b_i^\mu)$.

On peut adapter ces résultats au cas des produits :

Proposition 1.23 (règles pour les produits)

Avec des notations cohérentes, on obtient les règles suivantes :

- ▶ Si $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, $\prod_{i \in I_1} a_i \prod_{i \in I_2} a_i = \prod_{i \in I_1 \cup I_2} a_i$.
- ▶ $\left(\prod_{i \in I} a_i \right)^\lambda \left(\prod_{i \in I} b_i \right)^\mu = \prod_{i \in I} (a_i^\lambda b_i^\mu)$.
- ▶ $\prod_{i \in I} a = a^{|I|}$.

Définition 1.24 (produit télescopique)

On dit qu'un produit $\prod_{k=0}^n a_k$ est **télescopique** si pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on peut écrire de façon simple a_k sous la forme $a_k = \frac{b_{k+1}}{b_k}$.

Définition 1.24 (produit télescopique)

On dit qu'un produit $\prod_{k=0}^n a_k$ est télescopique si pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on peut écrire de façon simple a_k sous la forme $a_k = \frac{b_{k+1}}{b_k}$.

Proposition 1.25 (calcul des produits télescopiques)

Soit $\prod \frac{b_{k+1}}{b_k}$ un produit télescopique. Alors :

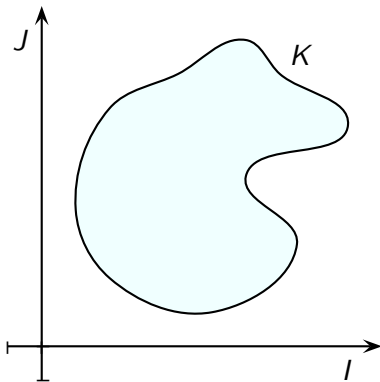
$$\prod_{k=0}^n \frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{b_{n+1}}{b_0}.$$

I-7. Sommes multiples

Définition 1.26 (coupes d'un sous-ensemble K de $I \times J$)

I-7. Sommes multiples

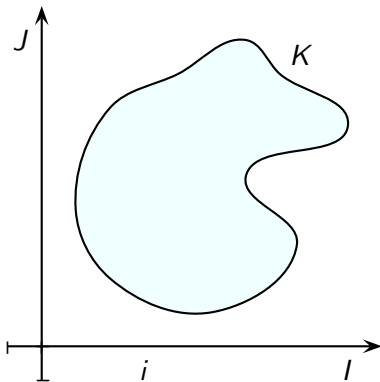
Définition 1.26 (coupes d'un sous-ensemble K de $I \times J$)



I-7. Sommes multiples

Définition 1.26 (coupes d'un sous-ensemble K de $I \times J$)

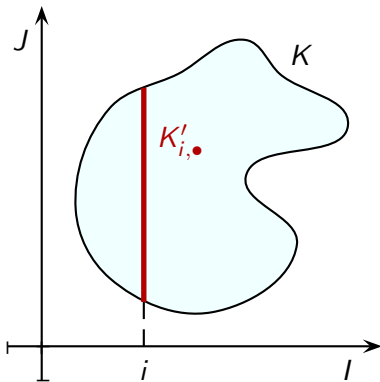
- Soit $i \in I$. Coupe de K suivant $i : K_{i,\bullet} = \{j \in J \mid (i,j) \in K\}$



I-7. Sommes multiples

Définition 1.26 (coupes d'un sous-ensemble K de $I \times J$)

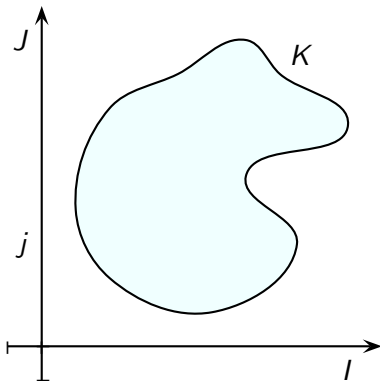
- Soit $i \in I$. Coupe de K suivant i : $K_{i,\bullet} = \{j \in J \mid (i,j) \in K\}$



I-7. Sommes multiples

Définition 1.26 (coupes d'un sous-ensemble K de $I \times J$)

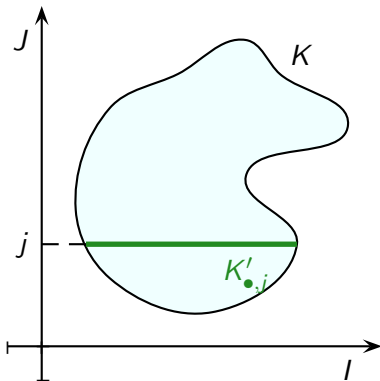
- Soit $i \in I$. Coupe de K suivant i : $K_{i,\bullet} = \{j \in J \mid (i,j) \in K\}$
- Soit $j \in J$. Coupe de K suivant j : $K_{\bullet,j} = \{i \in I \mid (i,j) \in K\}$



I-7. Sommes multiples

Définition 1.26 (coupes d'un sous-ensemble K de $I \times J$)

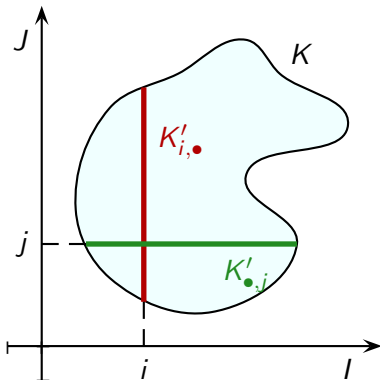
- Soit $i \in I$. Coupe de K suivant i : $K_{i,\bullet} = \{j \in J \mid (i,j) \in K\}$
- Soit $j \in J$. Coupe de K suivant j : $K_{\bullet,j} = \{i \in I \mid (i,j) \in K\}$



Théorème 1.27 (Interversion de signes sommes)

Soit $K \subset I \times J$, et $(a_{i,j})_{(i,j) \in K}$ une famille indexée sur K . Alors :

$$\sum_{(i,j) \in K} a_{i,j} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in K_{i,\bullet}} a_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in K_{\bullet,j}} a_{i,j}.$$



Corollaire 1.28 (somme sur un pavé)

Soit $(a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,m \rrbracket}$. Alors

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{i,j} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{i,j}.$$

Corollaire 1.28 (somme sur un pavé)

Soit $(a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,m \rrbracket}$. Alors

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{i,j} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{i,j}.$$

Avertissement 1.29

Attention, en général, **il ne suffit pas d'intervertir purement et simplement les signes sommes**. Dans la plupart des cas, une telle interversion amène d'ailleurs à une expression qui n'a pas de sens.

Corollaire 1.28 (somme sur un pavé)

Soit $(a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,m \rrbracket}$. Alors

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{i,j} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{i,j}.$$

Avertissement 1.29

Attention, en général, il ne suffit pas d'intervertir purement et simplement les signes sommes. Dans la plupart des cas, une telle interversion amène d'ailleurs à une expression qui n'a pas de sens.

Exemple 1.30 (somme sur un triangle, à savoir faire !)

Montrer que $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i a_{i,j} = \sum_{j=0}^n \sum_{i=j}^n a_{i,j}$.

I-8. Produit de deux sommes

Proposition 1.31 (produit de deux sommes)

Soit $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_j)_{j \in J}$. Alors

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_i b_j = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} a_i b_j = \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{j \in J} b_j \right).$$

I-8. Produit de deux sommes

Proposition 1.31 (produit de deux sommes)

Soit $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_j)_{j \in J}$. Alors

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_i b_j = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} a_i b_j = \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{j \in J} b_j \right).$$

Remarque 1.32

Déterminer le cardinal d'un produit cartésien à l'aide d'une somme double.

Remarque 1.33

Attention au produit de deux sommes indexées sur le même ensemble : rendez d'abord les indices indépendants :

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right) = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j \right) = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} a_i b_j.$$

Remarque 1.33

Attention au produit de deux sommes indexées sur le même ensemble : rendez d'abord les indices indépendants :

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right) = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j \right) = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} a_i b_j.$$

Remarque 1.33

Attention au produit de deux sommes indexées sur le même ensemble : rendez d'abord les indices indépendants :

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right) = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j \right) = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} a_i b_j.$$

Avertissement 1.34

Attention, en revanche,

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right) \neq \sum_{i=1}^n a_i b_i,$$

Théorème 1.35 (Distributivité généralisée)

$$\prod_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^{m_k} a_{k,i} \right) = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \llbracket 1, m_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket 1, m_n \rrbracket} a_{1,i_1} \cdots a_{n,i_n}.$$

- └ II. Sommes classiques à connaître
- └ II-1. Somme des puissances d'entiers

II. Sommes classiques à connaître

II-1. Somme des puissances d'entiers

II. Sommes classiques à connaître

II-1. Somme des puissances d'entiers

Proposition 2.1 (somme des petites puissances d'entiers)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\blacktriangleright \sum_{k=1}^n k^0 = \sum_{k=1}^n 1 = n$$

II. Sommes classiques à connaître

II-1. Somme des puissances d'entiers

Proposition 2.1 (somme des petites puissances d'entiers)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\blacktriangleright \sum_{k=1}^n k^0 = \sum_{k=1}^n 1 = n$$

$$\blacktriangleright \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

II. Sommes classiques à connaître

II-1. Somme des puissances d'entiers

Proposition 2.1 (somme des petites puissances d'entiers)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- ▶ $\sum_{k=1}^n k^0 = \sum_{k=1}^n 1 = n$
- ▶ $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$
- ▶ $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

II. Sommes classiques à connaître

II-1. Somme des puissances d'entiers

Proposition 2.1 (somme des petites puissances d'entiers)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\blacktriangleright \sum_{k=1}^n k^0 = \sum_{k=1}^n 1 = n$$

$$\blacktriangleright \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\blacktriangleright \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$\blacktriangleright \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

└ II. Sommes classiques à connaître

└ II-1. Somme des puissances d'entiers

Illustration de $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

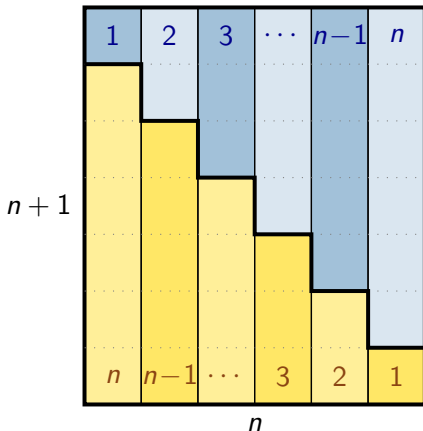
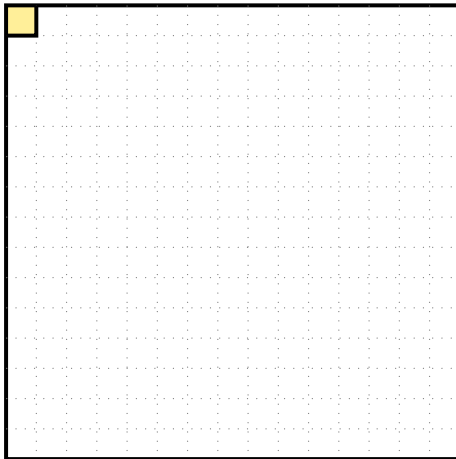


Illustration de $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$



- II. Sommes classiques à connaître
 - II-1. Somme des puissances d'entiers

Illustration de $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$

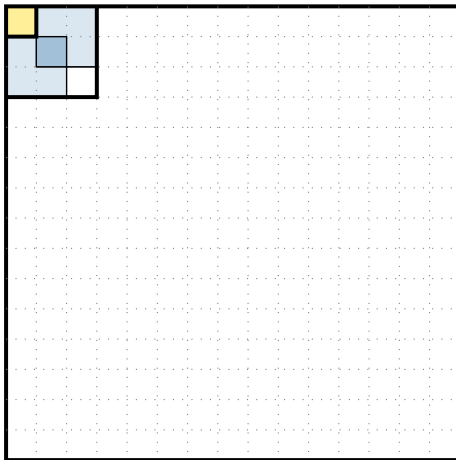


Illustration de $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$

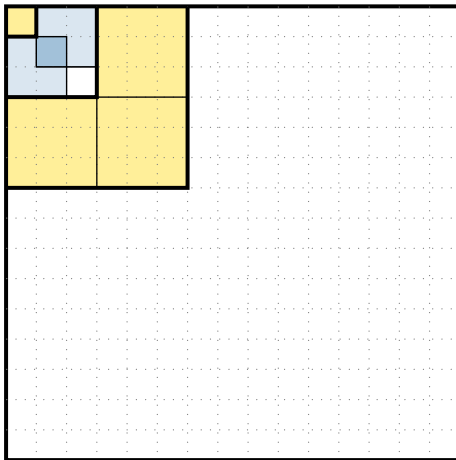
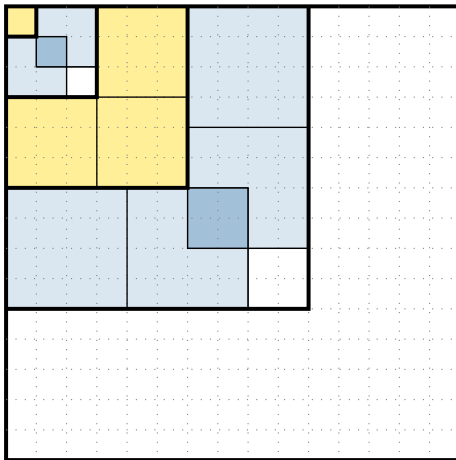
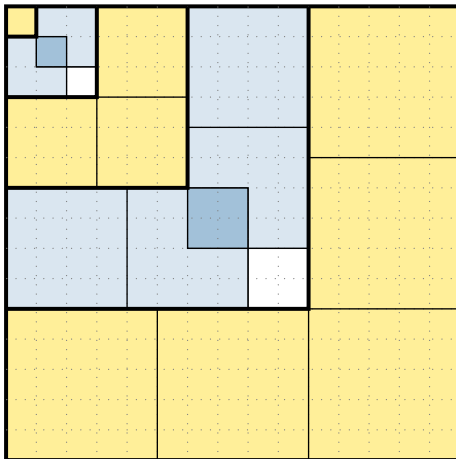


Illustration de $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$



- II. Sommes classiques à connaître
 - II-1. Somme des puissances d'entiers

Illustration de $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$



II-2. Sommes géométriques

Proposition 2.2 (Factorisations de $a^n - b^n$ et $a^n + b^n$)

Soit a et b des nombres complexes et n un entier. Alors :

II-2. Sommes géométriques

Proposition 2.2 (Factorisations de $a^n - b^n$ et $a^n + b^n$)

Soit a et b des nombres complexes et n un entier. Alors :

$$\blacktriangleright a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k;$$

II-2. Sommes géométriques

Proposition 2.2 (Factorisations de $a^n - b^n$ et $a^n + b^n$)

Soit a et b des nombres complexes et n un entier. Alors :

- ▶ $a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k;$
- ▶ En particulier : $a^n - 1 = (a - 1) \sum_{k=0}^{n-1} a^k.$

II-2. Sommes géométriques

Proposition 2.2 (Factorisations de $a^n - b^n$ et $a^n + b^n$)

Soit a et b des nombres complexes et n un entier. Alors :

- ▶ $a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k;$
- ▶ En particulier : $a^n - 1 = (a - 1) \sum_{k=0}^{n-1} a^k.$
- ▶ si n est impair : $a^n + b^n =$

II-2. Sommes géométriques

Proposition 2.2 (Factorisations de $a^n - b^n$ et $a^n + b^n$)

Soit a et b des nombres complexes et n un entier. Alors :

- ▶ $a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k;$
- ▶ En particulier : $a^n - 1 = (a - 1) \sum_{k=0}^{n-1} a^k.$
- ▶ si n est impair : $a^n + b^n = (a + b) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^{n-1-k} b^k;$

II-2. Sommes géométriques

Proposition 2.2 (Factorisations de $a^n - b^n$ et $a^n + b^n$)

Soit a et b des nombres complexes et n un entier. Alors :

- ▶ $a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k;$
- ▶ En particulier : $a^n - 1 = (a - 1) \sum_{k=0}^{n-1} a^k.$
- ▶ si n est impair : $a^n + b^n = (a + b) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^{n-1-k} b^k;$

Exemple 2.3

1. Que retrouve-t-on pour $n = 2$?

II-2. Sommes géométriques

Proposition 2.2 (Factorisations de $a^n - b^n$ et $a^n + b^n$)

Soit a et b des nombres complexes et n un entier. Alors :

- ▶ $a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k;$
- ▶ En particulier : $a^n - 1 = (a - 1) \sum_{k=0}^{n-1} a^k.$
- ▶ si n est impair : $a^n + b^n = (a + b) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^{n-1-k} b^k;$

Exemple 2.3

1. Que retrouve-t-on pour $n = 2$?
2. Racines de $1 + X + X^2$?

II-2. Sommes géométriques

Proposition 2.2 (Factorisations de $a^n - b^n$ et $a^n + b^n$)

Soit a et b des nombres complexes et n un entier. Alors :

- ▶ $a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k;$
- ▶ En particulier : $a^n - 1 = (a - 1) \sum_{k=0}^{n-1} a^k.$
- ▶ si n est impair : $a^n + b^n = (a + b) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^{n-1-k} b^k;$

Exemple 2.3

1. Que retrouve-t-on pour $n = 2$?
2. **Racines** de $1 + X + X^2$? **de $1 + X + X^2 + X^3$?**

Proposition 2.4 (Sommes géométriques)

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors :

Proposition 2.4 (Sommes géométriques)

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Proposition 2.4 (Sommes géométriques)

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors :

► si $z \neq 1$,
$$\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Proposition 2.4 (Sommes géométriques)

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors :

- ▶ si $z = 1$, $\sum_{k=0}^n z^k = n + 1$;
- ▶ si $z \neq 1$, $\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$.

Proposition 2.4 (Sommes géométriques)

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors :

- ▶ si $z = 1$, $\sum_{k=0}^n z^k = n + 1$;
- ▶ si $z \neq 1$, $\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$.

Exemples 2.5

1. Calculer $\sum_{k=0}^{4n} (2i)^k$.

Proposition 2.4 (Sommes géométriques)

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors :

- ▶ si $z = 1$, $\sum_{k=0}^n z^k = n + 1$;
- ▶ si $z \neq 1$, $\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$.

Exemples 2.5

1. Calculer $\sum_{k=0}^{4n} (2i)^k$.
2. Calculer $\sum_{k=0}^n p^{2k}$.

Proposition 2.4 (Sommes géométriques)

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors :

- ▶ si $z = 1$, $\sum_{k=0}^n z^k = n + 1$;
- ▶ si $z \neq 1$, $\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$.

Exemples 2.5

1. Calculer $\sum_{k=0}^{4n} (2i)^k$.
2. Calculer $\sum_{k=0}^n p^{2k}$.
3. Calculer, pour $n \geq 4$, $\sum_{k=6}^{n+2} e^{-3k}$.

II-3. Formule du binôme

Définition 2.6 (Coefficient binomial, définition algébrique)

Coefficient binomial :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

II-3. Formule du binôme

Définition 2.6 (Coefficient binomial, définition algébrique)

Coefficient binomial :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ si } n \in \mathbb{N}, \text{ et } k \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

II-3. Formule du binôme

Définition 2.6 (Coefficient binomial, définition algébrique)

Coefficient binomial :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ si } n \in \mathbb{N}, \text{ et } k \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

Il est nul sinon.

II-3. Formule du binôme

Définition 2.6 (Coefficient binomial, définition algébrique)

Coefficient binomial :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ si } n \in \mathbb{N}, \text{ et } k \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

Proposition 2.7 (interprétation combinatoire des coefficients binomiaux, admis)

$$\binom{n}{k} = |\mathcal{P}_k(E)|, \text{ pour } |E| = n.$$

Proposition 2.8 (symétrie des coefficients binomiaux)

De façon évidente, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Proposition 2.8 (symétrie des coefficients binomiaux)

De façon évidente, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Proposition 2.9 (Valeurs particulières à retenir)

Pour tout $n > 0$:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1,$$

Proposition 2.8 (symétrie des coefficients binomiaux)

De façon évidente, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Proposition 2.9 (Valeurs particulières à retenir)

Pour tout $n > 0$:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n,$$

Proposition 2.8 (symétrie des coefficients binomiaux)

De façon évidente, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Proposition 2.9 (Valeurs particulières à retenir)

Pour tout $n > 0$:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n,$$

$$\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Proposition 2.10 (Formule de Pascal)

Pour tout $(n, p) \in \mathbb{Z} \setminus \{(-1, -1)\}$, $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

Proposition 2.10 (Formule de Pascal)

Pour tout $(n, p) \in \mathbb{Z} \setminus \{(-1, -1)\}$,
$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Théorème 2.11 (Formule comité-président)

Pour tout $(n, k) \in \mathbb{Z}$,

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

Proposition 2.10 (Formule de Pascal)

Pour tout $(n, p) \in \mathbb{Z} \setminus \{(-1, -1)\}$,
$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Théorème 2.11 (Formule comité-président)

Pour tout $(n, k) \in \mathbb{Z}$,

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

Grâce à Pascal, on peut contruire les coefficients binomiaux par ligne, de proche en proche (**triangle de Pascal**).

Proposition 2.10 (Formule de Pascal)

Pour tout $(n, p) \in \mathbb{Z} \setminus \{(-1, -1)\}$,
$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Théorème 2.11 (Formule comité-président)

Pour tout $(n, k) \in \mathbb{Z}$,

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

Grâce à Pascal, on peut contruire les coefficients binomiaux par ligne, de proche en proche (triangle de Pascal).

Y penser pour trouver les **coefficients du développement du binôme** !

II. Sommes classiques à connaître

II-3. Formule du binôme

$n = 0$	(0)	$k = 0$ 1	(0)	$k = 1$ 1	(0)	$k = 2$ 1	(0)	$k = 3$ 1	(0)	$k = 4$ 1	(0)	$k = 5$ 1	(0)	$k = 6$ 1	(0)	$k = 7$ 1	(0)	$k = 8$ 1	(0)	$k = 9$ 1	(0)	$k = 10$ 1	(0)																								
$n = 1$	(0)	1	1	(0)	1	1	(0)	1	1	(0)	1	1	(0)	1	1	(0)	1	1	(0)	1	1	(0)	1	1																							
$n = 2$	(0)	1	2	1	(0)	1	3	3	1	(0)	1	4	6	4	1	(0)	1	6	6	4	1	(0)	1	7	7																						
$n = 3$	(0)	1	3	3	1	(0)	1	4	6	4	1	(0)	1	6	6	4	1	(0)	1	7	7	6	4	1	(0)	1	8	8	6	4	1	(0)	1	9	9	7	6	4	1	(0)							
$n = 4$	(0)	1	4	6	4	1	(0)	1	6	6	4	1	(0)	1	7	7	6	4	1	(0)	1	8	8	6	4	1	(0)	1	9	10	10	8	6	4	1	(0)	1	10	10	8	6	4	1	(0)			
$n = 5$	(0)	1	5	10	10	5	1	(0)	1	7	14	14	7	1	(0)	1	8	16	16	8	1	(0)	1	9	18	18	9	1	(0)	1	10	20	20	10	1	(0)	1	11	21	21	10	9	1	(0)			
$n = 6$	(0)	1	6	15	20	15	6	1	(0)	1	8	18	21	18	8	1	(0)	1	9	20	21	18	9	6	1	(0)	1	10	22	25	21	18	9	6	1	(0)	1	11	22	21	18	9	6	1	(0)		
$n = 7$	(0)	1	7	21	35	35	21	7	1	(0)	1	9	21	28	21	9	1	(0)	1	10	22	25	21	10	7	1	(0)	1	11	24	28	21	10	7	1	(0)	1	12	24	21	10	7	1	(0)			
$n = 8$	(0)	1	8	28	56	70	56	28	8	1	(0)	1	10	25	35	25	10	1	(0)	1	11	25	30	21	11	8	1	(0)	1	12	26	30	21	11	8	1	(0)	1	13	26	21	11	8	1	(0)		
$n = 9$	(0)	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	(0)	1	11	28	36	28	11	1	(0)	1	12	27	30	21	12	9	1	(0)	1	13	28	30	21	12	9	1	(0)	1	14	28	21	12	9	1	(0)	
$n = 10$	(0)	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	(0)	1	12	30	36	28	12	1	(0)	1	13	28	30	21	13	10	1	(0)	1	14	29	30	21	13	10	1	(0)	1	15	29	21	13	10	1	(0)

II. Sommes classiques à connaître

II-3. Formule du binôme

$n = 0$	(0)	$k = 0$ 1	(0)	$k = 1$ 1	(0)	$k = 2$ 1	(0)	$k = 3$ 1	(0)	$k = 4$ 1	(0)	$k = 5$ 1	(0)	$k = 6$ 1	(0)	$k = 7$ 1	(0)	$k = 8$ 1	(0)	$k = 9$ 1	(0)	$k = 10$ 1	(0)				
$n = 1$	(0)	1	1	(0)	1	3	3	1	(0)	1	6	6	1	(0)	1	10	10	1	(0)	1	20	20	1	(0)			
$n = 2$	(0)	1	2	1	(0)	1	3	3	1	(0)	1	6	6	1	(0)	1	10	10	1	(0)	1	20	20	1	(0)		
$n = 3$	(0)	1	3	3	1	(0)	1	3	3	1	(0)	1	6	6	1	(0)	1	10	10	1	(0)	1	20	20	1	(0)	
$n = 4$	(0)	1	4	6	4	1	(0)	1	3	3	1	(0)	1	6	6	1	(0)	1	10	10	1	(0)	1	20	20	1	(0)
$n = 5$	(0)																										
$n = 6$	(0)																										
$n = 7$	(0)																										
$n = 8$	(0)																										
$n = 9$	(0)																										
$n = 10$	(0)																										

II. Sommes classiques à connaître

II-3. Formule du binôme

$n = 0$	(0)	$k = 0$ 1	(0)	$k = 1$ 1	(0)	$k = 2$ 1	(0)	$k = 3$ 1	(0)	$k = 4$ 1	(0)	$k = 5$ 1	(0)	$k = 6$ 1	(0)	$k = 7$ 1	(0)	$k = 8$ 1	(0)	$k = 9$ 1	(0)	$k = 10$ 1	(0)	
$n = 1$	(0)	1	1	(0)	1	3	3	1	(0)	1	4	6	4	1	(0)	1	6	15	10	1	(0)	1	10	45
$n = 2$	(0)	1	2	1	(0)	1	3	3	1	(0)	1	4	6	4	1	(0)	1	6	15	10	1	(0)	1	10
$n = 3$	(0)	1	3	3	1	(0)	1	3	3	1	(0)	1	4	6	4	1	(0)	1	6	15	10	1	(0)	1
$n = 4$	(0)	1	4	6	4	1	(0)	1	3	3	1	(0)	1	4	6	4	1	(0)	1	6	15	10	1	(0)
$n = 5$	(0)	1																						
$n = 6$	(0)																							
$n = 7$	(0)																							
$n = 8$	(0)																							
$n = 9$	(0)																							
$n = 10$	(0)																							

II-3. Formule du binôme

II-3. Formule du binôme

II-3. Formule du binôme

II. Sommes classiques à connaître

II-3. Formule du binôme

$n = 0$	(0)	$k=0$ 1	$k=1$ (0)	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$													
$n = 1$	(0)	1	1	(0)																
$n = 2$	(0)	1	2	1	(0)															
$n = 3$	(0)	1	3	3	1	(0)														
$n = 4$	(0)	1	4	6	4	1	(0)													
$n = 5$	(0)	1	5	10																
$n = 6$	(0)																			
$n = 7$	(0)																			
$n = 8$	(0)																			
$n = 9$	(0)																			
$n = 10$	(0)																			

II-3. Formule du binôme

II. Sommes classiques à connaître

II-3. Formule du binôme

$n = 0$	(0)	$k = 0$ 1	$k = 1$ (0)	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$													
$n = 1$	(0)	1	1	(0)																
$n = 2$	(0)	1	2	1	(0)															
$n = 3$	(0)	1	3	3	1	(0)														
$n = 4$	(0)	1	4	6	4	1	(0)													
$n = 5$	(0)	1	5	10	10															
$n = 6$	(0)																			
$n = 7$	(0)																			
$n = 8$	(0)																			
$n = 9$	(0)																			
$n = 10$	(0)																			

II-3. Formule du binôme

II. Sommes classiques à connaître

II-3. Formule du binôme

		$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$													
$n=0$	(0)	1	(0)																	
$n=1$	(0)	1	1	(0)																
$n=2$	(0)	1	2	1	(0)															
$n=3$	(0)	1	3	3	1	(0)														
$n=4$	(0)	1	4	6	4	1	(0)													
					+															
$n=5$	(0)	1	5	10	10	5		(0)	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$	$k=10$							
$n=6$	(0)																			
$n=7$	(0)																			
$n=8$	(0)																			
$n=9$	(0)																			
$n=10$	(0)																			(0)

II-3. Formule du binôme

II. Sommes classiques à connaître

II-3. Formule du binôme

$n = 0$	(0)	$k = 0$ 1	$k = 1$ (0)	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$	$k = 9$	$k = 10$	(0)
$n = 1$	(0)	1	1	(0)									
$n = 2$	(0)	1	2	1	(0)								
$n = 3$	(0)	1	3	3	1	(0)							
$n = 4$	(0)	1	4	6	4	1	(0)						
$n = 5$	(0)	1	5	10	10	5	1	(0)					
$n = 6$	(0)												
$n = 7$	(0)												
$n = 8$	(0)												
$n = 9$	(0)												
$n = 10$	(0)												(0)

Diagram illustrating the binomial coefficients for $n = 0$ to $n = 10$ and $k = 0$ to $k = 10$. The coefficients are arranged in a grid. The value 1 is highlighted in yellow for $n=4, k=4$ and $n=5, k=5$, with an arrow indicating the addition of these two values to form the coefficient 2 for $n=5, k=4$.

II. Sommes classiques à connaître

II-3. Formule du binôme

		$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																		</
--	--	---------	---------	---------	---------	---------	---------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	----

II-3. Formule du binôme

II-3. Formule du binôme

II-3. Formule du binôme

II. Sommes classiques à connaître

II-3. Formule du binôme

$n = 0$	(0)	$k=0$ 1	$k=1$ (0)	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$	$k=10$	(0)
$n = 1$	(0)	1	1	(0)									
$n = 2$	(0)	1	2	1	(0)								
$n = 3$	(0)	1	3	3	1	(0)							
$n = 4$	(0)	1	4	6	4	1	(0)						
$n = 5$	(0)	1	5	10	10	5	1	(0)					
$n = 6$	(0)	1	6	15	20	15			(0)				
$n = 7$	(0)									(0)			
$n = 8$	(0)										(0)		
$n = 9$	(0)											(0)	
$n = 10$	(0)												(0)

II. Sommes classiques à connaître

II-3. Formule du binôme

$n = 0$	(0)	$k=0$ 1	$k=1$ (0)	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$	$k=10$	(0)
$n = 1$	(0)	1	1	(0)									
$n = 2$	(0)	1	2	1	(0)								
$n = 3$	(0)	1	3	3	1	(0)							
$n = 4$	(0)	1	4	6	4	1	(0)						
$n = 5$	(0)	1	5	10	10	5	1	(0)					
$n = 6$	(0)	1	6	15	20	15	6		(0)				
$n = 7$	(0)									(0)			
$n = 8$	(0)										(0)		
$n = 9$	(0)											(0)	
$n = 10$	(0)												(0)

II. Sommes classiques à connaître

II-3. Formule du binôme

		$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$	$k=10$
$n=0$	(0)	1	(0)									
$n=1$	(0)	1	1	(0)								
$n=2$	(0)	1	2	1	(0)							
$n=3$	(0)	1	3	3	1	(0)						
$n=4$	(0)	1	4	6	4	1	(0)					
$n=5$	(0)	1	5	10	10	5	1	(0)				
$n=6$	(0)	1	6	15	20	15	6	1	(0)			
$n=7$	(0)									(0)		
$n=8$	(0)										(0)	
$n=9$	(0)											(0)
$n=10$	(0)											(0)

II. Sommes classiques à connaître

II-3. Formule du binôme

$n = 0$	(0)	$k=0$ 1	$k=1$ (0)	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$	$k=10$
$n = 1$	(0)	1	1	(0)								
$n = 2$	(0)	1	2	1	(0)							
$n = 3$	(0)	1	3	3	1	(0)						
$n = 4$	(0)	1	4	6	4	1	(0)					
$n = 5$	(0)	1	5	10	10	5	1	(0)				
$n = 6$	(0)	1	6	15	20	15	6	1	(0)			
$n = 7$	(0)	1	7	21	35	35	21	7	1	(0)		
$n = 8$	(0)										(0)	
$n = 9$	(0)											(0)
$n = 10$	(0)											(0)

II. Sommes classiques à connaître

II-3. Formule du binôme

$n = 0$	(0)	$k=0$ 1	$k=1$ (0)	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$	$k=10$
$n = 1$	(0)	1	1	(0)								
$n = 2$	(0)	1	2	1	(0)							
$n = 3$	(0)	1	3	3	1	(0)						
$n = 4$	(0)	1	4	6	4	1	(0)					
$n = 5$	(0)	1	5	10	10	5	1	(0)				
$n = 6$	(0)	1	6	15	20	15	6	1	(0)			
$n = 7$	(0)	1	7	21	35	35	21	7	1	(0)		
$n = 8$	(0)	1	8	28	56	70	56	28	8	1	(0)	
$n = 9$	(0)											(0)
$n = 10$	(0)											(0)

II-3. Formule du binôme

II. Sommes classiques à connaître

II-3. Formule du binôme

$n = 0$	(0)	$k=0$ 1	$k=1$ (0)	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$	$k=10$	(0)
$n = 1$	(0)	1	1	(0)									
$n = 2$	(0)	1	2	1	(0)								
$n = 3$	(0)	1	3	3	1	(0)							
$n = 4$	(0)	1	4	6	4	1	(0)						
$n = 5$	(0)	1	5	10	10	5	1	(0)					
$n = 6$	(0)	1	6	15	20	15	6	1	(0)				
$n = 7$	(0)	1	7	21	35	35	21	7	1	(0)			
$n = 8$	(0)	1	8	28	56	70	56	28	8	1	(0)		
$n = 9$	(0)	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	(0)	
$n = 10$	(0)	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	(0)

└ II. Sommes classiques à connaître

└ II-3. Formule du binôme

Note historique 2.12

Pascal n'a pas inventé le triangle. Il n'a fait que démontrer certaines propriétés jusque-là admises.

Théorème 2.13 (Formule du binôme de Newton)

Soit a et b deux nombres complexes, et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Théorème 2.13 (Formule du binôme de Newton)

Soit a et b deux nombres complexes, et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Cette formule **reste vraie dans un anneau quelconque**, (par exemple pour des matrices), mais à condition que **a et b commutent** c'est-à-dire $ab = ba$.

Théorème 2.13 (Formule du binôme de Newton)

Soit a et b deux nombres complexes, et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Cette formule reste vraie dans un anneau quelconque, (par exemple pour des matrices), mais à condition que a et b commutent c'est-à-dire $ab = ba$.

Note historique 2.14

Newton n'a pas inventé la formule du binôme ! Il n'a fait que la généraliser.

└ II. Sommes classiques à connaître

└ II-4. Retour sur les sommes de puissances d'entiers

II-4. Retour sur les sommes de puissances d'entiers

$$S_n(p) = \sum_{k=1}^n k^p.$$

II-4. Retour sur les sommes de puissances d'entiers

$$S_n(p) = \sum_{k=1}^n k^p.$$

Méthode 2.15 (Calcul de proche en proche des $S_n(p)$)

► Considérer la somme :

$$S = \sum_{k=1}^n ((1+k)^{p+1} - k^{p+1}).$$

II-4. Retour sur les sommes de puissances d'entiers

$$S_n(p) = \sum_{k=1}^n k^p.$$

Méthode 2.15 (Calcul de proche en proche des $S_n(p)$)

- Considérer la somme :

$$S = \sum_{k=1}^n ((1+k)^{p+1} - k^{p+1}).$$

- La calculer comme somme télescopique

II-4. Retour sur les sommes de puissances d'entiers

$$S_n(p) = \sum_{k=1}^n k^p.$$

Méthode 2.15 (Calcul de proche en proche des $S_n(p)$)

- Considérer la somme :

$$S = \sum_{k=1}^n ((1+k)^{p+1} - k^{p+1}).$$

- La calculer comme somme télescopique
- D'un autre côté, développer par la formule du binôme et séparer.