Alain Troesch
Cours de mathématiques, MP2I
Lycée Louis-Le-Grand (Paris)
Année scolaire 2021/2022

Fondements – Chapitre 6

Nombres réels

I. Un mot sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

I-1. Les entiers naturels

I. Un mot sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

I-1. Les entiers naturels

définition de $\mathbb{N}$

Par induction structurelle, à partir de l'élément 0 et de la relation de successeur.

I. Un mot sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

I-1. Les entiers naturels

définition de $\mathbb{N}$

Par induction structurelle, à partir de l'élément 0 et de la relation de successeur.

Proposition 1.1 (Axiome de récurrence)

Soit $\mathcal{P}$ une propriété définie sur $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$(\mathcal{P}(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)))) \Longrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}(n)).$$

Théorème 1.2 (propriété fondamentale de $\mathbb{N}$)

Tout sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

Théorème 1.2 (propriété fondamentale de $\mathbb{N}$)

Tout sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

Corollaire 1.3

Tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Théorème 1.2 (propriété fondamentale de $\mathbb{N}$)

Tout sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

Corollaire 1.3

Tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Théorème 1.4

La propriété fondamentale de $\mathbb{N}$ est équivalente à l'axiome de récurrence.

Définition de l'addition et de la multiplication

Définition de l'addition et de la multiplication

- addition définie par récurrence sur b :

$$a + 0 = a \qquad \text{et} \qquad a + (b + 1) = (a + b) + 1.$$

Définition de l'addition et de la multiplication

- addition définie par récurrence sur b :

$$a + 0 = a \qquad \text{et} \qquad a + (b + 1) = (a + b) + 1.$$

- multiplication définie par récurrence sur b :

$$a \times 0 = 0 \qquad \text{et} \qquad a \times (b + 1) = (a \times b) + a.$$

Proposition 1.5 (propriétés de $+$ et $\times$ sur $\mathbb{N}$)

Soit a, b et c des éléments de $\mathbb{N}$:

Proposition 1.5 (propriétés de $+$ et $\times$ sur $\mathbb{N}$)

Soit a, b et c des éléments de $\mathbb{N}$:

- $a + 0 = a$ (0 est élément neutre pour $+$)

Proposition 1.5 (propriétés de $+$ et $\times$ sur $\mathbb{N}$)

Soit a, b et c des éléments de $\mathbb{N}$:

- $a + 0 = a$ (0 est élément neutre pour $+$)
- $0 + a = a$ (0 est élément neutre pour $+$)

Proposition 1.5 (propriétés de $+$ et $\times$ sur $\mathbb{N}$)

Soit a, b et c des éléments de $\mathbb{N}$:

- $a + 0 = a$ (0 est élément neutre pour $+$)
- $0 + a = a$ (0 est élément neutre pour $+$)
- $a \times 0 = 0 \times a = 0$ (0 est absorbant pour $\times$)

Proposition 1.5 (propriétés de $+$ et $\times$ sur $\mathbb{N}$)

Soit a, b et c des éléments de $\mathbb{N}$:

- $a + 0 = a$ (0 est élément neutre pour $+$)
- $0 + a = a$ (0 est élément neutre pour $+$)
- $a \times 0 = 0 \times a = 0$ (0 est absorbant pour $\times$)
- $a + 1 = 1 + a$

Proposition 1.5 (propriétés de $+$ et $\times$ sur $\mathbb{N}$)

Soit a, b et c des éléments de $\mathbb{N}$:

- $a + 0 = a$ (0 est élément neutre pour $+$)
- $0 + a = a$ (0 est élément neutre pour $+$)
- $a \times 0 = 0 \times a = 0$ (0 est absorbant pour $\times$)
- $a + 1 = 1 + a$
- $a \times 1 = 1 \times a = a$ (1 est neutre pour $\times$)

Proposition 1.5 (propriétés de $+$ et $\times$ sur $\mathbb{N}$)

Soit a, b et c des éléments de $\mathbb{N}$:

- $a + 0 = a$ (0 est élément neutre pour $+$)
- $0 + a = a$ (0 est élément neutre pour $+$)
- $a \times 0 = 0 \times a = 0$ (0 est absorbant pour $\times$)
- $a + 1 = 1 + a$
- $a \times 1 = 1 \times a = a$ (1 est neutre pour $\times$)
- $(a + b) + c = a + (b + c)$ ($+$ est associative)

Proposition 1.5 (propriétés de $+$ et $\times$ sur $\mathbb{N}$)

Soit a, b et c des éléments de $\mathbb{N}$:

- $a + 0 = a$ (0 est élément neutre pour $+$)
- $0 + a = a$ (0 est élément neutre pour $+$)
- $a \times 0 = 0 \times a = 0$ (0 est absorbant pour $\times$)
- $a + 1 = 1 + a$
- $a \times 1 = 1 \times a = a$ (1 est neutre pour $\times$)
- $(a + b) + c = a + (b + c)$ ($+$ est associative)
- $a + b = b + a$ ($+$ est commutative)

Proposition 1.5 (propriétés de $+$ et $\times$ sur $\mathbb{N}$)

Soit a, b et c des éléments de $\mathbb{N}$:

- $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ ($\times$ est distributive sur $+$)

Proposition 1.5 (propriétés de $+$ et $\times$ sur $\mathbb{N}$)

Soit a, b et c des éléments de $\mathbb{N}$:

- $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ ($\times$ est distributive sur $+$)
- $a \times b = b \times a$ ($\times$ est commutative)

Proposition 1.5 (propriétés de $+$ et $\times$ sur $\mathbb{N}$)

Soit a, b et c des éléments de $\mathbb{N}$:

- $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ ($\times$ est distributive sur $+$)
- $a \times b = b \times a$ ($\times$ est commutative)
- $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ ($\times$ est associative)

Proposition 1.5 (propriétés de $+$ et $\times$ sur $\mathbb{N}$)

Soit a, b et c des éléments de $\mathbb{N}$:

- $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ ($\times$ est distributive sur $+$)
- $a \times b = b \times a$ ($\times$ est commutative)
- $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ ($\times$ est associative)
- $ab = 0 \Longrightarrow a = 0$ ou $b = 0$ (intégrité de $(\mathbb{N}, \times)$)

Proposition 1.5 (propriétés de $+$ et $\times$ sur $\mathbb{N}$)

Soit a, b et c des éléments de $\mathbb{N}$:

- $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ ($\times$ est distributive sur $+$)
- $a \times b = b \times a$ ($\times$ est commutative)
- $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ ($\times$ est associative)
- $ab = 0 \Longrightarrow a = 0$ ou $b = 0$ (intégrité de $(\mathbb{N}, \times)$)
- $a + b = 0 \Longrightarrow a = 0$ et $b = 0$

Proposition 1.5 (propriétés de $+$ et $\times$ sur $\mathbb{N}$)

Soit a, b et c des éléments de $\mathbb{N}$:

- $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ ($\times$ est distributive sur $+$)
- $a \times b = b \times a$ ($\times$ est commutative)
- $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ ($\times$ est associative)
- $ab = 0 \implies a = 0$ ou $b = 0$ (intégrité de $(\mathbb{N}, \times)$)
- $a + b = 0 \implies a = 0$ et $b = 0$
- $a + b = a + c \implies b = c$ (régularité pour $+$)

Proposition 1.5 (propriétés de $+$ et $\times$ sur $\mathbb{N}$)

Soit a, b et c des éléments de $\mathbb{N}$:

- $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ ($\times$ est distributive sur $+$)
- $a \times b = b \times a$ ($\times$ est commutative)
- $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ ($\times$ est associative)
- $ab = 0 \implies a = 0$ ou $b = 0$ (intégrité de $(\mathbb{N}, \times)$)
- $a + b = 0 \implies a = 0$ et $b = 0$
- $a + b = a + c \implies b = c$ (régularité pour $+$)
- Si $a \neq 0$, $ab = ac \implies b = c$ (régularité pour $\times$)

Proposition 1.6 (Relation d'ordre, somme et produit)

Soit a, b, c, d des entiers naturels. Alors

Proposition 1.6 (Relation d'ordre, somme et produit)

Soit a, b, c, d des entiers naturels. Alors

- si $a \leqslant c$ et $b \leqslant d$ alors $a + b \leqslant c + d$

Proposition 1.6 (Relation d'ordre, somme et produit)

Soit a, b, c, d des entiers naturels. Alors

- si $a \leqslant c$ et $b \leqslant d$ alors $a + b \leqslant c + d$ avec égalité si et seulement si $a = c$ et $b = d$

Proposition 1.6 (Relation d'ordre, somme et produit)

Soit a, b, c, d des entiers naturels. Alors

- si $a \leqslant c$ et $b \leqslant d$ alors $a + b \leqslant c + d$ avec égalité si et seulement si $a = c$ et $b = d$
- si $0 < a \leqslant c$ et $0 < b \leqslant d$ alors $ab \leqslant cd$

.

Proposition 1.6 (Relation d'ordre, somme et produit)

Soit a, b, c, d des entiers naturels. Alors

- si $a \leqslant c$ et $b \leqslant d$ alors $a + b \leqslant c + d$ avec égalité si et seulement si $a = c$ et $b = d$
- si $0 < a \leqslant c$ et $0 < b \leqslant d$ alors $ab \leqslant cd$ avec égalité si et seulement si $a = c$ et $b = d$.

I-2. Les entiers relatifs

Définition des entiers relatifs

Ils sont représentés par des couples (a, b) (représentant l'entier $a - b$).

I-2. Les entiers relatifs

Définition des entiers relatifs

Ils sont représentés par des couples (a, b) (représentant l'entier $a - b$). Pour éviter les redondances, on quotiente par la relation d'équivalence :

$$(a, b) \sim (a', b') \iff a + b' = a' + b.$$

I-2. Les entiers relatifs

Définition des entiers relatifs

Ils sont représentés par des couples (a, b) (représentant l'entier $a - b$). Pour éviter les redondances, on quotiente par la relation d'équivalence :

$$(a, b) \sim (a', b') \Longleftrightarrow a + b' = a' + b.$$

Représentants privilégiés :

- $(n, 0)$ pour l'entier positif n,
- $(0, n)$ pour l'entier négatif $-n$.

I-2. Les entiers relatifs

Définition des entiers relatifs

Ils sont représentés par des couples (a, b) (représentant l'entier $a - b$). Pour éviter les redondances, on quotiente par la relation d'équivalence :

$$(a, b) \sim (a', b') \Longleftrightarrow a + b' = a' + b.$$

Représentants privilégiés :

- $(n, 0)$ pour l'entier positif n,
- $(0, n)$ pour l'entier négatif $-n$.

I-2. Les entiers relatifs

Définition des entiers relatifs

Ils sont représentés par des couples (a, b) (représentant l'entier $a - b$). Pour éviter les redondances, on quotiente par la relation d'équivalence :

$$(a, b) \sim (a', b') \Longleftrightarrow a + b' = a' + b.$$

Représentants privilégiés :

- $(n, 0)$ pour l'entier positif n,
- $(0, n)$ pour l'entier négatif $-n$.

Les opérations $+$ et $\times$ et la relation $\leqslant$ se prolongent à $\mathbb{Z}$,

I-2. Les entiers relatifs

Définition des entiers relatifs

Ils sont représentés par des couples (a, b) (représentant l'entier $a - b$). Pour éviter les redondances, on quotiente par la relation d'équivalence :

$$(a, b) \sim (a', b') \iff a + b' = a' + b.$$

Représentants privilégiés :

- $(n, 0)$ pour l'entier positif n,
- $(0, n)$ pour l'entier négatif $-n$.

en

faisant de celui-ci un anneau.

Proposition 1.7 ($\mathbb{Z}$ peut être vu comme un prolongement de $\mathbb{N}$)

L'application :

$$\begin{array}{rcl} i : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & \overline{(n,0)} \end{array}$$

est une injection compatible avec les lois $+$ et $\times$.

Proposition 1.7 ($\mathbb{Z}$ peut être vu comme un prolongement de $\mathbb{N}$)

L'application :

$$i : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & \overline{(n,0)} \end{array}$$

est une injection compatible avec les lois $+$ et $\times$.

Proposition 1.8 (Compatibilité de la relation d'ordre avec le produit)

1. Soit $c \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour tout $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$,

$$a < b \iff ac < bc \qquad \text{et} \qquad a \leqslant b \iff ac \leqslant bc.$$

Proposition 1.7 ($\mathbb{Z}$ peut être vu comme un prolongement de $\mathbb{N}$)

L'application :

$$\begin{array}{rcl} i : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & \overline{(n,0)} \end{array}$$

est une injection compatible avec les lois $+$ et $\times$.

Proposition 1.8 (Compatibilité de la relation d'ordre avec le produit)

1. Soit $c \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$,

$$a < b \Longleftrightarrow ac < bc \qquad \text{et} \qquad a \leqslant b \Longleftrightarrow ac \leqslant bc.$$

2. Soit $c \in \mathbb{Z}_-^*$. Alors, pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$,

$$a < b \Longleftrightarrow ac > bc \qquad \text{et} \qquad a \leqslant b \Longleftrightarrow ac \geqslant bc.$$

II. Nombres rationnels

II-1. Construction de $\mathbb{Q}$

II. Nombres rationnels

II-1. Construction de $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ est le quotient de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ par la relation telle que :

$$(a, b) \equiv (c, d) \qquad \Longleftrightarrow \qquad ad - bc = 0.$$

II. Nombres rationnels

II-1. Construction de $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ est le quotient de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ par la relation telle que :

$$(a, b) \equiv (c, d) \qquad \Longleftrightarrow \qquad ad - bc = 0.$$

Cette relation donne le cas d'égalité de deux fractions.

II. Nombres rationnels

II-1. Construction de $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ est le quotient de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ par la relation telle que :

$$(a, b) \equiv (c, d) \qquad \Longleftrightarrow \qquad ad - bc = 0.$$

Cette relation donne le cas d'égalité de deux fractions.

Définition 2.1 (Notation usuelle pour un rationnel)

La classe $\overline{(a, b)}$ du couple (a, b) est notée $\frac{a}{b}$.

Théorème 2.2 (Addition et produit de rationnels)

Les lois définies sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ par $(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd)$ et $(a, b) \times (c, d) = (ac, bd)$ passent au quotient, définissant sur $\mathbb{Q}$ les lois :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \qquad \text{et} \qquad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Théorème 2.3 (Propriété des lois de $\mathbb{Q}$)

Théorème 2.3 (Propriété des lois de $\mathbb{Q}$)

- Associativité de $+$ et $\times$

Théorème 2.3 (Propriété des lois de $\mathbb{Q}$)

- Associativité de $+$ et $\times$
- Commutativité de $+$ et $\times$

Théorème 2.3 (Propriété des lois de $\mathbb{Q}$)

- Associativité de $+$ et $\times$
- Commutativité de $+$ et $\times$
- Distributivité de $\times$ sur $+$

Théorème 2.3 (Propriété des lois de $\mathbb{Q}$)

- Associativité de $+$ et $\times$
- Commutativité de $+$ et $\times$
- Distributivité de $\times$ sur $+$
- L'élément $0 = \frac{0}{1}$ est neutre pour $+$,

Théorème 2.3 (Propriété des lois de $\mathbb{Q}$)

- Associativité de $+$ et $\times$
- Commutativité de $+$ et $\times$
- Distributivité de $\times$ sur $+$
- L'élément $0 = \frac{0}{1}$ est neutre pour $+$, et tout élément $\frac{a}{b}$ admet un opposé $\frac{-a}{b}$

Théorème 2.3 (Propriété des lois de $\mathbb{Q}$)

- Associativité de $+$ et $\times$
- Commutativité de $+$ et $\times$
- Distributivité de $\times$ sur $+$
- L'élément $0 = \frac{0}{1}$ est neutre pour $+$, et tout élément $\frac{a}{b}$ admet un opposé $\frac{-a}{b}$
- $\frac{a}{b} = 0$ si et seulement si $a = 0$.

Théorème 2.3 (Propriété des lois de $\mathbb{Q}$)

- Associativité de $+$ et $\times$
- Commutativité de $+$ et $\times$
- Distributivité de $\times$ sur $+$
- L'élément $0 = \frac{0}{1}$ est neutre pour $+$, et tout élément $\frac{a}{b}$ admet un opposé $\frac{-a}{b}$
- $\frac{a}{b} = 0$ si et seulement si $a = 0$.
- L'élément $1 = \frac{1}{1}$ est neutre pour $\times$,

Théorème 2.3 (Propriété des lois de $\mathbb{Q}$)

- Associativité de $+$ et $\times$
- Commutativité de $+$ et $\times$
- Distributivité de $\times$ sur $+$
- L'élément $0 = \frac{0}{1}$ est neutre pour $+$, et tout élément $\frac{a}{b}$ admet un opposé $\frac{-a}{b}$
- $\frac{a}{b} = 0$ si et seulement si $a = 0$.
- L'élément $1 = \frac{1}{1}$ est neutre pour $\times$, et tout élément $\frac{a}{b}$ non nul est inversible, d'inverse $\frac{b}{a}$.

Théorème 2.3 (Propriété des lois de $\mathbb{Q}$)

- Associativité de $+$ et $\times$
- Commutativité de $+$ et $\times$
- Distributivité de $\times$ sur $+$
- L'élément $0 = \frac{0}{1}$ est neutre pour $+$, et tout élément $\frac{a}{b}$ admet un opposé $\frac{-a}{b}$
- $\frac{a}{b} = 0$ si et seulement si $a = 0$.
- L'élément $1 = \frac{1}{1}$ est neutre pour $\times$, et tout élément $\frac{a}{b}$ non nul est inversible, d'inverse $\frac{b}{a}$.

Ainsi, $\mathbb{Q}$ est un corps.

Théorème 2.3 (Propriété des lois de $\mathbb{Q}$)

- Associativité de $+$ et $\times$
- Commutativité de $+$ et $\times$
- Distributivité de $\times$ sur $+$
- L'élément $0 = \frac{0}{1}$ est neutre pour $+$, et tout élément $\frac{a}{b}$ admet un opposé $\frac{-a}{b}$
- $\frac{a}{b} = 0$ si et seulement si $a = 0$.
- L'élément $1 = \frac{1}{1}$ est neutre pour $\times$, et tout élément $\frac{a}{b}$ non nul est inversible, d'inverse $\frac{b}{a}$.

Ainsi, $\mathbb{Q}$ est un corps.

Remarque 2.4 (Inclusion de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}$)

$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ via l'identification "$a = \frac{a}{1}$".

II-2. Relation d'ordre dans $\mathbb{Q}$

Proposition/Définition 2.5 (Inégalité dans $\mathbb{Q}$)

Soit $q = \frac{a}{b}$ et $r = \frac{c}{d}$ deux rationnels (avec b et d dans $\mathbb{N}^*$). Alors le signe de l'entier relatif $ad - bc$ est indépendant de la représentation choisie (avec un dénominateur positif) de q et q'.

II-2. Relation d'ordre dans $\mathbb{Q}$

Proposition/Définition 2.5 (Inégalité dans $\mathbb{Q}$)

Soit $q = \frac{a}{b}$ et $r = \frac{c}{d}$ deux rationnels (avec b et d dans $\mathbb{N}^*$). Alors le signe de l'entier relatif $ad - bc$ est indépendant de la représentation choisie (avec un dénominateur positif) de q et q'. On définit :

$$q \leqslant r \Longleftrightarrow ad - bc \leqslant 0.$$

II-2. Relation d'ordre dans $\mathbb{Q}$

Proposition/Définition 2.5 (Inégalité dans $\mathbb{Q}$)

Soit $q = \frac{a}{b}$ et $r = \frac{c}{d}$ deux rationnels (avec b et d dans $\mathbb{N}^*$). Alors le signe de l'entier relatif $ad - bc$ est indépendant de la représentation choisie (avec un dénominateur positif) de q et q'. On définit :

$$q \leqslant r \Longleftrightarrow ad - bc \leqslant 0.$$

Théorème 2.6

La relation $\leqslant$ ainsi définie sur $\mathbb{Q}$ est une relation d'ordre total.

III. Nombres réels

III-1. De l'existence de nombres non rationnels

Note historique 3.1

Découverte de l'irrationnalité : 4 ou 5e siècle av JC, par les Grecs.

III. Nombres réels

III-1. De l'existence de nombres non rationnels

Note historique 3.1

Découverte de l'irrationnalité : 4 ou 5e siècle av JC, par les Grecs.

Définition 3.2 (Nombres incommensurables)

Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$. On dit que x et y sont incommensurables si $\frac{x}{y}$ est irrationnel.

III. Nombres réels

III-1. De l'existence de nombres non rationnels

Note historique 3.1

Découverte de l'irrationnalité : 4 ou 5e siècle av JC, par les Grecs.

Définition 3.2 (Nombres incommensurables)

Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$. On dit que x et y sont incommensurables si $\frac{x}{y}$ est irrationnel.

Proposition 3.3 (existence de nombres irrationnels)

$\sqrt{n}$ est soit entier, soit irrationnel.

III. Nombres réels

III-1. De l'existence de nombres non rationnels

Note historique 3.1

Découverte de l'irrationnalité : 4 ou 5e siècle av JC, par les Grecs.

Définition 3.2 (Nombres incommensurables)

Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$. On dit que x et y sont incommensurables si $\frac{x}{y}$ est irrationnel.

Proposition 3.3 (existence de nombres irrationnels)

$\sqrt{n}$ est soit entier, soit irrationnel.

Remarque 3.4

Pour en déduire l'existence de nombres irrationnels, il faut d'abord prouver l'existence de $\sqrt{n}$

III-2. L'ensemble $\mathbb{R}$

En s'approchant trop près du bord de l'intervalle suivant, on tombe du haut de la falaise :

Exemple 3.5 (il manque quelque chose dans $\mathbb{Q}$)

Soit $E = \{x \in \mathbb{Q}_+ \mid x^2 \leqslant 2.\}$. Alors E est borné, et n'admet pas dans $\mathbb{Q}$ de borne supérieure.

III-2. L'ensemble $\mathbb{R}$

En s'approchant trop près du bord de l'intervalle suivant, on tombe du haut de la falaise :

Exemple 3.5 (il manque quelque chose dans $\mathbb{Q}$)

Soit $E = \{x \in \mathbb{Q}_+ \mid x^2 \leqslant 2.\}$. Alors E est borné, et n'admet pas dans $\mathbb{Q}$ de borne supérieure.

L'ensemble $\mathbb{R}$ est alors obtenu en bouchant les trous laissés par les éléments de $\mathbb{Q}$: on complète $\mathbb{Q}$ par ajout des bornes supérieures des sous-ensembles non vides majorés.

III-2. L'ensemble $\mathbb{R}$

En s'approchant trop près du bord de l'intervalle suivant, on tombe du haut de la falaise :

Exemple 3.5 (il manque quelque chose dans $\mathbb{Q}$)

Soit $E = \{x \in \mathbb{Q}_+ \mid x^2 \leqslant 2.\}$. Alors E est borné, et n'admet pas dans $\mathbb{Q}$ de borne supérieure.

L'ensemble $\mathbb{R}$ est alors obtenu en bouchant les trous laissés par les éléments de $\mathbb{Q}$: on complète $\mathbb{Q}$ par ajout des bornes supérieures des sous-ensembles non vides majorés.

Par définition même (par bornes sup), la construction de $\mathbb{R}$ vient avec la définition de la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ et une propriété importante de cette relation d'ordre :

Axiome 3.6 (propriété fondamentale de $\mathbb{R}$)

Soit E un sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{R}$. Alors E admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

Axiome 3.6 (propriété fondamentale de $\mathbb{R}$)

Soit E un sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{R}$. Alors E admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

Théorème 3.7 (propriété fondamentale de $\mathbb{R}$, pour borne inf)

Soit E un sous-ensemble non vide et minorée de $\mathbb{R}$. Alors E admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$.

Axiome 3.6 (propriété fondamentale de $\mathbb{R}$)

Soit E un sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{R}$. Alors E admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

Théorème 3.7 (propriété fondamentale de $\mathbb{R}$, pour borne inf)

Soit E un sous-ensemble non vide et minorée de $\mathbb{R}$. Alors E admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$.

Note historique 3.8

Énoncé par Bolzano (démonstration fausse) pour prouver TVI.

III-3. Rappels sur les opérations et les inégalités

Importance des inégalités (majoration et minoration) en analyse

III-3. Rappels sur les opérations et les inégalités

Importance des inégalités (majoration et minoration) en analyse

Propriété 3.9 (de $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ (admises))

III-3. Rappels sur les opérations et les inégalités

Importance des inégalités (majoration et minoration) en analyse

Propriété 3.9 (de $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ (admises))

(i) C'est une relation d'ordre totale.

III-3. Rappels sur les opérations et les inégalités

Importance des inégalités (majoration et minoration) en analyse

Propriété 3.9 (de $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ (admises))

(i) C'est une relation d'ordre totale.

(ii) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \leqslant y \Longleftrightarrow y - x \in \mathbb{R}_+$

III-3. Rappels sur les opérations et les inégalités

Importance des inégalités (majoration et minoration) en analyse

Propriété 3.9 (de $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ (admises))

(i) C'est une relation d'ordre totale.

(ii) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \leqslant y \Longleftrightarrow y - x \in \mathbb{R}_+$

(iii) $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad x + y \geqslant 0$ avec égalité ssi $x = y = 0$

III-3. Rappels sur les opérations et les inégalités

Importance des inégalités (majoration et minoration) en analyse

Propriété 3.9 (de $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ (admises))

(i) C'est une relation d'ordre totale.

(ii) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \leqslant y \iff y - x \in \mathbb{R}_+$

(iii) $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad x + y \geqslant 0$ avec égalité ssi $x = y = 0$

(iv) $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad xy \geqslant 0$.

III-3. Rappels sur les opérations et les inégalités

Importance des inégalités (majoration et minoration) en analyse

Propriété 3.9 (de $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ (admises))

(i) C'est une relation d'ordre totale.

(ii) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \leqslant y \Longleftrightarrow y - x \in \mathbb{R}_+$

(iii) $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad x + y \geqslant 0$ avec égalité ssi $x = y = 0$

(iv) $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad xy \geqslant 0$.

Corollaire 3.10 (Règle des signes)

(i) Si $x \leqslant 0$ alors $-x \geqslant 0$

III-3. Rappels sur les opérations et les inégalités

Importance des inégalités (majoration et minoration) en analyse

Propriété 3.9 (de $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ (admises))

(i) C'est une relation d'ordre totale.

(ii) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \leqslant y \iff y - x \in \mathbb{R}_+$

(iii) $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad x + y \geqslant 0$ avec égalité ssi $x = y = 0$

(iv) $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad xy \geqslant 0.$

Corollaire 3.10 (Règle des signes)

(i) Si $x \leqslant 0$ alors $-x \geqslant 0$

(ii) Si $x \geqslant 0$ alors $-x \leqslant 0$

III-3. Rappels sur les opérations et les inégalités

Importance des inégalités (majoration et minoration) en analyse

Propriété 3.9 (de $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ (admises))

(i) C'est une relation d'ordre totale.

(ii) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \leqslant y \Longleftrightarrow y - x \in \mathbb{R}_+$

(iii) $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad x + y \geqslant 0$ avec égalité ssi $x = y = 0$

(iv) $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad xy \geqslant 0$.

Corollaire 3.10 (Règle des signes)

(i) Si $x \leqslant 0$ alors $-x \geqslant 0$

(ii) Si $x \geqslant 0$ alors $-x \leqslant 0$

(iii) Si $x \geqslant 0$ et $y \leqslant 0$ ou si $x \leqslant 0$ et $y \geqslant 0$, alors $xy \leqslant 0$

III-3. Rappels sur les opérations et les inégalités

Importance des inégalités (majoration et minoration) en analyse

Propriété 3.9 (de $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ (admises))

(i) C'est une relation d'ordre totale.

(ii) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \leqslant y \iff y - x \in \mathbb{R}_+$

(iii) $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad x + y \geqslant 0$ avec égalité ssi $x = y = 0$

(iv) $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad xy \geqslant 0$.

Corollaire 3.10 (Règle des signes)

(i) Si $x \leqslant 0$ alors $-x \geqslant 0$

(ii) Si $x \geqslant 0$ alors $-x \leqslant 0$

(iii) Si $x \geqslant 0$ et $y \leqslant 0$ ou si $x \leqslant 0$ et $y \geqslant 0$, alors $xy \leqslant 0$

(iv) Si $x \leqslant 0$ et $y \leqslant 0$, alors $xy \geqslant 0$

Proposition 3.11 (Manipulations élémentaires d'inégalités)

- $a \leqslant b$ et $c \leqslant d \implies a + c \leqslant b + d$,

Proposition 3.11 (Manipulations élémentaires d'inégalités)

- $a \leqslant b$ et $c \leqslant d \implies a + c \leqslant b + d$,

Proposition 3.11 (Manipulations élémentaires d'inégalités)

- $a \leqslant b$ et $c \leqslant d \Longrightarrow a + c \leqslant b + d$,
- $0 < a \leqslant b$ et $0 < c \leqslant d \Longrightarrow 0 < ac \leqslant bd$,

.

Proposition 3.11 (Manipulations élémentaires d'inégalités)

- $a \leqslant b$ et $c \leqslant d \implies a + c \leqslant b + d$,
- $0 < a \leqslant b$ et $0 < c \leqslant d \implies 0 < ac \leqslant bd$, égalité ssi $a = b$ et $c = d$.

Proposition 3.11 (Manipulations élémentaires d'inégalités)

- $a \leqslant b$ et $c \leqslant d \Longrightarrow a + c \leqslant b + d$,
- $0 < a \leqslant b$ et $0 < c \leqslant d \Longrightarrow 0 < ac \leqslant bd$, égalité ssi $a = b$ et $c = d$.
  Encore vrai pour des valeurs $\geqslant 0$, mais on perd le cas d'égalité.

Proposition 3.11 (Manipulations élémentaires d'inégalités)

- $a \leqslant b$ et $c \leqslant d \implies a + c \leqslant b + d$,
- $0 < a \leqslant b$ et $0 < c \leqslant d \implies 0 < ac \leqslant bd$, égalité ssi $a = b$ et $c = d$.
  Encore vrai pour des valeurs $\geqslant 0$, mais on perd le cas d'égalité.
- Si $a \leqslant b$ alors $-b \leqslant -a$.

Proposition 3.11 (Manipulations élémentaires d'inégalités)

- $a \leqslant b$ et $c \leqslant d \implies a + c \leqslant b + d$,
- $0 < a \leqslant b$ et $0 < c \leqslant d \implies 0 < ac \leqslant bd$, égalité ssi $a = b$ et $c = d$.
  Encore vrai pour des valeurs $\geqslant 0$, mais on perd le cas d'égalité.
- Si $a \leqslant b$ alors $-b \leqslant -a$.
- Si $a > 0$ et $b \leqslant c$, alors $ab \leqslant ac$,

Proposition 3.11 (Manipulations élémentaires d'inégalités)

- $a \leqslant b$ et $c \leqslant d \Longrightarrow a + c \leqslant b + d$,
- $0 < a \leqslant b$ et $0 < c \leqslant d \Longrightarrow 0 < ac \leqslant bd$, égalité ssi $a = b$ et $c = d$.
  Encore vrai pour des valeurs $\geqslant 0$, mais on perd le cas d'égalité.
- Si $a \leqslant b$ alors $-b \leqslant -a$.
- Si $a > 0$ et $b \leqslant c$, alors $ab \leqslant ac$,
- Si $a < 0$ et $b \leqslant c$, alors $ab \geqslant ac$,

Proposition 3.11 (Manipulations élémentaires d'inégalités)

- $a \leqslant b$ et $c \leqslant d \Longrightarrow a + c \leqslant b + d$,
- $0 < a \leqslant b$ et $0 < c \leqslant d \Longrightarrow 0 < ac \leqslant bd$, égalité ssi $a = b$ et $c = d$.
  Encore vrai pour des valeurs $\geqslant 0$, mais on perd le cas d'égalité.
- Si $a \leqslant b$ alors $-b \leqslant -a$.
- Si $a > 0$ et $b \leqslant c$, alors $ab \leqslant ac$,
- Si $a < 0$ et $b \leqslant c$, alors $ab \geqslant ac$,
- Pour les autres situations : raisonner d'abord sur la valeur absolue.

Proposition 3.11 (Manipulations élémentaires d'inégalités)

- $a \leqslant b$ et $c \leqslant d \implies a+c \leqslant b+d$,
- $0<a\leqslant b$ et $0<c\leqslant d \implies 0<ac\leqslant bd$, égalité ssi $a=b$ et $c=d$.
  Encore vrai pour des valeurs $\geqslant 0$, mais on perd le cas d'égalité.
- Si $a \leqslant b$ alors $-b \leqslant -a$.
- Si $a > 0$ et $b \leqslant c$, alors $ab \leqslant ac$,
- Si $a < 0$ et $b \leqslant c$, alors $ab \geqslant ac$,
- Pour les autres situations : raisonner d'abord sur la valeur absolue.
- Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors $a - d \leqslant b - c$

Proposition 3.11 (Manipulations élémentaires d'inégalités)

- $a \leqslant b$ et $c \leqslant d \implies a + c \leqslant b + d$,
- $0 < a \leqslant b$ et $0 < c \leqslant d \implies 0 < ac \leqslant bd$, égalité ssi $a = b$ et $c = d$.
  Encore vrai pour des valeurs $\geqslant 0$, mais on perd le cas d'égalité.
- Si $a \leqslant b$ alors $-b \leqslant -a$.
- Si $a > 0$ et $b \leqslant c$, alors $ab \leqslant ac$,
- Si $a < 0$ et $b \leqslant c$, alors $ab \geqslant ac$,
- Pour les autres situations : raisonner d'abord sur la valeur absolue.
- Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors $a - d \leqslant b - c$

Généralisation immédiate de certains points à un nombre plus grand de termes, par exemple la (i)

Terminologie 3.12

Majorer.

Terminologie 3.12

Majorer.

Méthode 3.13 (Majorer, minorer)

- Tout passer du même côté et essayer de factoriser.

Terminologie 3.12

Majorer.

Méthode 3.13 (Majorer, minorer)

- Tout passer du même côté et essayer de factoriser.
  Exemple : $xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$;

Terminologie 3.12

Majorer.

Méthode 3.13 (Majorer, minorer)

- Tout passer du même côté et essayer de factoriser.
  Exemple : $xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$;
- Tout passer du même côté et étudier une fonction.

Terminologie 3.12

Majorer.

Méthode 3.13 (Majorer, minorer)

- Tout passer du même côté et essayer de factoriser.
  Exemple : $xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$;
- Tout passer du même côté et étudier une fonction.
  Exemple : $\ln(1 + x) \geqslant x - \frac{x^2}{2}$;

Terminologie 3.12

Majorer.

Méthode 3.13 (Majorer, minorer)

- Tout passer du même côté et essayer de factoriser.
  Exemple : $xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$;
- Tout passer du même côté et étudier une fonction.
  Exemple : $\ln(1 + x) \geqslant x - \frac{x^2}{2}$;
- Utiliser une propriété de convexité ou de concavité, permettant de comparer aux cordes ou aux tangentes.

Terminologie 3.12

Majorer.

Méthode 3.13 (Majorer, minorer)

- Tout passer du même côté et essayer de factoriser.
  Exemple : $xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$;
- Tout passer du même côté et étudier une fonction.
  Exemple : $\ln(1 + x) \geqslant x - \frac{x^2}{2}$;
- Utiliser une propriété de convexité ou de concavité, permettant de comparer aux cordes ou aux tangentes.
  Exemples : $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$, $\ln(1 + x) \leqslant x$, $\sin(x) \leqslant x$ pour $x \geqslant 0$, $\sin(x) \geqslant \frac{2}{\pi}x$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$;

Terminologie 3.12

Majorer.

Méthode 3.13 (Majorer, minorer)

- Tout passer du même côté et essayer de factoriser.
  Exemple : $xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$;
- Tout passer du même côté et étudier une fonction.
  Exemple : $\ln(1 + x) \geqslant x - \frac{x^2}{2}$;
- Utiliser une propriété de convexité ou de concavité, permettant de comparer aux cordes ou aux tangentes.
  Exemples : $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$, $\ln(1 + x) \leqslant x$, $\sin(x) \leqslant x$ pour $x \geqslant 0$, $\sin(x) \geqslant \frac{2}{\pi}x$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$;
- Utiliser des inégalités classiques (triangulaire, Cauchy-Schwarz, arithmético-géométrique...).

Définition 3.14 (Valeur absolue)

Soit $x \in \mathbb{R}$ La valeur absolue de x, notée $|x|$, est :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Définition 3.14 (Valeur absolue)

Soit $x \in \mathbb{R}$ La valeur absolue de x, notée $|x|$, est :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Remarque 3.15

$|A| \leqslant B$ équivaut à $-B \leqslant A \leqslant B$.

Définition 3.16 (partie positive, partie négative d'un réel)

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Définition 3.16 (partie positive, partie négative d'un réel)

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Partie positive de x : $x^+ = \max(0, x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Définition 3.16 (partie positive, partie négative d'un réel)

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Partie positive de x : $x^+ = \max(0, x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
- Partie négative de x :

$$x^- = -\min(0, x) = \max(0, -x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Propriétés 3.17 (propriétés des parties positives et négatives)

- $x^+ \geqslant 0$ et $x^- \geqslant 0$;

Propriétés 3.17 (propriétés des parties positives et négatives)

- $x^+ \geqslant 0$ et $x^- \geqslant 0$;
- $x^+ = 0$ ou $x^- = 0$;

Propriétés 3.17 (propriétés des parties positives et négatives)

- $x^+ \geqslant 0$ et $x^- \geqslant 0$;
- $x^+ = 0$ ou $x^- = 0$;
- $x = x^+ - x^-$;

Propriétés 3.17 (propriétés des parties positives et négatives)

- $x^+ \geqslant 0$ et $x^- \geqslant 0$;
- $x^+ = 0$ ou $x^- = 0$;
- $x = x^+ - x^-$;
- l'égalité précédente est minimale : pour tout $(y, z) \in \mathbb{R}_+$, si $x = y - z$ alors $y \geqslant x^+$ et $z \geqslant x^-$;

Propriétés 3.17 (propriétés des parties positives et négatives)

- $x^+ \geqslant 0$ et $x^- \geqslant 0$;
- $x^+ = 0$ ou $x^- = 0$;
- $x = x^+ - x^-$;
- l'égalité précédente est minimale : pour tout $(y, z) \in \mathbb{R}_+$, si $x = y - z$ alors $y \geqslant x^+$ et $z \geqslant x^-$;
- $|x| = x^+ + x^- = \max(0, x) - \min(0, -x)$.

Propriétés 3.17 (propriétés des parties positives et négatives)

- $x^+ \geqslant 0$ et $x^- \geqslant 0$;
- $x^+ = 0$ ou $x^- = 0$;
- $x = x^+ - x^-$;
- l'égalité précédente est minimale : pour tout $(y, z) \in \mathbb{R}_+$, si $x = y - z$ alors $y \geqslant x^+$ et $z \geqslant x^-$;
- $|x| = x^+ + x^- = \max(0, x) - \min(0, -x)$.
- $(-x)^+ = x^-$ et $(-x)^- = x^+$.

Propriétés 3.17 (propriétés des parties positives et négatives)

- $x^+ \geqslant 0$ et $x^- \geqslant 0$;
- $x^+ = 0$ ou $x^- = 0$;
- $x = x^+ - x^-$;
- l'égalité précédente est minimale : pour tout $(y, z) \in \mathbb{R}_+$, si $x = y - z$ alors $y \geqslant x^+$ et $z \geqslant x^-$;
- $|x| = x^+ + x^- = \max(0, x) - \min(0, -x)$.
- $(-x)^+ = x^-$ et $(-x)^- = x^+$.

Corollaire 3.18 (inégalités triangulaires)

- $(x + y)^+ \leqslant x^+ + y^+$

Propriétés 3.17 (propriétés des parties positives et négatives)

- $x^+ \geqslant 0$ et $x^- \geqslant 0$;
- $x^+ = 0$ ou $x^- = 0$;
- $x = x^+ - x^-$;
- l'égalité précédente est minimale : pour tout $(y, z) \in \mathbb{R}_+$, si $x = y - z$ alors $y \geqslant x^+$ et $z \geqslant x^-$;
- $|x| = x^+ + x^- = \max(0, x) - \min(0, -x)$.
- $(-x)^+ = x^-$ et $(-x)^- = x^+$.

Corollaire 3.18 (inégalités triangulaires)

- $(x + y)^+ \leqslant x^+ + y^+$
- $(x + y)^- \leqslant x^- + y^-$

Propriétés 3.17 (propriétés des parties positives et négatives)

- $x^+ \geqslant 0$ et $x^- \geqslant 0$;
- $x^+ = 0$ ou $x^- = 0$;
- $x = x^+ - x^-$;
- l'égalité précédente est minimale : pour tout $(y, z) \in \mathbb{R}_+$, si $x = y - z$ alors $y \geqslant x^+$ et $z \geqslant x^-$;
- $|x| = x^+ + x^- = \max(0, x) - \min(0, -x)$.
- $(-x)^+ = x^-$ et $(-x)^- = x^+$.

Corollaire 3.18 (inégalités triangulaires)

- $(x + y)^+ \leqslant x^+ + y^+$
- $(x + y)^- \leqslant x^- + y^-$
- $|x + y| \leqslant |x| + |y|$

Propriétés 3.17 (propriétés des parties positives et négatives)

- $x^+ \geqslant 0$ et $x^- \geqslant 0$;
- $x^+ = 0$ ou $x^- = 0$;
- $x = x^+ - x^-$;
- l'égalité précédente est minimale : pour tout $(y, z) \in \mathbb{R}_+$, si $x = y - z$ alors $y \geqslant x^+$ et $z \geqslant x^-$;
- $|x| = x^+ + x^- = \max(0, x) - \min(0, -x)$.
- $(-x)^+ = x^-$ et $(-x)^- = x^+$.

Corollaire 3.18 (inégalités triangulaires)

- $(x+y)^+ \leqslant x^+ + y^+$ Cas d'égalité : x et y de même signe.
- $(x+y)^- \leqslant x^- + y^-$
- $|x+y| \leqslant |x| + |y|$

Corollaire 3.19 (Inégalité triangulaire pour les sommes)

Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille finie de réels. Alors

$$\left| \sum_{i \in I} a_i \right| \leqslant \sum_{i \in I} |a_i|.$$

Théorème 3.20 (Inégalité de Cauchy-Schwarz numérique)

Soient $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ des réels. On a alors :

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right|^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right),$$

Théorème 3.20 (Inégalité de Cauchy-Schwarz numérique)

Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ des réels. On a alors :

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right|^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right),$$

avec égalité si et seulement si les vecteurs $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ sont colinéaires.

Théorème 3.20 (Inégalité de Cauchy-Schwarz numérique)

Soient $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ des réels. On a alors :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right|^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right),$$

avec égalité si et seulement si les vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ sont colinéaires.

En notant, $\langle X, Y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ et $\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\langle X, X\rangle}$,

l'inégalité de CS se réexprime :

Théorème 3.20 (Inégalité de Cauchy-Schwarz numérique)

Soient $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ des réels. On a alors :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right|^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right),$$

avec égalité si et seulement si les vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ sont colinéaires.

En notant, $\langle X, Y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ et $\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\langle X, X\rangle}$,

l'inégalité de CS se réexprime : $|\langle X, Y\rangle| \leqslant \|X\| \cdot \|Y\|$.

Théorème 3.20 (Inégalité de Cauchy-Schwarz numérique)

Soient $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ des réels. On a alors :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right|^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right),$$

avec égalité si et seulement si les vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ sont colinéaires.

En notant, $\langle X, Y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ et $\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\langle X, X\rangle}$,
l'inégalité de CS se réexprime : $|\langle X, Y\rangle| \leqslant \|X\| \cdot \|Y\|$.

Remarque 3.21

Formule valable pour tout produit scalaire.

Théorème 3.22 (Inégalité arithmético-géométrique)

Pour tout $X = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$,

$$\frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) \geqslant \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}.$$

Théorème 3.22 (Inégalité arithmético-géométrique)

Pour tout $X = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$,

$$\frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) \geqslant \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}.$$

La moyenne géométrique est plus petite que la moyenne arithmétique.

III-4. Division euclidienne dans $\mathbb{R}$

Proposition 3.23 (Propriété d'Archimède)

Soit x et y deux réels strictement positifs. Il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $x < ny$.

III-4. Division euclidienne dans $\mathbb{R}$

Proposition 3.23 (Propriété d'Archimède)

Soit x et y deux réels strictement positifs. Il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $x < ny$.

Corollaire 3.24

Pour tous $x > 0$ et $y > 0$, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $0 < rx < y$.

III-4. Division euclidienne dans $\mathbb{R}$

Proposition 3.23 (Propriété d'Archimède)

Soit x et y deux réels strictement positifs. Il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $x < ny$.

Corollaire 3.24

Pour tous $x > 0$ et $y > 0$, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $0 < rx < y$.

En particulier, si $\varepsilon > 0$, il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $0 < q < \varepsilon$.

Corollaire 3.25

Soit $x, y > 0$. Il existe un unique entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $ny \leqslant x < (n+1)y$ et n' tel que $n'y < x \leqslant (n'+1)y$

Corollaire 3.25

Soit $x, y > 0$. Il existe un unique entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $ny \leqslant x < (n+1)y$ et n' tel que $n'y < x \leqslant (n'+1)y$

Corollaire 3.25

Soit $x, y > 0$. Il existe un unique entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $ny \leqslant x < (n+1)y$ et n' tel que $n'y < x \leqslant (n'+1)y$

Théorème 3.26 (division euclidienne, Euclide)

Soit x et y deux réels strictement positifs. Il existe un unique entier n et un unique réel $r \in [0, y[$ tels que $x = ny + r$.

Corollaire 3.25

Soit $x, y > 0$. Il existe un unique entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $ny \leqslant x < (n+1)y$ et n' tel que $n'y < x \leqslant (n'+1)y$

Théorème 3.26 (division euclidienne, Euclide)

Soit x et y deux réels strictement positifs. Il existe un unique entier n et un unique réel $r \in [0, y[$ tels que $x = ny + r$.

Note historique 3.27

La propriété d'Archimède était déjà connue d'Euclide.

III-5. Densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Définition 3.28 (Densité dans $\mathbb{R}$)

Un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$, il existe $z \in E$ tel que $x < z < y$.

III-5. Densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Définition 3.28 (Densité dans $\mathbb{R}$)

Un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$, il existe $z \in E$ tel que $x < z < y$.

Théorème 3.29 (Densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$)

Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

II-4. Nombres transcendants

II-4. Nombres transcendants

Définition 3.30 (Nombres algébriques, transcendants sur $\mathbb{Q}$)

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- x est algébrique sur $\mathbb{Q}$ s'il existe un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{Q}$ tel que $P(x) = 0$.

II-4. Nombres transcendants

Définition 3.30 (Nombres algébriques, transcendants sur $\mathbb{Q}$)

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- x est algébrique sur $\mathbb{Q}$ s'il existe un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{Q}$ tel que $P(x) = 0$.
- x est transcendant sinon.

Note historique 3.31

- 1682 : Leibniz est le premier à envisager la possibilité de l'existence de nombres transcendants.

II-4. Nombres transcendants

Définition 3.30 (Nombres algébriques, transcendants sur $\mathbb{Q}$)

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- x est algébrique sur $\mathbb{Q}$ s'il existe un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{Q}$ tel que $P(x) = 0$.
- x est transcendant sinon.

Note historique 3.31

- 1682 : Leibniz est le premier à envisager la possibilité de l'existence de nombres transcendants.
- 1844 : Liouville justifie l'existence de nombres transcendants, en en construisant un

II-4. Nombres transcendants

Définition 3.30 (Nombres algébriques, transcendants sur $\mathbb{Q}$)

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- x est algébrique sur $\mathbb{Q}$ s'il existe un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{Q}$ tel que $P(x) = 0$.
- x est transcendant sinon.

Note historique 3.31

- 1682 : Leibniz est le premier à envisager la possibilité de l'existence de nombres transcendants.
- 1844 : Liouville justifie l'existence de nombres transcendants, en en construisant un
- 1873 : Hermite prouve la transcendance de e.

II-4. Nombres transcendants

Définition 3.30 (Nombres algébriques, transcendants sur $\mathbb{Q}$)

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- x est algébrique sur $\mathbb{Q}$ s'il existe un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{Q}$ tel que $P(x) = 0$.
- x est transcendant sinon.

Note historique 3.31

- 1682 : Leibniz est le premier à envisager la possibilité de l'existence de nombres transcendants.
- 1844 : Liouville justifie l'existence de nombres transcendants, en en construisant un
- 1873 : Hermite prouve la transcendance de e.
- 1882 : Lindemann prouve la transcendance de π, et donc l'impossibilité de la quadrature du cercle.

II-5. Partie entière, partie décimale

Définition 3.32 (Partie entière)

- Partie entière de x, notée $\lfloor x \rfloor$: quotient de la division euclidienne de x par 1.

II-5. Partie entière, partie décimale

Définition 3.32 (Partie entière)

- Partie entière de x, notée $\lfloor x \rfloor$: quotient de la division euclidienne de x par 1.
- C'est l'unique entier n tel qu'il existe $r \in [0, 1[$ tel que $x = n + r$.

II-5. Partie entière, partie décimale

Définition 3.32 (Partie entière)

- Partie entière de x, notée $\lfloor x \rfloor$: quotient de la division euclidienne de x par 1.
- C'est l'unique entier n tel qu'il existe $r \in [0, 1[$ tel que $x = n + r$.

Notation 3.33 (Partie décimale)

- $r = \{x\}$

II-5. Partie entière, partie décimale

Définition 3.32 (Partie entière)

- Partie entière de x, notée $\lfloor x \rfloor$: quotient de la division euclidienne de x par 1.
- C'est l'unique entier n tel qu'il existe $r \in [0, 1[$ tel que $x = n + r$.

Notation 3.33 (Partie décimale)

- $r = \{x\}$
- Ainsi, $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$, avec $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}$ et $\{x\} \in [0, 1[$.

Proposition 3.34 (Caractérisations de la partie entière)

(i) $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant x\}$;

Proposition 3.34 (Caractérisations de la partie entière)

(i) $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant x\}$;

(ii) $\lfloor x \rfloor = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid n > x\} - 1$;

Proposition 3.34 (Caractérisations de la partie entière)

(i) $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant x\}$;

(ii) $\lfloor x \rfloor = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid n > x\} - 1$;

(iii) $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier tel que $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$;

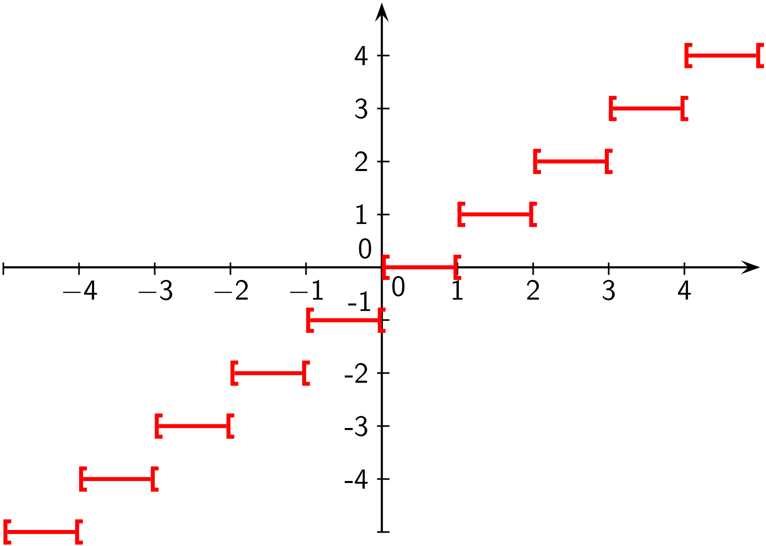
Proposition 3.34 (Caractérisations de la partie entière)

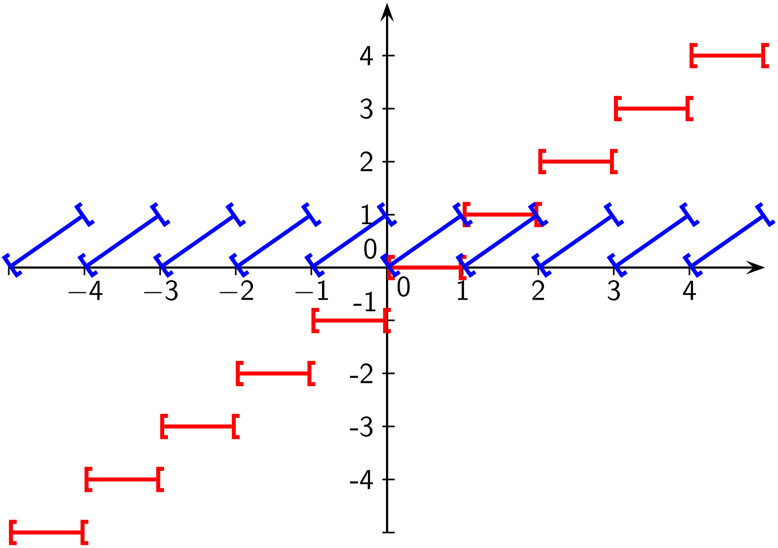
(i) $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant x\}$;

(ii) $\lfloor x \rfloor = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid n > x\} - 1$;

(iii) $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier tel que $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$;

(iv) $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier tel que $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$.


4
3
2
1
0
0
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
-1
-2
-3
-4


4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4

Définition 3.35 (Partie entière par excès)

$\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant x\}$.

Définition 3.35 (Partie entière par excès)

$\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant x\}.$

$$x \leqslant \lceil x \rceil < x + 1 \qquad \text{et} \qquad \lceil x \rceil - 1 < x \leqslant \lceil x \rceil.$$

Définition 3.35 (Partie entière par excès)

$\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant x\}$.

$$x \leqslant \lceil x \rceil < x + 1 \qquad \text{et} \qquad \lceil x \rceil - 1 < x \leqslant \lceil x \rceil.$$

Proposition 3.36

1. $\lceil x \rceil = \begin{cases} \lfloor x \rfloor + 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \\ \lfloor x \rfloor & \text{si } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Définition 3.35 (Partie entière par excès)

$\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant x\}$.

$$x \leqslant \lceil x \rceil < x + 1 \qquad \text{et} \qquad \lceil x \rceil - 1 < x \leqslant \lceil x \rceil.$$

Proposition 3.36

1. $\lceil x \rceil = \begin{cases} \lfloor x \rfloor + 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \\ \lfloor x \rfloor & \text{si } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$
2. $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$.

Propriétés 3.37 (propriétés de la partie entière)

1. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1 \geqslant \lfloor x + y \rfloor \geqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$;

Propriétés 3.37 (propriétés de la partie entière)

1. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1 \geqslant \lfloor x + y \rfloor \geqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$;
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}_+,\ \lfloor xy \rfloor \geqslant \lfloor x \rfloor \cdot \lfloor y \rfloor$;

Propriétés 3.37 (propriétés de la partie entière)

1. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1 \geqslant \lfloor x + y \rfloor \geqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$;
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}_+,\ \lfloor xy \rfloor \geqslant \lfloor x \rfloor \cdot \lfloor y \rfloor$;
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

II-6. Représentation décimale

Note historique 3.38 (Représentation des nombres)

- Numération additive, numération de position.

II-6. Représentation décimale

Note historique 3.38 (Représentation des nombres)

- Numération additive, numération de position.
- Différentes bases utilisées

II-6. Représentation décimale

Note historique 3.38 (Représentation des nombres)

- Numération additive, numération de position.
- Différentes bases utilisées
- La numération de position arrive en Occident grâce aux ouvrages de Al Khwarizmi, diffusant les chiffres arabes, qui sont en fait dérivés de la numération indienne.

II-6. Représentation décimale

Note historique 3.38 (Représentation des nombres)

- Numération additive, numération de position.
- Différentes bases utilisées
- La numération de position arrive en Occident grâce aux ouvrages de Al Khwarizmi, diffusant les chiffres arabes, qui sont en fait dérivés de la numération indienne.
- Détails à lire vous-même !

II-6. Représentation décimale

Note historique 3.38 (Représentation des nombres)

- Numération additive, numération de position.
- Différentes bases utilisées
- La numération de position arrive en Occident grâce aux ouvrages de Al Khwarizmi, diffusant les chiffres arabes, qui sont en fait dérivés de la numération indienne.
- Détails à lire vous-même !

Notation 3.39 (nombres décimaux)

- $\mathbb{D}$: ensemble des nombres décimaux

II-6. Représentation décimale

Note historique 3.38 (Représentation des nombres)

- Numération additive, numération de position.
- Différentes bases utilisées
- La numération de position arrive en Occident grâce aux ouvrages de Al Khwarizmi, diffusant les chiffres arabes, qui sont en fait dérivés de la numération indienne.
- Détails à lire vous-même !

Notation 3.39 (nombres décimaux)

- $\mathbb{D}$: ensemble des nombres décimaux
- $\mathbb{D}_n$: l'ensemble des nombres décimaux tels que $10^n x \in \mathbb{Z}$

Proposition 3.40 (Approximations décimales d'un réel x)

Soit x un réel. Il existe un unique élément y_n de $\mathbb{D}_n$ tel que

$$y_n \leqslant x < y_n + 10^{-n}.$$

Proposition 3.40 (Approximations décimales d'un réel x)

Soit x un réel. Il existe un unique élément y_n de $\mathbb{D}_n$ tel que

$$y_n \leqslant x < y_n + 10^{-n}.$$

- y_n est appelé valeur approchée décimale à la précision 10^{-n} par défaut

Proposition 3.40 (Approximations décimales d'un réel x)

Soit x un réel. Il existe un unique élément y_n de $\mathbb{D}_n$ tel que

$$y_n \leqslant x < y_n + 10^{-n}.$$

- y_n est appelé valeur approchée décimale à la précision 10^{-n} par défaut
- $y + 10^{-n}$ est appelé valeur approchée décimale à la précision 10^{-n} par excès.

Lemme 3.41

$y_n - y_{n-1} = \frac{a_n}{10^n}$ où $a_n \in [\![0, 9]\!]$.

Lemme 3.41

$y_n - y_{n-1} = \frac{a_n}{10^n}$ où $a_n \in [\![0, 9]\!]$.

Théorème 3.42 (Existence du développement décimal de x)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe des $a_n \in [\![0, 9]\!]$ tels que

$$x = \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n 10^{-n} = \lfloor x \rfloor + \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n 10^{-n}.$$

Lemme 3.41

$y_n - y_{n-1} = \frac{a_n}{10^n}$ où $a_n \in [\![0, 9]\!]$.

Théorème 3.42 (Existence du développement décimal de x)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe des $a_n \in [\![0, 9]\!]$ tels que
$$x = \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n 10^{-n} = \lfloor x \rfloor + \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n 10^{-n}.$$

Théorème 3.43 (Unicité du développement décimal de x)

1. Si $x \notin \mathbb{D}$, x admet un unique développement décimal.

Lemme 3.41

$y_n - y_{n-1} = \frac{a_n}{10^n}$ où $a_n \in [\![0, 9]\!]$.

Théorème 3.42 (Existence du développement décimal de x)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe des $a_n \in [\![0, 9]\!]$ tels que

$$x = \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n 10^{-n} = \lfloor x \rfloor + \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n 10^{-n}.$$

Théorème 3.43 (Unicité du développement décimal de x)

1. Si $x \notin \mathbb{D}$, x admet un unique développement décimal.
2. Si $x \in \mathbb{D}$, x admet deux développements décimaux exactement.

Lemme 3.41

$y_n - y_{n-1} = \frac{a_n}{10^n}$ où $a_n \in [\![0, 9]\!]$.

Théorème 3.42 (Existence du développement décimal de x)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe des $a_n \in [\![0, 9]\!]$ tels que

$$x = \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n 10^{-n} = \lfloor x \rfloor + \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n 10^{-n}.$$

Théorème 3.43 (Unicité du développement décimal de x)

1. Si $x \notin \mathbb{D}$, x admet un unique développement décimal.
2. Si $x \in \mathbb{D}$, x admet deux développements décimaux exactement.

Définition 3.44 (Développement propre)

L'unique développement ne terminant pas par une infinité de 9.

IV. Intervalles

IV-1. Description des intervalles

Définition 4.1 (ensemble convexe)

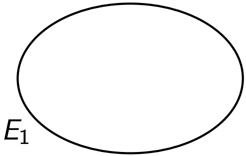
Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On dit que E est convexe si et seulement si pour tout couple de points A et B de E, le segment $[AB]$ est entièrement inclus dans E.

IV. Intervalles

IV-1. Description des intervalles

Définition 4.1 (ensemble convexe)

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On dit que E est convexe si et seulement si pour tout couple de points A et B de E, le segment $[AB]$ est entièrement inclus dans E.

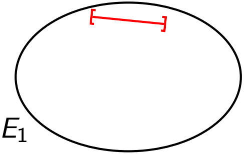


IV. Intervalles

IV-1. Description des intervalles

Définition 4.1 (ensemble convexe)

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On dit que E est convexe si et seulement si pour tout couple de points A et B de E, le segment $[AB]$ est entièrement inclus dans E.

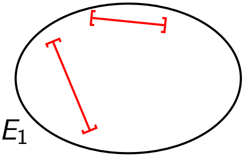


IV. Intervalles

IV-1. Description des intervalles

Définition 4.1 (ensemble convexe)

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On dit que E est convexe si et seulement si pour tout couple de points A et B de E, le segment $[AB]$ est entièrement inclus dans E.

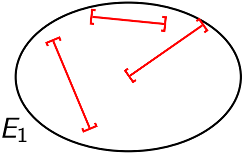


IV. Intervalles

IV-1. Description des intervalles

Définition 4.1 (ensemble convexe)

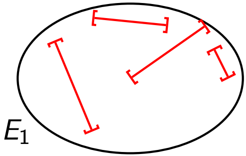
Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On dit que E est convexe si et seulement si pour tout couple de points A et B de E, le segment $[AB]$ est entièrement inclus dans E.



IV. Intervalles
IV-1. Description des intervalles

Définition 4.1 (ensemble convexe)

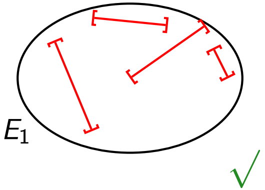
Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On dit que E est convexe si et seulement si pour tout couple de points A et B de E, le segment $[AB]$ est entièrement inclus dans E.



IV. Intervalles
IV-1. Description des intervalles

Définition 4.1 (ensemble convexe)

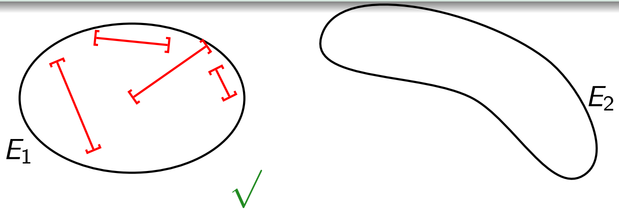
Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On dit que E est convexe si et seulement si pour tout couple de points A et B de E, le segment $[AB]$ est entièrement inclus dans E.



IV. Intervalles
IV-1. Description des intervalles

Définition 4.1 (ensemble convexe)

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On dit que E est convexe si et seulement si pour tout couple de points A et B de E, le segment $[AB]$ est entièrement inclus dans E.

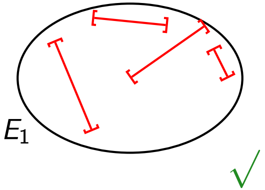


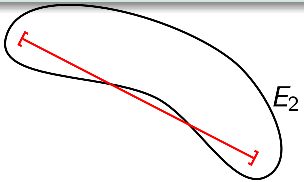
IV. Intervalles

IV-1. Description des intervalles

Définition 4.1 (ensemble convexe)

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On dit que E est convexe si et seulement si pour tout couple de points A et B de E, le segment $[AB]$ est entièrement inclus dans E.



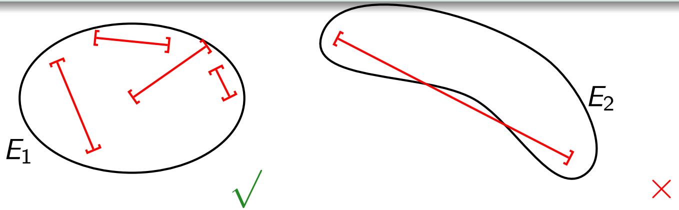


IV. Intervalles

IV-1. Description des intervalles

Définition 4.1 (ensemble convexe)

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On dit que E est convexe si et seulement si pour tout couple de points A et B de E, le segment $[AB]$ est entièrement inclus dans E.

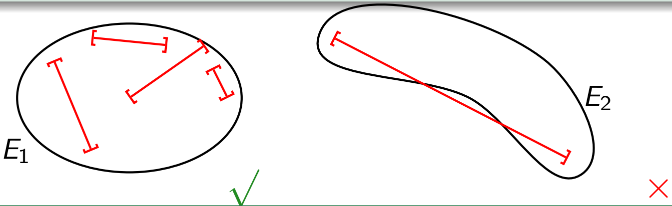


IV. Intervalles

IV-1. Description des intervalles

Définition 4.1 (ensemble convexe)

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On dit que E est convexe si et seulement si pour tout couple de points A et B de E, le segment $[AB]$ est entièrement inclus dans E.



Définition 4.2 (Intervalle)

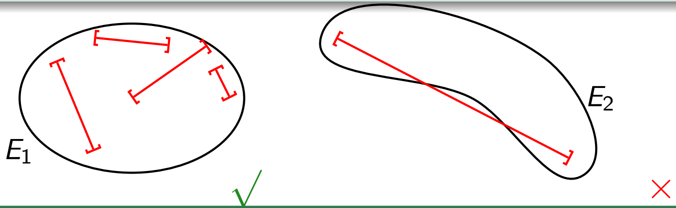
Un intervalle I de $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble convexe I de $\mathbb{R}$:

IV. Intervalles

IV-1. Description des intervalles

Définition 4.1 (ensemble convexe)

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On dit que E est convexe si et seulement si pour tout couple de points A et B de E, le segment $[AB]$ est entièrement inclus dans E.



Définition 4.2 (Intervalle)

Un intervalle I de $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble convexe I de $\mathbb{R}$:

$$\forall (a, b) \in I^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x \leqslant b \Longrightarrow x \in I.$$

Théorème 4.3 (inventaire des intervalles)

Tout intervalle I de $\mathbb{R}$ est d'une des formes suivantes :

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x \leqslant b\}$, $a \leqslant b$;
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$, $a < b$;
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x < b\}$, $a < b$;
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R},\ a < x \leqslant b\}$, $a < b$;
- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ x \geqslant a\}$;
- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ x > a\}$;
- $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R},\ x \leqslant b\}$;
- $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R},\ x < b\}$;
- $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$;
- $\varnothing$.

Définition 4.4 (intervalles ouverts, fermés, semi-ouverts)

- On dit qu'un intervalle est ouvert s'il est de la forme $]a, b[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, b[$, $\mathbb{R}$ ou $\varnothing$.

Définition 4.4 (intervalles ouverts, fermés, semi-ouverts)

- On dit qu'un intervalle est ouvert s'il est de la forme $]a, b[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, b[$, $\mathbb{R}$ ou $\varnothing$.
- On dit qu'un intervalle est fermé s'il est de la forme $[a, b]$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, b]$, $\mathbb{R}$ ou $\varnothing$.

Définition 4.4 (intervalles ouverts, fermés, semi-ouverts)

- On dit qu'un intervalle est ouvert s'il est de la forme $]a, b[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, b[$, $\mathbb{R}$ ou $\varnothing$.
- On dit qu'un intervalle est fermé s'il est de la forme $[a, b]$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, b]$, $\mathbb{R}$ ou $\varnothing$.
- On dit qu'un intervalle est semi-ouvert s'il est de la forme $[a, b[$ ou $]a, b]$.

Définition 4.4 (intervalles ouverts, fermés, semi-ouverts)

- On dit qu'un intervalle est ouvert s'il est de la forme $]a, b[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, b[$, $\mathbb{R}$ ou $\varnothing$.
- On dit qu'un intervalle est fermé s'il est de la forme $[a, b]$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, b]$, $\mathbb{R}$ ou $\varnothing$.
- On dit qu'un intervalle est semi-ouvert s'il est de la forme $[a, b[$ ou $]a, b]$.

Il existe des intervalles à la fois ouverts et fermés ($\mathbb{R}$ et $\varnothing$)

IV-2. Intervalles et topologie

La notion d'intervalle est en fait liée à des notions de topologie plus générales.

IV-2. Intervalles et topologie

La notion d'intervalle est en fait liée à des notions de topologie plus générales.

Topologie : étude des sous-ensembles ouverts et fermés d'un ensemble.

IV-2. Intervalles et topologie

La notion d'intervalle est en fait liée à des notions de topologie plus générales.

Topologie : étude des sous-ensembles ouverts et fermés d'un ensemble.

Plus précisément, se donner une topologie sur un ensemble E, c'est se donner un sous-ensemble $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(E)$ dont les éléments seront les ouverts de notre topologie. Le sous-ensemble $\mathcal{O}$ doit avoir quelques propriétés de stabilité.

IV-2. Intervalles et topologie

La notion d'intervalle est en fait liée à des notions de topologie plus générales.

Topologie : étude des sous-ensembles ouverts et fermés d'un ensemble.

Plus précisément, se donner une topologie sur un ensemble E, c'est se donner un sous-ensemble $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(E)$ dont les éléments seront les ouverts de notre topologie. Le sous-ensemble $\mathcal{O}$ doit avoir quelques propriétés de stabilité.

Nous nous limitons à la description de la topologie de $\mathbb{R}^n$, définie à partir de la distance euclidienne canonique :

$$d(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}.$$

IV-2. Intervalles et topologie

La notion d'intervalle est en fait liée à des notions de topologie plus générales.

Topologie : étude des sous-ensembles ouverts et fermés d'un ensemble.

Plus précisément, se donner une topologie sur un ensemble E, c'est se donner un sous-ensemble $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(E)$ dont les éléments seront les ouverts de notre topologie. Le sous-ensemble $\mathcal{O}$ doit avoir quelques propriétés de stabilité.

Nous nous limitons à la description de la topologie de $\mathbb{R}^n$, définie à partir de la distance euclidienne canonique :

$$d(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}.$$

En particulier, si $x, y \in \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |y - x|$.

Définition 4.5 (Boule dans $\mathbb{R}^n$)

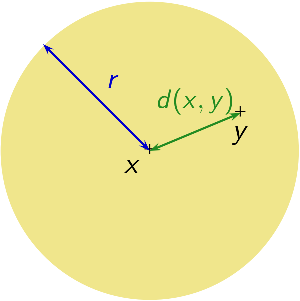
Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

1. La boule ouverte de centre x et de rayon r est :
   $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(y,x) < r\}$

Définition 4.5 (Boule dans $\mathbb{R}^n$)

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

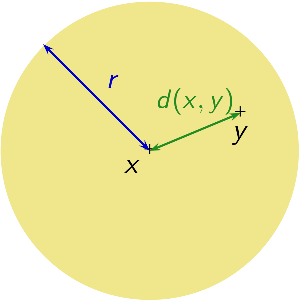
1. La boule ouverte de centre x et de rayon r est :
   $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(y,x) < r\}$



Définition 4.5 (Boule dans $\mathbb{R}^n$)

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

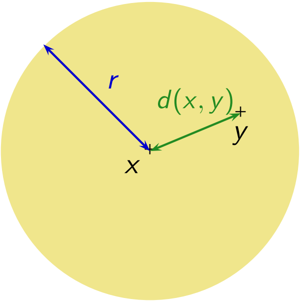
1. La boule ouverte de centre x et de rayon r est :
   $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(y, x) < r\}$
2. La boule fermée de centre x et de rayon r est :
   $\overline{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(y, x) \leqslant r\}$

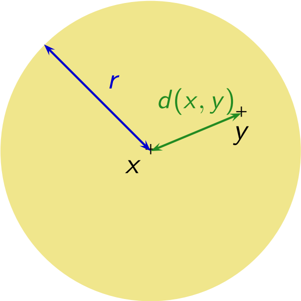


Définition 4.5 (Boule dans $\mathbb{R}^n$)

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

1. La boule ouverte de centre x et de rayon r est :
   $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(y, x) < r\}$
2. La boule fermée de centre x et de rayon r est :
   $\overline{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(y, x) \leqslant r\}$

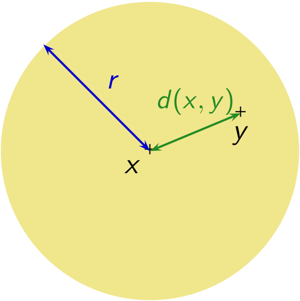


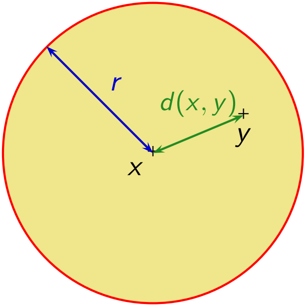


Définition 4.5 (Boule dans $\mathbb{R}^n$)

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

1. La boule ouverte de centre x et de rayon r est :
   $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(y, x) < r\}$
2. La boule fermée de centre x et de rayon r est :
   $\overline{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(y, x) \leqslant r\}$





Exemple 4.6

Dans $\mathbb{R}$, les boules sont des intervalles :

Exemple 4.6

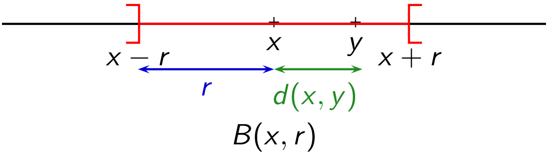
Dans $\mathbb{R}$, les boules sont des intervalles :

$$B(x,r) =]x-r, x+r[$$

Exemple 4.6

Dans $\mathbb{R}$, les boules sont des intervalles :

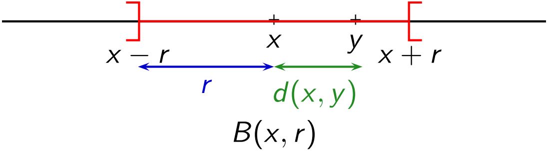
$$B(x,r) =]x-r, x+r[$$



Exemple 4.6

Dans $\mathbb{R}$, les boules sont des intervalles :

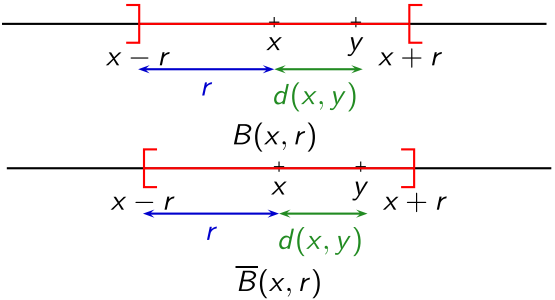
$$B(x,r) =]x-r, x+r[\qquad \overline{B}(x,r) = [x-r, x+r]$$



Exemple 4.6

Dans $\mathbb{R}$, les boules sont des intervalles :

$$B(x,r) =]x-r, x+r[\qquad \overline{B}(x,r) = [x-r, x+r]$$

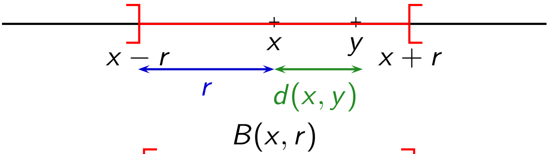


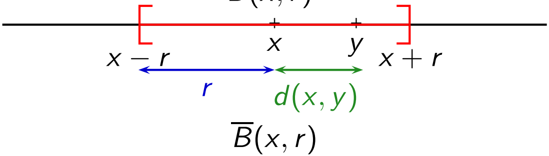
Exemple 4.6

Dans $\mathbb{R}$, les boules sont des intervalles :

$$B(x,r) =]x-r, x+r[\qquad \overline{B}(x,r) = [x-r, x+r]$$

En fait, tout intervalle borné ouvert est une boule ouverte, tout intervalle borné fermé est une boule fermée.





Remarque 4.7

Une majoration de certaines valeur absolue se traduit par l'appartenance à une boule :

Remarque 4.7

Une majoration de certaines valeur absolue se traduit par l'appartenance à une boule :

- une majoration du type $|x-a| \leqslant r$ traduit l'appartenance de x à la boule fermée $\overline{B}(a,r)$ de centre a de rayon r, donc à l'intervalle $[a-r, a+r]$;

Remarque 4.7

Une majoration de certaines valeur absolue se traduit par l'appartenance à une boule :

- une majoration du type $|x-a| \leqslant r$ traduit l'appartenance de x à la boule fermée $\overline{B}(a,r)$ de centre a de rayon r, donc à l'intervalle $[a-r, a+r]$;
- une majoration du type $|x-a| < r$ traduit l'appartenance de x à la boule ouverte $B(a,r)$ de centre a de rayon r, donc à l'intervalle $]a-r, a+r[$;

Définition 4.8 (voisinage)

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Un voisinage V de x est un sous-ensemble V de $\mathbb{R}^n$ tel qu'il existe une boule ouverte centrée en x entièrement contenue dans V :

.

Définition 4.8 (voisinage)

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Un voisinage V de x est un sous-ensemble V de $\mathbb{R}^n$ tel qu'il existe une boule ouverte centrée en x entièrement contenue dans V :

$$\exists \varepsilon > 0,\ B(x,\varepsilon) \subset V, \qquad \text{i.e. :}$$

.

Définition 4.8 (voisinage)

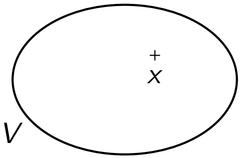
Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Un voisinage V de x est un sous-ensemble V de $\mathbb{R}^n$ tel qu'il existe une boule ouverte centrée en x entièrement contenue dans V :

$$\exists \varepsilon > 0,\ B(x,\varepsilon) \subset V, \qquad \text{i.e. :}$$
$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall y \in E,\ d(y,x) < \varepsilon \Longrightarrow y \in V.$$

Définition 4.8 (voisinage)

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Un voisinage V de x est un sous-ensemble V de $\mathbb{R}^n$ tel qu'il existe une boule ouverte centrée en x entièrement contenue dans V :

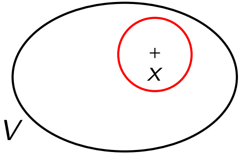
$$\exists \varepsilon > 0,\ B(x, \varepsilon) \subset V, \qquad \text{i.e. :}$$
$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall y \in E,\ d(y, x) < \varepsilon \Longrightarrow y \in V.$$



Définition 4.8 (voisinage)

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Un voisinage V de x est un sous-ensemble V de $\mathbb{R}^n$ tel qu'il existe une boule ouverte centrée en x entièrement contenue dans V :

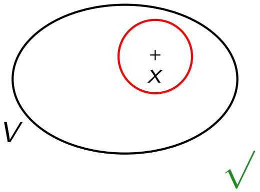
$$\exists \varepsilon > 0, \ B(x, \varepsilon) \subset V, \qquad \text{i.e. :}$$
$$\exists \varepsilon > 0, \ \forall y \in E, \ d(y, x) < \varepsilon \Longrightarrow y \in V.$$



Définition 4.8 (voisinage)

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Un voisinage V de x est un sous-ensemble V de $\mathbb{R}^n$ tel qu'il existe une boule ouverte centrée en x entièrement contenue dans V :

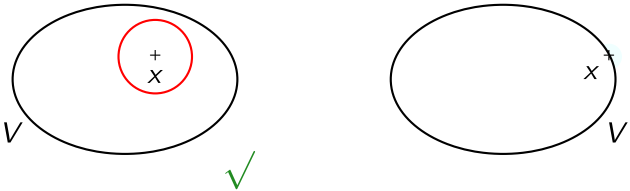
$$\exists \varepsilon > 0,\ B(x, \varepsilon) \subset V, \qquad \text{i.e. :}$$
$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall y \in E,\ d(y, x) < \varepsilon \Longrightarrow y \in V.$$



Définition 4.8 (voisinage)

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Un voisinage V de x est un sous-ensemble V de $\mathbb{R}^n$ tel qu'il existe une boule ouverte centrée en x entièrement contenue dans V :

$$\exists \varepsilon > 0,\ B(x,\varepsilon) \subset V, \qquad \text{i.e. :}$$
$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall y \in E,\ d(y,x) < \varepsilon \Longrightarrow y \in V.$$

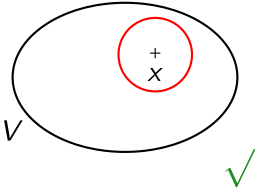


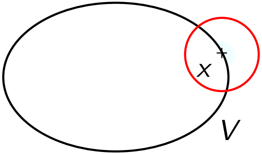
Définition 4.8 (voisinage)

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Un voisinage V de x est un sous-ensemble V de $\mathbb{R}^n$ tel qu'il existe une boule ouverte centrée en x entièrement contenue dans V :

$$\exists \varepsilon > 0, \ B(x, \varepsilon) \subset V, \qquad \text{i.e. :}$$

$$\exists \varepsilon > 0, \ \forall y \in E, \ d(y, x) < \varepsilon \Longrightarrow y \in V.$$

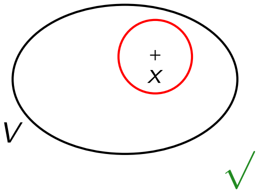


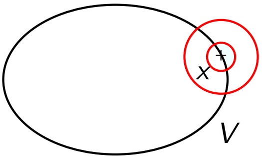


Définition 4.8 (voisinage)

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Un voisinage V de x est un sous-ensemble V de $\mathbb{R}^n$ tel qu'il existe une boule ouverte centrée en x entièrement contenue dans V :

$$\exists \varepsilon > 0,\ B(x,\varepsilon) \subset V, \qquad \text{i.e. :}$$
$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall y \in E,\ d(y,x) < \varepsilon \Longrightarrow y \in V.$$

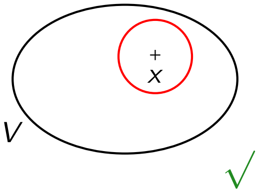


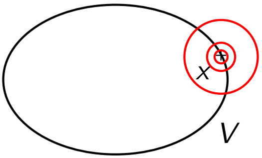


Définition 4.8 (voisinage)

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Un voisinage V de x est un sous-ensemble V de $\mathbb{R}^n$ tel qu'il existe une boule ouverte centrée en x entièrement contenue dans V :

$$\exists \varepsilon > 0,\ B(x,\varepsilon) \subset V, \qquad \text{i.e. :}$$
$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall y \in E,\ d(y,x) < \varepsilon \Longrightarrow y \in V.$$

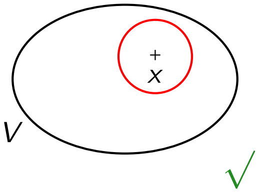


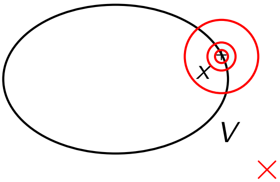


Définition 4.8 (voisinage)

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Un voisinage V de x est un sous-ensemble V de $\mathbb{R}^n$ tel qu'il existe une boule ouverte centrée en x entièrement contenue dans V :

$$\exists \varepsilon > 0,\ B(x, \varepsilon) \subset V, \qquad \text{i.e. :}$$
$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall y \in E,\ d(y, x) < \varepsilon \Longrightarrow y \in V.$$

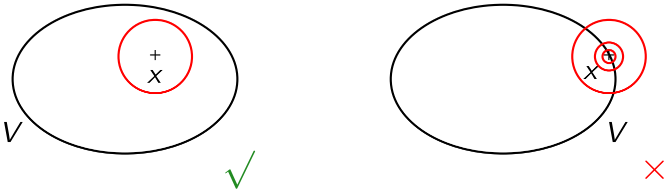




Définition 4.8 (voisinage)

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Un voisinage V de x est un sous-ensemble V de $\mathbb{R}^n$ tel qu'il existe une boule ouverte centrée en x entièrement contenue dans V :

$$\exists \varepsilon > 0,\ B(x, \varepsilon) \subset V, \qquad \text{i.e. :}$$
$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall y \in E,\ d(y, x) < \varepsilon \Longrightarrow y \in V.$$



En s'éloignant un peu de x, on ne sort pas de V.

Exemple 4.9 (Voisinages dans $\mathbb{R}$)

- Dans $\mathbb{R}$, un voisinage de x est un ensemble contenant un intervalle $]a, b[$ tel que $x \in]a, b[$.

Exemple 4.9 (Voisinages dans $\mathbb{R}$)

- Dans $\mathbb{R}$, un voisinage de x est un ensemble contenant un intervalle $]a, b[$ tel que $x \in]a, b[$.
- Par extension et commodité, on dit parfois qu'un ensemble contenant un intervalle $]a, +\infty[$ est un voisinage de $+\infty$.

Exemple 4.9 (Voisinages dans $\mathbb{R}$)

- Dans $\mathbb{R}$, un voisinage de x est un ensemble contenant un intervalle $]a, b[$ tel que $x \in]a, b[$.
- Par extension et commodité, on dit parfois qu'un ensemble contenant un intervalle $]a, +\infty[$ est un voisinage de $+\infty$.

Définition 4.10 (sous-ensemble ouvert)

- Un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble U de $\mathbb{R}^n$ qui est voisinage de tous ses points

Exemple 4.9 (Voisinages dans $\mathbb{R}$)

- Dans $\mathbb{R}$, un voisinage de x est un ensemble contenant un intervalle $]a, b[$ tel que $x \in]a, b[$.
- Par extension et commodité, on dit parfois qu'un ensemble contenant un intervalle $]a, +\infty[$ est un voisinage de $+\infty$.

Définition 4.10 (sous-ensemble ouvert)

- Un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble U de $\mathbb{R}^n$ qui est voisinage de tous ses points
- De manière équivalente, $U \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert ssi :

$$\forall x \in U, \exists \varepsilon > 0, \ B(x, \varepsilon) \subset U.$$

Exemple 4.9 (Voisinages dans $\mathbb{R}$)

- Dans $\mathbb{R}$, un voisinage de x est un ensemble contenant un intervalle $]a, b[$ tel que $x \in]a, b[$.
- Par extension et commodité, on dit parfois qu'un ensemble contenant un intervalle $]a, +\infty[$ est un voisinage de $+\infty$.

Définition 4.10 (sous-ensemble ouvert)

- Un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble U de $\mathbb{R}^n$ qui est voisinage de tous ses points
- De manière équivalente, $U \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert ssi :

$$\forall x \in U, \exists \varepsilon > 0, \; B(x, \varepsilon) \subset U.$$

Définition 4.11 (sous-ensemble fermé)

Un sous-ensemble F de $\mathbb{R}^n$ est fermé si son complémentaire $\complement_E F$ est ouvert.

Exemples 4.12

1. Les intervalles ouverts sont des sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}$.

Exemples 4.12

1. Les intervalles ouverts sont des sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}$.
2. Les intervalles fermés sont des sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}$.

Exemples 4.12

1. Les intervalles ouverts sont des sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}$.
2. Les intervalles fermés sont des sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}$.
3. Les intervalles semi-ouverts ne sont ni ouverts ni fermés.

Exemples 4.12

1. Les intervalles ouverts sont des sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}$.
2. Les intervalles fermés sont des sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}$.
3. Les intervalles semi-ouverts ne sont ni ouverts ni fermés.
4. $\mathbb{R}$ et $\varnothing$ sont des sous-ensembles à la fois fermés et ouverts de $\mathbb{R}$.

Exemples 4.12

1. Les intervalles ouverts sont des sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}$.
2. Les intervalles fermés sont des sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}$.
3. Les intervalles semi-ouverts ne sont ni ouverts ni fermés.
4. $\mathbb{R}$ et $\varnothing$ sont des sous-ensembles à la fois fermés et ouverts de $\mathbb{R}$.
5. On peut montrer que les sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}$ sont les unions disjointes d'intervalles ouverts.

Proposition 4.13 (union, intersection d'ouverts et de fermés)

1. Toute union quelconque d'ouverts est un ouvert ;

Proposition 4.13 (union, intersection d'ouverts et de fermés)

1. Toute union quelconque d'ouverts est un ouvert ;
2. Toute intersection d'un nombre *fini* d'ouverts est un ouvert ;

Proposition 4.13 (union, intersection d'ouverts et de fermés)

1. Toute union quelconque d'ouverts est un ouvert ;
2. Toute intersection d'un nombre *fini* d'ouverts est un ouvert ;
3. Toute intersection quelconque de fermés est un fermé ;

Proposition 4.13 (union, intersection d'ouverts et de fermés)

1. Toute union quelconque d'ouverts est un ouvert ;
2. Toute intersection d'un nombre *fini* d'ouverts est un ouvert ;
3. Toute intersection quelconque de fermés est un fermé ;
4. Toute union d'un nombre *fini* de fermés est un fermé.

Proposition 4.13 (union, intersection d'ouverts et de fermés)

1. Toute union quelconque d'ouverts est un ouvert ;
2. Toute intersection d'un nombre *fini* d'ouverts est un ouvert ;
3. Toute intersection quelconque de fermés est un fermé ;
4. Toute union d'un nombre *fini* de fermés est un fermé.

Exemples 4.14

1. Contre-exemple pour une intersection infinie d'ouverts :
$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left] -\frac{1}{n}, 1 \right[= [0, 1[.$$

Proposition 4.13 (union, intersection d'ouverts et de fermés)

1. Toute union quelconque d'ouverts est un ouvert ;
2. Toute intersection d'un nombre *fini* d'ouverts est un ouvert ;
3. Toute intersection quelconque de fermés est un fermé ;
4. Toute union d'un nombre *fini* de fermés est un fermé.

Exemples 4.14

1. Contre-exemple pour une intersection infinie d'ouverts :
$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left] -\frac{1}{n}, 1 \right[= [0, 1[.$$
2. Contre-exemple pour une union infinie de fermés :
$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n}, 1 \right] =]0, 1].$$

Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$

Définition 5.1 (droite achevée réelle)

La droite achevée réelle, notée $\overline{\mathbb{R}}$, est l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$

Définition 5.1 (droite achevée réelle)

La droite achevée réelle, notée $\overline{\mathbb{R}}$, est l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Définition 5.2 (relation d'ordre sur $\overline{\mathbb{R}}$)

On peut prolonger l'ordre de $\mathbb{R}$ en un ordre sur $\overline{\mathbb{R}}$ en posant :

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}}, \quad -\infty \leqslant x \leqslant +\infty.$$

Définition 5.3 (règles calculatoires dans $\overline{\mathbb{R}}$)

On peut prolonger partiellement les opérations de $\mathbb{R}$ sur $\overline{\mathbb{R}}$:

Définition 5.3 (règles calculatoires dans $\overline{\mathbb{R}}$)

On peut prolonger partiellement les opérations de $\mathbb{R}$ sur $\overline{\mathbb{R}}$:

- $-(+\infty) = -\infty$

Définition 5.3 (règles calculatoires dans $\overline{\mathbb{R}}$)

On peut prolonger partiellement les opérations de $\mathbb{R}$ sur $\overline{\mathbb{R}}$:

- $-(+\infty) = -\infty$
- $\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \cup\{-\infty\}, \quad x + (+\infty) = +\infty$

Définition 5.3 (règles calculatoires dans $\overline{\mathbb{R}}$)

On peut prolonger partiellement les opérations de $\mathbb{R}$ sur $\overline{\mathbb{R}}$:

- $-(+\infty) = -\infty$
- $\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \cup\{-\infty\}, \quad x + (+\infty) = +\infty$
- $\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\}, \quad x + (-\infty) = -\infty$

Définition 5.3 (règles calculatoires dans $\overline{\mathbb{R}}$)

On peut prolonger partiellement les opérations de $\mathbb{R}$ sur $\overline{\mathbb{R}}$:

- $-(+\infty) = -\infty$
- $\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \cup\{-\infty\}, \quad x + (+\infty) = +\infty$
- $\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\}, \quad x + (-\infty) = -\infty$
- $\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$

Définition 5.3 (règles calculatoires dans $\overline{\mathbb{R}}$)

On peut prolonger partiellement les opérations de $\mathbb{R}$ sur $\overline{\mathbb{R}}$:

- $-(+\infty) = -\infty$
- $\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \cup\{-\infty\}, \quad x + (+\infty) = +\infty$
- $\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\}, \quad x + (-\infty) = -\infty$
- $\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x \times (+\infty) = +\infty, \quad x \times (-\infty) = -\infty,$

Définition 5.3 (règles calculatoires dans $\overline{\mathbb{R}}$)

On peut prolonger partiellement les opérations de $\mathbb{R}$ sur $\overline{\mathbb{R}}$:

- $-(+\infty) = -\infty$
- $\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \cup\{-\infty\}, \quad x + (+\infty) = +\infty$
- $\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\}, \quad x + (-\infty) = -\infty$
- $\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x \times (+\infty) = +\infty, \quad x \times (-\infty) = -\infty,$
- $\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad x \times (+\infty) = -\infty, \quad x \times (-\infty) = +\infty.$

Définition 5.3 (règles calculatoires dans $\overline{\mathbb{R}}$)

On peut prolonger partiellement les opérations de $\mathbb{R}$ sur $\overline{\mathbb{R}}$:

- $-(+\infty) = -\infty$
- $\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \cup\{-\infty\}, \quad x + (+\infty) = +\infty$
- $\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\}, \quad x + (-\infty) = -\infty$
- $\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x \times (+\infty) = +\infty, \quad x \times (-\infty) = -\infty,$
- $\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad x \times (+\infty) = -\infty, \quad x \times (-\infty) = +\infty.$

Définition 5.4 (formes indéterminées (op. non définies))

Définition 5.3 (règles calculatoires dans $\overline{\mathbb{R}}$)

On peut prolonger partiellement les opérations de $\mathbb{R}$ sur $\overline{\mathbb{R}}$:

- $-(+\infty) = -\infty$
- $\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \cup\{-\infty\}, \quad x + (+\infty) = +\infty$
- $\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\}, \quad x + (-\infty) = -\infty$
- $\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x \times (+\infty) = +\infty, \quad x \times (-\infty) = -\infty,$
- $\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad x \times (+\infty) = -\infty, \quad x \times (-\infty) = +\infty.$

Définition 5.4 (formes indéterminées (op. non définies))

- $-\infty + (+\infty)$

Définition 5.3 (règles calculatoires dans $\overline{\mathbb{R}}$)

On peut prolonger partiellement les opérations de $\mathbb{R}$ sur $\overline{\mathbb{R}}$:

- $-(+\infty) = -\infty$
- $\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \cup\{-\infty\}, \quad x + (+\infty) = +\infty$
- $\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\}, \quad x + (-\infty) = -\infty$
- $\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x \times (+\infty) = +\infty, \quad x \times (-\infty) = -\infty,$
- $\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad x \times (+\infty) = -\infty, \quad x \times (-\infty) = +\infty.$

Définition 5.4 (formes indéterminées (op. non définies))

- $-\infty + (+\infty)$
- $0 \times (+\infty)$

Définition 5.3 (règles calculatoires dans $\overline{\mathbb{R}}$)

On peut prolonger partiellement les opérations de $\mathbb{R}$ sur $\overline{\mathbb{R}}$:

- $-(+\infty) = -\infty$
- $\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \cup\{-\infty\}, \quad x + (+\infty) = +\infty$
- $\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\}, \quad x + (-\infty) = -\infty$
- $\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x \times (+\infty) = +\infty, \quad x \times (-\infty) = -\infty,$
- $\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad x \times (+\infty) = -\infty, \quad x \times (-\infty) = +\infty.$

Définition 5.4 (formes indéterminées (op. non définies))

- $-\infty + (+\infty)$
- $0 \times (+\infty)$
- $0 \times (-\infty)$.

Proposition 5.5 (Bornes supérieures)

Tout sous-ensemble E de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Proposition 5.5 (Bornes supérieures)

Tout sous-ensemble E de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Remarque 5.6

Le résultat est bien sûr aussi valable pour les bornes inférieures.

Proposition 5.5 (Bornes supérieures)

Tout sous-ensemble E de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Remarque 5.6

Le résultat est bien sûr aussi valable pour les bornes inférieures.

Intervalles dans $\overline{\mathbb{R}}$

On pourra inclure les infinis dans les intervalles (par exemple $[1, +\infty]$).