

Alain Troesch
Cours de mathématiques, MP2I
Lycée Louis-Le-Grand (Paris)
Année scolaire 2021/2022

Fondements – Chapitre 7

Nombres complexes

- └ I. Les nombres complexes : définition et manipulations
- └ I-1. Définition, forme algébrique

I. Les nombres complexes : définition et manipulations

I-1. Définition, forme algébrique

Note historique 1.1

- ▶ Cardan et Bombelli (16e)

I. Les nombres complexes : définition et manipulations

I-1. Définition, forme algébrique

Note historique 1.1

- ▶ Cardan et Bombelli (16e)
- ▶ **Motivation** : pallier à l'absence de racines de certains polynômes.

I. Les nombres complexes : définition et manipulations

I-1. Définition, forme algébrique

Note historique 1.1

- ▶ Cardan et Bombelli (16e)
- ▶ **Motivation** : pallier à l'absence de racines de certains polynômes.
- ▶ La notation **i** est introduite par **Euler** en 1777.

I. Les nombres complexes : définition et manipulations

I-1. Définition, forme algébrique

Note historique 1.1

- ▶ Cardan et Bombelli (16e)
- ▶ **Motivation** : pallier à l'absence de racines de certains polynômes.
- ▶ La notation i est introduite par Euler en 1777.

$\mathbb{C}$ est le **corps de rupture**, et aussi de **décomposition** de $X^2 + 1$.

I. Les nombres complexes : définition et manipulations

I-1. Définition, forme algébrique

Note historique 1.1

- ▶ Cardan et Bombelli (16e)
- ▶ **Motivation** : pallier à l'absence de racines de certains polynômes.
- ▶ La notation i est introduite par Euler en 1777.

$\mathbb{C}$ est le corps de rupture, et aussi de décomposition de $X^2 + 1$.

$\mathbb{C}$ = corps avec i tel que $i^2 = -1$.

Définition 1.2 (ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes)

L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ est l'ensemble $\mathbb{R}^2$, muni des opérations suivantes :

Définition 1.2 (ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes)

L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ est l'ensemble $\mathbb{R}^2$, muni des opérations suivantes :

$$\blacktriangleright (a, b) + (a', b') = \quad ;$$

Définition 1.2 (ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes)

L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ est l'ensemble $\mathbb{R}^2$, muni des opérations suivantes :

$$\triangleright (a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') ;$$

Définition 1.2 (ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes)

L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ est l'ensemble $\mathbb{R}^2$, muni des opérations suivantes :

► $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$;

► $(a, b) \times (a', b') =$.

Définition 1.2 (ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes)

L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ est l'ensemble $\mathbb{R}^2$, muni des opérations suivantes :

- ▶ $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$;
- ▶ $(a, b) \times (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$.

Définition 1.2 (ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes)

L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ est l'ensemble $\mathbb{R}^2$, muni des opérations suivantes :

- ▶ $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$;
- ▶ $(a, b) \times (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$.

Pour λ réel et $z = (a, b)$ complexe :

$$\lambda z = (\lambda a, \lambda b).$$

Définition 1.2 (ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes)

L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ est l'ensemble $\mathbb{R}^2$, muni des opérations suivantes :

- ▶ $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$;
- ▶ $(a, b) \times (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$.

Pour λ réel et $z = (a, b)$ complexe :

$$\lambda z = (\lambda a, \lambda b).$$

Remarque 1.3

- ▶ $\lambda \in \mathbb{R}$ est identifié à $\lambda \times (1, 0) = (\lambda, 0)$.

Définition 1.2 (ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes)

L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ est l'ensemble $\mathbb{R}^2$, muni des opérations suivantes :

- ▶ $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$;
- ▶ $(a, b) \times (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$.

Pour λ réel et $z = (a, b)$ complexe :

$$\lambda z = (\lambda a, \lambda b).$$

Remarque 1.3

- ▶ $\lambda \in \mathbb{R}$ est identifié à $\lambda \times (1, 0) = (\lambda, 0)$.
- ▶ Via cette identification, la loi externe λz correspond au produit des complexes.

Définition 1.4 (Forme algébrique ; parties réelle, imaginaire)

- On note $1 = (1, 0)$, et $i = (0, 1)$

Définition 1.4 (Forme algébrique ; parties réelle, imaginaire)

- ▶ On note $1 = (1, 0)$, et $i = (0, 1)$
- ▶ **Forme algébrique** : $z = (a, b) = a + i b$.

Définition 1.4 (Forme algébrique ; parties réelle, imaginaire)

- ▶ On note $1 = (1, 0)$, et $i = (0, 1)$
- ▶ **Forme algébrique** : $z = (a, b) = a + i b$.
- ▶ Soit $z = a + i b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Définition 1.4 (Forme algébrique ; parties réelle, imaginaire)

- ▶ On note $1 = (1, 0)$, et $i = (0, 1)$
- ▶ **Forme algébrique** : $z = (a, b) = a + i b$.
- ▶ Soit $z = a + i b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.
 - ▶ $a =$ **partie réelle de z** , notée **$\text{Re}(z)$** ;

Définition 1.4 (Forme algébrique ; parties réelle, imaginaire)

- ▶ On note $1 = (1, 0)$, et $i = (0, 1)$
- ▶ **Forme algébrique** : $z = (a, b) = a + i b$.
- ▶ Soit $z = a + i b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.
 - ▶ $a =$ **partie réelle de z** , notée $\operatorname{Re}(z)$;
 - ▶ $b =$ **partie imaginaire de z** , notée $\operatorname{Im}(z)$.

Définition 1.4 (Forme algébrique ; parties réelle, imaginaire)

- ▶ On note $1 = (1, 0)$, et $i = (0, 1)$
- ▶ **Forme algébrique** : $z = (a, b) = a + i b$.
- ▶ Soit $z = a + i b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.
 - ▶ $a =$ **partie réelle de z** , notée $\operatorname{Re}(z)$;
 - ▶ $b =$ **partie imaginaire de z** , notée $\operatorname{Im}(z)$.
- ▶ $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ par l'identification précédente.

Définition 1.4 (Forme algébrique ; parties réelle, imaginaire)

- ▶ On note $1 = (1, 0)$, et $i = (0, 1)$
- ▶ **Forme algébrique** : $z = (a, b) = a + i b$.
- ▶ Soit $z = a + i b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.
 - ▶ $a =$ **partie réelle de z** , notée $\operatorname{Re}(z)$;
 - ▶ $b =$ **partie imaginaire de z** , notée $\operatorname{Im}(z)$.
- ▶ $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ par l'identification précédente.
- ▶ Nombre imaginaire pur : $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(z) = 0$.

Proposition 1.5 (propriétés liées au produit)

1. $i^2 = -1$

Proposition 1.5 (propriétés liées au produit)

1. $i^2 = -1$
2. $(a + i b)(a' + i b')$ s'obtient par les règles de **distributivité**.

Proposition 1.5 (propriétés liées au produit)

1. $i^2 = -1$
2. $(a + i b)(a' + i b')$ s'obtient par les règles de distributivité.
3. Si $z = a + i b \neq 0$, alors z est inversible,

Proposition 1.5 (propriétés liées au produit)

1. $i^2 = -1$
2. $(a + i b)(a' + i b')$ s'obtient par les règles de distributivité.
3. Si $z = a + i b \neq 0$, alors z est inversible,

$$z^{-1} = \frac{a - i b}{a^2 + b^2}.$$

Proposition 1.5 (propriétés liées au produit)

1. $i^2 = -1$
2. $(a + i b)(a' + i b')$ s'obtient par les règles de distributivité.
3. Si $z = a + i b \neq 0$, alors z est inversible,

$$z^{-1} = \frac{a - i b}{a^2 + b^2}.$$

Théorème 1.6 (structure de $\mathbb{C}$)

L'ensemble $\mathbb{C}$ muni des opérations ci-dessus est un **corps**.

Proposition 1.5 (propriétés liées au produit)

1. $i^2 = -1$
2. $(a + i b)(a' + i b')$ s'obtient par les règles de distributivité.
3. Si $z = a + i b \neq 0$, alors z est inversible,

$$z^{-1} = \frac{a - i b}{a^2 + b^2}.$$

Théorème 1.6 (structure de $\mathbb{C}$)

L'ensemble $\mathbb{C}$ muni des opérations ci-dessus est un corps.

Définition 1.7 (affixe d'un point du plan)

Soit $A = (a, b)$ un point de $\mathbb{R}^2$. L'**affixe** du point A est le nombre complexe $z_A = a + i b$.

└ I. Les nombres complexes : définition et manipulations

└ I-1. Définition, forme algébrique

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}[i] \text{ (adjonction d'un élément à un corps)}$$

$\mathbb{C} = \mathbb{R}[i]$ (adjonction d'un élément à un corps)

Théorème 1.8 (d'Alembert-Gauss, admis)

Tout polynôme **non constant** à coefficients complexes admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

$\mathbb{C} = \mathbb{R}[i]$ (adjonction d'un élément à un corps)

Théorème 1.8 (d'Alembert-Gauss, admis)

Tout polynôme **non constant** à coefficients complexes admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Conséquence (plus tard) : tout polynôme à coefficients complexes se factorise en polynômes de degré 1.

$\mathbb{C} = \mathbb{R}[i]$ (adjonction d'un élément à un corps)

Théorème 1.8 (d'Alembert-Gauss, admis)

Tout polynôme **non constant** à coefficients complexes admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Conséquence (plus tard) : tout polynôme à coefficients complexes se factorise en polynômes de degré 1.

Note historique 1.9

- ▶ Il est conjecturé depuis longtemps. Preuve discutable de d'Alembert en 1743.

$\mathbb{C} = \mathbb{R}[i]$ (adjonction d'un élément à un corps)

Théorème 1.8 (d'Alembert-Gauss, admis)

Tout polynôme **non constant** à coefficients complexes admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Conséquence (plus tard) : tout polynôme à coefficients complexes se factorise en polynômes de degré 1.

Note historique 1.9

- ▶ Il est conjecturé depuis longtemps. Preuve discutable de d'Alembert en 1743.
- ▶ Première preuve complète : Gauss (19-ième siècle).

- I. Les nombres complexes : définition et manipulations
 - I-1. Définition, forme algébrique

Définition 1.10 (conjugué d'un nombre complexe)

Conjugué de $z = a + i b$: $\bar{z} = a - i b$.

Définition 1.10 (conjugué d'un nombre complexe)

Conjugué de $z = a + ib$: $\bar{z} = a - ib$.

Propriétés 1.11 (propriétés de la conjugaison)

Définition 1.10 (conjugué d'un nombre complexe)

Conjugué de $z = a + i b$: $\bar{z} = a - i b$.

Propriétés 1.11 (propriétés de la conjugaison)

1. $\overline{\bar{z}} = z$

Définition 1.10 (conjugué d'un nombre complexe)

Conjugué de $z = a + ib$: $\bar{z} = a - ib$.

Propriétés 1.11 (propriétés de la conjugaison)

1. $\overline{\bar{z}} = z$
2. $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$;

Définition 1.10 (conjugué d'un nombre complexe)

Conjugué de $z = a + ib$: $\bar{z} = a - ib$.

Propriétés 1.11 (propriétés de la conjugaison)

1. $\overline{\bar{z}} = z$
2. $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$;
3. $z = -\bar{z} \iff z$ imaginaire pur ;

Définition 1.10 (conjugué d'un nombre complexe)

Conjugué de $z = a + i b$: $\bar{z} = a - i b$.

Propriétés 1.11 (propriétés de la conjugaison)

1. $\overline{\bar{z}} = z$
2. $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$;
3. $z = -\bar{z} \iff z$ imaginaire pur ;
4. $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$

Définition 1.10 (conjugué d'un nombre complexe)

Conjugué de $z = a + i b$: $\bar{z} = a - i b$.

Propriétés 1.11 (propriétés de la conjugaison)

1. $\overline{\bar{z}} = z$
2. $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$;
3. $z = -\bar{z} \iff z$ imaginaire pur ;
4. $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$;

Définition 1.10 (conjugué d'un nombre complexe)

Conjugué de $z = a + ib$: $\bar{z} = a - ib$.

Propriétés 1.11 (propriétés de la conjugaison)

1. $\overline{\bar{z}} = z$
2. $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$;
3. $z = -\bar{z} \iff z$ imaginaire pur ;
4. $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$;
5. $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$;

Définition 1.10 (conjugué d'un nombre complexe)

Conjugué de $z = a + ib$: $\bar{z} = a - ib$.

Propriétés 1.11 (propriétés de la conjugaison)

1. $\overline{\bar{z}} = z$
2. $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$;
3. $z = -\bar{z} \iff z$ imaginaire pur ;
4. $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$;
5. $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$; $\overline{zz'} = \bar{z} \cdot \bar{z'}$;

Définition 1.10 (conjugué d'un nombre complexe)

Conjugué de $z = a + ib$: $\bar{z} = a - ib$.

Propriétés 1.11 (propriétés de la conjugaison)

1. $\overline{\bar{z}} = z$
2. $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$;
3. $z = -\bar{z} \iff z$ imaginaire pur ;
4. $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$;
5. $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$; $\overline{zz'} = \bar{z} \cdot \bar{z'}$; $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1}$;

Définition 1.10 (conjugué d'un nombre complexe)

Conjugué de $z = a + ib$: $\bar{z} = a - ib$.

Propriétés 1.11 (propriétés de la conjugaison)

1. $\overline{\bar{z}} = z$
2. $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$;
3. $z = -\bar{z} \iff z$ imaginaire pur ;
4. $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$;
5. $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$; $\overline{zz'} = \bar{z} \cdot \bar{z'}$; $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1}$; $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z'}}{\bar{z}}$.

I-2. Module

Définition 1.12 (module d'un nombre complexe)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et $z = a + i b$.

Module de z : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

I-2. Module

Définition 1.12 (module d'un nombre complexe)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et $z = a + i b$.

Module de z : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Remarque 1.13

Module = Norme du vecteur correspondant dans $\mathbb{R}^2$:

I-2. Module

Définition 1.12 (module d'un nombre complexe)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et $z = a + i b$.

Module de z : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Remarque 1.13

Module = Norme du vecteur correspondant dans $\mathbb{R}^2$:

Si A est le point d'affixe z , $|z| = \|\vec{OA}\|$.

I-2. Module

Définition 1.12 (module d'un nombre complexe)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et $z = a + i b$.

Module de z : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Remarque 1.13

Module = Norme du vecteur correspondant dans $\mathbb{R}^2$:

Si A est le point d'affixe z , $|z| = \|\overrightarrow{OA}\|$.

Cohérence des notations avec la valeur absolue

I-2. Module

Définition 1.12 (module d'un nombre complexe)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et $z = a + i b$.

Module de z : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Remarque 1.13

Module = Norme du vecteur correspondant dans $\mathbb{R}^2$:

Si A est le point d'affixe z , $|z| = \|\vec{OA}\|$.

Cohérence des notations avec la valeur absolue

Exemples 1.14

1. Décrire l'ensemble des z tels que $|z - a| = r$, où $a \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

I-2. Module

Définition 1.12 (module d'un nombre complexe)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et $z = a + i b$.

Module de z : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Remarque 1.13

Module = Norme du vecteur correspondant dans $\mathbb{R}^2$:

Si A est le point d'affixe z , $|z| = \|\overrightarrow{OA}\|$.

Cohérence des notations avec la valeur absolue

Exemples 1.14

1. Décrire l'ensemble des z tels que $|z - a| = r$, où $a \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.
2. Même question avec l'inéquation $|z - a| \leq r$.

Propriétés 1.15 (propriétés du module)

1. $z = 0 \iff |z| = 0 ;$

Propriétés 1.15 (propriétés du module)

1. $z = 0 \iff |z| = 0$;
2. $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$;

Propriétés 1.15 (propriétés du module)

1. $z = 0 \iff |z| = 0$;
2. $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$;
3. Expression du module à l'aide du conjugué : $|z|^2 = z\bar{z}$

Propriétés 1.15 (propriétés du module)

1. $z = 0 \iff |z| = 0$;
2. $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$;
3. Expression du module à l'aide du conjugué : $|z|^2 = z\bar{z}$
4. Multiplicativité du module :
 $|zz'| = |z| \cdot |z'|$ et si $z' \neq 0$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

Propriétés 1.15 (propriétés du module)

1. $z = 0 \iff |z| = 0$;
2. $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$;
3. Expression du module à l'aide du conjugué : $|z|^2 = z\bar{z}$
4. Multiplicativité du module :
 $|zz'| = |z| \cdot |z'|$ et si $z' \neq 0$, $|\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|}$
5. Invariance du module par conjugaison : $|z| = |\bar{z}|$

Propriétés 1.15 (propriétés du module)

1. $z = 0 \iff |z| = 0$;
2. $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$;
3. Expression du module à l'aide du conjugué : $|z|^2 = z\bar{z}$
4. Multiplicativité du module :
 $|zz'| = |z| \cdot |z'|$ et si $z' \neq 0$, $|\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|}$
5. Invariance du module par conjugaison : $|z| = |\bar{z}|$
6. Inégalité triangulaire : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

Propriétés 1.15 (propriétés du module)

1. $z = 0 \iff |z| = 0$;
2. $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$;
3. Expression du module à l'aide du conjugué : $|z|^2 = z\bar{z}$
4. Multiplicativité du module :
 $|zz'| = |z| \cdot |z'|$ et si $z' \neq 0$, $|\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|}$
5. Invariance du module par conjugaison : $|z| = |\bar{z}|$
6. Inégalité triangulaire : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.
L'égalité est vérifiée ssi $z = 0$ ou s'il existe $\lambda > 0$ tel que $z' = \lambda z$.

Propriétés 1.15 (propriétés du module)

1. $z = 0 \iff |z| = 0$;
2. $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$;
3. Expression du module à l'aide du conjugué : $|z|^2 = z\bar{z}$
4. Multiplicativité du module :
 $|zz'| = |z| \cdot |z'|$ et si $z' \neq 0$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$
5. Invariance du module par conjugaison : $|z| = |\bar{z}|$
6. Inégalité triangulaire : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.
L'égalité est vérifiée ssi $z = 0$ ou s'il existe $\lambda > 0$ tel que $z' = \lambda z$.

Méthode 1.16 (Expression algébrique d'un quotient)

Considérer $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}$.

└ II. Trigonométrie

└ II-1. Cercle trigonométrique, formules de trigonométrie

II. Trigonométrie

II-1. Cercle trigonométrique, formules de trigonométrie

Trigonométrie = mesure des trois angles

II. Trigonométrie

II-1. Cercle trigonométrique, formules de trigonométrie

Trigonométrie = mesure des trois angles

Note historique 2.1

- Remonte à l'**antiquité** (Égypte, Babylone, Grèce), en rapport avec l'**astronomie**.

II. Trigonométrie

II-1. Cercle trigonométrique, formules de trigonométrie

Trigonométrie = mesure des trois angles

Note historique 2.1

- ▶ Remonte à l'antiquité (Égypte, Babylone, Grèce), en rapport avec l'astronomie.
- ▶ Le sinus a été introduit par les **indiens** aux alentours de **500 ap JC**, pour l'étude des angles célestes.

II. Trigonométrie

II-1. Cercle trigonométrique, formules de trigonométrie

Trigonométrie = mesure des trois angles

Note historique 2.1

- ▶ Remonte à l'antiquité (Égypte, Babylone, Grèce), en rapport avec l'astronomie.
- ▶ Le sinus a été introduit par les indiens aux alentours de 500 ap JC, pour l'étude des angles célestes.
La première table connue date de 499, et est attribuée à Aryabhata.

II. Trigonométrie

II-1. Cercle trigonométrique, formules de trigonométrie

Trigonométrie = mesure des trois angles

Note historique 2.1

- ▶ Remonte à l'antiquité (Égypte, Babylone, Grèce), en rapport avec l'astronomie.
- ▶ Le sinus a été introduit par les indiens aux alentours de 500 ap JC, pour l'étude des angles célestes.
La première table connue date de 499, et est attribuée à Aryabhata.
- ▶ Ces notions nous parviennent via les travaux de synthèse des **mathématiciens arabes** des 9^e et 10^e siècles

Définition 2.2 (cercle trigonométrique)

Le **cercle trigonométrique** (ou cercle unité) $\mathbb{U}$ est :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Définition 2.2 (cercle trigonométrique)

Le **cercle trigonométrique** (ou cercle unité) $\mathbb{U}$ est :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

C'est le cercle de center 0 et de rayon 1.

Définition 2.2 (cercle trigonométrique)

Le **cercle trigonométrique** (ou cercle unité) $\mathbb{U}$ est :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

C'est le cercle de center 0 et de rayon 1.

Définition 2.3 (fonctions trigonométriques)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit z le point du cercle trigonométrique tel que le rayon correspondant du cercle trigonométrique forme avec l'axe des réels un **angle (orienté dans le sens direct)** de x .

Définition 2.2 (cercle trigonométrique)

Le **cercle trigonométrique** (ou cercle unité) $\mathbb{U}$ est :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

C'est le cercle de center 0 et de rayon 1.

Définition 2.3 (fonctions trigonométriques)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit z le point du cercle trigonométrique tel que le rayon correspondant du cercle trigonométrique forme avec l'axe des réels un **angle (orienté dans le sens direct)** de x .

$$\cos(x) = \operatorname{Re}(z), \quad \sin(x) = \operatorname{Im}(z),$$

Définition 2.2 (cercle trigonométrique)

Le **cercle trigonométrique** (ou cercle unité) $\mathbb{U}$ est :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

C'est le cercle de center 0 et de rayon 1.

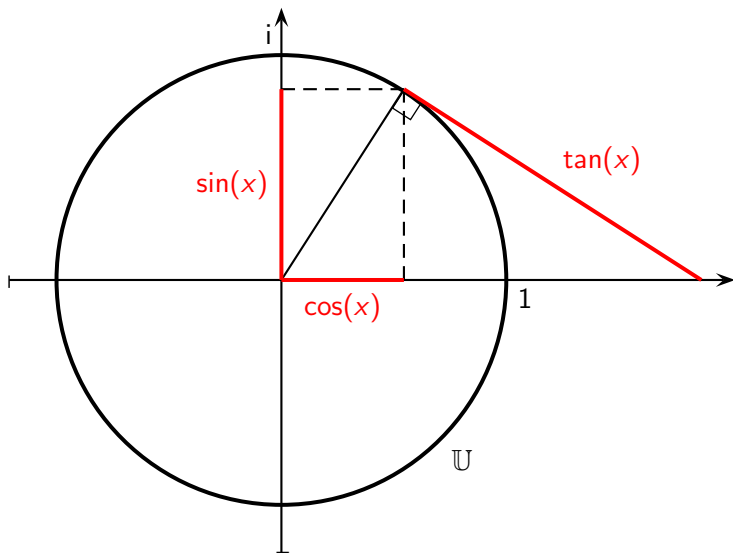
Définition 2.3 (fonctions trigonométriques)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit z le point du cercle trigonométrique tel que le rayon correspondant du cercle trigonométrique forme avec l'axe des réels un **angle (orienté dans le sens direct)** de x .

$$\cos(x) = \operatorname{Re}(z), \quad \sin(x) = \operatorname{Im}(z), \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

└ II. Trigonométrie

└ II-1. Cercle trigonométrique, formules de trigonométrie



Dans un triangle rectangle :

$$\sin(x) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}}, \quad \cos(x) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}}, \quad \tan(x) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}.$$

Dans un triangle rectangle :

$$\sin(x) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}}, \quad \cos(x) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}}, \quad \tan(x) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}.$$

Définition 2.4 (cotangente)

$$\cotan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Dans un triangle rectangle :

$$\sin(x) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}}, \quad \cos(x) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}}, \quad \tan(x) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}.$$

Définition 2.4 (cotangente)

$$\cotan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Quand bien défini : $\cotan(x) = \frac{1}{\tan(x)}$.

Proposition 2.5 (domaines de définition)

1. $\sin$ et $\cos$ sont définies sur $\mathbb{R}$.

Proposition 2.5 (domaines de définition)

1. $\sin$ et $\cos$ sont définies sur $\mathbb{R}$.

2. $\tan$ est définie sur

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi \right[= \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Proposition 2.5 (domaines de définition)

1. $\sin$ et $\cos$ sont définies sur $\mathbb{R}$.
2. $\tan$ est définie sur $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi \right[= \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z} \right\}$.
3. $\cotan$ est définie sur $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]n\pi, (n+1)\pi[= \mathbb{R} \setminus \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$.

Proposition 2.6 (Symétries de sin et cos)

1. sin et cos sont 2π -périodiques ;

Proposition 2.6 (Symétries de sin et cos)

1. sin et cos sont 2π -périodiques ;
2. sin est **impaire** et cos est **paire** ;

Proposition 2.6 (Symétries de sin et cos)

1. sin et cos sont 2π -périodiques ;
2. sin est impaire et cos est paire ;
3. $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$, et $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$.

Proposition 2.6 (Symétries de sin et cos)

1. sin et cos sont 2π -périodiques ;
2. sin est impaire et cos est paire ;
3. $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$, et $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$.
4. $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$, et $\sin(\pi - x) = \sin(x)$.

Proposition 2.6 (Symétries de sin et cos)

1. sin et cos sont 2π -périodiques ;
2. sin est impaire et cos est paire ;
3. $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$, et $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$.
4. $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$, et $\sin(\pi - x) = \sin(x)$.
5. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$, et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$.

Proposition 2.6 (Symétries de sin et cos)

1. sin et cos sont 2π -périodiques ;
2. sin est impaire et cos est paire ;
3. $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$, et $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$.
4. $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$, et $\sin(\pi - x) = \sin(x)$.
5. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$, et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$.
6. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$, et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$.

Proposition 2.7 (symétries de tan et cotan)

1. tan et cotan sont π -périodiques ;

Proposition 2.7 (symétries de $\tan$ et $\cotan$)

1. $\tan$ et $\cotan$ sont π -périodiques ;
2. $\tan$ et $\cotan$ sont **impaires** ;

Proposition 2.7 (symétries de tan et cotan)

1. tan et cotan sont π -périodiques ;
2. tan et cotan sont impaires ;
3. Quand bien défini : $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$;

Proposition 2.7 (symétries de $\tan$ et $\cotan$)

1. $\tan$ et $\cotan$ sont π -périodiques ;
2. $\tan$ et $\cotan$ sont impaires ;
3. Quand bien défini : $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$;
4. Quand bien défini : $\cotan(\pi - x) = -\cotan(x)$;

Proposition 2.7 (symétries de $\tan$ et $\cotan$)

1. $\tan$ et $\cotan$ sont π -périodiques ;
2. $\tan$ et $\cotan$ sont impaires ;
3. Quand bien défini : $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$;
4. Quand bien défini : $\cotan(\pi - x) = -\cotan(x)$;
5. Quand bien défini : $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cotan(x)$ et $\cotan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan(x)$;

Proposition 2.7 (symétries de $\tan$ et $\cotan$)

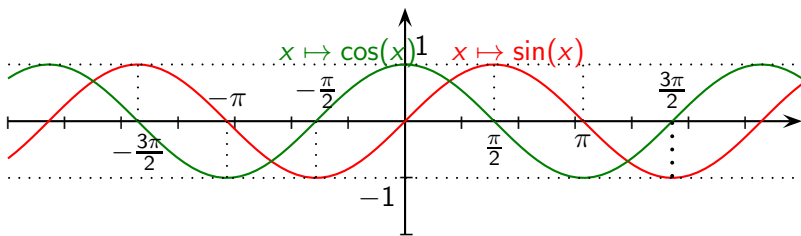
1. $\tan$ et $\cotan$ sont π -périodiques ;
2. $\tan$ et $\cotan$ sont impaires ;
3. Quand bien défini : $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$;
4. Quand bien défini : $\cotan(\pi - x) = -\cotan(x)$;
5. Quand bien défini : $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cotan(x)$ et $\cotan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan(x)$;
6. Quand bien défini : $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cotan(x)$ et $\cotan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\tan(x)$;

Proposition 2.8 (Valeurs particulières)

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—
cotan	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

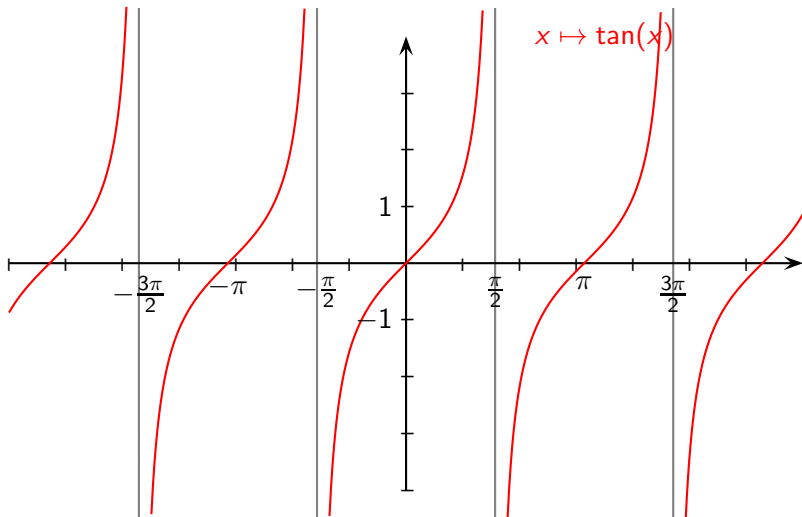
II. Trigonométrie

II-1. Cercle trigonométrique, formules de trigonométrie



II. Trigonométrie

II-1. Cercle trigonométrique, formules de trigonométrie



Proposition 2.9 (Identité remarquable)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Proposition 2.9 (Identité remarquable)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Proposition 2.10 (Formules d'addition)

(i) $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

Proposition 2.9 (Identité remarquable)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Proposition 2.10 (Formules d'addition)

(i) $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

(ii) $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

Proposition 2.9 (Identité remarquable)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Proposition 2.10 (Formules d'addition)

- (i) $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
- (ii) $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$
- (iii) $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Proposition 2.9 (Identité remarquable)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Proposition 2.10 (Formules d'addition)

- (i) $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
- (ii) $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$
- (iii) $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- (iv) $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

Proposition 2.9 (Identité remarquable)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Proposition 2.10 (Formules d'addition)

- (i) $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
- (ii) $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$
- (iii) $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- (iv) $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- (v) Quand bien défini : $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

Proposition 2.9 (Identité remarquable)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Proposition 2.10 (Formules d'addition)

(i) $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

(ii) $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

(iii) $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

(iv) $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

(v) Quand bien défini : $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

(vi) Quand bien défini : $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

Proposition 2.9 (Identité remarquable)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Proposition 2.10 (Formules d'addition)

(i) $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

(ii) $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

(iii) $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

(iv) $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

(v) Quand bien défini : $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

(vi) Quand bien défini : $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

(vii) Quand bien défini : $\cotan(a + b) = \frac{\cotan(a)\cotan(b) - 1}{\cotan(a) + \cotan(b)}.$

Proposition 2.11 (formules de duplication des angles)

(i) $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

Proposition 2.11 (formules de duplication des angles)

(i) $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

(ii) $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2 \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1$

Proposition 2.11 (formules de duplication des angles)

- (i) $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$
- (ii) $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2 \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1$
- (iii) $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$

Proposition 2.11 (formules de duplication des angles)

- (i) $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$
- (ii) $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2 \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1$
- (iii) $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$

Proposition 2.12 (formules de linéarisation des carrés, ou formules de Carnot)

- (i) $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$

Proposition 2.11 (formules de duplication des angles)

- (i) $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$
- (ii) $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2 \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1$
- (iii) $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$

Proposition 2.12 (formules de linéarisation des carrés, ou formules de Carnot)

- (i) $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$
- (ii) $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$

Proposition 2.13 (formules de développement)

$$(i) \quad \sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

Proposition 2.13 (formules de développement)

$$(i) \quad \sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

$$(ii) \quad \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$$

Proposition 2.13 (formules de développement)

$$(i) \quad \sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

$$(ii) \quad \cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) + \cos(a + b)]$$

$$(iii) \quad \sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a + b) + \sin(a - b)]$$

Proposition 2.13 (formules de développement)

$$(i) \quad \sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

$$(ii) \quad \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$$

$$(iii) \quad \sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$$

Proposition 2.14 (formules de Simpson)

$$(i) \quad \sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p + q}{2} \cos \frac{p - q}{2}$$

Proposition 2.13 (formules de développement)

$$(i) \quad \sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

$$(ii) \quad \cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) + \cos(a + b)]$$

$$(iii) \quad \sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a + b) + \sin(a - b)]$$

Proposition 2.14 (formules de Simpson)

$$(i) \quad \sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p + q}{2} \cos \frac{p - q}{2}$$

$$(ii) \quad \sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p + q}{2} \sin \frac{p - q}{2}$$

Proposition 2.13 (formules de développement)

$$(i) \quad \sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

$$(ii) \quad \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$$

$$(iii) \quad \sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$$

Proposition 2.14 (formules de Simpson)

$$(i) \quad \sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p + q}{2} \cos \frac{p - q}{2}$$

$$(ii) \quad \sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p + q}{2} \sin \frac{p - q}{2}$$

$$(iii) \quad \cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p + q}{2} \cos \frac{p - q}{2}$$

Proposition 2.13 (formules de développement)

$$(i) \quad \sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

$$(ii) \quad \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$$

$$(iii) \quad \sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$$

Proposition 2.14 (formules de Simpson)

$$(i) \quad \sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p + q}{2} \cos \frac{p - q}{2}$$

$$(ii) \quad \sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p + q}{2} \sin \frac{p - q}{2}$$

$$(iii) \quad \cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p + q}{2} \cos \frac{p - q}{2}$$

$$(iv) \quad \cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p + q}{2} \sin \frac{p - q}{2}$$

Proposition 2.15 (formules de l'arc moitié)

Soit x un réel tel que $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ soit défini.

Proposition 2.15 (formules de l'arc moitié)

Soit x un réel tel que $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ soit défini.

$$(i) \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

Proposition 2.15 (formules de l'arc moitié)

Soit x un réel tel que $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ soit défini.

$$(i) \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$(ii) \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Proposition 2.15 (formules de l'arc moitié)

Soit x un réel tel que $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ soit défini.

$$(i) \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$(ii) \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$(iii) \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2} \text{ si } t \neq \pm 1.$$

Proposition 2.15 (formules de l'arc moitié)

Soit x un réel tel que $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ soit défini.

$$(i) \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$(ii) \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$(iii) \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2} \text{ si } t \neq \pm 1.$$

Proposition 2.16 (formule de factorisation de $a \cos x + b \sin x$)

$$a \cos x + b \sin x = \frac{a}{\cos \varphi} \cos(x - \varphi), \text{ où } \tan(\varphi) = \frac{b}{a}.$$

II-2. Forme trigonométrique et applications à la trigonométrie

Définition 2.17 (exponentielle complexe)

Exponentielle sur les imaginaires purs : $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

II-2. Forme trigonométrique et applications à la trigonométrie

Définition 2.17 (exponentielle complexe)

Exponentielle sur les imaginaires purs : $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

Proposition 2.18

$\theta \mapsto e^{i\theta}$ est :

- ▶ surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{U}$.

II-2. Forme trigonométrique et applications à la trigonométrie

Définition 2.17 (exponentielle complexe)

Exponentielle sur les imaginaires purs : $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

Proposition 2.18

$\theta \mapsto e^{i\theta}$ est :

- ▶ surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{U}$.
- ▶ **bijective** de tout intervalle $]\alpha, \alpha + 2\pi]$ sur $\mathbb{U}$;

II-2. Forme trigonométrique et applications à la trigonométrie

Définition 2.17 (exponentielle complexe)

Exponentielle sur les imaginaires purs : $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

Proposition 2.18

$\theta \mapsto e^{i\theta}$ est :

- ▶ surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{U}$.
- ▶ bijective de tout intervalle $]\alpha, \alpha + 2\pi]$ sur $\mathbb{U}$;
- ▶ **bijective** de tout intervalle **$[\alpha, \alpha + 2\pi[$** sur $\mathbb{U}$.

Corollaire 2.19

$(r, \theta) \mapsto re^{i\theta}$ est **bijjective** de $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi]$ sur $\mathbb{C}^*$.

Corollaire 2.19

$(r, \theta) \mapsto re^{i\theta}$ est bijective de $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi]$ sur $\mathbb{C}^*$.

Définition 2.20 (forme trigonométrique)

- Écriture $z = re^{i\theta}$, avec $r > 0$: forme trigonométrique

Corollaire 2.19

$(r, \theta) \mapsto re^{i\theta}$ est bijective de $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi]$ sur $\mathbb{C}^*$.

Définition 2.20 (forme trigonométrique)

- ▶ Écriture $z = re^{i\theta}$, avec $r > 0$: forme trigonométrique
- ▶ r est unique, $r = |z|$

Corollaire 2.19

$(r, \theta) \mapsto re^{i\theta}$ est bijective de $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi]$ sur $\mathbb{C}^*$.

Définition 2.20 (forme trigonométrique)

- ▶ Écriture $z = re^{i\theta}$, avec $r > 0$: forme trigonométrique
- ▶ r est unique, $r = |z|$
- ▶ θ est unique *modulo* 2π , appelé **argument de z** .

Corollaire 2.19

$(r, \theta) \mapsto re^{i\theta}$ est bijective de $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi]$ sur $\mathbb{C}^*$.

Définition 2.20 (forme trigonométrique)

- ▶ Écriture $z = re^{i\theta}$, avec $r > 0$: forme trigonométrique
- ▶ r est unique, $r = |z|$
- ▶ θ est unique *modulo* 2π , appelé argument de z .
- ▶ $\theta \in]-\pi, \pi]$ est appelé argument principal de z , noté $\arg(z)$.

Proposition 2.21 (formules d'Euler)

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Proposition 2.21 (formules d'Euler)

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Théorème 2.22 (formules trigonométriques d'addition)

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}.$$

Proposition 2.21 (formules d'Euler)

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Théorème 2.22 (formules trigonométriques d'addition)

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}.$$

Remarque 2.23

Cette formule synthétise les formules d'addition

Proposition 2.21 (formules d'Euler)

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Théorème 2.22 (formules trigonométriques d'addition)

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}.$$

Remarque 2.23

Cette formule synthétise les formules d'addition

Corollaire 2.24 (Formule de (De) Moivre, 1707)

$$e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$$

Proposition 2.21 (formules d'Euler)

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Théorème 2.22 (formules trigonométriques d'addition)

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}.$$

Remarque 2.23

Cette formule synthétise les formules d'addition

Corollaire 2.24 (Formule de (De) Moivre, 1707)

$$e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n \quad \text{soit:} \quad \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = (\cos \theta + i \sin \theta)^n.$$

Proposition 2.21 (formules d'Euler)

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Théorème 2.22 (formules trigonométriques d'addition)

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}.$$

Remarque 2.23

Cette formule synthétise les formules d'addition

Corollaire 2.24 (Formule de (De) Moivre, 1707)

$$e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n \quad \text{soit:} \quad \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = (\cos \theta + i \sin \theta)^n.$$

Note historique 2.25

La version de Moivre est celle avec les cos et sin, d'apparence beaucoup moins limpide que la version exponentielle.

Méthode 2.26 (Principe de symétrisation des arguments)

Pour des sommes ou différences de complexes de même module :

$$\blacktriangleright e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{-i\frac{a-b}{2}} \right) = 2 \cos \left(\frac{a-b}{2} \right) e^{i\frac{a+b}{2}}.$$

Méthode 2.26 (Principe de symétrisation des arguments)

Pour des sommes ou différences de complexes de même module :

$$\blacktriangleright e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{-i\frac{a-b}{2}} \right) = 2 \cos \left(\frac{a-b}{2} \right) e^{i\frac{a+b}{2}}.$$

$$\blacktriangleright e^{ia} - e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\frac{a-b}{2}} - e^{-i\frac{a-b}{2}} \right) = 2i \sin \left(\frac{a-b}{2} \right) e^{i\frac{a+b}{2}}.$$

Méthode 2.26 (Principe de symétrisation des arguments)

Pour des sommes ou différences de complexes de même module :

$$\blacktriangleright e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{-i\frac{a-b}{2}} \right) = 2 \cos \left(\frac{a-b}{2} \right) e^{i\frac{a+b}{2}}.$$

$$\blacktriangleright e^{ia} - e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\frac{a-b}{2}} - e^{-i\frac{a-b}{2}} \right) = 2i \sin \left(\frac{a-b}{2} \right) e^{i\frac{a+b}{2}}.$$

Permet de retenir ou retrouver les **formules de factorisation**.

Méthode 2.26 (Principe de symétrisation des arguments)

Pour des sommes ou différences de complexes de même module :

$$\triangleright e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{-i\frac{a-b}{2}} \right) = 2 \cos \left(\frac{a-b}{2} \right) e^{i\frac{a+b}{2}}.$$

$$\triangleright e^{ia} - e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\frac{a-b}{2}} - e^{-i\frac{a-b}{2}} \right) = 2i \sin \left(\frac{a-b}{2} \right) e^{i\frac{a+b}{2}}.$$

Permet de retenir ou retrouver les formules de factorisation.

Exemple 2.27

Factoriser $1 + e^{ia}$.

Méthode 2.28 (Linéarisation)

Exprimer $\cos^n \theta$ ou $\sin^n \theta$ en fonction des $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$.

Méthode 2.28 (Linéarisation)

Exprimer $\cos^n \theta$ ou $\sin^n \theta$ en fonction des $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$.

1. Exprimer $\cos \theta$ (ou $\sin \theta$) à l'aide des formules d'**Euler** ;

Méthode 2.28 (Linéarisation)

Exprimer $\cos^n \theta$ ou $\sin^n \theta$ en fonction des $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$.

1. Exprimer $\cos \theta$ (ou $\sin \theta$) à l'aide des formules d'Euler ;
2. Développer à l'aide de la formule du **binôme de Newton** ;

Méthode 2.28 (Linéarisation)

Exprimer $\cos^n \theta$ ou $\sin^n \theta$ en fonction des $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$.

1. Exprimer $\cos \theta$ (ou $\sin \theta$) à l'aide des formules d'Euler ;
2. Développer à l'aide de la formule du binôme de Newton ;
3. Regrouper les exponentielles conjuguées et retrouver des **sin et cos**.

Méthode 2.28 (Linéarisation)

Exprimer $\cos^n \theta$ ou $\sin^n \theta$ en fonction des $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$.

1. Exprimer $\cos \theta$ (ou $\sin \theta$) à l'aide des formules d'Euler ;
2. Développer à l'aide de la formule du binôme de Newton ;
3. Regrouper les exponentielles conjuguées et retrouver des sin et cos.

Exemple 2.29

1. Linéariser $\cos^4(x)$

Méthode 2.28 (Linéarisation)

Exprimer $\cos^n \theta$ ou $\sin^n \theta$ en fonction des $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$.

1. Exprimer $\cos \theta$ (ou $\sin \theta$) à l'aide des formules d'Euler ;
2. Développer à l'aide de la formule du binôme de Newton ;
3. Regrouper les exponentielles conjuguées et retrouver des $\sin$ et $\cos$.

Exemple 2.29

1. Linéariser $\cos^4(x)$
2. Linéariser $\sin^5(x)$. En déduire $\int_0^\pi \sin^5(x) \, dx$.

Méthode 2.28 (Linéarisation)

Exprimer $\cos^n \theta$ ou $\sin^n \theta$ en fonction des $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$.

1. Exprimer $\cos \theta$ (ou $\sin \theta$) à l'aide des formules d'Euler ;
2. Développer à l'aide de la formule du binôme de Newton ;
3. Regrouper les exponentielles conjuguées et retrouver des sin et cos.

Exemple 2.29

1. Linéariser $\cos^4(x)$
2. Linéariser $\sin^5(x)$. En déduire $\int_0^{\pi} \sin^5(x) \, dx$.
Peut-on faire ce calcul plus rapidement ?

Méthode 2.30 (Délinéarisation, polynômes de Tchébychev)

Écrire $\cos(n\theta)$ ou $\sin(n\theta)$ en fonction des $\cos^k(x)$ et/ou $\sin^k(x)$.

Méthode 2.30 (Délinéarisation, polynômes de Tchébychev)

Écrire $\cos(n\theta)$ ou $\sin(n\theta)$ en fonction des $\cos^k(x)$ et/ou $\sin^k(x)$.

1. Formule de **Moivre** pour exprimer $\cos(n\theta)$ ou $\sin(n\theta)$ comme partie réelle ou imaginaire de $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n$.

Méthode 2.30 (Délinéarisation, polynômes de Tchébychev)

Écrire $\cos(n\theta)$ ou $\sin(n\theta)$ en fonction des $\cos^k(x)$ et/ou $\sin^k(x)$.

1. Formule de Moivre pour exprimer $\cos(n\theta)$ ou $\sin(n\theta)$ comme partie réelle ou imaginaire de $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n$.
2. Développer à l'aide de la formule du **binôme de Newton**

Méthode 2.30 (Délinéarisation, polynômes de Tchébychev)

Écrire $\cos(n\theta)$ ou $\sin(n\theta)$ en fonction des $\cos^k(x)$ et/ou $\sin^k(x)$.

1. Formule de Moivre pour exprimer $\cos(n\theta)$ ou $\sin(n\theta)$ comme partie réelle ou imaginaire de $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n$.
2. Développer à l'aide de la formule du binôme de Newton
3. Utilise l'identité remarquable $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ pour exprimer la partie réelle (ou imaginaire) sous forme d'un polynôme en $\cos(x)$ (pour $\cos(n\theta)$) ou le produit de $\cos(x)$ par un polynôme en $\sin(x)$ (pour $\sin(n\theta)$)

Méthode 2.30 (Délinéarisation, polynômes de Tchébychev)

Écrire $\cos(n\theta)$ ou $\sin(n\theta)$ en fonction des $\cos^k(x)$ et/ou $\sin^k(x)$.

1. Formule de Moivre pour exprimer $\cos(n\theta)$ ou $\sin(n\theta)$ comme partie réelle ou imaginaire de $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n$.
2. Développer à l'aide de la formule du binôme de Newton
3. Utilise l'identité remarquable $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ pour exprimer la partie réelle (ou imaginaire) sous forme d'un polynôme en $\cos(x)$ (pour $\cos(n\theta)$) ou le produit de $\cos(x)$ par un polynôme en $\sin(x)$ (pour $\sin(n\theta)$)

Remarque 2.31

Les polynômes obtenus ainsi s'appelle **polynômes de Tchébychev**. On peut les définir par récurrence. La méthode ci-dessus permet alors d'obtenir une **expression explicite** de ces polynômes.

Méthode 2.32 (Sommes de sin et cos)

Principe général : voir une telle somme comme partie imaginaire (ou réelle) d'une **somme d'exponentielles**.

Méthode 2.32 (Sommes de sin et cos)

Principe général : voir une telle somme comme partie imaginaire (ou réelle) d'une somme d'exponentielles.

Exemple 2.33 (noyau de Dirichlet)

Soit a et b deux réels et

$$C = \cos a + \cos(a + b) + \cdots + \cos(a + nb) = \sum_{k=0}^n \cos(a + kb).$$

Alors $C = \cos\left(a + \frac{bn}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2} \cdot b\right)}{\sin \frac{b}{2}}.$

II-3. Exponentielle complexe

Définition 2.34 (Exponentielle complexe)

$$e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} \times e^{i\operatorname{Im}(z)}.$$

II-3. Exponentielle complexe

Définition 2.34 (Exponentielle complexe)

$$e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} \times e^{i\operatorname{Im}(z)}.$$

Théorème 2.35 (propriété d'addition)

$$e^{z+z'} = e^z e^{z'}.$$

II-3. Exponentielle complexe

Définition 2.34 (Exponentielle complexe)

$$e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} \times e^{i\operatorname{Im}(z)}.$$

Théorème 2.35 (propriété d'addition)

$$e^{z+z'} = e^z e^{z'}.$$

Proposition 2.36 (cas d'égalité)

$$e^z = e^{z'} \text{ ssi } \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \text{ et } \operatorname{Im}(z) \equiv \operatorname{Im}(z') \pmod{2\pi}.$$

II-3. Exponentielle complexe

Définition 2.34 (Exponentielle complexe)

$$e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} \times e^{i\operatorname{Im}(z)}.$$

Théorème 2.35 (propriété d'addition)

$$e^{z+z'} = e^z e^{z'}.$$

Proposition 2.36 (cas d'égalité)

$$e^z = e^{z'} \text{ ssi } \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \text{ et } \operatorname{Im}(z) \equiv \operatorname{Im}(z') \pmod{2\pi}.$$

Proposition 2.37 (Image réciproque)

- ▶ si $a = 0$, l'équation $e^z = a$ n'a pas de solution ;

II-3. Exponentielle complexe

Définition 2.34 (Exponentielle complexe)

$$e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} \times e^{i \operatorname{Im}(z)}.$$

Théorème 2.35 (propriété d'addition)

$$e^{z+z'} = e^z e^{z'}.$$

Proposition 2.36 (cas d'égalité)

$$e^z = e^{z'} \text{ ssi } \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \text{ et } \operatorname{Im}(z) \equiv \operatorname{Im}(z') \pmod{2\pi}.$$

Proposition 2.37 (Image réciproque)

- ▶ si $a = 0$, l'équation $e^z = a$ n'a pas de solution ;
- ▶ si $a \neq 0$, l'équation $e^z = a$ a une **infinité** de solutions :
$$\operatorname{Re}(z) = \ln |a| \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(z) \equiv \arg(a) \pmod{2\pi}.$$

III. Racines d'un nombre complexe

III-1. Racines n -ièmes

Définition 3.1 (racines n -ièmes, groupe $\mathbb{U}_n$)

- Racine n -ième de z = racine du polynôme $X^n - z$, donc $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\omega^n = z$

III. Racines d'un nombre complexe

III-1. Racines n -ièmes

Définition 3.1 (racines n -ièmes, groupe $\mathbb{U}_n$)

- ▶ Racine n -ième de z = racine du polynôme $X^n - z$, donc $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\omega^n = z$
- ▶ Racine n -ième de l'unité = racine n -ième de 1.

III. Racines d'un nombre complexe

III-1. Racines n -ièmes

Définition 3.1 (racines n -ièmes, groupe $\mathbb{U}_n$)

- ▶ Racine n -ième de z = racine du polynôme $X^n - z$, donc $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\omega^n = z$
- ▶ Racine n -ième de l'unité = racine n -ième de 1.
- ▶ $\mathbb{U}_n$: ensemble des racines n -ièmes de l'unité.

III. Racines d'un nombre complexe

III-1. Racines n -ièmes

Définition 3.1 (racines n -ièmes, groupe $\mathbb{U}_n$)

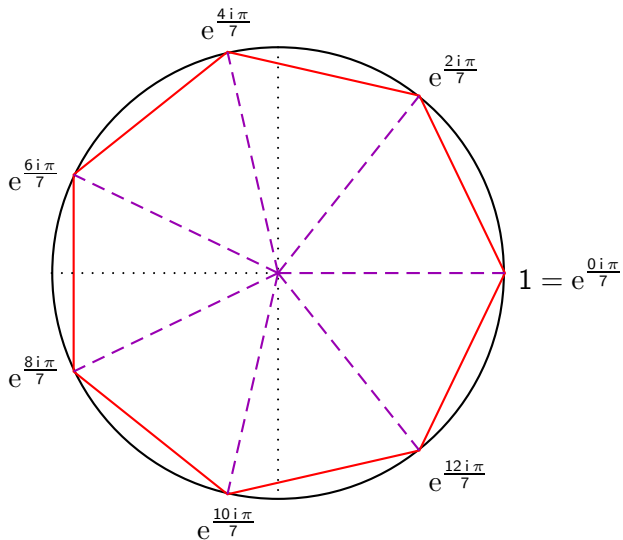
- ▶ Racine n -ième de z = racine du polynôme $X^n - z$, donc $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\omega^n = z$
- ▶ Racine n -ième de l'unité = racine n -ième de 1.
- ▶ $\mathbb{U}_n$: ensemble des racines n -ièmes de l'unité.

Proposition 3.2 (Explicitation des racines de l'unité)

$$\mathbb{U}_n = \{\omega_k = e^{i \frac{2\pi k}{n}}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}.$$

III. Racines d'un nombre complexe

III-1. Racines n -ièmes



Proposition 3.3 (racines n -ièmes de z , figure ??)

Soit $z = re^{i\theta}$.

(i) Une racine n -ième particulière de z : $z_0 = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\theta}{n}}$

Proposition 3.3 (racines n -ièmes de z , figure ??)

Soit $z = re^{i\theta}$.

- (i) Une racine n -ième particulière de z : $z_0 = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\theta}{n}}$
- (ii) Les racines n -ièmes de z : $\xi = z_0\omega$, $\omega \in \mathbb{U}_n$.

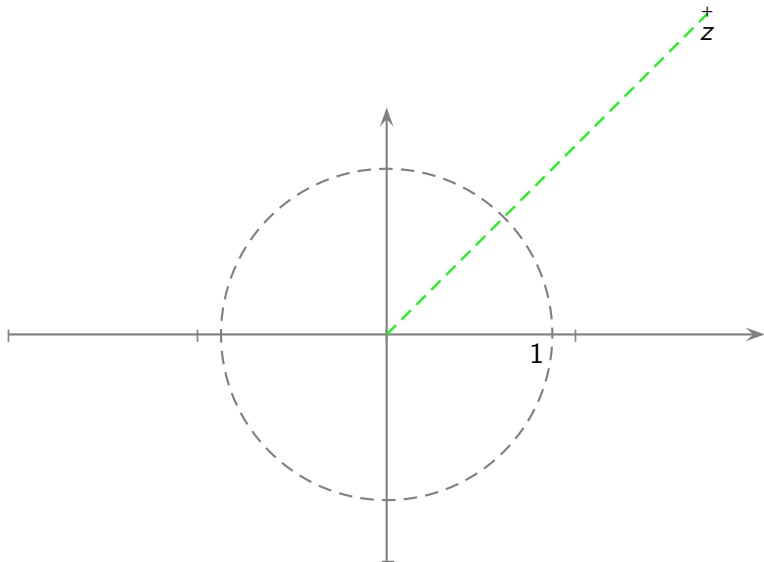
Proposition 3.3 (racines n -ièmes de z , figure ??)

Soit $z = re^{i\theta}$.

- (i) Une racine n -ième particulière de z : $z_0 = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\theta}{n}}$
- (ii) Les racines n -ièmes de z : $\xi = z_0\omega$, $\omega \in \mathbb{U}_n$.
- (iii) Ainsi, $\xi_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$, $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

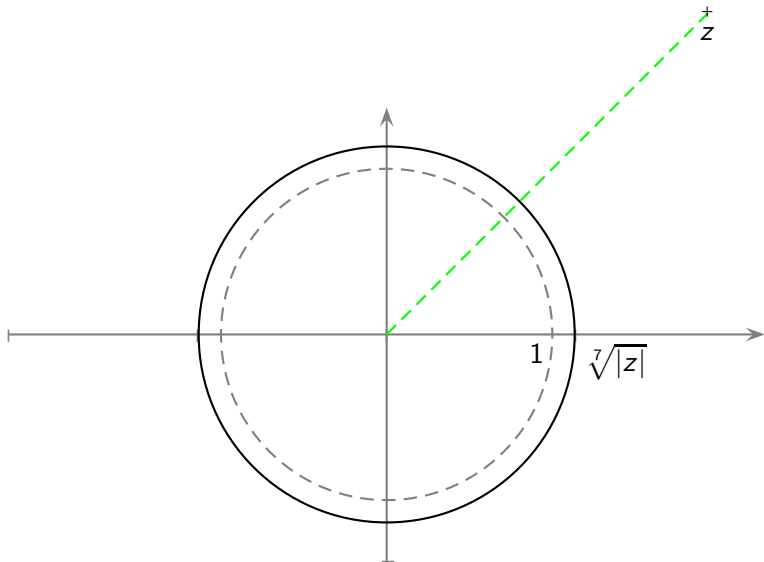
└ III. Racines d'un nombre complexe

└ III-1. Racines n -ièmes



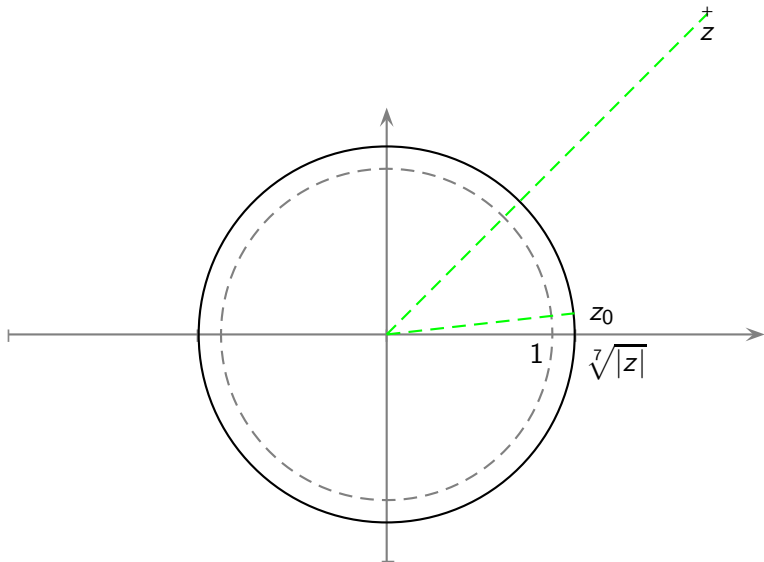
III. Racines d'un nombre complexe

III-1. Racines n -ièmes



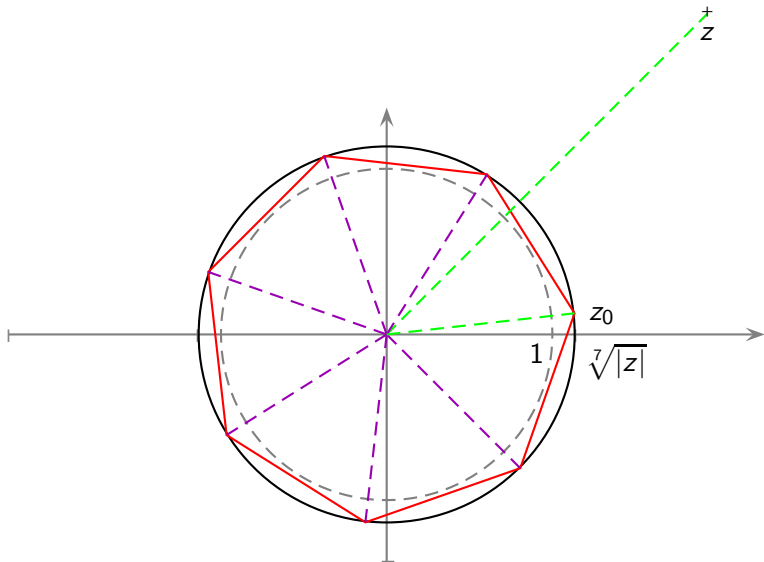
III. Racines d'un nombre complexe

III-1. Racines n -ièmes



III. Racines d'un nombre complexe

III-1. Racines n -ièmes



Proposition 3.4

Soit $\omega \in \mathbb{U}_n$, $\omega \neq 1$. Alors $\sum_{i=0}^{n-1} \omega^i = 0$.

Proposition 3.4

Soit $\omega \in \mathbb{U}_n$, $\omega \neq 1$. Alors $\sum_{i=0}^{n-1} \omega^i = 0$.

Corollaire 3.5 (somme des racines n -ièmes de l'unité)

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = 0$$

Proposition 3.4

Soit $\omega \in \mathbb{U}_n$, $\omega \neq 1$. Alors $\sum_{i=0}^{n-1} \omega^i = 0$.

Corollaire 3.5 (somme des racines n -ièmes de l'unité)

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = 0$$

Corollaire 3.6 (somme des racines n -ièmes de z)

Soit $\{\xi_0, \dots, \xi_{n-1}\}$ l'ensemble des racines n -ièmes de z , alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \xi_k = 0$$

Proposition 3.4

Soit $\omega \in \mathbb{U}_n$, $\omega \neq 1$. Alors $\sum_{i=0}^{n-1} \omega^i = 0$.

Corollaire 3.5 (somme des racines n -ièmes de l'unité)

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = 0$$

Corollaire 3.6 (somme des racines n -ièmes de z)

Soit $\{\xi_0, \dots, \xi_{n-1}\}$ l'ensemble des racines n -ièmes de z , alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \xi_k = 0$$

Remarque 3.7

Cas particulier des **relations coefficients/racines**.

Notation 3.8 (j et les racines cubiques)

$$\triangleright j = e^{i \frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Notation 3.8 (j et les racines cubiques)

- ▶ $j = e^{i \frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- ▶ Racines cubiques de l'unité : 1 , j et j^2 .

Notation 3.8 (j et les racines cubiques)

- ▶ $j = e^{i \frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- ▶ Racines cubiques de l'unité : 1, j et j^2 .

Proposition 3.9 (Propriétés de j)

- ▶ $j^3 = 1$, $j^n = j^r$, $n = 3q + r$.

Notation 3.8 (j et les racines cubiques)

- ▶ $j = e^{i \frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- ▶ Racines cubiques de l'unité : 1, j et j^2 .

Proposition 3.9 (Propriétés de j)

- ▶ $j^3 = 1, j^n = j^r, n = 3q + r$.
- ▶ $\bar{j} = j^2$

Notation 3.8 (j et les racines cubiques)

- ▶ $j = e^{i \frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- ▶ Racines cubiques de l'unité : 1, j et j^2 .

Proposition 3.9 (Propriétés de j)

- ▶ $j^3 = 1, j^n = j^r, n = 3q + r$.
- ▶ $\bar{j} = j^2$
- ▶ $j^2 + j + 1 = 0$

Notation 3.8 (j et les racines cubiques)

- ▶ $j = e^{i \frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- ▶ Racines cubiques de l'unité : 1 , j et j^2 .

Proposition 3.9 (Propriétés de j)

- ▶ $j^3 = 1$, $j^n = j^r$, $n = 3q + r$.
- ▶ $\bar{j} = j^2$
- ▶ $j^2 + j + 1 = 0$

Proposition 3.10 (Racines 6-ièmes)

Les racines 6-ièmes de l'unité : 1 , $-j^2$, j , -1 , j^2 , $-j$.

└ III. Racines d'un nombre complexe

└ III-2. Cas des racines carrées : expression sous forme algébrique

III-2. Expression algébrique des racines carrées

Expression trigonométrique des racines carrées

$z = re^{i\theta}$, z possède deux racines carrées :

$$z_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \text{et} \quad z_2 = -\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

└ III. Racines d'un nombre complexe

└ III-2. Cas des racines carrées : expression sous forme algébrique

III-2. Expression algébrique des racines carrées

Expression trigonométrique des racines carrées

$z = re^{i\theta}$, z possède deux racines carrées :

$$z_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \text{et} \quad z_2 = -\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

Méthode 3.11 (Racines carrées sous forme algébrique)

Soit $z = a + ib$.

1. Considérer une **racine** $z' = c + id$

III-2. Expression algébrique des racines carrées

Expression trigonométrique des racines carrées

$z = re^{i\theta}$, z possède deux racines carrées :

$$z_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \text{et} \quad z_2 = -\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

Méthode 3.11 (Racines carrées sous forme algébrique)

Soit $z = a + ib$.

1. Considérer une racine $z' = c + id$
2. **Identifier** parties imaginaires et réelles dans $(z')^2 = z$.
En retenir la **valeur de $c^2 - d^2$** et le **signe de cd** .

III-2. Expression algébrique des racines carrées

Expression trigonométrique des racines carrées

$z = re^{i\theta}$, z possède deux racines carrées :

$$z_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \text{et} \quad z_2 = -\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

Méthode 3.11 (Racines carrées sous forme algébrique)

Soit $z = a + ib$.

1. Considérer une racine $z' = c + id$
2. Identifier parties imaginaires et réelles dans $(z')^2 = z$.
En retenir la valeur de $c^2 - d^2$ et le signe de cd .
3. l'égalité des modules de $(z')^4$ et z^2 fournit $c^2 + d^2$.

III-2. Expression algébrique des racines carrées

Expression trigonométrique des racines carrées

$z = re^{i\theta}$, z possède deux racines carrées :

$$z_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \text{et} \quad z_2 = -\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

Méthode 3.11 (Racines carrées sous forme algébrique)

Soit $z = a + ib$.

1. Considérer une racine $z' = c + id$
2. Identifier parties imaginaires et réelles dans $(z')^2 = z$.
En retenir la valeur de $c^2 - d^2$ et le signe de cd .
3. l'égalité des modules de $(z')^4$ et z^2 fournit $c^2 + d^2$.
4. En déduire c^2 et d^2 .

III-2. Expression algébrique des racines carrées

Expression trigonométrique des racines carrées

$z = re^{i\theta}$, z possède deux racines carrées :

$$z_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \text{et} \quad z_2 = -\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

Méthode 3.11 (Racines carrées sous forme algébrique)

Soit $z = a + ib$.

1. Considérer une racine $z' = c + id$
2. Identifier parties imaginaires et réelles dans $(z')^2 = z$.
En retenir la valeur de $c^2 - d^2$ et le signe de cd .
3. l'égalité des modules de $(z')^4$ et z^2 fournit $c^2 + d^2$.
4. En déduire c^2 et d^2 .
5. Garder les deux solutions (c, d) , donnant le **bon signe de cd** .

└ III. Racines d'un nombre complexe

└ III-2. Cas des racines carrées : expression sous forme algébrique

Exemple 3.12

1. Rechercher les racines carrées de $3 + 5i$.

Exemple 3.12

1. Rechercher les racines carrées de $3 + 5i$.
2. Trouver les solutions de l'équation du second degré :

$$(2 + i)z^2 - iz + 1 = 0$$

Exemple 3.12

1. Rechercher les racines carrées de $3 + 5i$.
2. Trouver les solutions de l'équation du second degré :
 $(2 + i)z^2 - iz + 1 = 0$

Remarque 3.13

Justifier la validité de la méthode de résolution des équations de degré 2.

Exemple 3.12

1. Rechercher les racines carrées de $3 + 5i$.
2. Trouver les solutions de l'équation du second degré :
 $(2 + i)z^2 - iz + 1 = 0$

Remarque 3.13

Justifier la validité de la méthode de résolution des équations de degré 2.

Ainsi, les racines d'un polynôme de degré 2 peuvent être exprimées à l'aide de radicaux.

Exemple 3.12

1. Rechercher les racines carrées de $3 + 5i$.
2. Trouver les solutions de l'équation du second degré :
 $(2 + i)z^2 - iz + 1 = 0$

Remarque 3.13

Justifier la validité de la méthode de résolution des équations de degré 2.

Ainsi, les racines d'un polynôme de degré 2 peuvent être exprimées à l'aide de radicaux.

Note historique 3.14

- Résolubilité par radicaux jusqu'au degré 4 (Cardan, Ferrari)

Exemple 3.12

1. Rechercher les racines carrées de $3 + 5i$.
2. Trouver les solutions de l'équation du second degré :
 $(2 + i)z^2 - iz + 1 = 0$

Remarque 3.13

Justifier la validité de la méthode de résolution des équations de degré 2.

Ainsi, les racines d'un polynôme de degré 2 peuvent être exprimées à l'aide de radicaux.

Note historique 3.14

- ▶ Résolubilité par radicaux jusqu'au degré 4 (Cardan, Ferrari)
- ▶ Impossibilité en général à partir du degré 5 (Abel)

Exemple 3.12

1. Rechercher les racines carrées de $3 + 5i$.
2. Trouver les solutions de l'équation du second degré :
 $(2 + i)z^2 - iz + 1 = 0$

Remarque 3.13

Justifier la validité de la méthode de résolution des équations de degré 2.

Ainsi, les racines d'un polynôme de degré 2 peuvent être exprimées à l'aide de radicaux.

Note historique 3.14

- ▶ Résolubilité par radicaux jusqu'au degré 4 (Cardan, Ferrari)
- ▶ Impossibilité en général à partir du degré 5 (Abel)
- ▶ Conditions précises de résolubilité (Galois)

IV. Nombres complexes et géométrie

IV-1. Affixes

Définition 4.1 (affixe)

1. L'affixe d'un point $A = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ est $z_A = a + i b$.

IV. Nombres complexes et géométrie

IV-1. Affixes

Définition 4.1 (affixe)

1. L'affixe d'un point $A = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ est $z_A = a + i b$.
2. L'affixe d'un vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ est $z_{\vec{u}} = a + i b$.

IV. Nombres complexes et géométrie

IV-1. Affixes

Définition 4.1 (affixe)

1. L'affixe d'un point $A = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ est $z_A = a + i b$.
2. L'affixe d'un vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ est $z_{\vec{u}} = a + i b$.

Proposition 4.2 (affixe d'un vecteur défini par un bipoint)

$$z_{\vec{AB}} = z_B - z_A$$

IV. Nombres complexes et géométrie

IV-1. Affixes

Définition 4.1 (affixe)

1. L'affixe d'un point $A = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ est $z_A = a + i b$.
2. L'affixe d'un vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ est $z_{\vec{u}} = a + i b$.

Proposition 4.2 (affixe d'un vecteur défini par un bipoint)

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$$

Proposition 4.3 (norme d'un vecteur)

$$\|\vec{u}\| = |z_{\vec{u}}|.$$

IV-2 Alignement, orthogonalité, angles

Proposition 4.4 (interprétation géométrique de $\frac{b-a}{c-a}$.)

Soit A , B et C d'affixes a , b et c . Alors

$$\arg \left(\frac{b-a}{c-a} \right) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$$

IV-2 Alignement, orthogonalité, angles

Proposition 4.4 (interprétation géométrique de $\frac{b-a}{c-a}$.)

Soit A , B et C d'affixes a , b et c . Alors

$$\arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$$

Proposition 4.5 (caractérisation de l'alignement et de l'orthogonalité)

Soit A , B et C trois points distincts, d'affixes a , b et c . Alors :

IV-2 Alignement, orthogonalité, angles

Proposition 4.4 (interprétation géométrique de $\frac{b-a}{c-a}$.)

Soit A , B et C d'affixes a , b et c . Alors

$$\arg \left(\frac{b-a}{c-a} \right) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$$

Proposition 4.5 (caractérisation de l'alignement et de l'orthogonalité)

Soit A , B et C trois points distincts, d'affixes a , b et c . Alors :

1. A , B et C sont alignés si et seulement si $\frac{b-a}{c-a} \in \mathbb{R}$

IV-2 Alignement, orthogonalité, angles

Proposition 4.4 (interprétation géométrique de $\frac{b-a}{c-a}$.)

Soit A , B et C d'affixes a , b et c . Alors

$$\arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$$

Proposition 4.5 (caractérisation de l'alignement et de l'orthogonalité)

Soit A , B et C trois points distincts, d'affixes a , b et c . Alors :

1. A , B et C sont alignés si et seulement si $\frac{b-a}{c-a} \in \mathbb{R}$
2. (AB) et (AC) sont **perpendiculaires** si et seulement si $\frac{b-a}{c-a} \in i\mathbb{R}$.

IV-3. Transformations du plan

Proposition 4.6 (Transformations usuelles du plan)

1. Translation de vecteur $\vec{u} : z \mapsto z + z_u$.

IV-3. Transformations du plan

Proposition 4.6 (Transformations usuelles du plan)

1. Translation de vecteur $\vec{u} : z \mapsto z + z_u$.
2. **Rotation** de centre A et d'angle $\theta : z \mapsto z_A + e^{i\theta}(z - z_A)$.

IV-3. Transformations du plan

Proposition 4.6 (Transformations usuelles du plan)

1. Translation de vecteur $\vec{u} : z \mapsto z + z_u$.
2. Rotation de centre A et d'angle $\theta : z \mapsto z_A + e^{i\theta}(z - z_A)$.
3. Homothétie de centre A et de rapport $\lambda : z \mapsto z_A + \lambda(z - z_A)$.

IV-3. Transformations du plan

Proposition 4.6 (Transformations usuelles du plan)

1. Translation de vecteur $\vec{u} : z \mapsto z + z_u$.
2. Rotation de centre A et d'angle $\theta : z \mapsto z_A + e^{i\theta}(z - z_A)$.
3. Homothétie de centre A et de rapport $\lambda : z \mapsto z_A + \lambda(z - z_A)$.
4. **Symétrie orthogonale** d'axe $D = \mathbb{R}u$ (u unitaire) :
 $z \mapsto z_u^2(\bar{z} - \bar{z}_A) + z_A$.

IV-3. Transformations du plan

Proposition 4.6 (Transformations usuelles du plan)

1. Translation de vecteur $\vec{u} : z \mapsto z + z_u$.
2. Rotation de centre A et d'angle $\theta : z \mapsto z_A + e^{i\theta}(z - z_A)$.
3. Homothétie de centre A et de rapport $\lambda : z \mapsto z_A + \lambda(z - z_A)$.
4. Symétrie orthogonale d'axe $D = \mathbb{R}u$ (u unitaire) :
$$z \mapsto z_u^2(\bar{z} - \bar{z}_A) + z_A.$$

Exemple 4.7 (Cas particuliers importants)

1. Rotation d'angle $\frac{\pi}{2} :$.

IV-3. Transformations du plan

Proposition 4.6 (Transformations usuelles du plan)

1. Translation de vecteur $\vec{u} : z \mapsto z + z_u$.
2. Rotation de centre A et d'angle $\theta : z \mapsto z_A + e^{i\theta}(z - z_A)$.
3. Homothétie de centre A et de rapport $\lambda : z \mapsto z_A + \lambda(z - z_A)$.
4. Symétrie orthogonale d'axe $D = \mathbb{R}u$ (u unitaire) :
$$z \mapsto z_u^2(\bar{z} - \bar{z}_A) + z_A.$$

Exemple 4.7 (Cas particuliers importants)

1. Rotation d'angle $\frac{\pi}{2} : \text{multiplication par } i$.

IV-3. Transformations du plan

Proposition 4.6 (Transformations usuelles du plan)

1. Translation de vecteur $\vec{u}$: $z \mapsto z + z_u$.
2. Rotation de centre A et d'angle θ : $z \mapsto z_A + e^{i\theta}(z - z_A)$.
3. Homothétie de centre A et de rapport λ : $z \mapsto z_A + \lambda(z - z_A)$.
4. Symétrie orthogonale d'axe $D = \mathbb{R}u$ (u unitaire) :
 $z \mapsto z_u^2(\bar{z} - \bar{z}_A) + z_A$.

Exemple 4.7 (Cas particuliers importants)

1. Rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$: multiplication par i .
2. Rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$:

IV-3. Transformations du plan

Proposition 4.6 (Transformations usuelles du plan)

1. Translation de vecteur $\vec{u}$: $z \mapsto z + z_u$.
2. Rotation de centre A et d'angle θ : $z \mapsto z_A + e^{i\theta}(z - z_A)$.
3. Homothétie de centre A et de rapport λ : $z \mapsto z_A + \lambda(z - z_A)$.
4. Symétrie orthogonale d'axe $D = \mathbb{R}u$ (u unitaire) :
 $z \mapsto z_u^2(\bar{z} - \bar{z}_A) + z_A$.

Exemple 4.7 (Cas particuliers importants)

1. Rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$: multiplication par i .
2. Rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$: **multiplication par j** .

IV-3. Transformations du plan

Proposition 4.6 (Transformations usuelles du plan)

1. Translation de vecteur $\vec{u}$: $z \mapsto z + z_u$.
2. Rotation de centre A et d'angle θ : $z \mapsto z_A + e^{i\theta}(z - z_A)$.
3. Homothétie de centre A et de rapport λ : $z \mapsto z_A + \lambda(z - z_A)$.
4. Symétrie orthogonale d'axe $D = \mathbb{R}u$ (u unitaire) :
 $z \mapsto z_u^2(\bar{z} - \bar{z}_A) + z_A$.

Exemple 4.7 (Cas particuliers importants)

1. Rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$: multiplication par i .
2. Rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$: multiplication par j .
Rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$:

IV-3. Transformations du plan

Proposition 4.6 (Transformations usuelles du plan)

1. Translation de vecteur $\vec{u}$: $z \mapsto z + z_u$.
2. Rotation de centre A et d'angle θ : $z \mapsto z_A + e^{i\theta}(z - z_A)$.
3. Homothétie de centre A et de rapport λ : $z \mapsto z_A + \lambda(z - z_A)$.
4. Symétrie orthogonale d'axe $D = \mathbb{R}u$ (u unitaire) :
 $z \mapsto z_u^2(\bar{z} - \bar{z}_A) + z_A$.

Exemple 4.7 (Cas particuliers importants)

1. Rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$: multiplication par i .
2. Rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$: multiplication par j .
Rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$: **multiplication par $-\bar{j} = -j^2$** .

IV-3. Transformations du plan

Proposition 4.6 (Transformations usuelles du plan)

1. Translation de vecteur $\vec{u}$: $z \mapsto z + z_u$.
2. Rotation de centre A et d'angle θ : $z \mapsto z_A + e^{i\theta}(z - z_A)$.
3. Homothétie de centre A et de rapport λ : $z \mapsto z_A + \lambda(z - z_A)$.
4. Symétrie orthogonale d'axe $D = \mathbb{R}u$ (u unitaire) :
 $z \mapsto z_u^2(\bar{z} - \bar{z}_A) + z_A$.

Exemple 4.7 (Cas particuliers importants)

1. Rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$: multiplication par i .
2. Rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$: multiplication par j .
Rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$: multiplication par $-\bar{j} = -j^2$.
3. Interprétation géométrique de la conjugaison $z \mapsto \bar{z}$?

Remarque 4.8 (Forme des applications associées aux transformations usuelles)

Elles sont de la forme $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\bar{z} + b$.

Remarque 4.8 (Forme des applications associées aux transformations usuelles)

Elles sont de la forme $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\bar{z} + b$.

Réciproquement :

Théorème 4.9 (Interprétation des transformations affines de $\mathbb{C}$)

Soit $\varphi : z \mapsto az + b$, $a \neq 0$. Alors :

Remarque 4.8 (Forme des applications associées aux transformations usuelles)

Elles sont de la forme $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\bar{z} + b$.

Réciproquement :

Théorème 4.9 (Interprétation des transformations affines de $\mathbb{C}$)

Soit $\varphi : z \mapsto az + b$, $a \neq 0$. Alors :

- ▶ Si $a = 1$, φ représente une **translation** ;

Remarque 4.8 (Forme des applications associées aux transformations usuelles)

Elles sont de la forme $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\bar{z} + b$.

Réciproquement :

Théorème 4.9 (Interprétation des transformations affines de $\mathbb{C}$)

Soit $\varphi : z \mapsto az + b$, $a \neq 0$. Alors :

- ▶ Si $a = 1$, φ représente une translation ;
- ▶ Si $a = \lambda e^{i\theta} \neq 1$, φ représente la composée d'une **rotation d'angle θ** et d'une **homothétie de rapport λ** de même centre.

Remarque 4.8 (Forme des applications associées aux transformations usuelles)

Elles sont de la forme $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\bar{z} + b$.

Réciproquement :

Théorème 4.9 (Interprétation des transformations affines de $\mathbb{C}$)

Soit $\varphi : z \mapsto az + b$, $a \neq 0$. Alors :

- ▶ Si $a = 1$, φ représente une translation ;
- ▶ Si $a = \lambda e^{i\theta} \neq 1$, φ représente la composée d'une rotation d'angle θ et d'une homothétie de rapport λ de même centre.

Méthode 4.10

Savoir retrouver le centre, l'angle et le rapport à partir de l'expression $az + b$

Définition 4.11 (isométries et similitudes)

Soit $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

1. F est une **isométrie affine** ssi F conserve les longueurs :
 $\|f(A)f(B)\| = \|AB\|$.

Définition 4.11 (isométries et similitudes)

Soit $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

1. F est une **isométrie affine** ssi F conserve les longueurs :
 $\|f(A)f(B)\| = \|AB\|$.
2. F est une **isométrie vectorielle** ssi **de plus**, $F(O) = O$.

Définition 4.11 (isométries et similitudes)

Soit $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

1. F est une **isométrie affine** ssi F conserve les longueurs :
 $\|f(A)f(B)\| = \|AB\|$.
2. F est une **isométrie vectorielle** ssi de plus, $F(O) = O$.
3. F est une **similitude affine** ssi $\|f(A)f(B)\| = \lambda \|AB\|$.

Définition 4.11 (isométries et similitudes)

Soit $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

1. F est une **isométrie affine** ssi F conserve les longueurs :
 $\|f(A)f(B)\| = \|AB\|$.
2. F est une **isométrie vectorielle** ssi de plus, $F(O) = O$.
3. F est une **similitude affine** ssi $\|f(A)f(B)\| = \lambda \|AB\|$.
4. F est une **similitude vectorielle** ssi **de plus** $F(O) = O$.

Définition 4.11 (isométries et similitudes)

Soit $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

1. F est une **isométrie affine** ssi F conserve les longueurs :
 $\|f(A)f(B)\| = \|AB\|$.
2. F est une **isométrie vectorielle** ssi de plus, $F(O) = O$.
3. F est une **similitude affine** ssi $\|f(A)f(B)\| = \lambda\|AB\|$.
4. F est une **similitude vectorielle** ssi de plus $F(O) = O$.

Théorème 4.12 (Les $z \mapsto az + b$ ou $a\bar{z} + b$ sont des similitudes)

Les applications $z \mapsto az + b$ et $z \mapsto a\bar{z} + b$ correspondent à des **similitudes**, qui sont des isométries si de plus $|a| = 1$

Proposition 4.13 (Caractérisation des droites)

Soit A d'affixe a et B d'affixe b . Les **psse** :

Proposition 4.13 (Caractérisation des droites)

Soit A d'afixe a et B d'afixe b . Les **psse** :

(i) il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que **$z = (1 - t)a + tb$**

Proposition 4.13 (Caractérisation des droites)

Soit A d'affixe a et B d'affixe b . Les **psse** :

- (i) il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $z = (1 - t)a + tb$
- (ii) $z = a$, ou $z \neq a$ et **$\arg(z - a) \equiv \arg(b - a) [\pi]$**

Proposition 4.13 (Caractérisation des droites)

Soit A d'affixe a et B d'affixe b . Les **psse** :

- (i) il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $z = (1 - t)a + tb$
- (ii) $z = a$, ou $z \neq a$ et $\arg(z - a) \equiv \arg(b - a) \pmod{\pi}$
- (iii) $\frac{z - a}{b - a} \in \mathbb{R}$.

Proposition 4.13 (Caractérisation des droites)

Soit A d'affixe a et B d'affixe b . Les psse :

- (i) il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $z = (1 - t)a + tb$
- (ii) $z = a$, ou $z \neq a$ et $\arg(z - a) \equiv \arg(b - a) \pmod{\pi}$
- (iii) $\frac{z - a}{b - a} \in \mathbb{R}$.

Les z décrivent alors la droite (AB) .

Proposition 4.13 (Caractérisation des droites)

Soit A d'affixe a et B d'affixe b . Les psse :

- (i) il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $z = (1 - t)a + tb$
- (ii) $z = a$, ou $z \neq a$ et $\arg(z - a) \equiv \arg(b - a) \pmod{\pi}$
- (iii) $\frac{z - a}{b - a} \in \mathbb{R}$.

Les z décrivent alors la droite (AB) .

Proposition 4.14 (Caractérisation des cercles)

$\mathcal{C}$ de $\mathbb{C}$ est un cercle éventuellement vide ssi il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$z \in \mathcal{C} \iff z \cdot \bar{z} + \alpha z + \bar{\alpha} \cdot \bar{z} + \beta = 0.$$

Proposition 4.13 (Caractérisation des droites)

Soit A d'affixe a et B d'affixe b . Les psse :

- (i) il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $z = (1 - t)a + tb$
- (ii) $z = a$, ou $z \neq a$ et $\arg(z - a) \equiv \arg(b - a) \pmod{\pi}$
- (iii) $\frac{z - a}{b - a} \in \mathbb{R}$.

Les z décrivent alors la droite (AB) .

Proposition 4.14 (Caractérisation des cercles)

$\mathcal{C}$ de $\mathbb{C}$ est un cercle éventuellement vide ssi il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$z \in \mathcal{C} \iff z \cdot \bar{z} + \alpha z + \bar{\alpha} \cdot \bar{z} + \beta = 0.$$

Centre $-\bar{\alpha}$, rayon $r = \sqrt{\alpha\bar{\alpha} - \beta}$ (si défini).