Alain Troesch
Cours de mathématiques, MPSI 4
Lycée Louis-Le-Grand (Paris)
Année scolaire 2017/2018

Fondements – Chapitre 8

Cardinaux et dénombrements

I. Cardinaux des ensembles finis

I-1. Ensembles finis et cardinaux

Définition 1.1 (Définition de la cardinalité selon Frege)

Deux ensembles E et F ont même cardinal s'il existe une bijection de E à F. On note $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$.

I. Cardinaux des ensembles finis

I-1. Ensembles finis et cardinaux

Définition 1.1 (Définition de la cardinalité selon Frege)

Deux ensembles E et F ont même cardinal s'il existe une bijection de E à F. On note $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$.

Définition 1.2 (Ensemble fini)

Soit E un ensemble. On dit que E est fini si et seulement s'il existe un entier n et une surjection $f : [\![1, n]\!] \to E$,

I. Cardinaux des ensembles finis

I-1. Ensembles finis et cardinaux

Définition 1.1 (Définition de la cardinalité selon Frege)

Deux ensembles E et F ont même cardinal s'il existe une bijection de E à F. On note $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$.

Définition 1.2 (Ensemble fini)

Soit E un ensemble. On dit que E est fini si et seulement s'il existe un entier n et une surjection $f : [\![1, n]\!] \to E$, ou de façon équivalente, s'il existe une injection $g : E \to [\![1, n]\!]$.

I. Cardinaux des ensembles finis

I-1. Ensembles finis et cardinaux

Définition 1.1 (Définition de la cardinalité selon Frege)

Deux ensembles E et F ont même cardinal s'il existe une bijection de E à F. On note $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$.

Définition 1.2 (Ensemble fini)

Soit E un ensemble. On dit que E est fini si et seulement s'il existe un entier n et une surjection $f : [\![1, n]\!] \to E$, ou de façon équivalente, s'il existe une injection $g : E \to [\![1, n]\!]$.

Proposition 1.3 (Sous-ensemble d'un ensemble fini)

Soit F un sous-ensemble de E. Si E est fini, alors F aussi.

Lemme 1.4

Tout sous-ensemble F de $[\![1, n]\!]$ peut être mis en bijection avec un ensemble $[\![1, m]\!]$.

Lemme 1.4

Tout sous-ensemble F de $[\![1, n]\!]$ peut être mis en bijection avec un ensemble $[\![1, m]\!]$.

Lemme 1.5

Soit n et m deux entiers. Si $[\![1, n]\!] \simeq [\![1, m]\!]$, alors $n = m$.

Lemme 1.4

Tout sous-ensemble F de $[\![1, n]\!]$ peut être mis en bijection avec un ensemble $[\![1, m]\!]$.

Lemme 1.5

Soit n et m deux entiers. Si $[\![1, n]\!] \simeq [\![1, m]\!]$, alors $n = m$.

Définition 1.6 (Ensemble de cardinal n)

On dit qu'un ensemble E est fini, de cardinal n, s'il est de même cardinal que $[\![1, n]\!]$. On note $\mathrm{Card}(E) = n$, ou $|E| = n$.

Lemme 1.4

Tout sous-ensemble F de $[\![1, n]\!]$ peut être mis en bijection avec un ensemble $[\![1, m]\!]$.

Lemme 1.5

Soit n et m deux entiers. Si $[\![1, n]\!] \simeq [\![1, m]\!]$, alors $n = m$.

Définition 1.6 (Ensemble de cardinal n)

On dit qu'un ensemble E est fini, de cardinal n, s'il est de même cardinal que $[\![1, n]\!]$. On note $\mathrm{Card}(E) = n$, ou $|E| = n$.

Exemples 1.7

1. $|E| = 0$ si et seulement si $E = \varnothing$,

Lemme 1.4

Tout sous-ensemble F de $[\![1, n]\!]$ peut être mis en bijection avec un ensemble $[\![1, m]\!]$.

Lemme 1.5

Soit n et m deux entiers. Si $[\![1, n]\!] \simeq [\![1, m]\!]$, alors $n = m$.

Définition 1.6 (Ensemble de cardinal n)

On dit qu'un ensemble E est fini, de cardinal n, s'il est de même cardinal que $[\![1, n]\!]$. On note $\mathrm{Card}(E) = n$, ou $|E| = n$.

Exemples 1.7

1. $|E| = 0$ si et seulement si $E = \varnothing$,
2. $|[\![1, n]\!]| = n$.

I-2. Règles de calcul sur les cardinaux

Proposition 1.8 (Cardinal d'une union disjointe)

Soit A, B, $A_1, \dots, A_n$ des ensembles finis.

1. Si $A \cap B = \varnothing$, alors $|A \sqcup B| = |A| + |B|$.

I-2. Règles de calcul sur les cardinaux

Proposition 1.8 (Cardinal d'une union disjointe)

Soit A, B, $A_1, \ldots, A_n$ des ensembles finis.

1. Si $A \cap B = \varnothing$, alors $|A \sqcup B| = |A| + |B|$.
2. Plus généralement, si pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, alors

$$|A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_n| = |A_1| + \cdots + |A_n|.$$

I-2. Règles de calcul sur les cardinaux

Proposition 1.8 (Cardinal d'une union disjointe)

Soit A, B, $A_1, \dots, A_n$ des ensembles finis.

1. Si $A \cap B = \varnothing$, alors $|A \sqcup B| = |A| + |B|$.
2. Plus généralement, si pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, alors

$$|A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_n| = |A_1| + \cdots + |A_n|.$$

Proposition 1.9 (Cardinal d'un complémentaire)

Si $A \subset B$, alors $|\complement_B A| = |B| - |A|$.

I-2. Règles de calcul sur les cardinaux

Proposition 1.8 (Cardinal d'une union disjointe)

Soit A, B, $A_1, \ldots, A_n$ des ensembles finis.

1. Si $A \cap B = \varnothing$, alors $|A \sqcup B| = |A| + |B|$.
2. Plus généralement, si pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, alors

$$|A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_n| = |A_1| + \cdots + |A_n|.$$

Proposition 1.9 (Cardinal d'un complémentaire)

Si $A \subset B$, alors $\left|\complement_B A\right| = |B| - |A|$.

Corollaire 1.10 (Cardinal d'un sous-ensemble)

Si $A \subset B$, alors $|A| \leqslant |B|$, avec égalité ssi $A = B$.

Proposition 1.11 (Cardinal d'une union quelconque)

Soit A et B des ensembles finis. On a :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Proposition 1.11 (Cardinal d'une union quelconque)

Soit A et B des ensembles finis. On a :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Théorème 1.12 (Formule du crible de Poincaré, HP)

Soit $A_1, \ldots, A_n$ des ensembles finis. Alors :

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$$

Proposition 1.11 (Cardinal d'une union quelconque)

Soit A et B des ensembles finis. On a :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Théorème 1.12 (Formule du crible de Poincaré, HP)

Soit $A_1, \ldots, A_n$ des ensembles finis. Alors :

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ I \neq \varnothing}} (-1)^{|I|-1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

Proposition 1.13 (Cardinal d'un produit cartésien)

1. Soit A et B deux ensembles finis. Alors $|A \times B| = |A| \times |B|$.

Proposition 1.13 (Cardinal d'un produit cartésien)

1. Soit A et B deux ensembles finis. Alors $|A \times B| = |A| \times |B|$.
2. Plus généralement, soit $A_1, \ldots, A_n$ des ensembles finis. Alors

$$|A_1 \times \cdots \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|.$$

I-3. Comparaison des cardinaux en cas d'injectivité ou surjectivité

Proposition 1.14 (Injectivité, surjectivité, bijectivité et cardinal)

Soit E et F deux ensembles finis, et soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors :

I-3. Comparaison des cardinaux en cas d'injectivité ou surjectivité

Proposition 1.14 (Injectivité, surjectivité, bijectivité et cardinal)

Soit E et F deux ensembles finis, et soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors :

1. Si f est injective, $\mathrm{Card}(E) \quad \mathrm{Card}(F)$

I-3. Comparaison des cardinaux en cas d'injectivité ou surjectivité

Proposition 1.14 (Injectivité, surjectivité, bijectivité et cardinal)

Soit E et F deux ensembles finis, et soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors :

1. Si f est injective, $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$

I-3. Comparaison des cardinaux en cas d'injectivité ou surjectivité

Proposition 1.14 (Injectivité, surjectivité, bijectivité et cardinal)

Soit E et F deux ensembles finis, et soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors :

1. Si f est injective, $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$
2. Si f est surjective, $\mathrm{Card}(E) \qquad \mathrm{Card}(F)$

I-3. Comparaison des cardinaux en cas d'injectivité ou surjectivité

Proposition 1.14 (Injectivité, surjectivité, bijectivité et cardinal)

Soit E et F deux ensembles finis, et soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors :

1. Si f est injective, $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$
2. Si f est surjective, $\mathrm{Card}(E) \geqslant \mathrm{Card}(F)$

I-3. Comparaison des cardinaux en cas d'injectivité ou surjectivité

Proposition 1.14 (Injectivité, surjectivité, bijectivité et cardinal)

Soit E et F deux ensembles finis, et soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors :

1. Si f est injective, $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$
2. Si f est surjective, $\mathrm{Card}(E) \geqslant \mathrm{Card}(F)$
3. Si f est bijective, $\mathrm{Card}(E) \quad \mathrm{Card}(F)$.

I-3. Comparaison des cardinaux en cas d'injectivité ou surjectivité

Proposition 1.14 (Injectivité, surjectivité, bijectivité et cardinal)

Soit E et F deux ensembles finis, et soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors :

1. Si f est injective, $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$
2. Si f est surjective, $\mathrm{Card}(E) \geqslant \mathrm{Card}(F)$
3. Si f est bijective, $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$.

I-3. Comparaison des cardinaux en cas d'injectivité ou surjectivité

Proposition 1.14 (Injectivité, surjectivité, bijectivité et cardinal)

Soit E et F deux ensembles finis, et soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors :

1. Si f est injective, $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$
2. Si f est surjective, $\mathrm{Card}(E) \geqslant \mathrm{Card}(F)$
3. Si f est bijective, $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$.

Corollaire 1.15 (Caractérisation des bijections)

Soit A et B deux ensembles finis de même cardinal, et $f : A \to B$. Alors les 3 propriétés suivantes sont équivalentes :

I-3. Comparaison des cardinaux en cas d'injectivité ou surjectivité

Proposition 1.14 (Injectivité, surjectivité, bijectivité et cardinal)

Soit E et F deux ensembles finis, et soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors :

1. Si f est injective, $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$
2. Si f est surjective, $\mathrm{Card}(E) \geqslant \mathrm{Card}(F)$
3. Si f est bijective, $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$.

Corollaire 1.15 (Caractérisation des bijections)

Soit A et B deux ensembles finis de même cardinal, et $f : A \to B$. Alors les 3 propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est bijective

I-3. Comparaison des cardinaux en cas d'injectivité ou surjectivité

Proposition 1.14 (Injectivité, surjectivité, bijectivité et cardinal)

Soit E et F deux ensembles finis, et soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors :

1. Si f est injective, $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$
2. Si f est surjective, $\mathrm{Card}(E) \geqslant \mathrm{Card}(F)$
3. Si f est bijective, $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$.

Corollaire 1.15 (Caractérisation des bijections)

Soit A et B deux ensembles finis de même cardinal, et $f : A \to B$. Alors les 3 propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est bijective

(ii) f est injective

I-3. Comparaison des cardinaux en cas d'injectivité ou surjectivité

Proposition 1.14 (Injectivité, surjectivité, bijectivité et cardinal)

Soit E et F deux ensembles finis, et soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors :

1. Si f est injective, $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$
2. Si f est surjective, $\mathrm{Card}(E) \geqslant \mathrm{Card}(F)$
3. Si f est bijective, $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$.

Corollaire 1.15 (Caractérisation des bijections)

Soit A et B deux ensembles finis de même cardinal, et $f : A \to B$. Alors les 3 propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est bijective

(ii) f est injective

(iii) f est surjective

II. Combinatoire des ensembles d'applications

II-1. Applications quelconques ; p-listes

Proposition 2.1 (Cardinal de l'ensemble des applications)

Soit E et F finis. Alors $|F^E| = |F|^{|E|}$.

II. Combinatoire des ensembles d'applications

II-1. Applications quelconques ; p-listes

Proposition 2.1 (Cardinal de l'ensemble des applications)

Soit E et F finis. Alors $|F^E| = |F|^{|E|}$.

Définition 2.2 (p-listes)

Une p-liste d'éléments de F est un élément $(x_1, \ldots, x_p)$ de F^p.

II. Combinatoire des ensembles d'applications

II-1. Applications quelconques ; p-listes

Proposition 2.1 (Cardinal de l'ensemble des applications)

Soit E et F finis. Alors $|F^E| = |F|^{|E|}$.

Définition 2.2 (p-listes)

Une p-liste d'éléments de F est un élément $(x_1, \ldots, x_p)$ de F^p.

Proposition 2.3 (p-listes ; tirages successifs avec remise)

- Le nombre de p-listes d'éléments de F est $|F|^p$.

II. Combinatoire des ensembles d'applications

II-1. Applications quelconques ; p-listes

Proposition 2.1 (Cardinal de l'ensemble des applications)

Soit E et F finis. Alors $|F^E| = |F|^{|E|}$.

Définition 2.2 (p-listes)

Une p-liste d'éléments de F est un élément $(x_1, \dots, x_p)$ de F^p.

Proposition 2.3 (p-listes ; tirages successifs avec remise)

- Le nombre de p-listes d'éléments de F est $|F|^p$.
- Le nombre de tirages successifs de p boules avec remise parmi n boules différenciées est n^p.

II. Combinatoire des ensembles d'applications

II-1. Applications quelconques ; p-listes

Proposition 2.1 (Cardinal de l'ensemble des applications)

Soit E et F finis. Alors $|F^E| = |F|^{|E|}$.

Définition 2.2 (p-listes)

Une p-liste d'éléments de F est un élément $(x_1, \ldots, x_p)$ de F^p.

Proposition 2.3 (p-listes ; tirages successifs avec remise)

- Le nombre de p-listes d'éléments de F est $|F|^p$.
- Le nombre de tirages successifs de p boules avec remise parmi n boules différenciées est n^p.

Proposition 2.4 (Cardinal de l'ensemble des parties)

$|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$.

II-2. Lemme du berger

Lemme 2.5 (Lemme du berger)

Soit $f : E \to F$ une application surjective. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $y \in F$, $|f^{-1}(y)| = k$. Alors $|E| = k \cdot |F|$.

II-2. Lemme du berger

Lemme 2.5 (Lemme du berger)

Soit $f : E \to F$ une application surjective. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $y \in F$, $|f^{-1}(y)| = k$. Alors $|E| = k \cdot |F|$.

Remarque 2.6

- Interprétation pastorale.

II-2. Lemme du berger

Lemme 2.5 (Lemme du berger)

Soit $f : E \to F$ une application surjective. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $y \in F$, $|f^{-1}(y)| = k$. Alors $|E| = k \cdot |F|$.

Remarque 2.6

- Interprétation pastorale.
- Le lemme du berger permet de formaliser la notion de choix successifs. Il est souvent utilisé de façon implicite.

II-2. Lemme du berger

Lemme 2.5 (Lemme du berger)

Soit $f : E \to F$ une application surjective. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $y \in F$, $|f^{-1}(y)| = k$. Alors $|E| = k \cdot |F|$.

Remarque 2.6

- Interprétation pastorale.
- Le lemme du berger permet de formaliser la notion de choix successifs. Il est souvent utilisé de façon implicite.
- À la longue, on ne formalisera plus complètement ce type d'arguments, et on se contentera de l'approche intuitive.

II-3. Injections ; p-listes d'éléments distincts

Théorème 2.7 (Dénombrement des injections)

Soit $|A| = p$ et $|B| = n$, $p \leqslant n$.
Nombre d'injections de A vers B : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.

II-3. Injections ; p-listes d'éléments distincts

Théorème 2.7 (Dénombrement des injections)

Soit $|A| = p$ et $|B| = n$, $p \leqslant n$.
Nombre d'injections de A vers B : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.

Proposition 2.8 (p-arrangements ; tirages sans remise)

C'est aussi :

II-3. Injections ; p-listes d'éléments distincts

Théorème 2.7 (Dénombrement des injections)

Soit $|A| = p$ et $|B| = n$, $p \leqslant n$.
Nombre d'injections de A vers B : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.

Proposition 2.8 (p-arrangements ; tirages sans remise)

C'est aussi :

- le nombre de p-arrangements de n éléments (p-listes d'éléments distincts parmi les n)

II-3. Injections ; p-listes d'éléments distincts

Théorème 2.7 (Dénombrement des injections)

Soit $|A| = p$ et $|B| = n$, $p \leqslant n$.
Nombre d'injections de A vers B : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.

Proposition 2.8 (p-arrangements ; tirages sans remise)

C'est aussi :

- le nombre de p-arrangements de n éléments (p-listes d'éléments distincts parmi les n)
- le nombre de tirages successifs sans remise de p boules parmi n boules différenciées.

II-3. Injections ; p-listes d'éléments distincts

Théorème 2.7 (Dénombrement des injections)

Soit $|A| = p$ et $|B| = n$, $p \leqslant n$.
Nombre d'injections de A vers B : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.

Proposition 2.8 (p-arrangements ; tirages sans remise)

C'est aussi :

- le nombre de p-arrangements de n éléments (p-listes d'éléments distincts parmi les n)
- le nombre de tirages successifs sans remise de p boules parmi n boules différenciées.

Corollaire 2.9 (Nombre de permutations d'un ensemble)

$|\mathfrak{S}E| = |E|!$. En particulier, $|\mathfrak{S}_n| = n!$.

II-4 Surjections

Dénombrement des surjections : problème beaucoup plus délicat.

II-4 Surjections

Dénombrement des surjections : problème beaucoup plus délicat.

Exemple 2.10

Le nombre de surjections de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n-1]\!]$ est $(n-1)!\binom{n}{2}$.

III. Combinatoire des sous-ensembles

Définition 3.1 (Coefficient binomial)

$\binom{n}{k} = |\mathcal{P}_k(n)|$.

III. Combinatoire des sous-ensembles

Définition 3.1 (Coefficient binomial)

$\binom{n}{k} = |\mathcal{P}_k(n)|$.

Proposition 3.2 (Interprétation combinatoire élargie)

Plus généralement, $\binom{n}{k} = \mathcal{P}(E)$ pour tout E tel que $|E| = n$.

III. Combinatoire des sous-ensembles

Définition 3.1 (Coefficient binomial)

$\binom{n}{k} = |\mathcal{P}_k(n)|$.

Proposition 3.2 (Interprétation combinatoire élargie)

Plus généralement, $\binom{n}{k} = \mathcal{P}(E)$ pour tout E tel que $|E| = n$.

Proposition 3.3 (Expression factorielle du coefficient binomial)

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

D'autres interprétations combinatoires : $\binom{n}{p}$ est :

D'autres interprétations combinatoires : $\binom{n}{p}$ est :

- le nombre de mots de longueur n, constitué de p lettres a et $n-p$ lettres b.

D'autres interprétations combinatoires : $\binom{n}{p}$ est :

- le nombre de mots de longueur n, constitué de p lettres a et $n-p$ lettres b.
- le nombre de chemins de longueur n consitués de p pas vers le haut et $n-p$ pas vers la droite.

D'autres interprétations combinatoires : $\binom{n}{p}$ est :

- le nombre de mots de longueur n, constitué de p lettres a et $n-p$ lettres b.
- le nombre de chemins de longueur n consitués de p pas vers le haut et $n-p$ pas vers la droite.

Proposition 3.4 (propriétés du coefficient binomial)

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (symétrie du coefficient binomial)

D'autres interprétations combinatoires : $\binom{n}{p}$ est :

- le nombre de mots de longueur n, constitué de p lettres a et $n-p$ lettres b.
- le nombre de chemins de longueur n consitués de p pas vers le haut et $n-p$ pas vers la droite.

Proposition 3.4 (propriétés du coefficient binomial)

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (symétrie du coefficient binomial)

Démonstrations reportées aux paragraphes suivants.

D'autres interprétations combinatoires : $\binom{n}{p}$ est :

- le nombre de mots de longueur n, constitué de p lettres a et $n-p$ lettres b.
- le nombre de chemins de longueur n consitués de p pas vers le haut et $n-p$ pas vers la droite.

Proposition 3.4 (propriétés du coefficient binomial)

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (symétrie du coefficient binomial)
- $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ (parfois appelée formule comité-président)

Démonstrations reportées aux paragraphes suivants.

D'autres interprétations combinatoires : $\binom{n}{p}$ est :

- le nombre de mots de longueur n, constitué de p lettres a et $n-p$ lettres b.
- le nombre de chemins de longueur n consitués de p pas vers le haut et $n-p$ pas vers la droite.

Proposition 3.4 (propriétés du coefficient binomial)

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (symétrie du coefficient binomial)
- $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ (parfois appelée formule comité-président)
- Si $(n,p) \neq (-1,-1)$, $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$ (Pascal)

Démonstrations reportées aux paragraphes suivants.

Théorème 3.5 (Formule du binôme de Newton)

Soit a et b deux nombres complexes, et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Démonstration combinatoire

IV. Bijection, Déesse de la Combinatoire

Méthode 4.1 (Principe fondamental du dénombrement)

- Pour compter les éléments de E, les mettre en bijection avec les éléments d'un F connu.

IV. Bijection, Déesse de la Combinatoire

Méthode 4.1 (Principe fondamental du dénombrement)

- Pour compter les éléments de E, les mettre en bijection avec les éléments d'un F connu.
- Nécessité d'avoir des modèles de référence.

IV. Bijection, Déesse de la Combinatoire

Méthode 4.1 (Principe fondamental du dénombrement)

- Pour compter les éléments de E, les mettre en bijection avec les éléments d'un F connu.
- Nécessité d'avoir des modèles de référence.

Exemples 4.2

1. p-listes $(k_1, \ldots, k_p)$ d'entiers > 0 tels que $k_1 + \cdots + k_p = n$.

IV. Bijection, Déesse de la Combinatoire

Méthode 4.1 (Principe fondamental du dénombrement)

- Pour compter les éléments de E, les mettre en bijection avec les éléments d'un F connu.
- Nécessité d'avoir des modèles de référence.

Exemples 4.2

1. p-listes $(k_1, \ldots, k_p)$ d'entiers > 0 tels que $k_1 + \cdots + k_p = n$.
2. p-listes $(k_1, \ldots, k_p)$ d'entiers $\geqslant 0$ tels que $k_1 + \cdots + k_p = n$.

IV. Bijection, Déesse de la Combinatoire

Méthode 4.1 (Principe fondamental du dénombrement)

- Pour compter les éléments de E, les mettre en bijection avec les éléments d'un F connu.
- Nécessité d'avoir des modèles de référence.

Exemples 4.2

1. p-listes $(k_1, \dots, k_p)$ d'entiers > 0 tels que $k_1 + \cdots + k_p = n$.
2. p-listes $(k_1, \dots, k_p)$ d'entiers $\geqslant 0$ tels que $k_1 + \cdots + k_p = n$.
3. p-listes strictement croissantes d'éléments de $[\![1, n]\!]$.

IV. Bijection, Déesse de la Combinatoire

Méthode 4.1 (Principe fondamental du dénombrement)

- Pour compter les éléments de E, les mettre en bijection avec les éléments d'un F connu.
- Nécessité d'avoir des modèles de référence.

Exemples 4.2

1. p-listes $(k_1, \dots, k_p)$ d'entiers > 0 tels que $k_1 + \cdots + k_p = n$.
2. p-listes $(k_1, \dots, k_p)$ d'entiers $\geqslant 0$ tels que $k_1 + \cdots + k_p = n$.
3. p-listes strictement croissantes d'éléments de $[\![1, n]\!]$.
4. p-listes croissantes d'éléments de $[\![1, n]\!]$.

IV. Bijection, Déesse de la Combinatoire

Méthode 4.1 (Principe fondamental du dénombrement)

- Pour compter les éléments de E, les mettre en bijection avec les éléments d'un F connu.
- Nécessité d'avoir des modèles de référence.

Exemples 4.2

1. p-listes $(k_1, \dots, k_p)$ d'entiers > 0 tels que $k_1 + \dots + k_p = n$.
2. p-listes $(k_1, \dots, k_p)$ d'entiers $\geqslant 0$ tels que $k_1 + \dots + k_p = n$.
3. p-listes strictement croissantes d'éléments de $[\![1, n]\!]$.
4. p-listes croissantes d'éléments de $[\![1, n]\!]$.
5. La formule de symétrie des coefficients binomiaux.

V. Preuves combinatoires d'identités

Méthode 5.1 (Démonstration combinatoire d'une formule)

V. Preuves combinatoires d'identités

Méthode 5.1 (Démonstration combinatoire d'une formule)

1. Trouver un modèle adapté à la formule.

V. Preuves combinatoires d'identités

Méthode 5.1 (Démonstration combinatoire d'une formule)

1. Trouver un modèle adapté à la formule.
2. Dénombrer cet ensemble de deux façons différentes.

V. Preuves combinatoires d'identités

Méthode 5.1 (Démonstration combinatoire d'une formule)

1. Trouver un modèle adapté à la formule.
2. Dénombrer cet ensemble de deux façons différentes.
3. Éventuellement, prétraiter.

Proposition 5.2 (Quelques formules)

1. Formule comité président et formule de Pascal.

Proposition 5.2 (Quelques formules)

1. Formule comité président et formule de Pascal.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Proposition 5.2 (Quelques formules)

1. Formule comité président et formule de Pascal.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.
3. Formule de Vandermonde : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{N}{k}\binom{M}{n-k} = \binom{N+M}{n}$.

Proposition 5.2 (Quelques formules)

1. Formule comité président et formule de Pascal.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.
3. Formule de Vandermonde : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{N}{k}\binom{M}{n-k} = \binom{N+M}{n}$.
4. Formule de sommation : $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n+k}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}$

Proposition 5.2 (Quelques formules)

1. Formule comité président et formule de Pascal.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.
3. Formule de Vandermonde : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{N}{k}\binom{M}{n-k} = \binom{N+M}{n}$.
4. Formule de sommation : $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n+k}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{N}\binom{n-k}{M} = \binom{n+1}{M+N+1}$

Méthode 5.3

Un $(-1)^k$ associé à un coefficient binomial correspond souvent à une comparaison du nombre d'objets suivant la parité d'un certain ensemble. Penser à $X \triangle \{x\}$ pour changer la parité (principe de l'interrupteur)

Méthode 5.3

Un $(-1)^k$ associé à un coefficient binomial correspond souvent à une comparaison du nombre d'objets suivant la parité d'un certain ensemble. Penser à $X \triangle \{x\}$ pour changer la parité (principe de l'interrupteur)

Exemple 5.4

Démonstration combinatoire de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \delta_{n,0}$.

Méthode 5.3

Un $(-1)^k$ associé à un coefficient binomial correspond souvent à une comparaison du nombre d'objets suivant la parité d'un certain ensemble. Penser à $X \triangle \{x\}$ pour changer la parité (principe de l'interrupteur)

Exemple 5.4

Démonstration combinatoire de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \delta_{n,0}$.

Retour sur la formule du crible de Poincaré

VI. Introduction à la décnombrabilité

Notation 6.1 (cardinal de $\mathbb{N}$, HP)

On note $\aleph_0$ le cardinal de $\mathbb{N}$.

VI. Introduction à la décnombrabilité

Notation 6.1 (cardinal de $\mathbb{N}$, HP)

On note $\aleph_0$ le cardinal de $\mathbb{N}$.

Définition 6.2 (Ensemble dénombrable)

- E est dénombrable s'il peut être mis en bijection avec $\mathbb{N}$.

VI. Introduction à la décnombrabilité

Notation 6.1 (cardinal de $\mathbb{N}$, HP)

On note $\aleph_0$ le cardinal de $\mathbb{N}$.

Définition 6.2 (Ensemble dénombrable)

- E est dénombrable s'il peut être mis en bijection avec $\mathbb{N}$.
- E est au plus dénombrable s'il est fini ou dénombrable.

Remarque 6.3

Un ensemble fini n'est pas dénombrable. Enfin... ça dépend des auteurs.

Remarque 6.3

Un ensemble fini n'est pas dénombrable. Enfin... ça dépend des auteurs.

Lemme 6.4 (Caractérisation des ens au + dénombrables, HP)

Soit $E \neq \varnothing$. Les psse :

Remarque 6.3

Un ensemble fini n'est pas dénombrable. Enfin... ça dépend des auteurs.

Lemme 6.4 (Caractérisation des ens au + dénombrables, HP)

Soit $E \neq \varnothing$. Les psse :

(i) E est au plus dénombrable

Remarque 6.3

Un ensemble fini n'est pas dénombrable. Enfin... ça dépend des auteurs.

Lemme 6.4 (Caractérisation des ens au + dénombrables, HP)

Soit $E \neq \varnothing$. Les psse :

(i) E est au plus dénombrable

(ii) il existe une injection $f : E \longrightarrow \mathbb{N}$

Remarque 6.3

Un ensemble fini n'est pas dénombrable. Enfin... ça dépend des auteurs.

Lemme 6.4 (Caractérisation des ens au + dénombrables, HP)

Soit $E \neq \varnothing$. Les psse :

(i) E est au plus dénombrable

(ii) il existe une injection $f : E \longrightarrow \mathbb{N}$

(iii) il existe une surjection $f : \mathbb{N} \longrightarrow E$.

Remarque 6.3

Un ensemble fini n'est pas dénombrable. Enfin... ça dépend des auteurs.

Lemme 6.4 (Caractérisation des ens au + dénombrables, HP)

Soit $E \neq \varnothing$. Les psse :

(i) E est au plus dénombrable

(ii) il existe une injection $f : E \longrightarrow \mathbb{N}$

(iii) il existe une surjection $f : \mathbb{N} \longrightarrow E$.

(iv) il existe un sous-ensemble F de $\mathbb{N}$ et une bijection $f : F \longrightarrow E$

Proposition 6.5 (Construction d'ens dénombrables, HP)

1. Un sous-ensemble infini d'un ensemble dénombrable est dénombrable.

Proposition 6.5 (Construction d'ens dénombrables, HP)

1. Un sous-ensemble infini d'un ensemble dénombrable est dénombrable.
2. Une union d'un nombre fini ou dénombrable d'ensembles au plus dénombrable est au plus dénombrable, et dénombrable si au moins un des ensembles l'est.

Proposition 6.5 (Construction d'ens dénombrables, HP)

1. Un sous-ensemble infini d'un ensemble dénombrable est dénombrable.
2. Une union d'un nombre fini ou dénombrable d'ensembles au plus dénombrable est au plus dénombrable, et dénombrable si au moins un des ensembles l'est.
3. Si E et F sont au plus dénombrables, $E \times F$ aussi.

Proposition 6.5 (Construction d'ens dénombrables, HP)

1. Un sous-ensemble infini d'un ensemble dénombrable est dénombrable.
2. Une union d'un nombre fini ou dénombrable d'ensembles au plus dénombrable est au plus dénombrable, et dénombrable si au moins un des ensembles l'est.
3. Si E et F sont au plus dénombrables, $E \times F$ aussi.
4. Si E est dénombrable et F est au plus dénombrable non vide, alors $E \times F$ est dénombrable.

Proposition 6.5 (Construction d'ens dénombrables, HP)

1. Un sous-ensemble infini d'un ensemble dénombrable est dénombrable.
2. Une union d'un nombre fini ou dénombrable d'ensembles au plus dénombrable est au plus dénombrable, et dénombrable si au moins un des ensembles l'est.
3. Si E et F sont au plus dénombrables, $E \times F$ aussi.
4. Si E est dénombrable et F est au plus dénombrable non vide, alors $E \times F$ est dénombrable.
5. Plus généralement, un produit d'un nombre fini d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable ; il est dénombrable si au moins un l'est et si les autres sont non vides.

Corollaire 6.6

1. L'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

Corollaire 6.6

1. L'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable.
2. L'ensemble $\mathbb{N}^2$ et plus généralement $\mathbb{N}^p$ est dénombrable.

Corollaire 6.6

1. L'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable.
2. L'ensemble $\mathbb{N}^2$ et plus généralement $\mathbb{N}^p$ est dénombrable.
3. L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels est dénombrable.

Corollaire 6.6

1. L'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable.
2. L'ensemble $\mathbb{N}^2$ et plus généralement $\mathbb{N}^p$ est dénombrable.
3. L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels est dénombrable.
4. L'ensemble $\mathbb{Z}[x]$ des fonctions polynomiales à coefficients entiers est dénombrable.

Corollaire 6.6

1. L'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable.
2. L'ensemble $\mathbb{N}^2$ et plus généralement $\mathbb{N}^p$ est dénombrable.
3. L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels est dénombrable.
4. L'ensemble $\mathbb{Z}[x]$ des fonctions polynomiales à coefficients entiers est dénombrable.

Théorème 6.7

L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ est non dénombrable.

Définition 6.8

- On dit que $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$ si et seulement s'il existe une injection de E dans F.

Définition 6.8

- On dit que $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$ si et seulement s'il existe une injection de E dans F.
- On dit que $\mathrm{Card}(E) < \mathrm{Card}(F)$ si et seulement si $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$ et $\mathrm{Card}(E) \neq \mathrm{Card}(F)$.

Définition 6.8

- On dit que $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$ si et seulement s'il existe une injection de E dans F.
- On dit que $\mathrm{Card}(E) < \mathrm{Card}(F)$ si et seulement si $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$ et $\mathrm{Card}(E) \neq \mathrm{Card}(F)$.

Théorème 6.9 (Cantor, 1891, HP)

Pour tout ensemble X, on a $\mathrm{Card}(X) < \mathrm{Card}(\mathcal{P}(X))$.

Définition 6.8

- On dit que $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$ si et seulement s'il existe une injection de E dans F.
- On dit que $\mathrm{Card}(E) < \mathrm{Card}(F)$ si et seulement si $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$ et $\mathrm{Card}(E) \neq \mathrm{Card}(F)$.

Théorème 6.9 (Cantor, 1891, HP)

Pour tout ensemble X, on a $\mathrm{Card}(X) < \mathrm{Card}(\mathcal{P}(X))$.

Théorème 6.10 (cardinal de $\mathbb{R}$, HP)

Les ensembles $\mathbb{R}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ont même cardinal.

Terminologie 6.11 (puissance du continu, HP)

Le cardinal de $\mathbb{R}$ est appelé puissance du continu, et noté $\mathcal{C}$.

Terminologie 6.11 (puissance du continu, HP)

Le cardinal de $\mathbb{R}$ est appelé puissance du continu, et noté $\mathcal{C}$.

Y a-t-il des ensembles de cardinal intermédiaire entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$?
Cette question est indécidable.

Terminologie 6.11 (puissance du continu, HP)

Le cardinal de $\mathbb{R}$ est appelé puissance du continu, et noté $\mathcal{C}$.

Y a-t-il des ensembles de cardinal intermédiaire entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$?
Cette question est indécidable. On admet généralement :

Axiome 6.12 (hypothèse du continu, HP)

Il n'existe pas d'ensemble X tel que $\aleph_0 < \mathrm{Card}(X) < \mathcal{C}$, i.e. $\mathcal{C} = \aleph_1$