Alain Troesch
Cours de mathématiques, MP2I
Lycée Louis-Le-Grand (Paris)
Année scolaire 2021/2022

Analyse – Chapitre 9

Dérivation de fonctions

Introduction

Note historique 0.1

Les mathématiques ont d'abord été vues comme un outil :

Note historique 0.1

Les mathématiques ont d'abord été vues comme un outil :

- au service de la mécanique et de l'ingéniérie (Archimède)

Note historique 0.1

Les mathématiques ont d'abord été vues comme un outil :

- au service de la mécanique et de l'ingéniérie (Archimède)
- au service de l'astronomie (géométrie grecque, Ptolémée, écoles indienne et arabe)

Note historique 0.1

Les mathématiques ont d'abord été vues comme un outil :

- au service de la mécanique et de l'ingéniérie (Archimède)
- au service de l'astronomie (géométrie grecque, Ptolémée, écoles indienne et arabe)
- au service de toute étude nécessitant d'être chiffrée pour obtenir des ordres de grandeurs.

Note historique 0.1

Les mathématiques ont d'abord été vues comme un outil :

- au service de la mécanique et de l'ingéniérie (Archimède)
- au service de l'astronomie (géométrie grecque, Ptolémée, écoles indienne et arabe)
- au service de toute étude nécessitant d'être chiffrée pour obtenir des ordres de grandeurs.

Importance du développement du calcul numérique (calcul approché, en opposition au calcul algébrique), aboutissant notamment à la notion de convergence (qui donne la validité de l'approximation à l'infini)

I. Rappels sur les limites

Si X est un intervalle ou une union finie d'intervalle, on note $\overline{X}$ l'ensemble obtenu en fermant toutes les bornes.

I. Rappels sur les limites

Si X est un intervalle ou une union finie d'intervalle, on note $\overline{X}$ l'ensemble obtenu en fermant toutes les bornes.

$\overline{X}$ est appelé adhérence de X

I. Rappels sur les limites

Si X est un intervalle ou une union finie d'intervalle, on note $\overline{X}$ l'ensemble obtenu en fermant toutes les bornes.
$\overline{X}$ est appelé adhérence de X

Remarque 1.1 (Adhérence $\overline{X}$ de X dans $\overline{\mathbb{R}}$)

Plus généralement, si X est un sous-ensemble quelconque, $\overline{X}$ est l'ensemble des points de $\overline{\mathbb{R}}$ qui peuvent être approchés d'aussi près qu'on veut par des points de X.

I. Rappels sur les limites

Si X est un intervalle ou une union finie d'intervalle, on note $\overline{X}$ l'ensemble obtenu en fermant toutes les bornes.
$\overline{X}$ est appelé adhérence de X

Remarque 1.1 (Adhérence $\overline{X}$ de X dans $\overline{\mathbb{R}}$)

Plus généralement, si X est un sous-ensemble quelconque, $\overline{X}$ est l'ensemble des points de $\overline{\mathbb{R}}$ qui peuvent être approchés d'aussi près qu'on veut par des points de X.

Lorsque $a \in \overline{X}$, on dira que a est adhérent à X (dans $\overline{\mathbb{R}}$)

Limites : point de vue métrique

Définition 1.2 (Limites en un point fini)

- $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b \in \mathbb{R}$ ssi :

$$\underbrace{\forall \varepsilon > 0,}\quad \underbrace{\exists \eta > 0,\ (\forall x \in X,\ |x-a| \leqslant \eta}\ \Longrightarrow\ \underbrace{|f(x)-b| \leqslant \varepsilon)}$$

Limites : point de vue métrique

Définition 1.2 (Limites en un point fini)

- $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b \in \mathbb{R}$ ssi :

$$\underbrace{\forall \varepsilon > 0,}\ \underbrace{\exists \eta > 0,\ (\forall x \in X,\ |x-a| \leqslant \eta}\ \Longrightarrow\ \underbrace{|f(x)-b| \leqslant \varepsilon)}$$

Pour toute marge
d'erreur ε,
arbitrairement petite

Limites : point de vue métrique

Définition 1.2 (Limites en un point fini)

- $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b \in \mathbb{R}$ ssi :

$$\underbrace{\forall \varepsilon > 0,}_{\substack{\text{Pour toute marge} \\ \text{d'erreur } \varepsilon, \\ \text{arbitrairement petite}}} \quad \underbrace{\exists \eta > 0, \ (\forall x \in X, \ |x - a| \leqslant \eta}_{\substack{\text{quitte à ce que } x \\ \text{reste assez proche de } a}} \implies \underbrace{|f(x) - b| \leqslant \varepsilon)}$$

Limites : point de vue métrique

Définition 1.2 (Limites en un point fini)

- $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b \in \mathbb{R}$ ssi :

$$\underbrace{\forall \varepsilon > 0,}_{\substack{\text{Pour toute marge} \\ \text{d'erreur } \varepsilon, \\ \text{arbitrairement petite}}} \ \underbrace{\exists \eta > 0,\ (\forall x \in X,\ |x - a| \leqslant \eta}_{\substack{\text{quitte à ce que } x \\ \text{reste assez proche de } a}} \implies \underbrace{|f(x) - b| \leqslant \varepsilon)}_{\substack{f(x) \text{ reste à peu près} \\ \text{égal à } f(b), \text{ à } \varepsilon \text{ près.}}}$$

Limites : point de vue métrique

Définition 1.2 (Limites en un point fini)

- $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b \in \mathbb{R}$ ssi :

$$\underbrace{\forall \varepsilon > 0,}_{\substack{\text{Pour toute marge} \\ \text{d'erreur } \varepsilon, \\ \text{arbitrairement petite}}} \quad \underbrace{\exists \eta > 0,\ (\forall x \in X,\ |x-a| \leqslant \eta}_{\substack{\text{quitte à ce que } x \\ \text{reste assez proche de } a}} \implies \underbrace{|f(x) - b| \leqslant \varepsilon)}_{\substack{f(x) \text{ reste à peu près} \\ \text{égal à } f(b)\text{, à } \varepsilon \text{ près.}}}$$

- $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$ ssi :

$$\forall A > 0,\ \exists \eta > 0,\quad \forall x \in X,\ |x-a| \leqslant \eta \implies f(x) \geqslant A.$$

Limites : point de vue métrique

Définition 1.2 (Limites en un point fini)

- $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b \in \mathbb{R}$ ssi :

$$\underbrace{\forall \varepsilon > 0,}_{\text{Pour toute marge d'erreur } \varepsilon, \text{ arbitrairement petite}} \quad \underbrace{\exists \eta > 0, \ (\forall x \in X, \ |x-a| \leqslant \eta}_{\text{quitte à ce que } x \text{ reste assez proche de } a} \implies \underbrace{|f(x) - b| \leqslant \varepsilon)}_{f(x) \text{ reste à peu près égal à } f(b), \text{ à } \varepsilon \text{ près.}}$$

- $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$ ssi :

$$\forall A > 0, \ \exists \eta > 0, \ \forall x \in X, \ |x-a| \leqslant \eta \implies f(x) \geqslant A.$$

Limites : point de vue métrique

Définition 1.2 (Limites en un point fini)

- $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b \in \mathbb{R}$ ssi :

$$\underbrace{\forall \varepsilon > 0,}_{\substack{\text{Pour toute marge} \\ \text{d'erreur } \varepsilon, \\ \text{arbitrairement petite}}} \quad \underbrace{\exists \eta > 0, \ (\forall x \in X, \ |x - a| \leqslant \eta}_{\substack{\text{quitte à ce que } x \\ \text{reste assez proche de } a}} \implies \underbrace{|f(x) - b| \leqslant \varepsilon)}_{\substack{f(x) \text{ reste à peu près} \\ \text{égal à } f(b), \text{ à } \varepsilon \text{ près.}}}$$

- $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$ ssi :

$$\forall A > 0, \ \exists \eta > 0, \quad \forall x \in X, \ |x - a| \leqslant \eta \implies f(x) \geqslant A.$$

Limites : point de vue métrique

Définition 1.2 (Limites en un point fini)

- $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b \in \mathbb{R}$ ssi :

$$\underbrace{\forall \varepsilon > 0,}_{\substack{\text{Pour toute marge} \\ \text{d'erreur } \varepsilon, \\ \text{arbitrairement petite}}} \quad \underbrace{\exists \eta > 0, \ (\forall x \in X, \ |x - a| \leqslant \eta}_{\substack{\text{quitte à ce que } x \\ \text{reste assez proche de } a}} \implies \underbrace{|f(x) - b| \leqslant \varepsilon)}_{\substack{f(x) \text{ reste à peu près} \\ \text{égal à } f(b), \text{ à } \varepsilon \text{ près.}}}$$

- $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$ ssi :

$$\forall A > 0, \ \exists \eta > 0, \ \ \forall x \in X, \ |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant A.$$

- $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$ ssi :

$$\forall A > 0, \ \exists \eta > 0, \ \ \forall x \in X, \ |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \leqslant -A.$$

Autrement dit : On peut rendre $f(x)$ arbitrairement proche de b quitte à rester assez près de a.

Autrement dit : On peut rendre $f(x)$ arbitrairement proche de b quitte à rester assez près de a.

Remarques 1.3

1. L'hypothèse $a \in \overline{X}$ sert à pour pouvoir considérer des points aussi proches qu'on veut de a.

Autrement dit : On peut rendre $f(x)$ arbitrairement proche de b quitte à rester assez près de a.

Remarques 1.3

1. L'hypothèse $a \in \overline{X}$ sert à pour pouvoir considérer des points aussi proches qu'on veut de a.
2. L'inégalité est d'autant plus contraignante que ε est petit.

Autrement dit : On peut rendre $f(x)$ arbitrairement proche de b quitte à rester assez près de a.

Remarques 1.3

1. L'hypothèse $a \in \overline{X}$ sert à pour pouvoir considérer des points aussi proches qu'on veut de a.
2. L'inégalité est d'autant plus contraignante que ε est petit. Obtenir la propriété pour $\varepsilon < \varepsilon_0$ est suffisant

Autrement dit : On peut rendre $f(x)$ arbitrairement proche de b quitte à rester assez près de a.

Remarques 1.3

1. L'hypothèse $a \in \overline{X}$ sert à pour pouvoir considérer des points aussi proches qu'on veut de a.
2. L'inégalité est d'autant plus contraignante que ε est petit. Obtenir la propriété pour $\varepsilon < \varepsilon_0$ est suffisant
3. De même, dans le cas infini $\forall A > A_0$ suffit.

Autrement dit : On peut rendre $f(x)$ arbitrairement proche de b quitte à rester assez près de a.

Remarques 1.3

1. L'hypothèse $a \in \overline{X}$ sert à pour pouvoir considérer des points aussi proches qu'on veut de a.
2. L'inégalité est d'autant plus contraignante que ε est petit. Obtenir la propriété pour $\varepsilon < \varepsilon_0$ est suffisant
3. De même, dans le cas infini $\forall A > A_0$ suffit.

Proposition 1.4

On peut remplacer une ou plusieurs des inégalités larges $|x - a| \leqslant \eta$ et $|f(x) - b| \leqslant \varepsilon$ par des inégalités strictes.

Proposition 1.5 (Limite en un point du domaine)

Si $a \in X$, et si $f(x)$ admet une limite en a, alors $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Proposition 1.5 (Limite en un point du domaine)

Si $a \in X$, et si $f(x)$ admet une limite en a, alors $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Définition 1.6

Soit (E, d) et (F, d') deux espaces métriques, et $X \subset E$. Soit $f : X \to F$, $a \in \overline{X}$ et $b \in F$. On dit que f admet une limite b en a si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in X,\ d(x, a) < \eta \Longrightarrow d'(f(x), b) < \varepsilon.$$

Définition 1.7 (Limite en $+\infty$)

On suppose que $+\infty$ est adhérent à X.

- $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} b$ ssi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists B \in \mathbb{R},\quad \forall x \in X,\ x \geqslant B \Longrightarrow |f(x) - b| \leqslant \varepsilon.$$

Définition 1.7 (Limite en $+\infty$)

On suppose que $+\infty$ est adhérent à X.

- $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} b$ ssi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists B \in \mathbb{R},\ \ \forall x \in X,\ x \geqslant B \Longrightarrow |f(x) - b| \leqslant \varepsilon.$$

- $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ssi :

$$\forall A \geqslant 0,\ \exists B \in \mathbb{R},\ \ \forall x \in X,\ x \geqslant B \Longrightarrow f(x) \geqslant A.$$

Définition 1.7 (Limite en $+\infty$)

On suppose que $+\infty$ est adhérent à X.

- $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} b$ ssi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists B \in \mathbb{R},\quad \forall x \in X,\ x \geqslant B \Longrightarrow |f(x) - b| \leqslant \varepsilon.$$

- $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ssi :

$$\forall A \geqslant 0,\ \exists B \in \mathbb{R},\quad \forall x \in X,\ x \geqslant B \Longrightarrow f(x) \geqslant A.$$

- $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$ ssi :

$$\forall A \geqslant 0,\ \exists B \in \mathbb{R},\quad \forall x \in X,\ x \geqslant B \Longrightarrow f(x) \leqslant -A.$$

Définition 1.8 (Limite en $-\infty$)

On suppose que $-\infty$ est adhérent à X.

- $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} b$ ssi :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists B \in \mathbb{R},\ \ \forall x \in X,\ x \leqslant B \Longrightarrow |f(x) - b| \leqslant \varepsilon.$$
- $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ssi :
$$\forall A \geqslant 0,\ \exists B \in \mathbb{R},\ \ \forall x \in X,\ x \leqslant B \Longrightarrow f(x) \geqslant A.$$
- $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$ ssi :
$$\forall A \geqslant 0,\ \exists B \in \mathbb{R},\ \ \forall x \in X,\ x \leqslant B \Longrightarrow f(x) \leqslant -A.$$

Remarque 1.9

Le cas $X = \mathbb{N}$ donne la définition de la limite des suites

Remarque 1.9

Le cas $X = \mathbb{N}$ donne la définition de la limite des suites

- $x_n \longrightarrow \ell$ ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad |x_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Remarque 1.9

Le cas $X = \mathbb{N}$ donne la définition de la limite des suites

- $x_n \longrightarrow \ell$ ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad |x_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

- $x_n \to +\infty$ ssi

$$\forall A > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad u_n \geqslant A.$$

I-2. Limites : point de vue topologique

Définition 1.10 (Voisinage)

U voisinage de a si :

I-2. Limites : point de vue topologique

Définition 1.10 (Voisinage)

U voisinage de a si :

- cas $a \in \mathbb{R}$: il existe une boule $B(a, \varepsilon) \subset U$

I-2. Limites : point de vue topologique

Définition 1.10 (Voisinage)

U voisinage de a si :

- cas $a \in \mathbb{R}$: il existe une boule $B(a, \varepsilon) \subset U$
- cas $a = +\infty$: il existe $]A, +\infty[\subset U$

I-2. Limites : point de vue topologique

Définition 1.10 (Voisinage)

U voisinage de a si :

- cas $a \in \mathbb{R}$: il existe une boule $B(a, \varepsilon) \subset U$
- cas $a = +\infty$: il existe $]A, +\infty[\subset U$
- cas $a = -\infty$: il existe $]-\infty, A[\subset U$.

I-2. Limites : point de vue topologique

Définition 1.10 (Voisinage)

U voisinage de a si :

- cas $a \in \mathbb{R}$: il existe une boule $B(a, \varepsilon) \subset U$
- cas $a = +\infty$: il existe $]A, +\infty[\subset U$
- cas $a = -\infty$: il existe $]-\infty, A[\subset U$.

Notation 1.11

Pour $b \in \overline{\mathbb{R}}$, on note $\mathcal{V}(b)$ l'ensemble des voisinages de b.

I-2. Limites : point de vue topologique

Définition 1.10 (Voisinage)

U voisinage de a si :

- cas $a \in \mathbb{R}$: il existe une boule $B(a, \varepsilon) \subset U$
- cas $a = +\infty$: il existe $]A, +\infty[\subset U$
- cas $a = -\infty$: il existe $]-\infty, A[\subset U$.

Notation 1.11

Pour $b \in \overline{\mathbb{R}}$, on note $\mathcal{V}(b)$ l'ensemble des voisinages de b.

Proposition 1.12 (Définition topologique des voisinages)

Les psse :

I-2. Limites : point de vue topologique

Définition 1.10 (Voisinage)

U voisinage de a si :

- cas $a \in \mathbb{R}$: il existe une boule $B(a, \varepsilon) \subset U$
- cas $a = +\infty$: il existe $]A, +\infty[\subset U$
- cas $a = -\infty$: il existe $]-\infty, A[\subset U$.

Notation 1.11

Pour $b \in \overline{\mathbb{R}}$, on note $\mathcal{V}(b)$ l'ensemble des voisinages de b.

Proposition 1.12 (Définition topologique des voisinages)

Les psse :

(i) V est un voisinage de b ;

I-2. Limites : point de vue topologique

Définition 1.10 (Voisinage)

U voisinage de a si :

- cas $a \in \mathbb{R}$: il existe une boule $B(a, \varepsilon) \subset U$
- cas $a = +\infty$: il existe $]A, +\infty[\subset U$
- cas $a = -\infty$: il existe $]-\infty, A[\subset U$.

Notation 1.11

Pour $b \in \overline{\mathbb{R}}$, on note $\mathcal{V}(b)$ l'ensemble des voisinages de b.

Proposition 1.12 (Définition topologique des voisinages)

Les psse :

(i) V est un voisinage de b ;

(ii) Il existe U un ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $b \in U \subset V$.

Théorème 1.13 (Caractérisation des limites par voisinages)

(i) (métrique/métrique) f admet une limite b lorsque $x \to a$

Théorème 1.13 (Caractérisation des limites par voisinages)

(i) (métrique/métrique) f admet une limite b lorsque $x \to a$

(ii) (métrique/topologique)

1. si a est fini :
   $\forall V \in \mathcal{V}(b),\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in X,\ \ |x - a| < \eta \Longrightarrow f(x) \in V$

Théorème 1.13 (Caractérisation des limites par voisinages)

(i) (métrique/métrique) f admet une limite b lorsque $x \to a$

(ii) (métrique/topologique)

1. si a est fini :
   $\forall V \in \mathcal{V}(b),\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in X,\quad |x - a| < \eta \Longrightarrow f(x) \in V$
2. si $a = +\infty$:
   $\forall V \in \mathcal{V}(b),\ \exists A > 0,\ \forall x \in X,\quad x > A \Longrightarrow f(x) \in V$

Théorème 1.13 (Caractérisation des limites par voisinages)

(i) (métrique/métrique) f admet une limite b lorsque $x \to a$

(ii) (métrique/topologique)

1. si a est fini :
   $\forall V \in \mathcal{V}(b),\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in X,\quad |x - a| < \eta \Longrightarrow f(x) \in V$
2. si $a = +\infty$:
   $\forall V \in \mathcal{V}(b),\ \exists A > 0,\ \forall x \in X,\quad x > A \Longrightarrow f(x) \in V$

(iii) (topologique/métrique)

1. si b est fini :
   $\forall \varepsilon > 0,\ \exists U \in \mathcal{V}(a), \forall x \in X,\ x \in U \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$

Théorème 1.13 (Caractérisation des limites par voisinages)

(i) (métrique/métrique) f admet une limite b lorsque $x \to a$

(ii) (métrique/topologique)

1. si a est fini :
   $\forall V \in \mathcal{V}(b),\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in X,\quad |x-a| < \eta \Longrightarrow f(x) \in V$
2. si $a = +\infty$:
   $\forall V \in \mathcal{V}(b),\ \exists A > 0,\ \forall x \in X,\quad x > A \Longrightarrow f(x) \in V$

(iii) (topologique/métrique)

1. si b est fini :
   $\forall \varepsilon > 0,\ \exists U \in \mathcal{V}(a), \forall x \in X,\ x \in U \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$
2. si $b = +\infty$:
   $\forall A > 0,\ \exists U \in \mathcal{V}(a), \forall x \in X,\ x \in U \Longrightarrow f(x) > A$

Théorème 1.13 (Caractérisation des limites par voisinages)

(i) (métrique/métrique) f admet une limite b lorsque $x \to a$

(ii) (métrique/topologique)

1. si a est fini :
$\forall V \in \mathcal{V}(b),\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in X,\quad |x - a| < \eta \Longrightarrow f(x) \in V$
2. si $a = +\infty$:
$\forall V \in \mathcal{V}(b),\ \exists A > 0,\ \forall x \in X,\quad x > A \Longrightarrow f(x) \in V$

(iii) (topologique/métrique)

1. si b est fini :
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists U \in \mathcal{V}(a), \forall x \in X,\ x \in U \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$
2. si $b = +\infty$:
$\forall A > 0,\ \exists U \in \mathcal{V}(a), \forall x \in X,\ x \in U \Longrightarrow f(x) > A$

(iv) (topologique/topologique)
$\forall V \in \mathcal{V}(b),\ \exists U \in \mathcal{V}(a),\quad f(U \cap X) \subset V.$

Remarque 1.14

Caractérisation est aussi valable dans des espaces métriques (et sans le problème des infinis).

Remarque 1.14

Caractérisation est aussi valable dans des espaces métriques (et sans le problème des infinis).

Propriété au voisinage d'un point

f admet une propriété au voisinage d'un point a s'il existe un voisinage U de a tel que la propriété soit vraie pour tout x de U.

Remarque 1.14

Caractérisation est aussi valable dans des espaces métriques (et sans le problème des infinis).

Propriété au voisinage d'un point

f admet une propriété au voisinage d'un point a s'il existe un voisinage U de a tel que la propriété soit vraie pour tout x de U.

Proposition 1.15

Si f admet une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.

Définition 1.16 (Coïncidence de deux fonctions)

Soit f et g définies sur X et Y. f et g coïncident au voisinage de a, s'il existe U voisinage de a tel que :

- $U \cap X = U \cap Y$

Définition 1.16 (Coïncidence de deux fonctions)

Soit f et g définies sur X et Y. f et g coïncident au voisinage de a, s'il existe U voisinage de a tel que :

- $U \cap X = U \cap Y$
- $\forall x \in U \cap X, \quad f(x) = g(x)$.

Définition 1.16 (Coïncidence de deux fonctions)

Soit f et g définies sur X et Y. f et g coïncident au voisinage de a, s'il existe U voisinage de a tel que :

- $U \cap X = U \cap Y$
- $\forall x \in U \cap X, \quad f(x) = g(x)$.

Proposition 1.17 (limites de fonctions coïncidant au vois de a)

Si f et g coïncident au voisinage de a et si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b$, alors $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b$.

Définition 1.16 (Coïncidence de deux fonctions)

Soit f et g définies sur X et Y. f et g coïncident au voisinage de a, s'il existe U voisinage de a tel que :

- $U \cap X = U \cap Y$
- $\forall x \in U \cap X, \quad f(x) = g(x)$.

Proposition 1.17 (limites de fonctions coïncidant au vois de a)

Si f et g coïncident au voisinage de a et si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b$, alors $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b$.

Attention

Il faut l'existence d'un intervalle ouvert $]b, c[$ contenant a, tel que f et g coïncident sur $]b, c[$.

Définition 1.16 (Coïncidence de deux fonctions)

Soit f et g définies sur X et Y. f et g coïncident au voisinage de a, s'il existe U voisinage de a tel que :

- $U \cap X = U \cap Y$
- $\forall x \in U \cap X, \quad f(x) = g(x)$.

Proposition 1.17 (limites de fonctions coïncidant au vois de a)

Si f et g coïncident au voisinage de a et si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b$, alors $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b$.

Attention

Il faut l'existence d'un intervalle ouvert $]b, c[$ contenant a, tel que f et g coïncident sur $]b, c[$.
C'est faux si a est au bord d'un intervalle fermé de coïncidence.

II-3. Unicité de la limite

Lemme 1.18 (Lemme de séparation)

Soit $(x, y) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tels que $x \neq y$. Alors il existe des voisinages U de x et V de y tels que $U \cap V = \varnothing$.

II-3. Unicité de la limite

Lemme 1.18 (Lemme de séparation)

Soit $(x, y) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tels que $x \neq y$. Alors il existe des voisinages U de x et V de y tels que $U \cap V = \varnothing$.
Si $x < y$, on peut de plus choisir $U < V$.

II-3. Unicité de la limite

Lemme 1.18 (Lemme de séparation)

Soit $(x, y) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tels que $x \neq y$. Alors il existe des voisinages U de x et V de y tels que $U \cap V = \varnothing$.

Théorème 1.19 (Unicité de la limite)

Si elle existe, la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a est unique.

Notation 1.20

On peut donc la noter $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

II-4. Limites à droite, limites à gauche

Notation 1.21

Soit f définie sur X et $a \in \overline{X \cap Y}$. Si la limite (finie ou infinie) en a de la restriction $f_{|X\cap Y}$ existe, on utilise la notation suivante :

$$\lim_{x \to a} f_{|X\cap Y}(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in Y}} f(x).$$

II-4. Limites à droite, limites à gauche

Notation 1.21

Soit f définie sur X et $a \in \overline{X \cap Y}$. Si la limite (finie ou infinie) en a de la restriction $f_{|X\cap Y}$ existe, on utilise la notation suivante :

$$\lim_{x\to a} f_{|X\cap Y}(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x\in Y}} f(x).$$

Dans cette notation, il est sous-entendu que x doit bien sûr aussi être élément du domaine de définition X de f.

Définition 1.22 (Limite à gauche, limite à droite)

- **Limite à gauche** : cas $Y =]-\infty, a[$:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in]-\infty, a[}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a-0).$$

Définition 1.22 (Limite à gauche, limite à droite)

- Limite à gauche : cas $Y =]-\infty, a[$:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in]-\infty, a[}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a-0).$$

- Limite à droite : cas $Y =]a, +\infty[$; on utilise l'une des notations suivantes :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in]a, +\infty[}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a+0).$$

Définition 1.22 (Limite à gauche, limite à droite)

- Limite à gauche : cas $Y =]-\infty, a[$:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in]-\infty, a[}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a-0).$$

- Limite à droite : cas $Y =]a, +\infty[$; on utilise l'une des notations suivantes :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in]a, +\infty[}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a+0).$$

Remarque 1.23

Remarquez que le point a est exclus de Y.

Exemples 1.24

1. $f : x \mapsto \frac{x}{|x|}$ en $a = 0$;

Exemples 1.24

1. $f : x \mapsto \frac{x}{|x|}$ en $a = 0$;
2. $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ en $a = 0$;

Exemples 1.24

1. $f : x \mapsto \frac{x}{|x|}$ en $a = 0$;
2. $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ en $a = 0$;
3. $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ en $a \in \mathbb{Z}$.

Exemples 1.24

1. $f : x \mapsto \frac{x}{|x|}$ en $a = 0$;
2. $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ en $a = 0$;
3. $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ en $a \in \mathbb{Z}$.

Théorème 1.25 (Caractérisation de la limite par limites à gauche et à droite)

Soit $a \in \overline{X}$. La fonction f admet une limite ℓ en a si et seulement si, parmi les quantités $f(a-0)$, $f(a)$ et $f(a+0)$, celles qui sont envisageables existent et sont égales à ℓ.

Théorème 1.26 (Régularité des fonctions monotones)

Une fonction monotone admet des limites à gauche et à droite en tout point en lequel c'est envisageable (y compris les infinis, s'ils sont adhérents au domaine).

I-5. Opérations sur les limites

Règles usuelles admises pour le moment

- Sommes, produits, quotients, puissances

I-5. Opérations sur les limites

Règles usuelles admises pour le moment

- Sommes, produits, quotients, puissances
- Attention aux formes indéterminées : $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, 1^{∞}, 0^0, ∞^0

I-5. Opérations sur les limites

Règles usuelles admises pour le moment

- Sommes, produits, quotients, puissances
- Attention aux formes indéterminées : $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, 1^{∞}, 0^0, ∞^0
- Conservation des inégalités LARGES

I-5. Opérations sur les limites

Règles usuelles admises pour le moment

- Sommes, produits, quotients, puissances
- Attention aux formes indéterminées : $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0
- Conservation des inégalités LARGES
- Théorème d'encadrement

I-5. Opérations sur les limites

Règles usuelles admises pour le moment

- Sommes, produits, quotients, puissances
- Attention aux formes indéterminées : $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0
- Conservation des inégalités LARGES
- Théorème d'encadrement

Proposition 1.27 (Composition des limites)

Si $\lim_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim_{y \to b} g(x) = c$, alors $g \circ f$ admet une limite en a, et

$$\lim_{x \to a} g \circ f(x) = c.$$

Limites de fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Définition 1.28 (Limite d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$)

Si a est fini, f admet une limite $\ell \in \mathbb{C}$ en a si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in X,\ |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Théorème 1.29 (Caractérisation de la limite d'une fonction à valeurs complexes)

Soit $f = f_r + \mathrm{i}\, f_i$. Alors f admet une limite ℓ en a si et seulement si :

$$\lim_{x \to a} f_r(x) = \mathrm{Re}(\ell) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to a} f_i(x) = \mathrm{Im}(\ell)$$

Limites de fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Définition 1.28 (Limite d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$)

Si a est fini, f admet une limite $\ell \in \mathbb{C}$ en a si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in X,\ |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Théorème 1.29 (Caractérisation de la limite d'une fonction à valeurs complexes)

Soit $f = f_r + \mathrm{i}\, f_i$. Alors f admet une limite ℓ en a si et seulement si :

$$\lim_{x \to a} f_r(x) = \mathrm{Re}(\ell) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to a} f_i(x) = \mathrm{Im}(\ell)$$

Règles usuelles

Produit, somme, quotient : les mêmes.
Par d'inégalité dans $\mathbb{C}$!

Limites de fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Définition 1.28 (Limite d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$)

Si a est fini, f admet une limite $\ell \in \mathbb{C}$ en a si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in X,\ |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Théorème 1.29 (Caractérisation de la limite d'une fonction à valeurs complexes)

Soit $f = f_r + \mathrm{i}\, f_i$. Alors f admet une limite ℓ en a si et seulement si :

$$\lim_{x \to a} f_r(x) = \mathrm{Re}(\ell) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to a} f_i(x) = \mathrm{Im}(\ell)$$

Corollaire 1.30 (unicité de la limite, cas complexe)

Tout est dans le titre

I-7. Fonction continue en un point

Définition 1.31 (Continuité)

f est continue en $a \in X$ si f admet une limite en a.

I-7. Fonction continue en un point

Définition 1.31 (Continuité)

f est continue en $a \in X$ si f admet une limite en a.

Remarque 1.32

$a \in X$. Ainsi, si f est continue en a, la limite en a est $f(a)$.

I-7. Fonction continue en un point

Définition 1.31 (Continuité)

f est continue en $a \in X$ si f admet une limite en a.

Remarque 1.32

$a \in X$. Ainsi, si f est continue en a, la limite en a est $f(a)$.

Proposition 1.33 (Propositions équivalentes à la continuité)

Les psse :

(i) f est continue en a

I-7. Fonction continue en un point

Définition 1.31 (Continuité)

f est continue en $a \in X$ si f admet une limite en a.

Remarque 1.32

$a \in X$. Ainsi, si f est continue en a, la limite en a est $f(a)$.

Proposition 1.33 (Propositions équivalentes à la continuité)

Les psse :

(i) f est continue en a

(ii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in X,\quad |x - a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\,;$

I-7. Fonction continue en un point

Définition 1.31 (Continuité)

f est continue en $a \in X$ si f admet une limite en a.

Remarque 1.32

$a \in X$. Ainsi, si f est continue en a, la limite en a est $f(a)$.

Proposition 1.33 (Propositions équivalentes à la continuité)

Les psse :

(i) f est continue en a

(ii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in X,\quad |x - a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$;

(iii) pour tout voisinage V de $f(a)$, il existe un voisinage U de a tel que $f(U \cap X) \subset V$.

Proposition 1.34 (Restriction de l'ensemble source)

Si f et g coïncide sur un *voisinage* de a, f est continue en a si et seulement si g est continue en a.

Opérations sur les fonctions continues

- Stabilité par somme, produit, quotient, différence, composition.
- Continuité des polynômes et fractions rationnelles

Proposition 1.34 (Restriction de l'ensemble source)

Si f et g coïncide sur un *voisinage* de a, f est continue en a si et seulement si g est continue en a.

Corollaire 1.35

Soit f et g définies sur $X \subset \mathbb{R}$, et U un ouvert tel que $U \cap X \neq vide$. Alors, si $f_{U \cap X} = g_{U \cap X}$ et si g est continue sur $U \cap X$, alors f aussi.

Opérations sur les fonctions continues

- Stabilité par somme, produit, quotient, différence, composition.
- Continuité des polynômes et fractions rationnelles

Théorème 1.36 (Prolongement par continuité)

Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $b > a$, et $I =]a, b]$. On suppose que f est continue sur I et admet une limite finie ℓ en a. Alors il existe une unique application continue $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, telle que $g_{|I} = f$. Cette application vérifie $g(a) = \ell$, et est appelée prolongement par continuité de f sur $[a, b]$.

Théorème 1.36 (Prolongement par continuité)

Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $b > a$, et $I =]a, b]$. On suppose que f est continue sur I et admet une limite finie ℓ en a. Alors il existe une unique application continue $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, telle que $g_{|I} = f$. Cette application vérifie $g(a) = \ell$, et est appelée prolongement par continuité de f sur $[a, b]$.

Très souvent on utilise alors le même nom de fonction.

I-8.Continuité d'une fonction de 2 variables

Pour $f : D \to \mathbb{R}$ avec $X \subset \mathbb{R}^2$:

Distance considérée sur $\mathbb{R}^2$: $d(X, Y) = \|Y - X\|^2$.

Définition 1.37 (Continuité)

f est continue en $X_0 = (x_0, y_0) \in D$ si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

I-8.Continuité d'une fonction de 2 variables

Pour $f : D \to \mathbb{R}$ avec $X \subset \mathbb{R}^2$:

Distance considérée sur $\mathbb{R}^2$: $d(X, Y) = \|Y - X\|^2$.

Définition 1.37 (Continuité)

f est continue en $X_0 = (x_0, y_0) \in D$ si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

(i) $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta, \quad \forall X \in D, \quad \|X - X_0\| \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(X) - f(X_0)\| \leqslant \varepsilon.$

I-8.Continuité d'une fonction de 2 variables

Pour $f : D \to \mathbb{R}$ avec $X \subset \mathbb{R}^2$:
Distance considérée sur $\mathbb{R}^2$: $d(X, Y) = \|Y - X\|^2$.

Définition 1.37 (Continuité)

f est continue en $X_0 = (x_0, y_0) \in D$ si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

(i) $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta, \quad \forall X \in D, \quad \|X - X_0\| \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(X) - f(X_0)\| \leqslant \varepsilon$.

(ii) $\forall V \in \mathcal{V}(f(X_0)), \quad \exists U \in \mathcal{V}(X_0), \; f(U \cap D) \subset V$.

I-8.Continuité d'une fonction de 2 variables

Pour $f : D \to \mathbb{R}$ avec $X \subset \mathbb{R}^2$:
Distance considérée sur $\mathbb{R}^2$: $d(X, Y) = \|Y - X\|^2$.

Définition 1.37 (Continuité)

f est continue en $X_0 = (x_0, y_0) \in D$ si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

(i) $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta, \quad \forall X \in D, \quad \|X - X_0\| \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(X) - f(X_0)\| \leqslant \varepsilon.$

(ii) $\forall V \in \mathcal{V}(f(X_0)), \quad \exists U \in \mathcal{V}(X_0), \ f(U \cap D) \subset V.$

Cette définition se généralise sans peine à davantage de variables.

Règles usuelles

Stabilité par somme, produit, quotient.

Règles usuelles

Stabilité par somme, produit, quotient.

Proposition 1.38 (Continuité d'une composée)

Soit X et Y deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$, D un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$. On se donne $f : D \to Y$, $\varphi_1, \varphi_2 : XflD$ et $g : Y \to \mathbb{R}$.

Règles usuelles

Stabilité par somme, produit, quotient.

Proposition 1.38 (Continuité d'une composée)

Soit X et Y deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$, D un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$. On se donne $f : D \to Y$, $\varphi_1, \varphi_2 : XflD$ et $g : Y \to \mathbb{R}$.

1. Si f est continue en (x_0, y_0) et g continue en $f(x_0, y_0)$, alors $(x, y) \mapsto g(f(x, y))$ est continue en (x_0, y_0).
2. Si φ_1 et φ_2 sont continues en t_0 et f est continue en $(\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0))$, alors $t \mapsto f(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ est continue en t_0

Exemples 1.39

1. $(x, y) \mapsto \sin(y + \cos(xy))$ est continue sur $\mathbb{R}^2$

Exemples 1.39

1. $(x, y) \mapsto \sin(y + \cos(xy))$ est continue sur $\mathbb{R}^2$
2. Le deuxième point est très utile pour justifier la non continuité, en restreignant f le long d'une courbe. Soit par exemple :

$$f : (x, y) \mapsto \frac{xy}{x + y} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } f(0, 0) = 0.$$

Montrer que f n'est pas continue en 0.

Le graphe d'une fonction de 2 variables à valeurs dans $\mathbb{R}$ est une surface (une nappe)

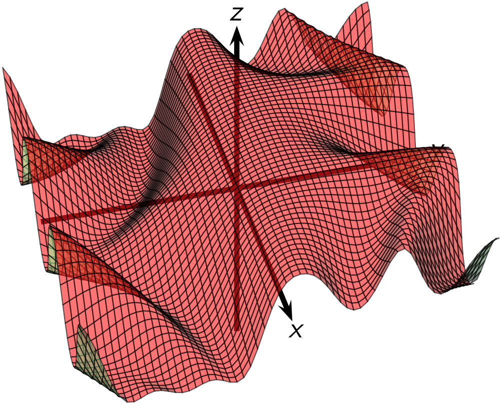


Figure – Graphe de $(x, y) \mapsto \sin(y + \cos(xy))$

II. Dérivation

II-1. Dérivation et tangente

Définition 2.1 (dérivabilité, dérivée)

f est dérivable en x_0 si $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell$.

II. Dérivation

II-1. Dérivation et tangente

Définition 2.1 (dérivabilité, dérivée)

f est dérivable en x_0 si $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell$.

On définit alors $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

II. Dérivation

II-1. Dérivation et tangente

Définition 2.1 (dérivabilité, dérivée)

f est dérivable en x_0 si $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$.

On définit alors $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Remarques 2.2

1. Notion locale et non ponctuelle.

II. Dérivation

II-1. Dérivation et tangente

Définition 2.1 (dérivabilité, dérivée)

f est dérivable en x_0 si $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$.

On définit alors $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Remarques 2.2

1. Notion locale et non ponctuelle.
2. Notion locale et non globale

II. Dérivation

II-1. Dérivation et tangente

Définition 2.1 (dérivabilité, dérivée)

f est dérivable en x_0 si $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell$.

On définit alors $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Remarques 2.2

1. Notion locale et non ponctuelle.
2. Notion locale et non globale

Exemples 2.3

1. $f : x \mapsto c$

II. Dérivation

II-1. Dérivation et tangente

Définition 2.1 (dérivabilité, dérivée)

f est dérivable en x_0 si $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell$.

On définit alors $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Remarques 2.2

1. Notion locale et non ponctuelle.
2. Notion locale et non globale

Exemples 2.3

1. $f : x \mapsto c$
2. $f : x \mapsto x$.

II. Dérivation
II-1. Dérivation et tangente

Définition 2.1 (dérivabilité, dérivée)

f est dérivable en x_0 si $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell$.

On définit alors $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Remarques 2.2

1. Notion locale et non ponctuelle.
2. Notion locale et non globale

Exemples 2.3

1. $f : x \mapsto c$
2. $f : x \mapsto x$.
3. $f : x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos(x)$.

Proposition 2.4 (Caractérisation en terme de DL)

f est dérivable de dérivée p en x_0 si et seulement s'il existe une application ε définie sur un voisinage V de x_0, de limite nulle lorsque x tend vers x_0, et telle que

$$\forall x \in V \cap I, \quad f(x) = f(x_0) + (x - x_0)p + (x - x_0)\varepsilon(x).$$

Proposition 2.4 (Caractérisation en terme de DL)

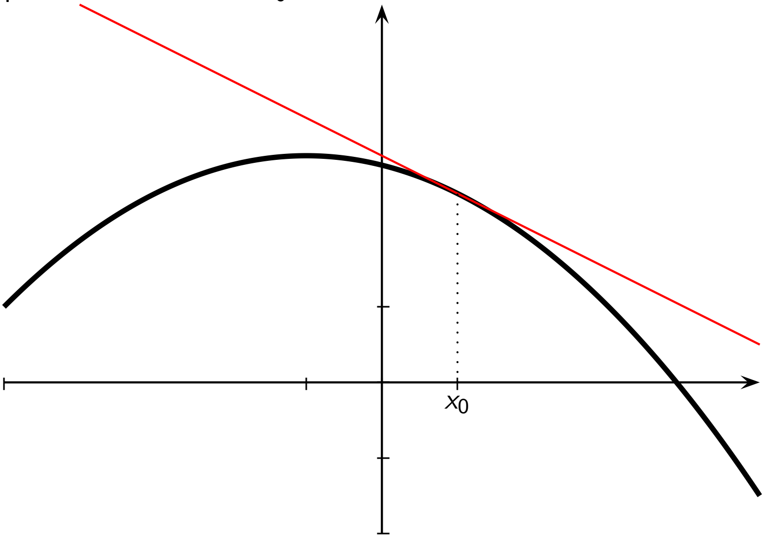
f est dérivable de dérivée p en x_0 si et seulement s'il existe une application ε définie sur un voisinage V de x_0, de limite nulle lorsque x tend vers x_0, et telle que

$$\forall x \in V \cap I, \quad f(x) = f(x_0) + (x - x_0)p + (x - x_0)\varepsilon(x).$$

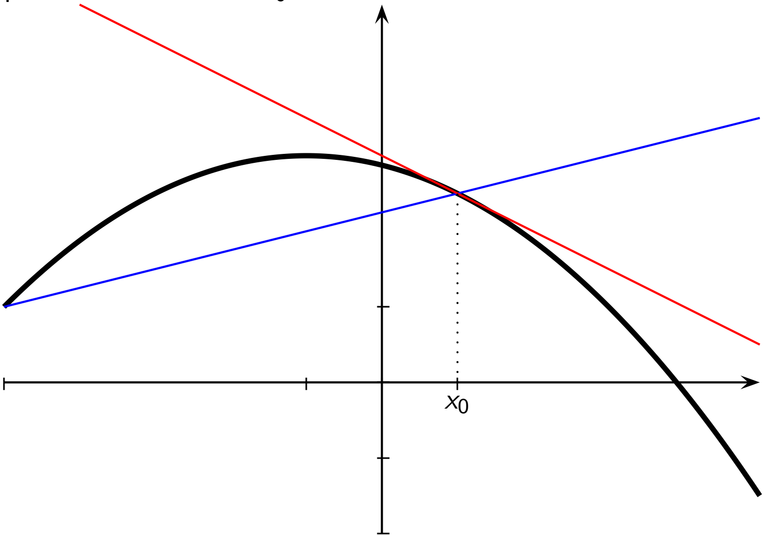
Équivaut à : $f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon_0(h)$

Le taux d'accroissement $\tau_{x_0}(x)$ est la pente de la sécante aux points d'absisse x et x_0.

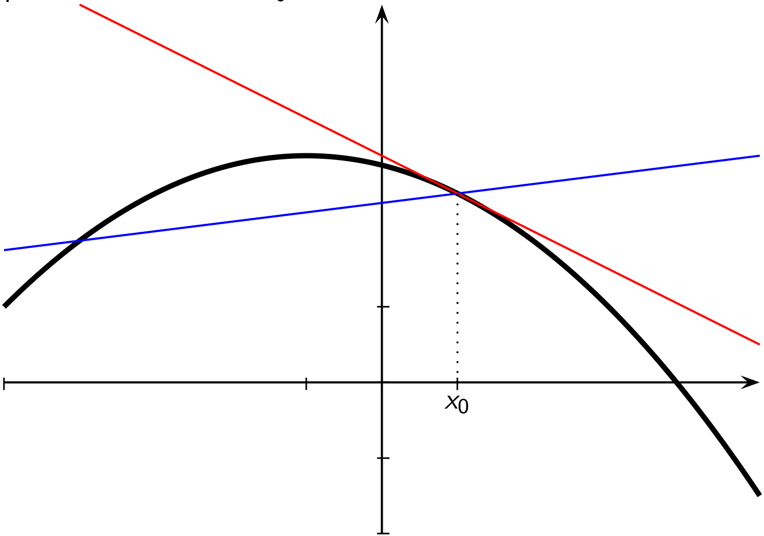
Le taux d'accroissement $\tau_{x_0}(x)$ est la pente de la sécante aux points d'absisse x et x_0.



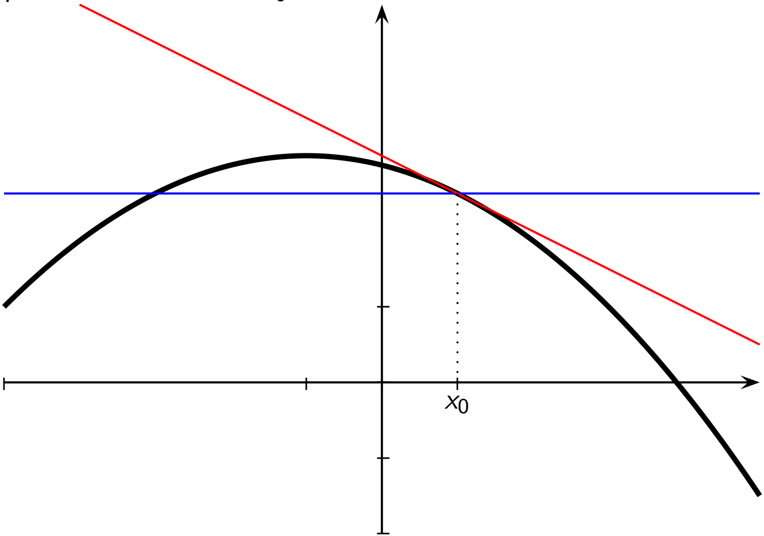
Le taux d'accroissement $\tau_{x_0}(x)$ est la pente de la sécante aux points d'absisse x et x_0.



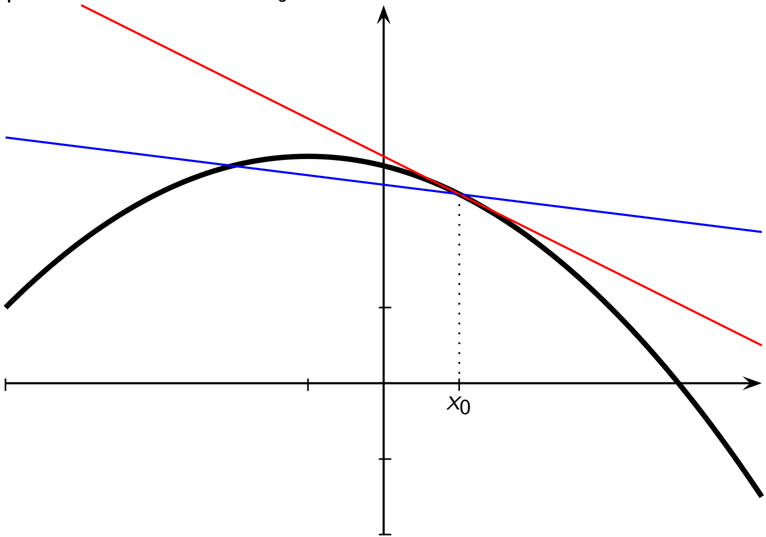
Le taux d'accroissement $\tau_{x_0}(x)$ est la pente de la sécante aux points d'absisse x et x_0.



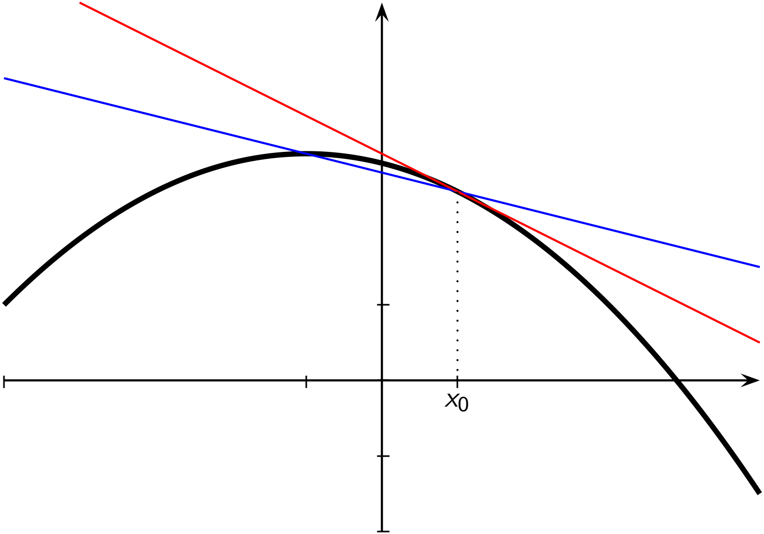
Le taux d'accroissement $\tau_{x_0}(x)$ est la pente de la sécante aux points d'absisse x et x_0.



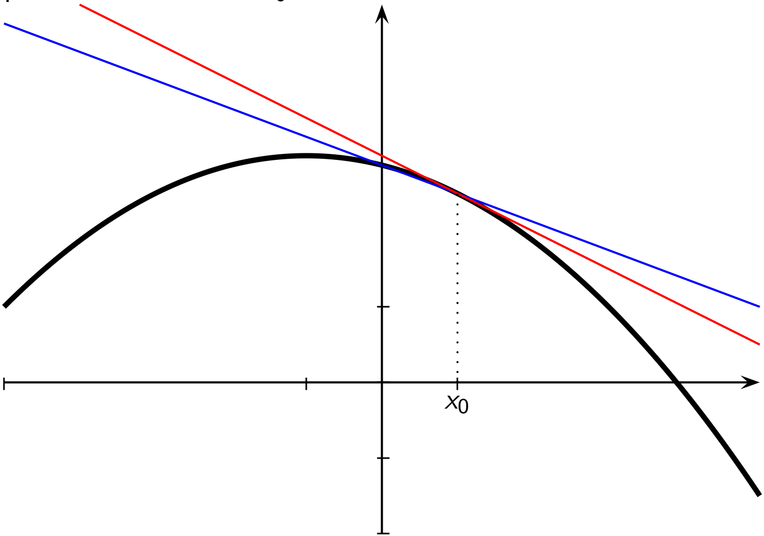
Le taux d'accroissement $\tau_{x_0}(x)$ est la pente de la sécante aux points d'absisse x et x_0.



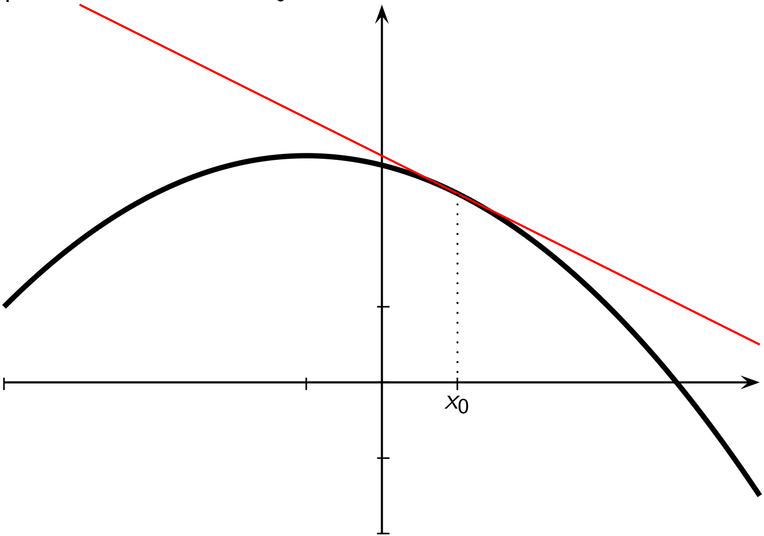
Le taux d'accroissement $\tau_{x_0}(x)$ est la pente de la sécante aux points d'absisse x et x_0.



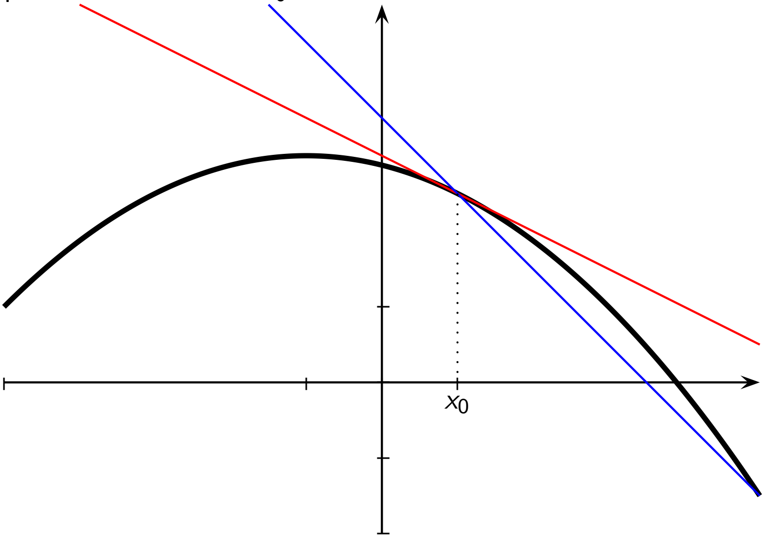
Le taux d'accroissement $\tau_{x_0}(x)$ est la pente de la sécante aux points d'absisse x et x_0.



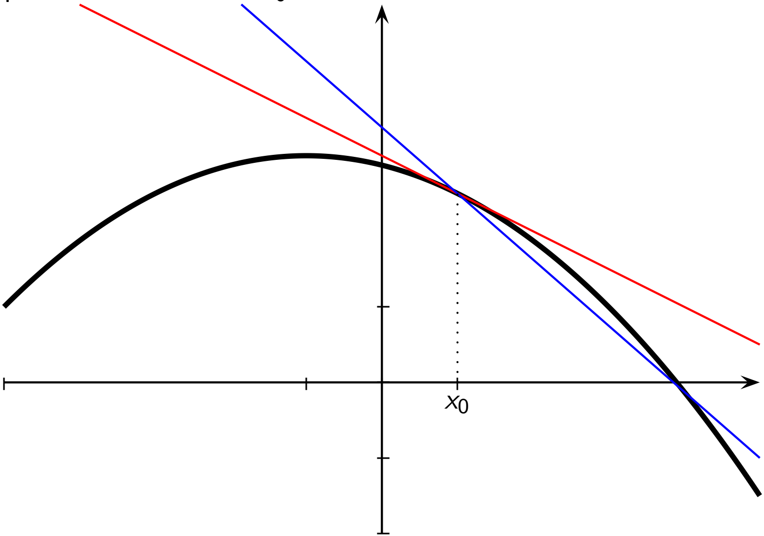
Le taux d'accroissement $\tau_{x_0}(x)$ est la pente de la sécante aux points d'absisse x et x_0.



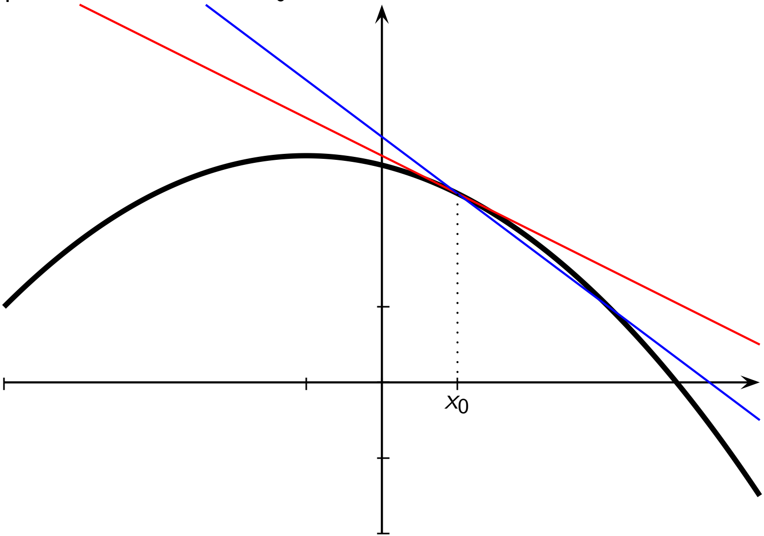
Le taux d'accroissement $\tau_{x_0}(x)$ est la pente de la sécante aux points d'absisse x et x_0.



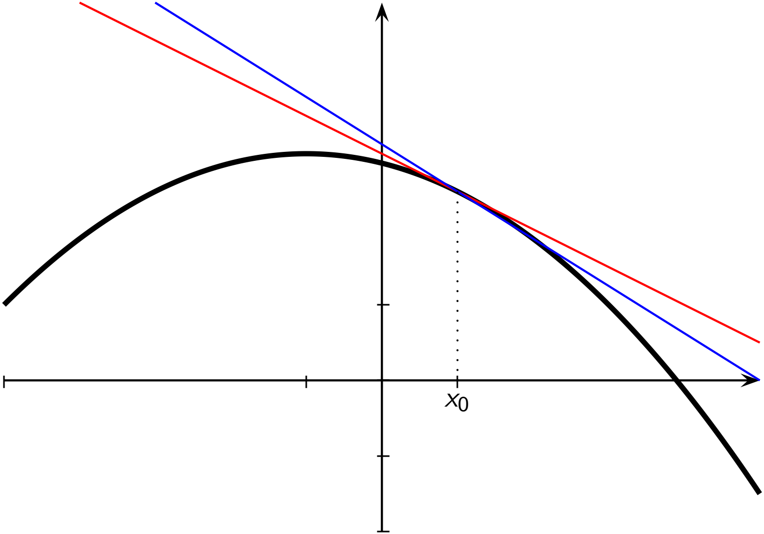
Le taux d'accroissement $\tau_{x_0}(x)$ est la pente de la sécante aux points d'absisse x et x_0.



Le taux d'accroissement $\tau_{x_0}(x)$ est la pente de la sécante aux points d'absisse x et x_0.



Le taux d'accroissement $\tau_{x_0}(x)$ est la pente de la sécante aux points d'absisse x et x_0.



Remarque 2.5

Interprétation géométrique : la dérivée en x_0 est la pente de la tangente à la courbe de f en x_0.

Remarque 2.5

Interprétation géométrique : la dérivée en x_0 est la pente de la tangente à la courbe de f en x_0.

Définition 2.6 (Tangente)

C'est la droite d'équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Remarque 2.5

Interprétation géométrique : la dérivée en x_0 est la pente de la tangente à la courbe de f en x_0.

Définition 2.6 (Tangente)

C'est la droite d'équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Proposition 2.7

La tangente est la droite approchant au mieux la courbe de f au voisinage de x_0.

Théorème 2.8 (Continuité des fonctions dérivables)

Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.

Théorème 2.8 (Continuité des fonctions dérivables)

Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0. **La réciproque est fausse !**

Théorème 2.8 (Continuité des fonctions dérivables)

Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.

Note historique 2.9

Lisez-là !

II-2. Dérivées à droite et à gauche

Définition 2.10 (Dérivées à droite et à gauche)

- f dérivable à droite en x_0 :

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

II-2. Dérivées à droite et à gauche

Définition 2.10 (Dérivées à droite et à gauche)

- f dérivable à droite en x_0 :

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

-

$$f'_g(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

II-2. Dérivées à droite et à gauche

Définition 2.10 (Dérivées à droite et à gauche)

- f dérivable à droite en x_0 :

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

- $$f'_g(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Remarque 2.11

La dérivabilité à droite en x_0 équivaut à la dérivabilité en x_0 de $f_{|I \cap [x_0, +\infty[}$.

Proposition 2.12 (Caractérisation de la dérivabilité par f'_g et f'_d)

Soit $x_0 \in I$, non égal à une des bornes de I. Alors f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en x_0, et $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

.

Proposition 2.12 (Caractérisation de la dérivabilité par f'_g et f'_d)

Soit $x_0 \in I$, non égal à une des bornes de I. Alors f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en x_0, et $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.
Dans ce cas, $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Proposition 2.12 (Caractérisation de la dérivabilité par f'_g et f'_d)

Soit $x_0 \in I$, non égal à une des bornes de I. Alors f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en x_0, et $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

.

Exemples 2.13

1. $x \mapsto |\sin(x)|$

Proposition 2.12 (Caractérisation de la dérivabilité par f'_g et f'_d)

Soit $x_0 \in I$, non égal à une des bornes de I. Alors f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en x_0, et $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

.

Exemples 2.13

1. $x \mapsto |\sin(x)|$
2. $x \mapsto |x|^3$.

II-3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Définition 2.14 (dérivées d'ordre supérieur)

Si f dérivable sur I, cela définit f' sur I, qu'on peut à nouveau dériver. En itérant, on définit $f^{(n)}$, dérivée à l'ordre n ou dérivée n-ième de f.

II-3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Définition 2.14 (dérivées d'ordre supérieur)

Si f dérivable sur I, cela définit f' sur I, qu'on peut à nouveau dériver. En itérant, on définit $f^{(n)}$, dérivée à l'ordre n ou dérivée n-ième de f.
Plus formellement, $f^{(0)} = f$ et $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

II-3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Définition 2.14 (dérivées d'ordre supérieur)

Si f dérivable sur I, cela définit f' sur I, qu'on peut à nouveau dériver. En itérant, on définit $f^{(n)}$, dérivée à l'ordre n ou dérivée n-ième de f.
Plus formellement, $f^{(0)} = f$ et $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Remarques 2.15

- Distinguer $f^{(n)}$ et f^n.

II-3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Définition 2.14 (dérivées d'ordre supérieur)

Si f dérivable sur I, cela définit f' sur I, qu'on peut à nouveau dériver. En itérant, on définit $f^{(n)}$, dérivée à l'ordre n ou dérivée n-ième de f.

Plus formellement, $f^{(0)} = f$ et $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Remarques 2.15

- Distinguer $f^{(n)}$ et f^n.
- Notations usuelles f' et f'', parfois f'''.

II-3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Définition 2.14 (dérivées d'ordre supérieur)

Si f dérivable sur I, cela définit f' sur I, qu'on peut à nouveau dériver. En itérant, on définit $f^{(n)}$, dérivée à l'ordre n ou dérivée n-ième de f.
Plus formellement, $f^{(0)} = f$ et $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Remarques 2.15

- Distinguer $f^{(n)}$ et f^n.
- Notations usuelles f' et f'', parfois f'''.
- Pour que $f^{(n_0)}$ soit définie, f doit être $n_0 - 1$ fois dérivable sur tout un voisinage de x_0.

Définition 2.16 (fonctions de classe $\mathcal{C}^n$)

f de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I : n fois dérivable de dérivée n-ième $f^{(n)}$ continue.

Définition 2.16 (fonctions de classe $\mathcal{C}^n$)

f de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I : n fois dérivable de dérivée n-ième $f^{(n)}$ continue.

Exemple 2.17

$f : x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$, prolongée par continuité en 0.

Définition 2.16 (fonctions de classe $\mathcal{C}^n$)

f de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I : n fois dérivable de dérivée n-ième $f^{(n)}$ continue.

Exemple 2.17

$f : x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$, prolongée par continuité en 0.

Notation 2.18 ($\mathcal{C}^n(I)$, $\mathcal{D}^n(I)$)

Soit I un intervalle.

Définition 2.16 (fonctions de classe $\mathcal{C}^n$)

f de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I : n fois dérivable de dérivée n-ième $f^{(n)}$ continue.

Exemple 2.17

$f : x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$, prolongée par continuité en 0.

Notation 2.18 ($\mathcal{C}^n(I)$, $\mathcal{D}^n(I)$)

Soit I un intervalle.

- $\mathcal{D}^n(I)$: ensemble des fonctions n fois dérivables sur I.

Définition 2.16 (fonctions de classe $\mathcal{C}^n$)

f de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I : n fois dérivable de dérivée n-ième $f^{(n)}$ continue.

Exemple 2.17

$f : x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$, prolongée par continuité en 0.

Notation 2.18 ($\mathcal{C}^n(I)$, $\mathcal{D}^n(I)$)

Soit I un intervalle.

- $\mathcal{D}^n(I)$: ensemble des fonctions n fois dérivables sur I.
- $\mathcal{C}^n(I)$: ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, i.e. n fois dérivables sur I et de dérivée n-ième continue.

Proposition 2.19

On a une chaîne d'inclusions :

$$\cdots \subset \mathcal{C}^n(I) \subset \mathcal{D}^n(I) \subset \mathcal{C}^{n-1}(I) \subset \cdots \subset\subset \mathcal{D}^1(I) \subset \mathcal{C}^0(I) \subset \mathcal{D}^0(I).$$

Proposition 2.19

On a une chaîne d'inclusions :

$$\cdots \subset \mathcal{C}^n(I) \subset \mathcal{D}^n(I) \subset \mathcal{C}^{n-1}(I) \subset \cdots \subset\subset \mathcal{D}^1(I) \subset \mathcal{C}^0(I) \subset \mathcal{D}^0(I).$$

Définition 2.20 (Fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$)

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si f est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Notation $\mathcal{C}^\infty(I)$

II-4. Théorème des accroissements finis, fonctions lipschitziennes

Théorème 2.21 (TAF, admis provisoirement)

Soit $a < b$ et f une application continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

II-4. Théorème des accroissements finis, fonctions lipschitziennes

Théorème 2.21 (TAF, admis provisoirement)

Soit $a < b$ et f une application continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Interprétation géométrique

II-4. Théorème des accroissements finis, fonctions lipschitziennes

Théorème 2.21 (TAF, admis provisoirement)

Soit $a < b$ et f une application continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Interprétation géométrique

Corollaire 2.22 (Inégalité des accroissements finis, IAF)

Avec les mêmes hypothèses sur f :

- Si $\forall x \in]a, b[,\ m \leqslant f'(x) \leqslant M$, alors : $m \leqslant \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant M$.

II-4. Théorème des accroissements finis, fonctions lipschitziennes

Théorème 2.21 (TAF, admis provisoirement)

Soit $a < b$ et f une application continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Interprétation géométrique

Corollaire 2.22 (Inégalité des accroissements finis, IAF)

Avec les mêmes hypothèses sur f :

- Si $\forall x \in]a, b[,\ m \leqslant f'(x) \leqslant M$, alors : $m \leqslant \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant M$.
- Écrite ainsi, c'est aussi valide si $b < a$.

II-4. Théorème des accroissements finis, fonctions lipschitziennes

Théorème 2.21 (TAF, admis provisoirement)

Soit $a < b$ et f une application continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Interprétation géométrique

Corollaire 2.22 (Inégalité des accroissements finis, IAF)

Avec les mêmes hypothèses sur f :

- Si $\forall x \in]a, b[,\ m \leqslant f'(x) \leqslant M$, alors : $m \leqslant \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant M$.
- Écrite ainsi, c'est aussi valide si $b < a$.
- En particulier avec $m = \inf\limits_{x \in]a,b[} f'(x)$ et $M = \sup\limits_{x \in]a,b[} f'(x)$.

II-4. Théorème des accroissements finis, fonctions lipschitziennes

Théorème 2.21 (TAF, admis provisoirement)

Soit $a < b$ et f une application continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Interprétation géométrique

Corollaire 2.22 (Inégalité des accroissements finis, IAF)

Avec les mêmes hypothèses sur f :

- Si $\forall x \in]a, b[,\ m \leqslant f'(x) \leqslant M$, alors : $m \leqslant \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant M$.
- Écrite ainsi, c'est aussi valide si $b < a$.
- En particulier avec $m = \inf\limits_{x \in]a,b[} f'(x)$ et $M = \sup\limits_{x \in]a,b[} f'(x)$.
- Si $|f'| \leqslant M$ sur $]a, b[$, alors $|f(b) - f(a)| \leqslant M|b - a|$.

Définition 2.23 (Fonction lipschitzienne, fonction contractante)

On dit que f est L-lipschitzienne sur I (intervalle) si pour tout $(x, y) \in I^2$,

$$\|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|.$$

Définition 2.23 (Fonction lipschitzienne, fonction contractante)

On dit que f est L-lipschitzienne sur I (intervalle) si pour tout $(x, y) \in I^2$,

$$\|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|.$$

Si de plus $L < 1$, on dit que f est contractante.

Définition 2.23 (Fonction lipschitzienne, fonction contractante)

On dit que f est L-lipschitzienne sur I (intervalle) si pour tout $(x, y) \in I^2$,

$$\|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|.$$

Si de plus $L < 1$, on dit que f est contractante.

Proposition 2.24 (continuité des fonctions lipschitziennes)

Lipschitz $\Longrightarrow$ continue.

Définition 2.23 (Fonction lipschitzienne, fonction contractante)

On dit que f est L-lipschitzienne sur I (intervalle) si pour tout $(x, y) \in I^2$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|.$$

Si de plus $L < 1$, on dit que f est contractante.

Proposition 2.24 (continuité des fonctions lipschitziennes)

Lipschitz $\Longrightarrow$ continue.

Proposition 2.25 (Caractère lipschitzien des fonctions à dérivée bornée)

Soit f à dérivée bornée sur I (intervalle). Alors f est lipschitzienne.

II-5. Théorèmes de prolongement

Théorème 2.26 (Prolongement par continuité)

Soit f continue sur $]a, b]$, et admettant une limite ℓ en a. Il existe une unique fonction g continue sur $[a, b]$ et coïncidant avec f sur $]a, b]$. Elle vérifie $g(a) = \ell$. La fonction g est appelée prolongement par continuité de f sur $[a, b]$.

II-5. Théorèmes de prolongement

Théorème 2.26 (Prolongement par continuité)

Soit f continue sur $]a, b]$, et admettant une limite ℓ en a. Il existe une unique fonction g continue sur $[a, b]$ et coïncidant avec f sur $]a, b]$. Elle vérifie $g(a) = \ell$. La fonction g est appelée prolongement par continuité de f sur $[a, b]$.

Théorème 2.27 (Théorème de la limite de la dérivée)

I un intervalle, $a \in I$, f continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$.

- Si $f'(x) \underset{x \to a, x \neq a}{\longrightarrow} \ell$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

.

II-5. Théorèmes de prolongement

Théorème 2.26 (Prolongement par continuité)

Soit f continue sur $]a, b]$, et admettant une limite ℓ en a. Il existe une unique fonction g continue sur $[a, b]$ et coïncidant avec f sur $]a, b]$. Elle vérifie $g(a) = \ell$. La fonction g est appelée prolongement par continuité de f sur $[a, b]$.

Théorème 2.27 (Théorème de la limite de la dérivée)

I un intervalle, $a \in I$, f continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$.

- Si $f'(x) \underset{x \to a, x \neq a}{\longrightarrow} \ell$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

  La fonction f' est alors continue en a.

II-5. Théorèmes de prolongement

Théorème 2.26 (Prolongement par continuité)

Soit f continue sur $]a, b]$, et admettant une limite ℓ en a. Il existe une unique fonction g continue sur $[a, b]$ et coïncidant avec f sur $]a, b]$. Elle vérifie $g(a) = \ell$. La fonction g est appelée prolongement par continuité de f sur $[a, b]$.

Théorème 2.27 (Théorème de la limite de la dérivée)

I un intervalle, $a \in I$, f continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$.

- Si $f'(x) \underset{x \to a, x \neq a}{\longrightarrow} \ell$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.
  La fonction f' est alors continue en a.
- Si $f'(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$, alors $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \longrightarrow +\infty$ (et la courbe admet donc une tangente verticale en a).

Théorème 2.28 (Théorème de la classe $\mathcal{C}^n$ par prolongement)

Soit I un intervalle et $x_0 \in I$. Soit f de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I \setminus \{x_0\}$. Si pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f^{(k)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell_k$, alors f peut être prolongée sur I en une fonction $\tilde{f}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Théorème 2.28 (Théorème de la classe $\mathcal{C}^n$ par prolongement)

Soit I un intervalle et $x_0 \in I$. Soit f de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I \setminus \{x_0\}$. Si pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f^{(k)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell_k$, alors f peut être prolongée sur I en une fonction $\tilde{f}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.
En particulier, on aura alors : $\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \tilde{f}^{(k)}(x_0) = \ell_k$.

Théorème 2.28 (Théorème de la classe $\mathcal{C}^n$ par prolongement)

Soit I un intervalle et $x_0 \in I$. Soit f de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I \setminus \{x_0\}$. Si pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f^{(k)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell_k$, alors f peut être prolongée sur I en une fonction $\tilde{f}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

En particulier, on aura alors : $\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \tilde{f}^{(k)}(x_0) = \ell_k$.

Remarque 2.29

Utilisé sur des fonctions définies sur I tout entier. L'hypothèse sur la limite de la dérivée d'ordre 0 doit alors être remplacée par une hypothèse de continuité.

II-6. Règles de dérivation

Proposition 2.30 (dérivée d'une somme, d'un produit)

La dérivabilité de f et g entraîne celle de $\leftarrow$, $f+g$, fg, $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$, et :

II-6. Règles de dérivation

Proposition 2.30 (dérivée d'une somme, d'un produit)

La dérivabilité de f et g entraîne celle de $\leftarrow$, $f+g$, fg, $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$, et :

1. $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$.

II-6. Règles de dérivation

Proposition 2.30 (dérivée d'une somme, d'un produit)

La dérivabilité de f et g entraîne celle de $\leftarrow$, $f+g$, fg, $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$, et :

1. $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$.
2. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

II-6. Règles de dérivation

Proposition 2.30 (dérivée d'une somme, d'un produit)

La dérivabilité de f et g entraîne celle de $\leftarrow$, $f+g$, fg, $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$, et :

1. $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$.
2. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
3. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

II-6. Règles de dérivation

Proposition 2.30 (dérivée d'une somme, d'un produit)

La dérivabilité de f et g entraîne celle de $\leftarrow$, $f+g$, fg, $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$, et :

1. $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$.
2. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
3. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
4. $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x) = \dfrac{-g'(x)}{g^2(x)}$

II-6. Règles de dérivation

Proposition 2.30 (dérivée d'une somme, d'un produit)

La dérivabilité de f et g entraîne celle de $\leftarrow$, $f+g$, fg, $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$, et :

1. $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$.
2. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
3. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
4. $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x) = \dfrac{-g'(x)}{g^2(x)}$
5. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

II-6. Règles de dérivation

Proposition 2.30 (dérivée d'une somme, d'un produit)

La dérivabilité de f et g entraîne celle de $\leftarrow$, $f+g$, fg, $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$, et :

1. $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$.
2. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
3. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
4. $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$
5. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Exemples 2.31

- Dérivée de $x \mapsto x^2$

II-6. Règles de dérivation

Proposition 2.30 (dérivée d'une somme, d'un produit)

La dérivabilité de f et g entraîne celle de $\leftarrow$, $f+g$, fg, $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$, et :

1. $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$.
2. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
3. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
4. $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$
5. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Exemples 2.31

- Dérivée de $x \mapsto x^2$
- Dérivée de $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Corollaire 2.32 (dérivée d'un produit de n termes)

- Si $f_1, \ldots, f_n$ sont dérivables en x_0, alors leur produit aussi, et :

$$(f_1 \cdots f_n)'(x_0) = \sum_{k=1}^{n} f_k'(x_0) \prod_{i \in [\![1,n]\!] \setminus \{k\}} f_i(x_0).$$

Corollaire 2.32 (dérivée d'un produit de n termes)

- Si $f_1, \ldots, f_n$ sont dérivables en x_0, alors leur produit aussi, et :

$$(f_1 \cdots f_n)'(x_0) = \sum_{k=1}^{n} f_k'(x_0) \prod_{i \in [\![1,n]\!] \setminus \{k\}} f_i(x_0).$$

- Si les $f_i(x_0)$ sont tous non nuls, ceci se réexprime :

$$(f_1 \cdots f_n)'(x_0) = \left(\prod_{i \in [\![1,n]\!]} f_i \right) \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i'(x_0)}{f_i(x_0)}.$$

Corollaire 2.32 (dérivée d'un produit de n termes)

- Si $f_1, \dots, f_n$ sont dérivables en x_0, alors leur produit aussi, et :

$$(f_1 \cdots f_n)'(x_0) = \sum_{k=1}^{n} f_k'(x_0) \prod_{i \in [\![1,n]\!] \setminus \{k\}} f_i(x_0).$$

- Si les $f_i(x_0)$ sont tous non nuls, ceci se réexprime :

$$(f_1 \cdots f_n)'(x_0) = \left(\prod_{i \in [\![1,n]\!]} f_i \right) \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i'(x_0)}{f_i(x_0)}.$$

- S'il existe i_0 tel que $f_{i_0}(x_0) = 0$, alors :

$$(f_1 \cdots f_n)'(x_0) = f_{i_0}'(x_0) \prod_{i \neq i_0} f_i(x_0).$$

Exemples 2.33

- Dérivée de $f : x \mapsto x^n$.

Exemples 2.33

- Dérivée de $f : x \mapsto x^n$.
- Dérivée d'un polynôme.

Exemples 2.33

- Dérivée de $f : x \mapsto x^n$.
- Dérivée d'un polynôme.

Proposition 2.34 (Dérivées successives des puissances)

Soit $f : x \mapsto x^n$, et $k \in \mathbb{N}$.

- Si $k \leqslant n$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(k)}(x) = \dfrac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$.

Exemples 2.33

- Dérivée de $f : x \mapsto x^n$.
- Dérivée d'un polynôme.

Proposition 2.34 (Dérivées successives des puissances)

Soit $f : x \mapsto x^n$, et $k \in \mathbb{N}$.

- Si $k \leqslant n$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(k)}(x) = \dfrac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$.
- Si $k > n$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(k)}(x) = 0$.

Proposition 2.35 (Dérivation d'une composition)

Si f est dérivable en x et g dérivable en $y = f(x)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x, et :

$$(g \circ f)'(x) = f'(x)g'(y) = f'(x) \cdot g' \circ f(x).$$

Proposition 2.35 (Dérivation d'une composition)

Si f est dérivable en x et g dérivable en $y = f(x)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x, et :

$$(g \circ f)'(x) = f'(x)g'(y) = f'(x) \cdot g' \circ f(x).$$

Proposition/Définition 2.36 (Dérivée logarithmique)

Soit f une fonction dérivable d'un intervalle I dans $\mathbb{R}_+^*$. Alors $\ln \circ f$ est dérivable, de dérivée : $(\ln \circ f)' = \dfrac{f'}{f}$

.

Proposition 2.35 (Dérivation d'une composition)

Si f est dérivable en x et g dérivable en $y = f(x)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x, et :

$$(g \circ f)'(x) = f'(x)g'(y) = f'(x) \cdot g' \circ f(x).$$

Proposition/Définition 2.36 (Dérivée logarithmique)

Soit f une fonction dérivable d'un intervalle I dans $\mathbb{R}_+^*$. Alors $\ln \circ f$ est dérivable, de dérivée : $(\ln \circ f)' = \dfrac{f'}{f}$

L'expression $\frac{f'}{f}$ s'appelle dérivée logarithmique de f.

Remarque 2.37

- Cas où f n'est pas positive

Proposition 2.35 (Dérivation d'une composition)

Si f est dérivable en x et g dérivable en $y = f(x)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x, et :

$$(g \circ f)'(x) = f'(x)g'(y) = f'(x) \cdot g' \circ f(x).$$

Proposition/Définition 2.36 (Dérivée logarithmique)

Soit f une fonction dérivable d'un intervalle I dans $\mathbb{R}_+^*$. Alors $\ln \circ f$ est dérivable, de dérivée : $(\ln \circ f)' = \dfrac{f'}{f}$

L'expression $\frac{f'}{f}$ s'appelle dérivée logarithmique de f.

Remarque 2.37

- Cas où f n'est pas positive
- Penser à la dérivée logarithmique lorsqu'il y a des produits

Proposition 2.35 (Dérivation d'une composition)

Si f est dérivable en x et g dérivable en $y = f(x)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x, et :

$$(g \circ f)'(x) = f'(x)g'(y) = f'(x) \cdot g' \circ f(x).$$

Proposition/Définition 2.36 (Dérivée logarithmique)

Soit f une fonction dérivable d'un intervalle I dans $\mathbb{R}_+^*$. Alors $\ln \circ f$ est dérivable, de dérivée : $(\ln \circ f)' = \dfrac{f'}{f}$

L'expression $\frac{f'}{f}$ s'appelle dérivée logarithmique de f.

Remarque 2.37

- Cas où f n'est pas positive
- Penser à la dérivée logarithmique lorsqu'il y a des produits
- Retrouver le théorème de dérivation des produits de n facteurs

Proposition 2.38 (Dérivation d'une composition itérée)

Avec les hypothèses adéquates de dérivabilité :

$$(f_n \circ \cdots \circ f_1)'(x_1) = f_n'(x_n) \ldots f_1'(x_1)$$

.

Proposition 2.38 (Dérivation d'une composition itérée)

Avec les hypothèses adéquates de dérivabilité :

$$(f_n \circ \cdots \circ f_1)'(x_1) = f_n'(x_n) \dots f_1'(x_1)$$
$$= \left[f_n' \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_1(x_1)\right] \times \left[f_{n-1}' \circ f_{n-2} \circ \dots \circ f_1(x_1)\right] \times \cdots \times f_1'(x_1).$$

Proposition 2.38 (Dérivation d'une composition itérée)

Avec les hypothèses adéquates de dérivabilité :

$$(f_n \circ \cdots \circ f_1)'(x_1) = f_n'(x_n) \dots f_1'(x_1)$$
$$= \left[f_n' \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_1(x_1)\right] \times \left[f_{n-1}' \circ f_{n-2} \circ \dots \circ f_1(x_1)\right] \times \cdots \times f_1'(x_1).$$

Exemple 2.39

Exprimer la dérivée de $x \mapsto \ln(3 + \sin(x^3))$.

Lemme 2.40 (continuité des réciproques, admis pour l'instant)

Soit I et J deux intervalles et soit f une application bijective continue de I dans J. Alors $f^{-1} : J \to I$ est continue sur J.

Lemme 2.40 (continuité des réciproques, admis pour l'instant)

Soit I et J deux intervalles et soit f une application bijective continue de I dans J. Alors $f^{-1} : J \to I$ est continue sur J.

Théorème 2.41 (Dérivation des fonctions réciproques)

Soit I et J deux intervalles, et soit f une application bijective continue de I dans J. Soit $t_0 \in I$, et $x_0 = f(t_0)$. Alors, si f est dérivable en t_0, et si $f'(t_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en x_0, et :

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(t_0)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x_0)}.$$

Lemme 2.40 (continuité des réciproques, admis pour l'instant)

Soit I et J deux intervalles et soit f une application bijective continue de I dans J. Alors $f^{-1} : J \to I$ est continue sur J.

Théorème 2.41 (Dérivation des fonctions réciproques)

Soit I et J deux intervalles, et soit f une application bijective continue de I dans J. Soit $t_0 \in I$, et $x_0 = f(t_0)$. Alors, si f est dérivable en t_0, et si $f'(t_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en x_0, et :

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(t_0)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x_0)}.$$

Exemple 2.42

- Dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^x$, définie comme réciproque de ln, elle-même définie comme primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto \frac{1}{x}$ s'annulant en 1.

Lemme 2.40 (continuité des réciproques, admis pour l'instant)

Soit I et J deux intervalles et soit f une application bijective continue de I dans J. Alors $f^{-1} : J \to I$ est continue sur J.

Théorème 2.41 (Dérivation des fonctions réciproques)

Soit I et J deux intervalles, et soit f une application bijective continue de I dans J. Soit $t_0 \in I$, et $x_0 = f(t_0)$. Alors, si f est dérivable en t_0, et si $f'(t_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en x_0, et :

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(t_0)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x_0)}.$$

Exemple 2.42

- Dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^x$, définie comme réciproque de ln, elle-même définie comme primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto \frac{1}{x}$ s'annulant en 1.
- Dérivée de $x \mapsto x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition 2.43 (Limites remarquables pour exp, ln, les puissances)

On a (pour $\alpha \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha.$$

Proposition 2.44 (Règles pour les fonctions n fois dérivables en un point)

Si f et g sont n fois dérivables en x_0, alors λf, $f+g$ et fg aussi et :

Proposition 2.44 (Règles pour les fonctions n fois dérivables en un point)

Si f et g sont n fois dérivables en x_0, alors λf, $f+g$ et fg aussi et :

1. $(\lambda f)^{(n)}(x_0) = \lambda f^{(n)}(x_0)$.

Proposition 2.44 (Règles pour les fonctions n fois dérivables en un point)

Si f et g sont n fois dérivables en x_0, alors λf, $f+g$ et fg aussi et :

1. $(\lambda f)^{(n)}(x_0) = \lambda f^{(n)}(x_0)$.
2. $(f+g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) + g^{(n)}(x_0)$.

Proposition 2.44 (Règles pour les fonctions n fois dérivables en un point)

Si f et g sont n fois dérivables en x_0, alors λf, $f+g$ et fg aussi et :

1. $(\lambda f)^{(n)}(x_0) = \lambda f^{(n)}(x_0)$.
2. $(f+g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) + g^{(n)}(x_0)$.
3. Leibniz : $(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0)$.

Proposition 2.44 (Règles pour les fonctions n fois dérivables en un point)

Si f et g sont n fois dérivables en x_0, alors λf, $f+g$ et fg aussi et :

1. $(\lambda f)^{(n)}(x_0) = \lambda f^{(n)}(x_0)$.
2. $(f+g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) + g^{(n)}(x_0)$.
3. Leibniz : $(fg)^{(n)}(x_0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0)$.
4. $\dfrac{f}{g}$ est n fois dérivable en x_0 (pas de formule simple)

Proposition 2.44 (Règles pour les fonctions n fois dérivables en un point)

Si f et g sont n fois dérivables en x_0, alors λf, $f+g$ et fg aussi et :

1. $(\lambda f)^{(n)}(x_0) = \lambda f^{(n)}(x_0)$.
2. $(f+g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) + g^{(n)}(x_0)$.
3. Leibniz : $(fg)^{(n)}(x_0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0)$.
4. $\dfrac{f}{g}$ est n fois dérivable en x_0 (pas de formule simple)

Exemple 2.45

Dérivée n-ième de $x \mapsto x\mathrm{e}^x$.

Proposition 2.46 (Composition de fonctions n fois dérivables)

- Si f est n fois dérivable en x_0 et g est n fois dérivable en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est n fois dérivable en x_0.

Proposition 2.46 (Composition de fonctions n fois dérivables)

- Si f est n fois dérivable en x_0 et g est n fois dérivable en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est n fois dérivable en x_0.
- Si de plus $f^{(n)}$ et $g^{(n)}$ sont continues en x_0, alors $(g \circ f)^{(n)}$ également.

Proposition 2.46 (Composition de fonctions n fois dérivables)

- Si f est n fois dérivable en x_0 et g est n fois dérivable en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est n fois dérivable en x_0.
- Si de plus $f^{(n)}$ et $g^{(n)}$ sont continues en x_0, alors $(g \circ f)^{(n)}$ également.

Remarque 2.47 (Formule de Faà di Bruno)

Il existe une formule explicite pour la dérivée d'ordre n d'une composition (formule de Faà di Bruno),

Proposition 2.46 (Composition de fonctions n fois dérivables)

- Si f est n fois dérivable en x_0 et g est n fois dérivable en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est n fois dérivable en x_0.
- Si de plus $f^{(n)}$ et $g^{(n)}$ sont continues en x_0, alors $(g \circ f)^{(n)}$ également.

Remarque 2.47 (Formule de Faà di Bruno)

Il existe une formule explicite pour la dérivée d'ordre n d'une composition (formule de Faà di Bruno), mais ne l'apprenez pas par coeur !

Théorème 2.48 (Dérivée de $x \mapsto f(ax+b)$)

Soit $g : x \mapsto f(ax+b)$, avec f dérivable n fois en $ax_0 + b$. Alors :

$$g^{(n)}(x_0) = a^n f^{(n)}(ax+b).$$

Corollaire 2.49 (Règles de stabilité dans $\mathcal{D}^n(I)$)

1. $\mathcal{D}^n(I)$ est stable par CL, produit et quotient.

Corollaire 2.49 (Règles de stabilité dans $\mathcal{D}^n(I)$)

1. $\mathcal{D}^n(I)$ est stable par CL, produit et quotient.
2. Soit $f \in \mathcal{D}^n(I)$ à valeurs dans J, et $g \in \mathcal{D}^n(J)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{D}^n(I)$.

Corollaire 2.49 (Règles de stabilité dans $\mathcal{D}^n(I)$)

1. $\mathcal{D}^n(I)$ est stable par CL, produit et quotient.
2. Soit $f \in \mathcal{D}^n(I)$ à valeurs dans J, et $g \in \mathcal{D}^n(J)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{D}^n(I)$.
3. Soit $f \in \mathcal{D}^n(I)$, bijective de I dans J, et telle que f' ne s'annule pas sur I. Alors $f^{-1} \in \mathcal{D}^n(J)$.

Corollaire 2.49 (Règles de stabilité dans $\mathcal{D}^n(I)$)

1. $\mathcal{D}^n(I)$ est stable par CL, produit et quotient.
2. Soit $f \in \mathcal{D}^n(I)$ à valeurs dans J, et $g \in \mathcal{D}^n(J)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{D}^n(I)$.
3. Soit $f \in \mathcal{D}^n(I)$, bijective de I dans J, et telle que f' ne s'annule pas sur I. Alors $f^{-1} \in \mathcal{D}^n(J)$.

Corollaire 2.50 (Règles de stabilité dans $\mathcal{C}^n(I)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$)

1. $\mathcal{C}^n(I)$ est stable par CL, produit et quotient.

Corollaire 2.49 (Règles de stabilité dans $\mathcal{D}^n(I)$)

1. $\mathcal{D}^n(I)$ est stable par CL, produit et quotient.
2. Soit $f \in \mathcal{D}^n(I)$ à valeurs dans J, et $g \in \mathcal{D}^n(J)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{D}^n(I)$.
3. Soit $f \in \mathcal{D}^n(I)$, bijective de I dans J, et telle que f' ne s'annule pas sur I. Alors $f^{-1} \in \mathcal{D}^n(J)$.

Corollaire 2.50 (Règles de stabilité dans $\mathcal{C}^n(I)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$)

1. $\mathcal{C}^n(I)$ est stable par CL, produit et quotient.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^n(I)$ à valeurs dans J, et $g \in Ccal^n(J)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{C}^n(I)$

Corollaire 2.49 (Règles de stabilité dans $\mathcal{D}^n(I)$)

1. $\mathcal{D}^n(I)$ est stable par CL, produit et quotient.
2. Soit $f \in \mathcal{D}^n(I)$ à valeurs dans J, et $g \in \mathcal{D}^n(J)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{D}^n(I)$.
3. Soit $f \in \mathcal{D}^n(I)$, bijective de I dans J, et telle que f' ne s'annule pas sur I. Alors $f^{-1} \in \mathcal{D}^n(J)$.

Corollaire 2.50 (Règles de stabilité dans $\mathcal{C}^n(I)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$)

1. $\mathcal{C}^n(I)$ est stable par CL, produit et quotient.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^n(I)$ à valeurs dans J, et $g \in Ccal^n(J)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{C}^n(I)$
3. Soit $f \in \mathcal{C}^n(I)$, bijective de I dans J, et telle que f' ne s'annule pas sur I. Alors $f^{-1} \in \mathcal{C}^n(J)$.

II-8. Dérivations de fonctions réelles à valeurs dans $\mathbb{C}$

Définition 2.51 (Dérivation d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$)

Même définition de la dérivabilité et de la dérivée que pour f à valeurs réelles, par limite du taux d'accroissement.

II-8. Dérivations de fonctions réelles à valeurs dans $\mathbb{C}$

Définition 2.51 (Dérivation d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$)

Même définition de la dérivabilité et de la dérivée que pour f à valeurs réelles, par limite du taux d'accroissement.

Proposition 2.52 (Dérivation des parties réelles et imaginaires)

Soit $f = f_r + \mathrm{i}\, f_i$. Alors f est dérivable en x_0 si et seulement si f_r et f_i le sont, et dans ce cas,

$$f'(x_0) = f_r'(x_0) + \mathrm{i}\, f_i'(x_0).$$

Proposition 2.53 (principales règles de dérivation des fonctions complexes)

Mêmes règles et formules pour la dérivabilité et la dérivation que pour les fonctions à valeurs réelles.

Proposition 2.53 (principales règles de dérivation des fonctions complexes)

Mêmes règles et formules pour la dérivabilité et la dérivation que pour les fonctions à valeurs réelles.

Proposition 2.54 (Dérivée de $t \mapsto \mathrm{e}^{\varphi(t)}$)

Soit $\psi : x \mapsto \mathrm{e}^{\varphi(t)}$. Avec les conditions idoines,

$$\psi'(x_0) = \varphi'(x_0)\mathrm{e}^{\varphi(x_0)}.$$

Proposition 2.53 (principales règles de dérivation des fonctions complexes)

Mêmes règles et formules pour la dérivabilité et la dérivation que pour les fonctions à valeurs réelles.

Proposition 2.54 (Dérivée de $t \mapsto \mathrm{e}^{\varphi(t)}$)

Soit $\psi : x \mapsto \mathrm{e}^{\varphi(t)}$. Avec les conditions idoines,

$$\psi'(x_0) = \varphi'(x_0)\mathrm{e}^{\varphi(x_0)}.$$

Exemples 2.55

1. dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$ sur $\mathbb{R}$.

Proposition 2.53 (principales règles de dérivation des fonctions complexes)

Mêmes règles et formules pour la dérivabilité et la dérivation que pour les fonctions à valeurs réelles.

Proposition 2.54 (Dérivée de $t \mapsto \mathrm{e}^{\varphi(t)}$)

Soit $\psi : x \mapsto \mathrm{e}^{\varphi(t)}$. Avec les conditions idoines,

$$\psi'(x_0) = \varphi'(x_0)\mathrm{e}^{\varphi(x_0)}.$$

Exemples 2.55

1. dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$ sur $\mathbb{R}$.
2. dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Proposition 2.53 (principales règles de dérivation des fonctions complexes)

Mêmes règles et formules pour la dérivabilité et la dérivation que pour les fonctions à valeurs réelles.

Proposition 2.54 (Dérivée de $t \mapsto \mathrm{e}^{\varphi(t)}$)

Soit $\psi : x \mapsto \mathrm{e}^{\varphi(t)}$. Avec les conditions idoines,

$$\psi'(x_0) = \varphi'(x_0)\mathrm{e}^{\varphi(x_0)}.$$

Exemples 2.55

1. dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$ sur $\mathbb{R}$.
2. dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x^2}$ sur $\mathbb{R}$.
3. dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}}$ sur $\mathbb{R}$.

II-9. Dérivées partielles d'une fonction de deux variables

Domaines partiels

- U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et $f : U \to \mathbb{R}$

II-9. Dérivées partielles d'une fonction de deux variables

Domaines partiels

- U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et $f : U \to \mathbb{R}$
- $X_0 = (x_0, y_0)$ un point de U. On note

$$I_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid (x, y_0) \in U\} \qquad \text{et} \qquad I_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid (x_0, y) \in U\}.$$

II-9. Dérivées partielles d'une fonction de deux variables

Domaines partiels

- U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et $f : U \to \mathbb{R}$
- $X_0 = (x_0, y_0)$ un point de U. On note

$$I_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid (x, y_0) \in U\} \qquad \text{et} \qquad I_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid (x_0, y) \in U\}.$$

- I_1 est un voisinage de x_0 et I_2 est un voisinage de y_0.

II-9. Dérivées partielles d'une fonction de deux variables

Domaines partiels

- U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et $f : U \to \mathbb{R}$
- $X_0 = (x_0, y_0)$ un point de U. On note

$$I_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid (x, y_0) \in U\} \qquad \text{et} \qquad I_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid (x_0, y) \in U\}.$$

- I_1 est un voisinage de x_0 et I_2 est un voisinage de y_0.

Définition 2.56 (Applications partielles)

Les deux applications partielles de f en (x_0, y_0) sont f_1 et f_2 définies sur I_1 et sur I_2 par :

$$f_1(x) = f(x, y_0) \qquad \text{et} \qquad f_2(y) = f(x_0, y).$$

Définition 2.57 (Dérivées partielles)

- f admet une dérivée partielle par rapport à x en X_0 si f_1 est dérivable en x_0. On note :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X_0) = f_1'(x_0).$$

Définition 2.57 (Dérivées partielles)

- f admet une dérivée partielle par rapport à x en X_0 si f_1 est dérivable en x_0. On note :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X_0) = f_1'(x_0).$$

- f admet une dérivée partielle par rapport à y en X_0 si f_2 est dérivable en y_0. On note :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(X_0) = f_2'(y_0).$$

Définition 2.57 (Dérivées partielles)

- f admet une dérivée partielle par rapport à x en X_0 si f_1 est dérivable en x_0. On note :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X_0) = f_1'(x_0).$$

- f admet une dérivée partielle par rapport à y en X_0 si f_2 est dérivable en y_0. On note :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(X_0) = f_2'(y_0).$$

Remarque 2.58

Notation ∂, qui distingue du cas de la dérivation de fonctions d'une variable.

Dérivées partielles et taux d'accroissement

- $$\frac{\partial f}{\partial x}(X_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

Dérivées partielles et taux d'accroissement

- $$\frac{\partial f}{\partial x}(X_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$
- $$\frac{\partial f}{\partial y}(X_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

Dérivées partielles et taux d'accroissement

- $$\frac{\partial f}{\partial x}(X_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$
- $$\frac{\partial f}{\partial y}(X_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

Remarque 2.59

L'existence des deux dérivées partielles en un point X_0 n'assure pas la continuité en X_0

Dérivées partielles et taux d'accroissement

- $$\frac{\partial f}{\partial x}(X_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$
- $$\frac{\partial f}{\partial y}(X_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

Remarque 2.59

L'existence des deux dérivées partielles en un point X_0 n'assure pas la continuité en X_0

Exemple 2.60

f la fonction indicatrice de l'union des deux axes.

Remarque 2.61 (Règles de calcul)

Pour calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(X_0)$ on utilise les règles usuelles en considérant que y est une constante.

Remarque 2.61 (Règles de calcul)

Pour calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(X_0)$ on utilise les règles usuelles en considérant que y est une constante.

Exemple 2.62

Dérivées partielles de $f : (x, y) \mapsto \mathrm{e}^{x\cos(xy)}$.

Définition 2.63 (Fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$)

C'est une fonction admettant des dérivées partielles continues sur l'ouvert U.

Définition 2.63 (Fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$)

C'est une fonction admettant des dérivées partielles continues sur l'ouvert U.

Définition 2.64 (Gradient)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Le gradient de f est :

$$\forall X \in U, \quad \nabla f(X) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(X) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(X) \end{pmatrix}.$$

Théorème 2.65 (Règle de la chaîne, admis provisoirement)

Soit :

- $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U

Théorème 2.65 (Règle de la chaîne, admis provisoirement)

Soit :

- $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U
- $x, y : I \to U$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

Théorème 2.65 (Règle de la chaîne, admis provisoirement)

Soit :

- $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U
- $x, y : I \to U$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

Alors $t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(x(t), y(t))) = x'(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)).$$

Théorème 2.65 (Règle de la chaîne, admis provisoirement)

Soit :

- $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U
- $x, y : I \to U$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

Alors $t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(x(t), y(t))) = x'(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)).$$

Remarque 2.66 (Dérivée de long d'un chemin)

La fonction $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$ est un chemin dans $\mathbb{R}^2$, paramétré par t. C'est ce qu'on appelle un arc paramétré. Ainsi, la règle de la chaîne peut être interprétée comme une dérivée le long d'un arc.

Corollaire 2.67 (Dérivée partielle de composées)

Sous les hypothèses adéquates de classe :

$$\frac{\partial}{\partial u} f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v),\psi(u,v))\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v),\psi(u,v))\frac{\partial \psi}{\partial u}(u,v)$$

Corollaire 2.67 (Dérivée partielle de composées)

Sous les hypothèses adéquates de classe :

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial u} f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\\&\quad= \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v),\psi(u,v))\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v),\psi(u,v))\frac{\partial \psi}{\partial u}(u,v)\end{aligned}$$

Réexpression de la règle de la chaîne

Sous les mêmes hypothèses : $(f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$

Corollaire 2.67 (Dérivée partielle de composées)

Sous les hypothèses adéquates de classe :

$$\frac{\partial}{\partial u} f(\varphi(u,v),\psi(u,v)) \\ = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v),\psi(u,v))\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v),\psi(u,v))\frac{\partial \psi}{\partial u}(u,v)$$

Réexpression de la règle de la chaîne

Sous les mêmes hypothèses : $(f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$

Remarque 2.68 (Interprétation de γ')

Géométriquement, $\gamma'(t)$ correspond à la direction de la tangente à l'arc en t.

Définition 2.69 (ligne de niveau de hauteur a)

C'est $f^{-1}(\{a\})$.

Remarque 2.70 (Le gradient est orthogonal aux courbes de niveau)

On le voit en considérant la dérivée de $f \circ \gamma$ où γ parcourt une ligne de niveau.

Définition 2.71 (Dérivée selon un vecteur u)

Dérivée directionnelle de f en $X = (x, y)$ selon le vecteur u : c'est la dérivée en 0 de $t \mapsto f(X + tu)$, notée $D_u f(X)$.

Définition 2.71 (Dérivée selon un vecteur u)

Dérivée directionnelle de f en $X = (x, y)$ selon le vecteur u : c'est la dérivée en 0 de $t \mapsto f(X + tu)$, notée $D_u f(X)$.

Proposition 2.72 (Expression de la dérivée directionnelle avec ∇)

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de X,

$$D_u f(X) = \langle \nabla f(X), u \rangle = a\frac{\partial f}{\partial x}(X) + b\frac{\partial f}{\partial y}(X).$$

Définition 2.71 (Dérivée selon un vecteur u)

Dérivée directionnelle de f en $X = (x, y)$ selon le vecteur u : c'est la dérivée en 0 de $t \mapsto f(X + tu)$, notée $D_u f(X)$.

Proposition 2.72 (Expression de la dérivée directionnelle avec ∇)

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de X,

$$D_u f(X) = \langle \nabla f(X), u \rangle = a \frac{\partial f}{\partial x}(X) + b \frac{\partial f}{\partial y}(X).$$

Corollaire 2.73 ($\mathcal{C}^1$ implique $\mathcal{C}^0$)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors f est continue sur U.

Notation 2.74 (Dérivées partielles d'ordre supérieur)

Si bien défini :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) \end{cases}$$

III. Fonctions convexes

III-1. Notion de convexité

Définition 3.1 (Convexité, concavité)

Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$. f est convexe sur I si :
$\forall (x, y) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0, 1],\quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.

III. Fonctions convexes

III-1. Notion de convexité

Définition 3.1 (Convexité, concavité)

Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$. f est convexe sur I si :
$\forall (x,y) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0,1],\quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$

Remarque 3.2 (Interprétation géométrique de la convexité)

f est convexe si la courbe reste sous les cordes.

III. Fonctions convexes

III-1. Notion de convexité

Définition 3.1 (Convexité, concavité)

Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$. f est convexe sur I si :
$\forall (x, y) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0, 1],\quad f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y).$

Remarque 3.2 (Interprétation géométrique de la convexité)

f est convexe si la courbe reste sous les cordes.

Théorème 3.3 (Inégalité de Jensen)

Soit f convexe sur un intervalle I, et $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ $(\lambda_i \geqslant 0)$

III. Fonctions convexes

III-1. Notion de convexité

Définition 3.1 (Convexité, concavité)

Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$. f est convexe sur I si :
$\forall (x, y) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0, 1],\quad f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$.

Remarque 3.2 (Interprétation géométrique de la convexité)

f est convexe si la courbe reste sous les cordes.

Théorème 3.3 (Inégalité de Jensen)

Soit f convexe sur un intervalle I, et $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ $(\lambda_i \geqslant 0)$

Alors, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in I^n$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k x_k \in I$

III. Fonctions convexes

III-1. Notion de convexité

Définition 3.1 (Convexité, concavité)

Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$. f est convexe sur I si :
$\forall (x,y) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0,1],\quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$

Remarque 3.2 (Interprétation géométrique de la convexité)

f est convexe si la courbe reste sous les cordes.

Théorème 3.3 (Inégalité de Jensen)

Soit f convexe sur un intervalle I, et $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ $(\lambda_i \geqslant 0)$

Alors, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in I^n$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k x_k \in I$, et

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k).$$

III-2. Étude des pentes d'une fonction convexe

Lemme 3.4 (Lemme des pentes)

Soit f une fonction convexe sur un intervalle I, et $x < y < z$:

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{y-z}.$$

Théorème 3.5

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. f est convexe sur I ssi toutes les fonctions F_u (taux d'accroissement) sont croissantes.

III-2. Étude des pentes d'une fonction convexe

Lemme 3.4 (Lemme des pentes)

Soit f une fonction convexe sur un intervalle I, et $x < y < z$:

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{y-z}.$$

Théorème 3.5

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. f est convexe sur I ssi toutes les fonctions F_u (taux d'accroissement) sont croissantes.

III-2. Étude des pentes d'une fonction convexe

Lemme 3.4 (Lemme des pentes)

Soit f une fonction convexe sur un intervalle I, et $x < y < z$:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{f(z) - f(y)}{y - z}.$$

Théorème 3.5

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. f est convexe sur I ssi toutes les fonctions F_u (taux d'accroissement) sont croissantes.

Proposition 3.6 (Positionnement courbe/sécante)

Soit f convexe sur un intervalle I, et $x < y$. La sécante aux points x et y est en-dessous de la courbe (au sens large) sur $[x, y]$, et au-dessus sur $I \setminus [x, y]$.

III-3. Étude de la dérivabilité des fonctions convexes

Théorème 3.7 (Dérivabilité des fonctions convexes)

Soit I un intervalle ouvert, et $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Alors f est dérivable à droite et à gauche en tout point, et :

III-3. Étude de la dérivabilité des fonctions convexes

Théorème 3.7 (Dérivabilité des fonctions convexes)

Soit I un intervalle ouvert, et $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Alors f est dérivable à droite et à gauche en tout point, et :

1. $\forall x \in I, \quad f'_g(x) \leqslant f'_d(x)$;

III-3. Étude de la dérivabilité des fonctions convexes

Théorème 3.7 (Dérivabilité des fonctions convexes)

Soit I un intervalle ouvert, et $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Alors f est dérivable à droite et à gauche en tout point, et :

1. $\forall x \in I, \quad f'_g(x) \leqslant f'_d(x)$;
2. $\forall (x, y) \in I^2,\ x < y \Longrightarrow f'_d(x) \leqslant f'_g(y)$;

III-3. Étude de la dérivabilité des fonctions convexes

Théorème 3.7 (Dérivabilité des fonctions convexes)

Soit I un intervalle ouvert, et $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Alors f est dérivable à droite et à gauche en tout point, et :

1. $\forall x \in I, \quad f'_g(x) \leqslant f'_d(x)$;
2. $\forall (x, y) \in I^2, \ x < y \Longrightarrow f'_d(x) \leqslant f'_g(y)$;
3. f'_g et f'_d sont croissantes sur I

III-3. Étude de la dérivabilité des fonctions convexes

Théorème 3.7 (Dérivabilité des fonctions convexes)

Soit I un intervalle ouvert, et $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Alors f est dérivable à droite et à gauche en tout point, et :

1. $\forall x \in I, \quad f'_g(x) \leqslant f'_d(x)$;
2. $\forall (x, y) \in I^2, \; x < y \Longrightarrow f'_d(x) \leqslant f'_g(y)$;
3. f'_g et f'_d sont croissantes sur I

Corollaire 3.8

Si f convexe sur I intervalle ouvert, alors f est continue sur I.

III-3. Étude de la dérivabilité des fonctions convexes

Théorème 3.7 (Dérivabilité des fonctions convexes)

Soit I un intervalle ouvert, et $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Alors f est dérivable à droite et à gauche en tout point, et :

1. $\forall x \in I, \quad f'_g(x) \leqslant f'_d(x)$;
2. $\forall (x, y) \in I^2, \ x < y \Longrightarrow f'_d(x) \leqslant f'_g(y)$;
3. f'_g et f'_d sont croissantes sur I

Corollaire 3.8

Si f convexe sur I intervalle ouvert, alors f est continue sur I.

Remarque 3.9

FAUX si on ne suppose pas que I est ouvert.

Proposition 3.10

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe sur I intervalle ouvert.
La courbe de f est au-dessus de ses tangentes à gauche et à droite en tout point de I.

Remarque 3.11

Adapation immédiate pour les fonctions concaves.

III-4. Caractérisation de la convexité pour les fonctions $\mathcal{D}^1$ ou $\mathcal{D}^2$

Théorème 3.12 (Caractérisation des fonctions convexes $\mathcal{D}^1$)

Soit I un intervalle ouvert, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Les psse :

(i) f est convexe ;

(ii) f' est croissante ;

(iii) la courbe de f se trouve au-dessus de toutes ses tangentes.

III-4. Caractérisation de la convexité pour les fonctions $\mathcal{D}^1$ ou $\mathcal{D}^2$

Théorème 3.12 (Caractérisation des fonctions convexes $\mathcal{D}^1$)

Soit I un intervalle ouvert, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Les psse :

(i) f est convexe ;

(ii) f' est croissante ;

(iii) la courbe de f se trouve au-dessus de toutes ses tangentes.

Corollaire 3.13 (Caractérisation des fonctions convexes $\mathcal{D}^2$)

Soit I un intervalle ouvert, et $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable. Alors f est convexe si et seulement si pour tout $x \in I$, $f''(x) \geqslant 0$.

Exemples 3.14

1. $x \mapsto e^x$;

Exemples 3.14

1. $x \mapsto \mathrm{e}^x$;
2. $x \mapsto \ln x$;

Exemples 3.14

1. $x \mapsto \mathrm{e}^x$;
2. $x \mapsto \ln x$;
3. $x \mapsto \sin x$ sur les intervalles $[k\pi, (k+1)\pi]$.

Exemples 3.14

1. $x \mapsto \mathrm{e}^x$;
2. $x \mapsto \ln x$;
3. $x \mapsto \sin x$ sur les intervalles $[k\pi, (k+1)\pi]$.

Exemples 3.15

1. $\forall x \in]-1, +\infty[, \ \ln(1+x) \leqslant x$;

Exemples 3.14

1. $x \mapsto \mathrm{e}^x$;
2. $x \mapsto \ln x$;
3. $x \mapsto \sin x$ sur les intervalles $[k\pi, (k+1)\pi]$.

Exemples 3.15

1. $\forall x \in]-1, +\infty[,\ \ln(1+x) \leqslant x$;
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \geqslant x+1$;

Exemples 3.14

1. $x \mapsto \mathrm{e}^x$;
2. $x \mapsto \ln x$;
3. $x \mapsto \sin x$ sur les intervalles $[k\pi, (k+1)\pi]$.

Exemples 3.15

1. $\forall x \in]-1, +\infty[,\ \ln(1+x) \leqslant x$;
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \geqslant x + 1$;
3. $\forall x \geqslant 0, \sin x \leqslant x$ et $\forall x \leqslant 0, \sin x \geqslant x$.

IV. Étude d'une fonction

IV-1. Graphe

Transformations sur le graphe

- Graphe = définition-même de la fonction.

IV. Étude d'une fonction

IV-1. Graphe

Transformations sur le graphe

- Graphe = définition-même de la fonction.
- Si $f : D \to \mathbb{R}$, où $D \subset \mathbb{R}$, le graphe se représente dans le plan

IV. Étude d'une fonction

IV-1. Graphe

Transformations sur le graphe

- Graphe = définition-même de la fonction.
- Si $f : D \to \mathbb{R}$, où $D \subset \mathbb{R}$, le graphe se représente dans le plan
- Effet des compositions par $x \mapsto x - a$ et $x \mapsto ax$.

IV. Étude d'une fonction

IV-1. Graphe

Transformations sur le graphe

- Graphe = définition-même de la fonction.
- Si $f : D \to \mathbb{R}$, où $D \subset \mathbb{R}$, le graphe se représente dans le plan
- Effet des compositions par $x \mapsto x - a$ et $x \mapsto ax$.

Proposition 4.1 (Graphe d'une fonction réciproque, figure **??**)

Soit $I, J \subset \mathbb{R}$, et $f : I \longrightarrow J$ une bijection. Alors le graphe de f^{-1} est l'image du graphe de f par la symétrie d'axe $D : y = x$.

IV. Étude d'une fonction

IV-1. Graphe

Transformations sur le graphe

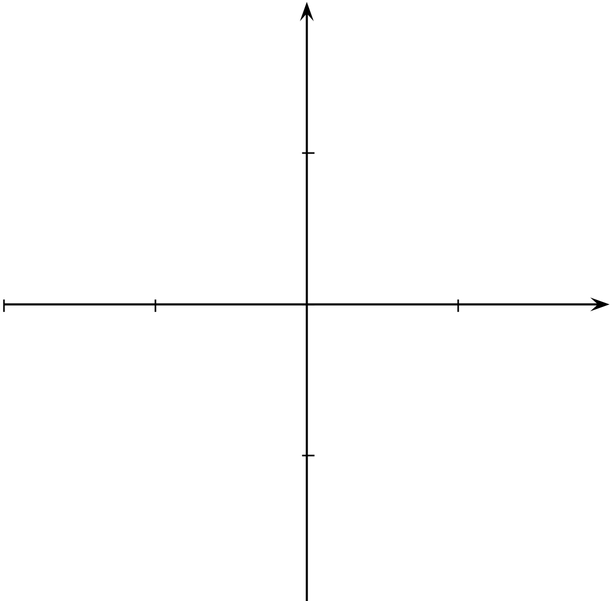
- Graphe = définition-même de la fonction.
- Si $f : D \to \mathbb{R}$, où $D \subset \mathbb{R}$, le graphe se représente dans le plan
- Effet des compositions par $x \mapsto x - a$ et $x \mapsto ax$.

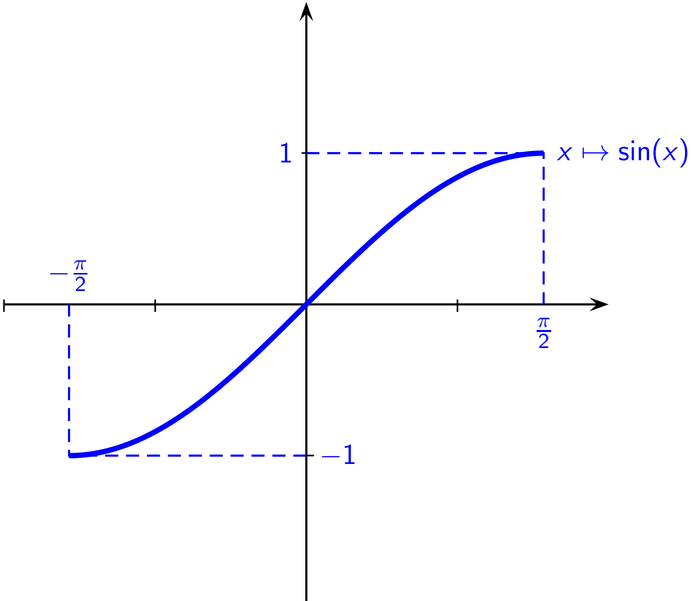
Proposition 4.1 (Graphe d'une fonction réciproque, figure **??**)

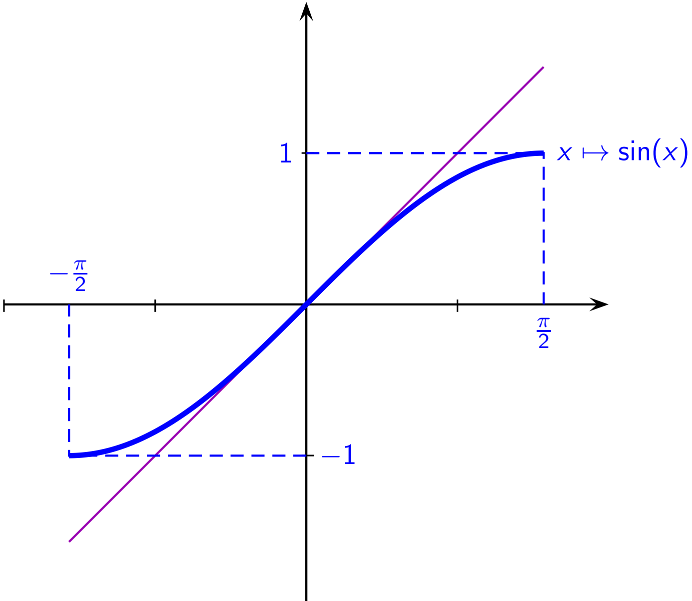
Soit $I, J \subset \mathbb{R}$, et $f : I \longrightarrow J$ une bijection. Alors le graphe de f^{-1} est l'image du graphe de f par la symétrie d'axe $D : y = x$.

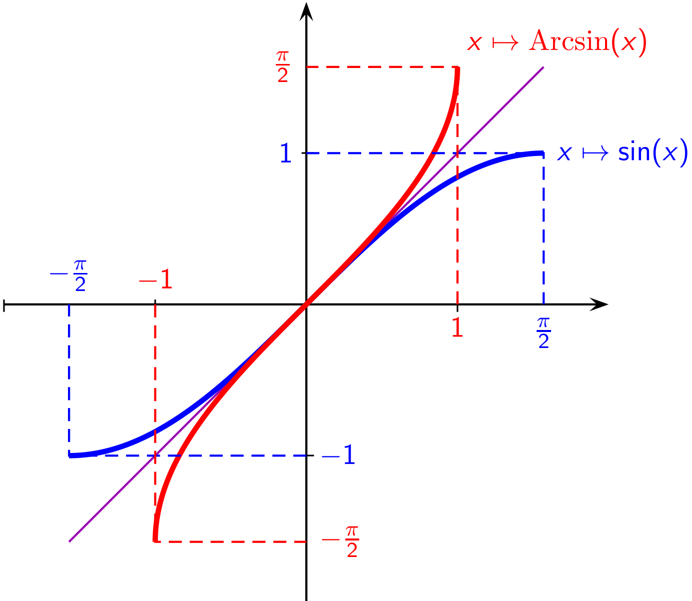
Remarque 4.2

Interprétez géométriquement la formule de dérivation des réciproques.




1
$x \mapsto \sin(x)$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
-1


1
$x \mapsto \sin(x)$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
-1


$x \mapsto \mathrm{Arcsin}(x)$
$x \mapsto \sin(x)$
$\frac{\pi}{2}$
1
$-\frac{\pi}{2}$
-1
1
$\frac{\pi}{2}$
-1
$-\frac{\pi}{2}$

IV-2. Symétries d'une fonction

Définition 4.3 (fonctions paires, impaires, périodiques)

- f paire : $f(-x) = f(x)$.

IV-2. Symétries d'une fonction

Définition 4.3 (fonctions paires, impaires, périodiques)

- f paire : $f(-x) = f(x)$.
- f impaire : $f(-x) = -f(x)$.

IV-2. Symétries d'une fonction

Définition 4.3 (fonctions paires, impaires, périodiques)

- f paire : $f(-x) = f(x)$.
- f impaire : $f(-x) = -f(x)$.
- f périodique de période T : $f(x+T) = f(x)$.

IV-2. Symétries d'une fonction

Définition 4.3 (fonctions paires, impaires, périodiques)

- f paire : $f(-x) = f(x)$.
- f impaire : $f(-x) = -f(x)$.
- f périodique de période T : $f(x + T) = f(x)$.

Remarque 4.4

Comment se traduisent la parité et l'imparité sur le graphe ?

IV-2. Symétries d'une fonction

Définition 4.3 (fonctions paires, impaires, périodiques)

- f paire : $f(-x) = f(x)$.
- f impaire : $f(-x) = -f(x)$.
- f périodique de période T : $f(x+T) = f(x)$.

Remarque 4.4

Comment se traduisent la parité et l'imparité sur le graphe ? Et la périodicité ?

Définition 4.5 (période minimale)

Si elle existe, c'est $\min \mathcal{T}_+$ où $\mathcal{T}_+ = \mathcal{T} \cap \mathbb{R}_+^*$.

Définition 4.5 (période minimale)

Si elle existe, c'est $\min \mathcal{T}_+$ où $\mathcal{T}_+ = \mathcal{T} \cap \mathbb{R}_+^*$.

Exemples 4.6

1. Périodes et période minimale de cos et sin.

Définition 4.5 (période minimale)

Si elle existe, c'est $\min \mathcal{T}_+$ où $\mathcal{T}_+ = \mathcal{T} \cap \mathbb{R}_+^*$.

Exemples 4.6

1. Périodes et période minimale de cos et sin.
2. Périodes et période minimale de tan.

Définition 4.5 (période minimale)

Si elle existe, c'est $\min \mathcal{T}_+$ où $\mathcal{T}_+ = \mathcal{T} \cap \mathbb{R}_+^*$.

Exemples 4.6

1. Périodes et période minimale de cos et sin.
2. Périodes et période minimale de tan.
3. Il existe des fonctions périodiques n'admettant pas de période minimale, par exemple $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$. Quelles sont ses périodes ?

IV-3. Monotonie

Fonctions croissantes, strictement croissantes

- croissante : $x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$,

IV-3. Monotonie

Fonctions croissantes, strictement croissantes

- croissante : $x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$, ou bien :
  $x < y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$.

IV-3. Monotonie

Fonctions croissantes, strictement croissantes

- croissante : $x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$, ou bien :
  $x < y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$.
- Strictement croissante : $x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$.

IV-3. Monotonie

Fonctions croissantes, strictement croissantes

- croissante : $x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$, ou bien :
  $x < y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$.
- Strictement croissante : $x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$.
- Fonctions décroissantes, monotones.

IV-3. Monotonie

Fonctions croissantes, strictement croissantes

- croissante : $x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$, ou bien : $x < y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$.
- Strictement croissante : $x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$.
- Fonctions décroissantes, monotones.

Avertissement 4.7

Si f est croissante sur deux intervalles I et J, elle est croissante sur l'union $I \cup J$.

IV-3. Monotonie

Fonctions croissantes, strictement croissantes

- croissante : $x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$, ou bien :
  $x < y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$.
- Strictement croissante : $x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$.
- Fonctions décroissantes, monotones.

Avertissement 4.7

Si f est croissante sur deux intervalles I et J, elle n'est pas nécessairement croissante sur l'union $I \cup J$.

Proposition 4.8 (monotonie et composition)

- f et g croissantes $\Longrightarrow g \circ f$ croissante ;

Proposition 4.8 (monotonie et composition)

- f et g croissantes $\Longrightarrow g \circ f$ croissante ;
- f et g décroissantes $\Longrightarrow g \circ f$ croissante ;

Proposition 4.8 (monotonie et composition)

- f et g croissantes $\Longrightarrow g \circ f$ croissante ;
- f et g décroissantes $\Longrightarrow g \circ f$ croissante ;
- f croissante g décroissante $\Longrightarrow g \circ f$ décroissante ;

Proposition 4.8 (monotonie et composition)

- f et g croissantes $\Longrightarrow g \circ f$ croissante ;
- f et g décroissantes $\Longrightarrow g \circ f$ croissante ;
- f croissante g décroissante $\Longrightarrow g \circ f$ décroissante ;
- f décroissante g croissante $\Longrightarrow g \circ f$ décroissante ;

Proposition 4.8 (monotonie et composition)

- f et g croissantes $\Longrightarrow g \circ f$ croissante ;
- f et g décroissantes $\Longrightarrow g \circ f$ croissante ;
- f croissante g décroissante $\Longrightarrow g \circ f$ décroissante ;
- f décroissante g croissante $\Longrightarrow g \circ f$ décroissante ;

Les monotonies strictes sont conservées.

Proposition 4.8 (monotonie et composition)

- f et g croissantes $\Longrightarrow g \circ f$ croissante ;
- f et g décroissantes $\Longrightarrow g \circ f$ croissante ;
- f croissante g décroissante $\Longrightarrow g \circ f$ décroissante ;
- f décroissante g croissante $\Longrightarrow g \circ f$ décroissante ;

Les monotonies strictes sont conservées.

Remarque 4.9

Souvent très utile pour éviter les dérivations. Y penser en premier lieu lorsqu'on demande les variations d'une fonction composée.

Proposition 4.10 (monotonie et réciproque)

Soit $f : I \longrightarrow J$ une fonction bijective réelle définie sur un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$. Si f est monotone (nécessairement strictement), alors f^{-1} est monotone, de même sens de monotonie que f.

Proposition 4.10 (monotonie et réciproque)

Soit $f : I \longrightarrow J$ une fonction bijective réelle définie sur un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$. Si f est monotone (nécessairement strictement), alors f^{-1} est monotone, de même sens de monotonie que f.

Proposition 4.11 (monotonie et injectivité)

strictement monotone sur $D \subset \mathbb{R} \Longrightarrow$ injective.

IV-4. Variations des fonctions, extremum

Théorème 4.12 (Caractérisation des fonctions croissantes)

f dérivable sur un intervalle I Alors :

1. f croissante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0$.

IV-4. Variations des fonctions, extremum

Théorème 4.12 (Caractérisation des fonctions croissantes)

f dérivable sur un intervalle I Alors :

1. f croissante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0$.
2. f constante sur $I \iff f' = 0$ sur I.

IV-4. Variations des fonctions, extremum

Théorème 4.12 (Caractérisation des fonctions croissantes)

f dérivable sur un intervalle I Alors :

1. f croissante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0$.
2. f constante sur $I \iff f' = 0$ sur I.
3. f strictement croissante sur I ssi :
   (i) $f' \geqslant 0$,
   (ii) f' n'est nulle sur aucun $]a, b[\subset I$.

IV-4. Variations des fonctions, extremum

Théorème 4.12 (Caractérisation des fonctions croissantes)

f dérivable sur un intervalle I Alors :

1. f croissante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0$.
2. f constante sur $I \iff f' = 0$ sur I.
3. f strictement croissante sur I ssi :
   (i) $f' \geqslant 0$,
   (ii) f' n'est nulle sur aucun $]a, b[\subset I$.
4. Énoncés similaires pour la décroissance.

Méthode 4.13 (Étude des variations d'une fonction)

- Calculer f' et déterminer son signe, intervalle par intervalle.

Méthode 4.13 (Étude des variations d'une fonction)

- Calculer f' et déterminer son signe, intervalle par intervalle.
- Pour consigner les résultats : dresser un tableau de variations.

Méthode 4.13 (Étude des variations d'une fonction)

- Calculer f' et déterminer son signe, intervalle par intervalle.
- Pour consigner les résultats : dresser un tableau de variations.

Exemple 4.14

Étudier les variations de $f : x \mapsto x \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire l'existence et la valeur du minimum de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

Définition 4.15 (Maximum, maximum local)

- maximum en x : $\forall y \in X,\ f(y) \leqslant f(x)$.

Définition 4.15 (Maximum, maximum local)

- maximum en x : $\forall y \in X,\ f(y) \leqslant f(x)$.
- maximum strict en x : $\forall y \neq x,\ f(y) < f(x)$.

Définition 4.15 (Maximum, maximum local)

- maximum en x : $\forall y \in X,\ f(y) \leqslant f(x)$.
- maximum strict en x : $\forall y \neq x,\ f(y) < f(x)$.
- maximum local : $\exists V \in \mathcal{V}(x),\ \forall y \in X \cap V,\ f(y) \leqslant f(x)$.

Définition 4.15 (Maximum, maximum local)

- maximum en x : $\forall y \in X,\ f(y) \leqslant f(x)$.
- maximum strict en x : $\forall y \neq x,\ f(y) < f(x)$.
- maximum local : $\exists V \in \mathcal{V}(x),\ \forall y \in X \cap V,\ \ f(y) \leqslant f(x)$.

Théorème 4.16 (CN d'extrémum)

Soit f dérivable sur un intervalle ouvert I. Si f admet en x un extremum local, alors $f'(x) = 0$. .

Définition 4.15 (Maximum, maximum local)

- maximum en x : $\forall y \in X,\ f(y) \leqslant f(x)$.
- maximum strict en x : $\forall y \neq x,\ f(y) < f(x)$.
- maximum local : $\exists V \in \mathcal{V}(x),\ \forall y \in X \cap V,\ \ f(y) \leqslant f(x)$.

Théorème 4.16 (CN d'extrémum)

Soit f dérivable sur un intervalle ouvert I. Si f admet en x un extremum local, alors $f'(x) = 0$. Réciproque fausse.

Définition 4.17 (point critique)

x point critique de f sur un ouvert : $f'(x) = 0$.

IV-5. Comportement asymptotique

Définition 4.18 (asymptotes)

- asymptote verticale en a : droite $x = a$ telle que $\lim_{x \to a^\pm} f(x) = \pm\infty$;

IV-5. Comportement asymptotique

Définition 4.18 (asymptotes)

- asymptote verticale en a : droite $x = a$ telle que $\lim\limits_{x \to a^\pm} f(x) = \pm\infty$;
- asymptotes en $+\infty$: $y = ax + b$ tel que $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$.

IV-5. Comportement asymptotique

Définition 4.18 (asymptotes)

- asymptote verticale en a : droite $x = a$ telle que $\lim\limits_{x \to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$;
- asymptotes en $+\infty$: $y = ax + b$ tel que $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$.

Méthode 4.19 (Déterminer une droite asymptote)

- $a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

IV-5. Comportement asymptotique

Définition 4.18 (asymptotes)

- asymptote verticale en a : droite $x = a$ telle que $\lim\limits_{x \to a^\pm} f(x) = \pm\infty$;
- asymptotes en $+\infty$: $y = ax + b$ tel que $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$.

Méthode 4.19 (Déterminer une droite asymptote)

- $a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$
- $b = \lim_{x \to +\infty} f(x) - ax$.

IV-5. Comportement asymptotique

Définition 4.18 (asymptotes)

- asymptote verticale en a : droite $x = a$ telle que $\lim\limits_{x \to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$;
- asymptotes en $+\infty$: $y = ax + b$ tel que $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$.

Méthode 4.19 (Déterminer une droite asymptote)

- $a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$
- $b = \lim_{x \to +\infty} f(x) - ax$.

Exemples 4.20

$$f : x \mapsto \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 + 1}.$$

IV-6. Convexité

Convexité et allure de la courbe

C'est une information intéressante pour savoir à quoi ressemble la courbe :

IV-6. Convexité

Convexité et allure de la courbe

C'est une information intéressante pour savoir à quoi ressemble la courbe :

- déterminer le signe de f'' intervalle par intervalle

IV-6. Convexité

Convexité et allure de la courbe

C'est une information intéressante pour savoir à quoi ressemble la courbe :

- déterminer le signe de f'' intervalle par intervalle
- le consigner dans le tableau de variation, pour obtenir les informations liées à la convexité.

IV-6. Convexité

Convexité et allure de la courbe

C'est une information intéressante pour savoir à quoi ressemble la courbe :

- déterminer le signe de f'' intervalle par intervalle
- le consigner dans le tableau de variation, pour obtenir les informations liées à la convexité.

Définition 4.21 (point d'inflexion)

Point en lequel f change de convexité.

IV-6. Convexité

Convexité et allure de la courbe

C'est une information intéressante pour savoir à quoi ressemble la courbe :

- déterminer le signe de f'' intervalle par intervalle
- le consigner dans le tableau de variation, pour obtenir les informations liées à la convexité.

Définition 4.21 (point d'inflexion)

Point en lequel f change de convexité.

Exemple 4.22

Étude de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$, avec les propriétés de convexité et les points d'inflexion.