

**Cours de mathématiques**  
**Partie II – Analyse**  
MP2I

**Alain TROESCH**

---

Version du:

8 octobre 2022



# Table des matières

<b>9</b>	<b>Dérivation de fonctions</b>	<b>5</b>
I	Rappels sur les limites . . . . .	5
I.1	Limites : point de vue métrique . . . . .	6
I.2	Limites : point de vue topologique . . . . .	8
I.3	Unicité de la limite . . . . .	10
I.4	Limites à droite et à gauche . . . . .	10
I.5	Propriétés des limites . . . . .	12
I.6	Limites de fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ . . . . .	12
I.7	Continuité . . . . .	13
I.8	Continuité d'une fonction de 2 variables . . . . .	14
II	Dérivation . . . . .	15
II.1	Dérivation et tangente . . . . .	15
II.2	Dérivées à droite et à gauche . . . . .	17
II.3	Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ . . . . .	18
II.4	Théorème des accroissements finis, fonctions lipschitziennes . . . . .	19
II.5	Théorèmes de prolongement . . . . .	20
II.6	Règles de dérivation . . . . .	21
II.7	Stabilité des propriétés de régularité . . . . .	24
II.8	Dérivations de fonctions réelles à valeurs dans $\mathbb{C}$ . . . . .	26
II.9	Dérivées partielles d'une fonction de deux variables . . . . .	28
III	Fonctions convexes . . . . .	32
III.1	Notion de convexité . . . . .	32
III.2	Étude des pentes d'une fonction convexe . . . . .	33
III.3	Étude de la dérivabilité des fonctions convexes . . . . .	33
III.4	Caractérisation de la convexité pour les fonctions $\mathcal{D}^1$ ou $\mathcal{D}^2$ . . . . .	34
IV	Étude d'une fonction . . . . .	35
IV.1	Graphe . . . . .	35
IV.2	Symétries d'une fonction . . . . .	36
IV.3	Monotonie . . . . .	37
IV.4	Variations des fonctions, extremum . . . . .	38
IV.5	Comportement asymptotique . . . . .	39
IV.6	Convexité . . . . .	40

<b>10 Les fonctions usuelles</b>	<b>41</b>
I Prérequis . . . . .	41
II Exponentielle, logarithme, puissances . . . . .	42
II.1 Logarithme . . . . .	42
II.2 Exponentielle réelle . . . . .	43
II.3 Fonctions puissances . . . . .	44
II.4 Exponentielle et logarithme de base $b$ . . . . .	46
II.5 Croissances comparées . . . . .	46
III Fonctions trigonométriques . . . . .	47
III.1 Sinus . . . . .	47
III.2 Cosinus . . . . .	48
III.3 Tangente . . . . .	49
IV Réciproques des fonctions trigonométriques . . . . .	49
IV.1 Arctangente . . . . .	49
IV.2 Arcsinus . . . . .	51
IV.3 Arccosinus . . . . .	52
V Fonctions hyperboliques . . . . .	53
VI Réciproques des fonctions hyperboliques (HP) . . . . .	56
VII Tableau des dérivées des fonctions usuelles . . . . .	56
<b>11 Calcul intégral</b>	<b>59</b>
I Calcul intégral et primitivation . . . . .	59
I.1 Résultats issus de la théorie . . . . .	59
I.2 Primitivations composées . . . . .	63
II Techniques de calcul intégral . . . . .	65
II.1 Intégration par parties . . . . .	66
II.2 Changements de variables . . . . .	68
II.3 Intégrales de fonctions admettant des symétries . . . . .	68
III Rapide introduction aux intégrales impropres . . . . .	69
<b>12 Équations différentielles linéaires</b>	<b>71</b>
I Équations différentielles linéaires . . . . .	71
II Équations différentielles linéaires d'ordre 1 . . . . .	72
II.1 Situation . . . . .	72
II.2 Solutions de l'équation homogène . . . . .	72
II.3 Recherche d'une solution particulière de $y' = a(x)y + b(x)$ . . . . .	73
II.4 Problème de Cauchy associé à une EDL du premier ordre . . . . .	74
II.5 Problèmes de raccordement (ou recollement) . . . . .	74
II.6 Résolution des EDL d'ordre 1 à coefficients constants . . . . .	74
III Résolution des EDL d'ordre 2 à coefficients constants . . . . .	75
III.1 Position du problème . . . . .	75
III.2 Résolution de l'équation homogène . . . . .	75
III.3 Solution générale du système non homogène . . . . .	77
III.4 Problème de Cauchy . . . . .	78
<b>13 Suites numériques</b>	<b>79</b>
I Convergence de suites . . . . .	79
I.1 Définition de la limite d'une suite . . . . .	79
I.2 Cas des suites complexes et vectorielles . . . . .	82
I.3 Premières propriétés des suites convergentes . . . . .	83
II Propriétés des suites liées à la convergence . . . . .	83
II.1 Préambule : caractérisation séquentielle de la limite . . . . .	83

II.2	Opérations sur les limites . . . . .	84
II.3	Limites et inégalités . . . . .	86
II.4	Suites monotones . . . . .	88
II.5	Suites adjacentes . . . . .	89
II.6	Digression sur la construction de $\mathbb{R}$ . . . . .	90
II.7	Caractérisations séquentielles . . . . .	91
III	Suites extraites . . . . .	92
III.1	Définitions . . . . .	92
III.2	Suites extraites et convergence . . . . .	93
III.3	Théorème de Bolzano-Weierstrass . . . . .	95
IV	Étude de suites particulières . . . . .	96
IV.1	Suites définies par une récurrence affine . . . . .	96
IV.2	Suites définies par une relation linéaire d'ordre $k$ . . . . .	98
IV.3	Suites définies par une récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ . . . . .	100
<b>14</b>	<b>Propriété des fonctions <math>\mathcal{C}^0</math> ou <math>\mathcal{D}^1</math> sur un intervalle</b>	<b>103</b>
I	Fonctions continues sur un intervalle . . . . .	103
I.1	Fonctions continues et continues par morceaux . . . . .	103
I.2	Théorème des valeurs intermédiaires (TVI) . . . . .	104
I.3	Continuité uniforme . . . . .	105
I.4	Extrema des fonctions continues sur un intervalle fermé borné . . . . .	106
I.5	Autour des fonctions monotones – Théorème de la bijection . . . . .	106
II	Fonctions dérivables sur un intervalle . . . . .	108
II.1	Théorème de Rolle . . . . .	108
II.2	Théorème des accroissements finis . . . . .	109
II.3	Extension aux fonctions dérivables à valeurs dans $\mathbb{C}$ . . . . .	110
<b>15</b>	<b>Calcul asymptotique</b>	<b>111</b>
I	Domination, négligeabilité . . . . .	111
I.1	Cas des suites . . . . .	111
I.2	Propriétés des $o$ et $O$ . . . . .	113
I.3	Extension au cas des fonctions . . . . .	115
II	Équivalents . . . . .	116
II.1	Cas des suites . . . . .	116
II.2	Propriétés des équivalents . . . . .	117
II.3	Cas des fonctions . . . . .	118
II.4	Équivalents classiques . . . . .	119
II.5	Problème de la somme et de la composition des équivalents . . . . .	119
<b>16</b>	<b>Développements limités</b>	<b>121</b>
I	Formule de Taylor-Young et DL des fonctions usuelles . . . . .	121
I.1	Développement de Taylor . . . . .	121
I.2	Formule de Taylor-Young . . . . .	123
I.3	Développement limité des fonctions usuelles . . . . .	123
II	Généralités sur les développements limités . . . . .	124
II.1	Définition, exemples . . . . .	124
II.2	Restriction . . . . .	126
II.3	Forme normalisée et partie principale . . . . .	126
III	Opérations sur les développements limités . . . . .	128
III.1	Somme de DL . . . . .	128
III.2	Produit de DL . . . . .	128
III.3	Composition de DL . . . . .	129

III.4	Quotient de DL . . . . .	130
III.5	Primitivation d'un DL . . . . .	131
III.6	Dérivation . . . . .	132
IV	Développements asymptotiques . . . . .	132
V	Applications . . . . .	135
V.1	Courbes polynomiales asymptotes à une courbe . . . . .	135
V.2	Extréma . . . . .	135
VI	Développements limités des fonctions de deux variables . . . . .	136
VII	Développements limités des fonctions usuelles . . . . .	139
<b>17</b>	<b>Séries numériques</b>	<b>141</b>
I	Notion de série et de convergence . . . . .	141
I.1	Définitions . . . . .	141
I.2	Propriétés liées à la convergence . . . . .	143
II	Séries à termes positifs . . . . .	144
II.1	Comparaisons entre séries à termes positifs . . . . .	144
II.2	Convergence absolue et semi-convergence . . . . .	145
II.3	D'autres théorèmes de comparaison . . . . .	146
II.4	Comparaison entre une série et une intégrale . . . . .	147
II.5	Séries de référence . . . . .	147
II.6	Comparaison avec une série de Riemann . . . . .	148
II.7	Comparaison avec une série géométrique . . . . .	149
III	Étude de la semi-convergence . . . . .	149
III.1	Séries alternées . . . . .	149
III.2	Critère d'Abel . . . . .	150
IV	Familles sommables . . . . .	151
IV.1	Familles sommables de nombres réels positifs . . . . .	151
IV.2	Famille sommable de nombres complexes . . . . .	153
V	Autour de la série exponentielle . . . . .	157
V.1	La série exponentielle . . . . .	157
V.2	Lien avec la fonction exponentielle . . . . .	157
VI	Dérivée des séries géométriques . . . . .	158
<b>18</b>	<b>Intégration</b>	<b>159</b>
I	Intégrale des fonctions en escalier . . . . .	160
I.1	Notion de subdivision d'un intervalle . . . . .	160
I.2	Fonctions en escalier . . . . .	160
I.3	Intégrale d'une fonction en escalier . . . . .	162
I.4	Propriétés des intégrales de fonctions en escalier . . . . .	163
II	Construction de l'intégrale de Riemann . . . . .	164
II.1	Fonctions intégrables . . . . .	164
II.2	Exemples importants de fonctions intégrables . . . . .	166
II.3	Propriétés de l'intégrale . . . . .	167
II.4	Intégrales des fonctions continues par morceaux . . . . .	168
II.5	Sommes de Riemann . . . . .	169
II.6	Extension des résultats aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ . . . . .	169
III	Primitives et intégration . . . . .	170

# Dérivation de fonctions

*Il faut entendre par dernier quotient des quantités évanouissantes le quotient qu'ont entre elles ces quantités qui diminuent, non pas avant de s'évanouir, ni après qu'elles se sont évanouies, mais au moment même où elles s'évanouissent.*

(Isaac Newton)

*Il faut donc « savoir calculer » avant que de prétendre accéder à l'Analyse moderne.*

(Jean Dieudonné)

## Introduction

### Note Historique 9.0.1

Longtemps, les mathématiques se sont développées au service des autres sciences ; d'ailleurs, la séparation des différentes sciences est tardive, et nombreux ont été les mathématiciens à avoir également été des physiciens de renommée, comme Newton par exemple. Les mathématiques ont d'abord été vues comme un outil :

- au service de la mécanique et de l'ingénierie (Archimède)
- au service de l'astronomie (géométrie grecque, Ptolémée, écoles indienne et arabe)
- au service de toute étude nécessitant d'être chiffrée pour obtenir des ordres de grandeurs.

Du dernier point découle l'importance du développement du calcul numérique (calcul approché, en opposition au calcul algébrique). C'est ce point de vue qui est à la base des procédés d'approximation (méthode de Newton de recherche d'un zéro, méthodes approchées de calcul d'intégrales), aboutissant notamment à la notion de convergence (qui donne la validité de l'approximation à l'infini)

Ainsi, l'utilisation de l'outil est souvent à la base de sa définition, et a souvent précédé sa théorisation : les mathématiques ont évolué de façon empirique.

Dans ce chapitre nous donnons les outils permettant une étude efficace des fonctions. L'outil essentiel est bien entendu la dérivation, que nous abordons ici d'un point de vue essentiellement pratique : l'objectif est de savoir dériver et étudier de façon efficace des fonctions explicites.

## I Rappels sur les limites

Dans tout ce paragraphe, on considère une fonction définie sur un sous-ensemble  $X$  de  $\mathbb{R}$ . On supposera que  $X$  est un intervalle, ou une union finie d'intervalles, et on notera  $\overline{X}$  l'intervalle (ou union d'intervalles) fermé correspondant dans  $\mathbb{R}$  (en incluant les bornes). On étudie la limite de  $f$  en un point  $a$  de  $\overline{X}$ , c'est-à-dire en un point de son domaine ou une borne.

**Remarque 9.1.1**

Plus généralement, si  $X$  est un sous-ensemble quelconque de  $\mathbb{R}$ , on peut considérer la limite en un point  $a$  de l'adhérence  $\overline{X}$  de  $X$ , défini comme étant le plus petit fermé contenant  $X$ , ou de façon équivalent, l'ensemble des points  $x$  pouvant être approchés d'aussi près qu'on veut par des points de  $X$  (i.e. tout voisinage de  $x$  rencontre  $X$ ). Comme dans le cas des intervalles, on peut y inclure  $+\infty$  si  $X$  est non majoré, et  $-\infty$  si  $X$  est non minoré.

Ainsi, pour  $a$  réel fini,  $a \in \overline{X}$  si et seulement pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$B(a, \varepsilon) \cap X \neq \emptyset \quad \text{soit:} \quad ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[ \cap X \neq \emptyset.$$

Lorsque  $a \in \overline{X}$ , on dira que  $a$  est adhérent à  $X$  (dans  $\mathbb{R}$ )

**I.1 Limites : point de vue métrique****Définition 9.1.2 (Limites en un point fini)**

Soit  $a \in \overline{X} \cap \mathbb{R}$ .

- Soit  $b \in \mathbb{R}$ . On dit que  $f(x)$  tend vers  $b$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - b| \leq \varepsilon.$$

- On dit que  $f(x)$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  (ou bien  $f$  admet  $b$  comme limite en  $a$ ) si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in X, |x - a| \leq \eta \implies f(x) \geq A.$$

- On dit que  $f(x)$  tend vers  $-\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in X, |x - a| \leq \eta \implies f(x) \leq A.$$

Décortiquons l'expression dans le cas d'une limite finie :

- $\forall \varepsilon > 0$  : « Quelle que soit la marge d'erreur  $\varepsilon$  qu'on se donne, aussi petite soit-elle ... »
- $\exists \eta > 0$  : « ... il existe une petite boule de rayon  $\eta$  centrée en  $a$ , quitte à prendre  $\eta$  très petit ... »
- $\forall x \in X, |x - a| < \eta \implies \dots$  : « ... tel que si  $x$  est à la fois dans  $X$  et dans cette boule ... »
- $\dots \implies |f(x) - b| < \varepsilon$  : « alors  $f(x)$  est proche à  $\varepsilon$  près de  $b$ . »

Autrement dit : « Si  $x \in X$  est suffisamment proche de  $a$ , alors  $f(x)$  est aussi proche qu'on veut de  $b$ . »

**Remarques 9.1.3**

1. L'hypothèse  $a \in \overline{X}$  est nécessaire pour pouvoir considérer des points aussi proches qu'on veut de  $a$ . On dira que la limite de  $f$  est envisageable en  $a$  si cette hypothèse est satisfaite (sans considération d'existence ou non de la limite), et qu'elle ne l'est pas si  $a \notin \overline{X}$  (terminologie personnelle)
2. Dans le cas fini, l'inégalité est d'autant plus contraignante que  $\varepsilon$  est petit. On peut se contenter d'étudier le cas de valeurs de  $\varepsilon$  inférieures à une valeur  $\varepsilon_0$  donnée.
3. De même, dans le cas d'une limite  $+\infty$ , la définition trouve sa pertinence lorsque  $A$  devient grand (vers  $+\infty$ ) et dans le cas d'une limite  $-\infty$ , lorsque  $A$  devient petit (vers  $-\infty$ ).

**Proposition 9.1.4**

On peut remplacer une ou plusieurs des inégalités larges  $|x - a| \leq \eta$  et  $|f(x) - b| \leq \varepsilon$  par des inégalités strictes, cela donne une définition équivalente

◁ **Éléments de preuve.**

Le quantificateur universel sur  $\varepsilon$  nous assure que l'on peut aussi remplacer  $\varepsilon$  par  $\varepsilon/2$ . On déduit alors l'équivalence de la chaîne d'inclusions :

$$\overline{B}(b, \frac{\varepsilon}{2}) \subset B(b, \varepsilon) \subset \overline{B}(b, \varepsilon)$$

et des inclusions similaires avec  $a$  et  $\frac{\eta}{2}$  (il sera alors peut-être nécessaire de considérer comme valeur de sortie  $\frac{\eta}{2}$  et non  $\eta$ , ce qui nous donne aussi la validité de notre quantification existentielle). ▷

**Proposition 9.1.5 (Limite en un point du domaine)**

Si  $a \in X$ , et si  $f(x)$  admet une limite en  $a$ , alors cette limite est nécessairement égale à  $f(a)$ .

◁ **Éléments de preuve.**

Soit  $\ell$  est la limite de  $f$  en  $a$ . Puisque  $a$  vérifie toujours  $|a - a| \leq \eta$ , on doit avoir, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $|f(a) - \ell| \leq \varepsilon$ . ▷

La définition ci-dessus se généralise à tout espace métrique :

**Définition 9.1.6**

Soit  $(E, d)$  et  $(F, d')$  deux espaces métriques, et  $X \subset E$ . Soit  $f : X \rightarrow F$ . Comme dans le cas de  $\mathbb{R}$ , on peut considérer l'adhérence  $\overline{X}$  de  $X$  dans  $E$ . Soit  $a \in \overline{X}$ , et  $b \in F$ . On dit que  $f$  admet une limite  $b$  en  $a$  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, d(x, a) < \eta \implies d'(f(x), b) < \varepsilon.$$

Les propriétés ci-dessus (gestion des inégalités strictes ou larges, limites en un point du domaine) sont également valables dans ce cadre.

Le cas spécifique de  $\mathbb{R}$  correspond à cette définition plus générale, pour la distance définie par  $d(x, y) = |y - x|$ .

Dans le cas de  $\mathbb{R}$ , on peut également définir des limites en des points infinis, ou des limites de valeur infinie, débordant ainsi un peu du cadre métrique. La longueur de ces définitions est due au nombre de cas à étudier. Dans toutes ces définitions également, on peut remplacer les inégalités larges par des inégalités strictes. La seule inégalité qu'on n'a pas le droit de modifier est  $\varepsilon > 0$ .

**Définition 9.1.7 (Limite en  $+\infty$ )**

On suppose que  $+\infty$  est adhérent à  $X$  (i.e.  $X$  est non majoré).

- Soit  $b \in \mathbb{R}$ . On dit que  $f(x)$  tend vers  $b$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in X, x \geq B \implies |f(x) - b| \leq \varepsilon.$$

- On dit que  $f(x)$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in X, x \geq B \implies f(x) \geq A.$$

- On dit que  $f(x)$  tend vers  $-\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in X, x \geq B \implies f(x) \leq A.$$

**Définition 9.1.8 (Limite en  $-\infty$ )**

On suppose que  $-\infty$  est adhérent à  $X$ .

- Soit  $b \in \mathbb{R}$ . On dit que  $f(x)$  tend vers  $b$  lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in X, x \leq B \implies |f(x) - b| \leq \varepsilon.$$

- On dit que  $f(x)$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$  si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in X, x \leq B \implies f(x) \geq A.$$

- On dit que  $f(x)$  tend vers  $-\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$  si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in X, x \leq B \implies f(x) \leq A.$$

### Remarque 9.1.9

1. Lorsqu'on prend  $X = \mathbb{N}$  et  $a = +\infty$ , on trouve la définition de la limite des suites qui n'est qu'un cas particulier de la définition générale :

- $u_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon.$
- $u_n \rightarrow +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A$

2. Comme plus haut, les inégalités (sauf  $\varepsilon > 0$ ) peuvent être indifféremment strictes ou larges.

Comme on peut le constater, la distinction entre un point fini et les deux infinis, à faire à la source et à l'arrivée, amène à distinguer 9 cas différents dans la définition des limites. Pour les études pratiques, ce n'est pas gênant : il suffit de considérer le cas qui nous concerne. Pour des études plus théorique, notamment pour établir des propriétés générales, il peut être plus commode d'avoir une description plus uniforme, évitant d'avoir à distinguer entre un grand nombre de cas.

## I.2 Limites : point de vue topologique

On peut donner une définition globale à l'aide de la notion de voisinage. On rappelle que si  $E$  est un espace métrique, un sous-ensemble  $V$  de  $E$  est un voisinage de  $b \in E$  si et seulement s'il existe un rayon  $\varepsilon > 0$  tel que la boule  $B(b, \varepsilon)$  soit entièrement incluse dans  $V$ .

Dans  $\overline{\mathbb{R}}$ , on peut aussi disposer de la notion voisinage de  $+\infty$  :

### Définition 9.1.10 (Voisinage de $+\infty$ )

On dit que  $V \subset \mathbb{R}$  est un voisinage de  $+\infty$  s'il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $]a, +\infty[ \subset V$ .

### Notation 9.1.11

Pour  $b \in \overline{\mathbb{R}}$ , on note  $\mathcal{V}(b)$  l'ensemble des voisinages de  $b$ .

La notion de voisinage (pour un point fini) est une notion topologique : elle se décrit à l'aide des ouverts de  $\mathbb{R}$  :

### Proposition 9.1.12 (Définition topologique des voisinages)

Soit  $V$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}$ . Les psse :

- (i)  $V$  est un voisinage de  $b$  ;
- (ii) Il existe  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}$  tel que  $b \in U \subset V$ .

Cette propriété permet de définir la notion de voisinage dans le contexte plus général d'un « espace topologique »  $E$ , dans lequel on ne dispose pas d'une distance, mais seulement de la donnée des ensembles ouverts (l'ensemble des ouverts est alors appelé topologie de  $E$ ).

Pour cette raison, les caractérisations en terme de voisinages sont souvent qualifiées de caractérisations topologiques, en opposition aux caractérisations métriques utilisant la distance.

La notion de limite relie la métrique de l'espace de départ (lorsqu'on considère  $x$  tel que  $|x - a| < \eta$ ) et la métrique de l'espace d'arrivée (lorsqu'on impose  $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ ). On peut remplacer l'un ou l'autre, ou les deux, de ces deux points de vue métriques par un point de vue topologique.

On obtient de la sorte des définitions équivalentes de la limite d'une fonction en un point :

**Théorème 9.1.13 (Caractérisation des limites par voisinages)**

Soit  $a \in \overline{X}$  (fini ou infini) et  $b \in \overline{\mathbb{R}}$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) (métrique/métrique)  $f$  admet une limite  $b$  lorsque  $x$  tend vers  $a$

(ii) (métrique/topologique)

1. si  $a$  est fini :  $\forall V \in \mathcal{V}(b), \exists \eta > 0, \forall x \in X, |x - a| < \eta \implies f(x) \in V$

2. si  $a = +\infty$  :  $\forall V \in \mathcal{V}(b), \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in X, x > B \implies f(x) \in V$

(iii) (topologique/métrique)

1. si  $b$  est fini :  $\forall \varepsilon > 0, \exists U \in \mathcal{V}(a), \forall x \in X, x \in U \implies |f(x) - b| < \varepsilon$

2. si  $b = +\infty$  :  $\forall A \in \mathbb{R}, \exists U \in \mathcal{V}(a), \forall x \in X, x \in U \implies f(x) > A$

(iv) (topologique/topologique)  $\forall V \in \mathcal{V}(b), \exists U \in \mathcal{V}(a), f(U \cap X) \subset V$ .

Ici, comme plus haut, les inégalités sont indifféremment strictes ou larges, à part  $\varepsilon > 0$ .

Ce passage du métrique au topologique consiste donc simplement à remplacer les boules centrées en un point  $a$  par des voisinages, notion plus floue et moins mesurée.

◁ **Éléments de preuve.**

Remarquer que  $|x - a| < \varepsilon$  équivaut à  $x \in B(a, \varepsilon)$

Au départ, on passe alors du cas topologique au cas métrique en remarquant que tout voisinage de  $a$  contient une boule  $B(a, \varepsilon)$ , et du cas métrique au cas topologique en remarquant qu'une boule  $B(a, \varepsilon)$  est un voisinage de  $a$ . Quelle différence à l'arrivée ? ▷

**Remarque 9.1.14**

Cette caractérisation est aussi valable dans le cadre plus général d'un espace métrique (et s'énonce un peu plus simplement, puisqu'on n'a pas à y considérer les cas infinis).

Nous dirons qu'une fonction  $f$  admet une propriété  $\mathcal{P}$  au voisinage d'un point  $a \in \overline{X}$ , s'il existe un voisinage  $V$  de  $a$  dans  $\mathbb{R}$  (au sens étendu ci-dessus pour  $a$  infini) tel que la propriété  $\mathcal{P}$  soit vérifiée par  $f$  sur l'ensemble  $V \cap X$ .

La notion de limite permet alors de « contrôler » une fonction au voisinage d'un point. Ainsi, on obtient par exemple :

**Proposition 9.1.15**

Soit  $f$  une fonction admettant une limite finie en un point  $a$  de  $\overline{X}$ . Alors,  $f$  est bornée au voisinage de  $a$ .

◁ **Éléments de preuve.**

La définition de la limite par  $\varepsilon$  donne un encadrement local de  $f$ . Comment s'arranger pour ne pas avoir besoin de distinguer les cas de limites en un point fini ou en un point infini ? ▷

**Définition 9.1.16 (Coïncidence de deux fonctions)**

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $X$  et  $Y$  et  $a$  tel que  $a \in \overline{X}$  et  $a \in \overline{Y}$ . On dit que  $f$  et  $g$  coïncident au voisinage de  $a$  si et seulement s'il existe un voisinage  $V$  de  $a$  dans  $\mathbb{R}$  tel que  $X \cap V = Y \cap V$  et que

$$\forall x \in X \cap V, \quad f(x) = g(x).$$

**Proposition 9.1.17 (Comparaison des limites de deux fonctions coïncidant au vois. de  $a$ )**

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions coïncidant au voisinage d'un point  $a$ . Alors, si  $f$  admet une limite (finie ou infinie) en  $a$ , alors  $g$  aussi, et

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

◁ **Éléments de preuve.**

Par voisinage pour ne pas avoir de discussion, en remarquant que si  $V_0$  est un voisinage de  $a$  sur lequel  $f$  et  $g$  coïncide, alors pour tout voisinage  $U$  de  $a$ ,  $U \cap V_0$  est un voisinage de  $a$ , sur lequel  $f$  et  $g$  coïncident. ▷

**I.3 Unicité de la limite**

L'unicité de la limite d'une fonction provient d'une propriété topologique de  $\mathbb{R}$  :

**Lemme 9.1.18 (Lemme de séparation)**

Soit  $(x, y) \in \overline{\mathbb{R}^2}$  tels que  $x \neq y$ . Alors il existe des voisinages  $U$  de  $x$  et  $V$  de  $y$  tels que  $U \cap V = \emptyset$ . Si de plus  $x < y$ , on peut choisir  $U$  et  $V$  tels que  $U < V$  (dans le sens où pour tout  $u \in U$  et tout  $v \in V$ ,  $u < v$ ).

◁ **Éléments de preuve.**

Il suffit de montrer directement la seconde assertion. Dans le cas  $x$  et  $y$  réels, considérer  $B(x, \frac{d}{3})$  et  $B(y, \frac{d}{3})$ , où  $d$  est .... Adapter dans le cas d'un ou deux infinis. ▷

**Théorème 9.1.19 (Unicité de la limite, cas réel)**

Soit  $a \in \overline{X}$  et  $f$  une fonction réelle. Sous réserve d'existence, la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  est unique.

◁ **Éléments de preuve.**

Par l'absurde, en considérant  $\ell < \ell'$  deux limites, et en utilisant la définition topologique avec deux voisinages bien choisis, l'un de  $\ell$  et l'autre de  $\ell'$ . ▷

**Notation 9.1.20**

En cas d'existence de la limite en  $a$ , cette notation étant maintenant non ambiguë, on note  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $a$ .

**I.4 Limites à droite et à gauche**

**Notation 9.1.21**

Soit  $f$  définie sur  $X$ . Soit  $Y$  un intervalle (ou une union d'intervalles, ou plus généralement un sous-ensemble quelconque) tel que  $a \in \overline{X \cap Y}$ . Si la limite (finie ou infinie) en  $a$  de la restriction  $f|_{X \cap Y}$  existe, on utilise la notation suivante :

$$\lim_{x \rightarrow a} f|_{X \cap Y}(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in Y}} f(x).$$

Dans cette notation, il est sous-entendu que  $x$  doit bien sûr aussi être élément du domaine de définition  $X$  de  $f$ .

**Définition 9.1.22 (Limite à gauche, limite à droite)**

- La limite à gauche correspond au cas où  $Y = ]-\infty, a[$ ; on utilise l'une des notations suivantes :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in ]-\infty, a[}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a - 0).$$

- La limite à droite correspond au cas où  $Y = ]a, +\infty[$ ; on utilise l'une des notations suivantes :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in ]a, +\infty[}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a + 0).$$

**Remarque 9.1.23**

Remarquez que dans la définition des limites à gauche et à droite, le point  $a$  est exclus de  $Y$ .

**Exemples 9.1.24**

1.  $f : x \mapsto \frac{x}{|x|}$  en  $a = 0$ ;
2.  $f : x \mapsto \frac{1}{x}$  en  $a = 0$ ;
3.  $f : x \mapsto [x]$  en  $a \in \mathbb{Z}$ .

**Théorème 9.1.25 (Caractérisation de la limite par limites à gauche et à droite)**

Soit  $a \in \overline{X}$ . La fonction  $f$  admet une limite  $\ell$  en  $a$  si et seulement si, parmi les quantités  $f(a - 0)$ ,  $f(a)$  et  $f(a + 0)$ , celles qui sont envisageables existent et sont égales à  $\ell$ .

◁ **Éléments de preuve.**

Remarquez que dans le sens réciproque, cela n'a d'intérêt que si au moins 2 quantités sont envisageables, ce qui exclut  $a = \pm\infty$ . On pourra donc travailler métriquement au départ. On peut étudier le 3 où les 3 limites sont envisageables, qui est suffisamment représentatif, les 3 autres cas s'adaptent facilement. ▷

**Théorème 9.1.26 (Régularité des fonctions monotones)**

Une fonction monotone admet des limites à gauche et à droite en tout point en lequel c'est envisageable ( $y$  compris les infinis, s'ils sont adhérents au domaine).

◁ **Éléments de preuve.**

Travailler métriquement, pour exploiter plus facilement la monotonie. Pour une fonction croissante, on pourra considérer  $\sup\{f(x), x < a\}$ . ▷

## I.5 Propriétés des limites

Pour la suite du chapitre, on supposera connues les propriétés suivantes des limites. Ces propriétés seront démontrées ultérieurement :

- Les limites de sommes, produits, quotients, composées, et les formes indéterminées  $0 \times \infty$ ,  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $\infty - \infty$ ,  $1^\infty$ ,  $0^0$ ,  $\infty^0$ .
- La conservation des inégalités LARGES par passage à la limite.
- Le théorème d'encadrement, ou théorème des gendarmes, aussi appelé plus complètement théorème d'existence de la limite par encadrement, ce qui dit bien quel est le point essentiel de ce théorème.

À ces propriétés, on en rajoute une qu'on démontre tout de suite :

### Proposition 9.1.27 (Composition des limites)

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions et  $a$ ,  $b$  et  $c$  des éléments de  $\overline{\mathbb{R}}$ . Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  et  $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$ , alors  $g \circ f$  admet une limite en  $a$ , et

$$\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = c.$$

◁ Éléments de preuve.

Immédiat par caractérisation topologique. ▷

## I.6 Limites de fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

On considère dans ce paragraphe une fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ , où  $X$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  (la variable est donc réelle ici), et  $a \in \overline{X}$ .

La définition métrique de la limite étant en fait valable en remplaçant les distances  $|x - y|$  dans  $\mathbb{R}$  par des distances plus générales  $d(x, y)$  dans un espace métrique, on peut définir sans problème de la façon suivante la limite de  $f$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , la distance étant définie par le module de la différence. On pourrait même envisager le cas où la variable elle-même est complexe.

### Définition 9.1.28 (Limite d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ )

Si  $a$  est fini,  $f$  admet une limite  $\ell \in \mathbb{C}$  en  $a$  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Vous adaptez bien sûr facilement cette définition au cas où  $a$  est infini, ou bien de façon synthétique à l'aide du point de vue topologique à la source.

Le point important est le suivant, affirmant que l'étude des limites d'une fonction à valeurs complexes se ramène à l'étude des limites de deux fonctions à valeurs réelles.

### Théorème 9.1.29 (Caractérisation de la limite d'une fonction à valeurs complexes)

Soit  $f = f_r + i f_i$ , où  $f_r$  et  $f_i$  sont à valeurs réelles (donc correspondent à la partie réelle et à la partie imaginaire de  $f$ ). Alors  $f$  admet une limite  $\ell$  en  $a$  si et seulement si  $f_r$  et  $f_i$  admettent des limites en  $a$ , vérifiant :

$$\lim_{x \rightarrow a} f_r(x) = \operatorname{Re}(\ell) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = \operatorname{Im}(\ell)$$

◁ Éléments de preuve.

Dans un sens, utiliser les majorations  $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$  et  $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$  et le théorème d'encadrement. Dans l'autre, utiliser l'inégalité triangulaire pour obtenir  $|z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$ . ▷

Les règles principales sur le calcul des limites de fonctions à valeurs dans  $\mathbb{C}$  sont les mêmes que dans  $\mathbb{R}$  (sommes, produits, quotients etc.). Elles peuvent s'en déduire en décomposant toutes les fonctions en  $f_r + i f_i$ , en développant (pour le produit) ou en multipliant par la quantité conjuguée (pour l'inverse) pour se ramener aux règles concernant les fonctions réelles. On peut aussi les redémontrer par  $\varepsilon$  (en gardant un voisinage au départ, pour éviter les disjonctions de cas).

On en déduit de façon immédiate :

**Corollaire 9.1.30 (unicité de la limite, cas complexe)**

*Soit  $f$  une fonction de la variable réelle à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . La limite de  $f$  en  $a$ , si elle existe, est unique.*

◁ **Éléments de preuve.**

Par unicité de la limite de sa partie réelle et de sa partie imaginaire. On aurait aussi pu le faire en adaptant le lemme de séparation dans le cas complexe : si  $|y - x| < \varepsilon$ , les boules de centre  $\ell$  et  $\ell'$  et de rayon  $\frac{\varepsilon}{3}$  sont des voisinages de  $\ell$  et  $\ell'$  et sont disjoints. ▷

## I.7 Continuité

On rappelle la définition suivante :

**Définition 9.1.31 (Continuité)**

Soit  $f$  définie sur  $X$  et  $a \in X$ . On dit que  $f$  est continue en  $a$  si  $f$  admet une limite en  $a$ .

**Remarque 9.1.32**

Le point  $a$  est dans le domaine. Ainsi, si  $f$  est continue en  $a$ , la limite en  $a$  est nécessairement  $f(a)$ .

De façon équivalente :

**Proposition 9.1.33 (Propositions équivalentes à la continuité)**

Soit  $a \in X$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $f$  est continue en  $a$
- (ii)  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, |x - a| < \eta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ ;
- (iii) pour tout voisinage  $V$  de  $f(a)$ , il existe un voisinage  $U$  de  $a$  tel que  $f(U \cap X) \subset V$ .

◁ **Éléments de preuve.**

Équivalences déjà vues dans le cadre des limites. Le seul ingrédient supplémentaire est l'égalité de la limite avec  $f(a)$ , ce qui, comme on l'a vu, est toujours le cas lorsque  $a$  est dans le domaine de  $f$ . ▷

**Proposition 9.1.34 (Restriction de l'ensemble source)**

*Si  $f$  et  $g$  coïncide sur un voisinage de  $a$ ,  $f$  est continue en  $a$  si et seulement si  $g$  est continue en  $a$ .*

◁ **Éléments de preuve.**

On a déjà vu dans cette situation l'équivalence de l'existence des limites, et leur égalité. ▷

**Corollaire 9.1.35**

Soit  $f$  et  $g$  définies sur  $X \subset \mathbb{R}$ , et  $U$  un ouvert tel que  $U \cap X \neq \emptyset$ . Alors, si  $f_{U \cap X} = g_{U \cap X}$  et si  $g$  est continue sur  $U \cap X$ , alors  $f$  aussi.

Les opérations sur les limites ont pour corollaire immédiat les opérations similaires sur les fonctions continues (sommées, produits, quotients, compositions). En particulier, les fonctions polynomiales sont continues, les fractions rationnelles sont continues sur leur domaine.

**I.8 Continuité d'une fonction de 2 variables**

Les définitions précédentes sont valides également lorsque  $f$  est définie sur un sous-ensemble  $D$  de  $\mathbb{R}^2$  (au programme : uniquement la continuité pour une fonction définie sur un ouvert). Pour  $X = (x, y)$  dans  $D$ , on notera indifféremment  $f(X)$  ou  $f(x, y)$  l'image de  $(x, y)$  par  $f$ . On note  $\|X\|$  la norme euclidienne canonique de  $\mathbb{R}^2$ . Ainsi, la distance considérée est la distance euclidienne entre deux vecteurs  $X$  et  $Y$ , définie par

$$d(X, Y) = \|Y - X\|^2.$$

**Définition 9.1.36 (Continuité)**

Soit  $f$  une fonction définie sur un sous-ensemble  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ , et  $(x_0, y_0) \in D$ . On dit que  $f$  est continue en  $X_0 = (x_0, y_0)$  si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

- (i)  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta, \forall X \in D, \|X - X_0\| \leq \eta \implies \|f(X) - f(X_0)\| \leq \varepsilon.$
- (ii)  $\forall V \in \mathcal{V}(f(X_0)), \exists U \in \mathcal{V}(X_0), f(U \cap D) \subset V.$

Cette définition se généralise sans peine à davantage de variables, mais seul le cas de deux variables est au programme de première année.

Les règles usuelles (somme, produit, quotient de fonctions continues) restent valides dans ce cadre (avec des preuves similaires). On donne deux propriétés de composition (à la source et à l'arrivée). Ces propriétés sont des cas particuliers de propriétés plus générales.

**Proposition 9.1.37 (Continuité d'une composée)**

Soit  $X$  et  $Y$  deux sous-ensembles de  $\mathbb{R}$ ,  $D$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$ . On se donne  $f : D \rightarrow Y$ ,  $\varphi_1, \varphi_2 : X \rightarrow D$  et  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ .

1. Si  $f$  est continue en  $(x_0, y_0)$  et  $g$  continue en  $f(x_0, y_0)$ , alors  $(x, y) \mapsto g(f(x, y))$  est continue en  $(x_0, y_0)$ .
2. Si  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont continues en  $t_0$  et  $f$  est continue en  $(\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0))$ , alors  $t \mapsto f(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$  est continue en  $t_0$ .

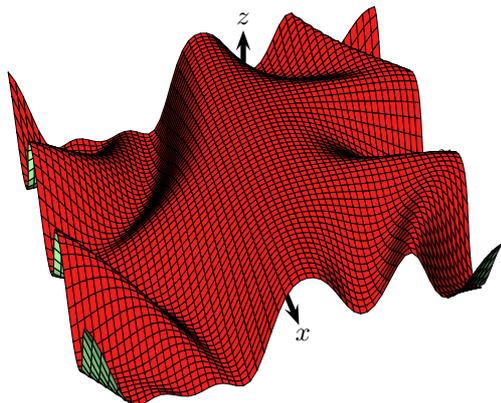
**Corollaire 9.1.38**

1. La projection  $(x, y) \mapsto x$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .
2. Soit  $U \in \mathbb{R}$ , et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction d'une variable réelle continue sur  $U$ . Alors la fonction  $(x, y) \mapsto f(x)$  est continue sur  $U \times \mathbb{R}$ .

**Exemples 9.1.39**

1.  $(x, y) \mapsto \sin(y + \cos(xy))$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$
2. Le deuxième point est très utile pour justifier la non continuité, en restreignant  $f$  le long d'une courbe. Soit par exemple :

$$f : (x, y) \mapsto \frac{xy}{x+y} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } f(0, 0) = 0.$$

FIGURE 9.1 – Graphe de  $(x, y) \mapsto \sin(y + \cos(xy))$ 

Montrer que  $f$  n'est pas continue en 0.

Le graphe d'une fonction de 2 variables à valeurs dans  $\mathbb{R}$  est une surface (une nappe)

## II Dérivation

Une fonction peut être plus ou moins « régulière ». La régularité d'une fonction se mesure à l'aide des propriétés de continuité et de dérivabilité. Plus on peut dériver une fonction, plus celle-ci sera régulière. Intuitivement, plus une fonction est régulière, plus son graphe est lisse.

### II.1 Dérivation et tangente

Dans ce paragraphe, les fonctions étudiées seront systématiquement des fonctions définies sur un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  et à valeurs réelles.

#### Définition 9.2.1 (dérivabilité, dérivée)

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert  $I$ , et  $x_0 \in I$ . On dit que  $f$  est dérivable en  $x_0$  si le taux d'accroissement  $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  définie sur  $I \setminus \{x_0\}$  admet une limite finie en  $x_0$ . Dans ce cas, on définit la dérivée de  $f$  en  $x_0$  (ou le nombre dérivé de  $f$  en  $x_0$ ) par :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Si  $f$  admet des nombres dérivés en tout  $x \in J \subset I$ , on dit que  $f$  est dérivable sur  $J$ , et l'application  $x \mapsto f'(x)$  qui à  $x$  de  $J$  associe le nombre dérivé de  $f$  en  $x$  est appelée fonction dérivée de  $f$  sur  $J$ .

#### Remarques 9.2.2

1. La dérivation est une notion *locale* et *non ponctuelle* ( $f$  doit être défini sur un voisinage de  $x_0$ ).
2. La dérivation est une notion *locale* et *non globale* (ne dépend que de la description de  $f$  sur un voisinage de  $x_0$ , quel qu'il soit, et non de sa description globale).

#### Exemples 9.2.3

1.  $f : x \mapsto c$  la fonction constante.

2.  $f : x \mapsto x$  la fonction identité.

3.  $f : x \mapsto \sin(x)$  et  $x \mapsto \cos(x)$ .

Tout comme nous avons traduit la continuité sous forme d'un développement limité à l'ordre 0 (c'est-à-dire sous forme d'une approximation polynomiale à  $o(1)$  près), on peut traduire la dérivabilité sous forme d'un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de  $x_0$  (c'est-à-dire une approximation polynomiale à  $o(x - x_0)$  près) :

**Proposition 9.2.4 (Caractérisation de la dérivabilité par DL<sub>1</sub>)**

Avec les notations précédentes,  $f$  est dérivable de dérivée  $p$  en  $x_0$  si et seulement s'il existe une application  $\varepsilon$  définie sur un voisinage  $V$  de  $x_0$ , de limite nulle lorsque  $x$  tend vers  $x_0$ , et telle que

$$\forall x \in V \cap I, \quad f(x) = f(x_0) + (x - x_0)p + (x - x_0)\varepsilon(x).$$

Par un changement de variable, on peut aussi caractériser la dérivée  $f'(x_0)$  (existence et valeur) par l'existence de  $\varepsilon_0$  définie au voisinage de 0, de limite nulle en 0, et telle que pour tout  $h \in V$  tel que  $x_0 + h \in I$ ,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon_0(h).$$

**Remarque 9.2.5**

Interprétation géométrique : la dérivée en  $x_0$  est la pente de la tangente à la courbe de  $f$  en  $x_0$ . La tangente est obtenue comme limite, au sens géométrique, des cordes entre le point de la courbe d'abscisse  $x_0$  et un point d'abscisse  $x$ , tendant vers  $x_0$ .

**Définition 9.2.6 (Tangente)**

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle ouvert  $I$  et  $x_0 \in I$ . Alors la tangente à la courbe de  $f$  en  $x_0$  est la droite d'équation  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ .

**Proposition 9.2.7**

La tangente est la droite approchant « au mieux » la courbe de  $f$  au voisinage de  $x_0$ .

◁ **Éléments de preuve.**

C'est la caractérisation par DL. Considérer une autre droite et comparer les différences à la fonction  $f$ , au voisinage de  $x_0$ . ▷

**Théorème 9.2.8 (Continuité des fonctions dérivables)**

Si  $f$  est dérivable en  $x_0$ , alors  $f$  est continue en  $x_0$ . **La réciproque est fautive !**

◁ **Éléments de preuve.**

Immédiat en écrivant  $f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a)$ . ▷

**Note Historique 9.2.9**

- La notion de dérivée tire son origine dans l'étude des tangentes, et en particulier de la pente des tangentes. Pierre de Fermat le premier (en 1636) constate que très souvent, la pente s'obtient en écrivant  $\frac{f(a+e) - f(a)}{e}$ , puis en « prenant »  $e = 0$  (il ne dispose pas encore de la notion de limite). Il appelle  $e$  un « infiniment petit ».
- Newton, en 1669, introduit la notation  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ , pour les dérivées des coordonnées d'un point, qu'il appelle « fluxions » des « fluentes »  $(x, y, z)$ , qu'il définit comme les vitesses dont les fluentes sont augmentées graduellement et indéfiniment. Sa notation est encore utilisée actuellement en physique.
- En 1674, Leibniz introduit la notation  $dx$  pour désigner une variation infinimentésimale sur l'abscisse, et  $dy$  pour désigner une variation infinimentésimale sur l'ordonnée. Si  $y$  dépend de  $x$ ,  $\frac{dy}{dx}$  désigne donc la variation infinimentésimale de la fonction  $y$  rapportée à la variation infinimentésimale de  $x$  qui l'a provoquée : il s'agit bel et bien de la définition de Fermat, et rien de plus : pas de nouvelle théorie, juste une nouvelle notation, encore largement utilisée aujourd'hui, notamment sous la forme non quotientée (pensez aux intégrales !)
- À la fin du 18-ième siècle, Joseph-Louis Lagrange introduit la terminologie « dérivée » et la notation  $f'$ .
- La formalisation rigoureuse est due à Karl Weierstrass dans la deuxième moitié du 19-ième siècle, s'appuyant sur une définition rigoureuse de la notion de limite et de continuité (dont il donne également pour la première fois une définition rigoureuse et précise)

**II.2 Dérivées à droite et à gauche**

On note  $I$  le domaine de définition de  $f$

**Définition 9.2.10 (Dérivées à droite et à gauche)**

Soit  $x_0 \in I$ . On dit que  $f$  est dérivable à droite en  $x_0$  si l'expression  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  admet une limite à droite lorsque  $x$  tend vers  $x_0$ . On note alors :

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

De même pour la dérivée à gauche : en cas d'existence,

$$f'_g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Évidemment, la première condition pour que la dérivée à droite existe est que cette limite ait un sens, donc que  $x_0$  ne soit pas la borne supérieure de  $I$ .

**Remarque 9.2.11**

La dérivabilité à droite en  $x_0$  équivaut à la dérivabilité en  $x_0$  de la restriction de  $f$  à  $I \cap [x_0, +\infty[$ .

**Proposition 9.2.12 (Caractérisation de la dérivabilité par  $f'_g$  et  $f'_d$ )**

Soit  $x_0 \in I$ , non égal à une des bornes de  $I$ . Alors  $f$  est dérivable en  $x_0$  si et seulement si  $f$  est dérivable à gauche et à droite en  $x_0$ , et  $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$ . Dans ce cas,  $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$ .

◁ **Éléments de preuve.**

Par caractérisation de la limite (du taux d'accroissement) par limites à droite et à gauche. ▷

**Exemples 9.2.13**

1.  $x \mapsto |\sin(x)|$
2.  $x \mapsto |x|^3$ .

**II.3 Fonctions de classe  $\mathcal{C}^n$** 

Soit une fonction réelle  $f$  définie sur un intervalle  $I$ , et dérivable sur cet intervalle  $I$ . La fonction dérivée  $f'$  est alors définie sur  $I$ . On peut alors étudier les propriétés de dérivabilité de  $f'$ , et, en cas de dérivabilité, on obtient la dérivée seconde  $f''$  (dérivée de la dérivée). On peut continuer de la sorte tant que c'est possible.

**Définition 9.2.14 (dérivées d'ordre supérieur)**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est  $n$ -fois dérivable si on peut dériver  $f$  sur  $I$ ,  $n$  fois de suite. Cela définit alors une fonction  $f^{(n)}$ , appelée dérivée  $n$ -ième de la fonction  $f$ .

Plus précisément, il s'agit d'une définition par récurrence, basé sur la formule suivante, en tout point où c'est possible :

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x).$$

**Remarques 9.2.15**

- N'oubliez pas les parenthèses autour de l'exposant, pour bien distinguer la dérivation de l'exponentiation.
- Pour  $n = 1$  et  $n = 2$ , on utilise généralement les notations  $f'$  et  $f''$  («  $f$  seconde ») au lieu de  $f^{(1)}$  et  $f^{(2)}$ . On rencontre aussi parfois  $f'''$  pour  $f^{(3)}$  («  $f$  tierce »). De plus, la notation  $f^{(0)}$  désigne la fonction  $f$  elle-même.
- Pour pouvoir définir la dérivée  $n$ -ième de  $f$  en  $x_0$ , il faut pouvoir dériver  $f^{(n-1)}$  en  $x_0$ , et il faut donc que  $f^{(n-1)}$  soit définie sur tout un voisinage de  $x_0$  et non seulement en  $x_0$ .

**Définition 9.2.16 (fonctions de classe  $\mathcal{C}^n$ )**

Une fonction  $f$  est dite de classe  $\mathcal{C}^n$  sur un intervalle  $I$  si elle est  $n$  fois dérivable sur  $I$  et que  $f^{(n)}$  est continue.

Ainsi, une fonction est de classe  $\mathcal{C}^0$  si elle est continue. Elle est de classe  $\mathcal{C}^1$  si elle est dérivable (donc continue) et de dérivée continue, etc. Remarquez que la dérivabilité ne suffit pas à obtenir la classe  $\mathcal{C}^1$ .

**Exemple 9.2.17**

$f : x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$ , prolongée par continuité en 0.

**Notation 9.2.18 ( $\mathcal{C}^n(I)$ ,  $\mathcal{D}^n(I)$ )**

Soit  $I$  un intervalle et  $n \in \mathbb{N}$ . On note  $\mathcal{D}^n(I)$  l'ensemble des fonctions définies sur  $I$  et  $n$  fois dérivables sur  $I$ . On note  $\mathcal{C}^n(I)$  l'ensemble des fonctions  $n$  fois dérivables sur  $I$  et de dérivée  $n$ -ième continue.

En particulier,  $\mathcal{D}^0(I)$  est l'ensemble de toutes les fonctions définies sur  $I$ ,  $\mathcal{C}^0(I)$  est l'ensemble de toutes les fonctions continues sur  $I$ .

**Proposition 9.2.19**

On a une chaîne d'inclusions :

$$\dots \subset \mathcal{C}^n(I) \subset \mathcal{D}^n(I) \subset \mathcal{C}^{n-1}(I) \subset \mathcal{D}^{n-1}(I) \subset \dots \subset \mathcal{C}^1(I) \subset \mathcal{D}^1(I) \subset \mathcal{C}^0(I) \subset \mathcal{D}^0(I).$$

◁ **Éléments de preuve.**

Une inclusion sur deux est évidente par définition, l'autre provient de la continuité d'une fonction dérivable. ▷

**Définition 9.2.20 (Fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$ )**

On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$  si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , donc si  $f$  est infiniment dérivable. On note  $\mathcal{C}^\infty(I)$  l'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$ .

Il revient au même de dire que  $f$  est dans  $\mathcal{D}^n(I)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**II.4 Théorème des accroissements finis, fonctions lipschitziennes**

On admet un résultat important, qu'on démontrera plus loin, et qui est à la base de plusieurs résultats dans la suite de ce chapitre (théorèmes de prolongement, théorème de variation des fonctions, positionnement de la courbe par rapport aux tangentes pour les fonctions convexes)

**Théorème 9.2.21 (Théorème des accroissements finis, TAF, admis provisoirement)**

Soit  $a < b$  et  $f$  une application continue sur le segment  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$ . Alors il existe un point  $c \in ]a, b[$  tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

L'interprétation géométrique de ce résultat est assez limpide : il existe une tangente en un point intermédiaire à  $a$  et  $b$ , et parallèle à la corde entre  $a$  et  $b$ .

**Corollaire 9.2.22 (Inégalité des accroissements finis, IAF)**

- Soit  $f$  une application continue sur le segment  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$ . On suppose que pour tout  $x \in ]a, b[$ ,

$$m \leq f'(x) \leq M.$$

Alors :

$$m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M.$$

- Écrite sous cette forme, l'IAF est valide aussi si  $b < a$ .
- En particulier, on peut prendre  $m = \inf_{x \in ]a, b[} f'(x)$  et  $M = \sup_{x \in ]a, b[} f'(x)$ , s'ils existent dans  $\mathbb{R}$ .
- Si  $|f'| \leq M$  sur  $]a, b[$ , alors

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|.$$

L'IAF est à mettre en rapport avec la notion suivante :

**Définition 9.2.23 (Fonction lipschitzienne, fonction contractante)**

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est  $L$ -lipschitzienne sur  $I$  si pour tout  $(x, y) \in I^2$ ,

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Le réel  $L$  est appelé facteur de Lipschitz de  $f$ . Si de plus  $L < 1$ , on dit que  $f$  est contractante.

**Proposition 9.2.24 (continuité des fonctions lipschitziennes)**

Soit  $f$  une fonction d'un intervalle  $I$  dans  $\mathbb{R}$ , lipschitzienne sur  $I$ . Alors  $f$  est continue sur  $I$ .

◁ Éléments de preuve.

Par le théorème d'encadrement. ▷

**Proposition 9.2.25 (Caractère lipschitzien des fonctions à dérivée bornée)**

Soit  $f$  une application dérivable sur un intervalle  $I$ , et à dérivée bornée sur  $I$ . Alors  $f$  est lipschitzienne.

◁ Éléments de preuve.

Conséquence immédiate de l'IAF. ▷

## II.5 Théorèmes de prolongement

On termine cette étude des fonctions de classe  $\mathcal{C}^n$  par des propriétés de prolongement, extrêmement utiles pour justifier la classe  $\mathcal{C}^n$  d'une fonction obtenue par prolongement en un point. Ces théorèmes de prolongement sont exprimés sur la borne gauche de l'intervalle. On pourrait bien entendu les adapter pour la borne droite.

Le premier résultat est élémentaire :

**Théorème 9.2.26 (Prolongement par continuité)**

Soit  $f$  une fonction continue sur  $]a, b]$ , et admettant une limite  $\ell$  en  $a$ . Il existe une unique fonction  $g$  continue sur  $[a, b]$  et coïncidant avec  $f$  sur  $]a, b]$ . Elle vérifie  $g(a) = \ell$ . La fonction  $g$  est appelée prolongement par continuité de  $f$  sur  $[a, b]$ .

◁ Éléments de preuve.

Ce n'est rien d'autre que l'unicité de la limite. ▷

Le deuxième théorème de prolongement affirme que sous certaines conditions, la dérivabilité en un point peut s'étudier en étudiant la limite de la dérivée au lieu de la limite du taux d'accroissement :

**Théorème 9.2.27 (Théorème de la limite de la dérivée)**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , et  $a \in I$ . Soit  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ , continue sur  $I$ , dérivable sur  $I \setminus \{a\}$ .

- Si  $f'$  admet une limite  $\ell \in \mathbb{R}$  lorsque  $x \rightarrow a$  ( $x \neq a$ ), alors  $f$  est dérivable en  $a$  et  $f'(a) = \ell$ . La fonction  $f'$  est alors continue en  $a$ .
- Si  $f'(x) \rightarrow +\infty$  lorsque  $x \rightarrow a$ , alors le taux d'accroissement  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  tend aussi vers  $+\infty$  (et la courbe admet donc une tangente verticale en  $a$ ).

◁ Éléments de preuve.

Utiliser le TAF entre  $a$  et  $x$ , pour écrire le taux d'accroissement sous la forme  $f'(c_x)$ , puis faire tendre  $x$  vers  $a$ .

On peut aussi s'en sortir avec l'inégalité des accroissements finis, ce qui permet de généraliser à des fonctions à valeurs complexes pour lesquelles l'IAF est valide, contrairement au TAF. ▷

On en déduit de façon plus générale :

**Théorème 9.2.28 (Théorème de la classe  $\mathcal{C}^n$  par prolongement)**

Soit  $I$  un intervalle et  $x_0 \in I$ . Soit  $f$  une fonction définie et de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I \setminus \{x_0\}$ . Si pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $f^{(k)}$  admet une limite finie en  $x_0$ , alors  $f$  peut être prolongée sur  $I$  en une fonction  $\tilde{f}$  de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$ . De plus, on aura alors :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \tilde{f}^{(k)}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f^{(k)}(x).$$

◁ **Éléments de preuve.**

Le cas  $n = 0$  est le théorème de prolongement par continuité. Le cas  $n = 1$  est une conséquence immédiate du théorème de la limite de la dérivée. Le cas général s'en déduit par récurrence, en appliquant l'HR à  $f$  puis le théorème de la limite de la dérivée à  $f^{(n)}$ . ▷

**Remarque 9.2.29**

Le théorème de la classe  $\mathcal{C}^n$  par prolongement est souvent utilisé sur des fonctions définies sur  $I$  tout entier. L'hypothèse sur la limite de la dérivée d'ordre 0 doit alors être remplacée par une hypothèse de continuité (pour s'assurer que la fonction définie sur  $I$  correspond bien au prolongement par continuité de la fonction restreinte à  $I \setminus \{x_0\}$ , à laquelle on applique le théorème de prolongement).

## II.6 Règles de dérivation

Il est important d'avoir une bonne maîtrise des règles de calcul suivantes, permettant de dériver toutes les fonctions construites à partir des fonctions usuelles, à condition de connaître les dérivées de ces fonctions usuelles. Dans tout ce paragraphe,  $I$  désigne un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ .

**Proposition 9.2.30 (dérivée d'une somme, d'un produit)**

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ , et  $x \in I$ . Soit  $\lambda$  un réel.

1. Si  $f$  est dérivable en  $x$ , alors  $\lambda f$  aussi et  $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$ .
2. Si  $f$  et  $g$  sont dérivables en  $x$ , alors  $f + g$  aussi et  $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ .
3. Si  $f$  et  $g$  sont dérivables en  $x$ ,  $fg$  aussi et  $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ .
4. Si  $g$  est dérivable en  $x$  et  $g(x) \neq 0$ , alors  $\frac{1}{g}$  aussi et  $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$ .
5. Si  $f$  et  $g$  sont dérivables en  $x$  et  $g(x) \neq 0$ , alors  $\frac{f}{g}$  aussi et  $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ .

◁ **Éléments de preuve.**

- 1 et 2 sont immédiats en formant le taux d'accroissement.
- Pour 3, introduire artificiellement  $f(x+h)g(x)$  pour exprimer le taux d'accroissement de  $fg$  à l'aide des taux d'accroissement de  $f$  et  $g$ . Utiliser la continuité de  $f$ .
- Pour 4, former le taux d'accroissement et mettre sur le même dénominateur. Utiliser la continuité de  $g$ .
- 5 est la combinaison de 3 et 4.

▷

**Exemples 9.2.31**

- Dérivée de  $x \mapsto x^2$
- Dérivée de  $x \mapsto \frac{1}{x}$ .

**Corollaire 9.2.32 (dérivée d'un produit de  $n$  termes)**

Soit  $f_1, \dots, f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x_0 \in I$ . Si  $f_1, \dots, f_n$  sont dérivables en  $x_0$ , alors leur produit aussi, et :

$$(f_1 \cdots f_n)'(x_0) = \sum_{k=1}^n f'_k(x_0) \prod_{i \in [1, n] \setminus \{k\}} f_i(x_0).$$

Si les  $f_i(x_0)$  sont tous non nuls, ceci se réexprime sous la forme

$$(f_1 \cdots f_n)'(x_0) = \left( \prod_{i \in [1, n]} f_i \right) \sum_{i=1}^n \frac{f'_i(x_0)}{f_i(x_0)}$$

S'il existe  $i_0$  tel que  $f_{i_0}(x_0) = 0$ , alors la plupart des termes s'annulent :

$$(f_1 \cdots f_n)'(x_0) = f'_{i_0}(x_0) \prod_{i \neq i_0} f_i(x_0).$$

◁ **Éléments de preuve.**

Récurrence sur  $n$  à partir de la formule de dérivation d'un produit. ▷

**Exemples 9.2.33**

- Dérivée de  $f : x \mapsto x^n$ .
- Dérivée d'un polynôme.

On en déduit notamment le résultat suivant à bien maîtriser pour son utilité.

**Proposition 9.2.34 (Dérivées successives des puissances)**

Soit  $f : x \mapsto x^n$ , et  $k \in \mathbb{N}$ .

- Si  $k \leq n$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$ .
- Si  $k > n$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f^{(k)}(x) = 0$

◁ **Éléments de preuve.**

Récurrence. ▷

**Proposition 9.2.35 (Dérivation d'une composition)**

Soit  $I$  et  $J$  deux intervalles ouverts de  $\mathbb{R}$ , et  $f : I \rightarrow J$ ,  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ . Soit  $x \in I$ . Si  $f$  est dérivable en  $x$  et  $g$  dérivable en  $y = f(x)$ , alors  $g \circ f$  est dérivable en  $x$ , et :

$$(g \circ f)'(x) = f'(x)g'(y) = f'(x) \cdot g' \circ f(x).$$

Ainsi,  $\boxed{(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f)}$ .

## ◁ Éléments de preuve.

L'idée qui vient à l'esprit est de multiplier et diviser par  $f(y) - f(x)$ . Ça marche bien si cette quantité ne s'annule pas lorsque  $y$  est dans un voisinage de  $x$ , sauf pour  $y = x$ , et permet de bien comprendre la formule (c'est la manipulation des physiciens sur les  $df$ ).

Pour obtenir la formule dans la situation générale, on peut éviter les quotients en utilisant la caractérisation par  $DL_1$ .

▷

Un cas particulier important est le cas de la dérivée logarithmique

**Proposition/Définition 9.2.36 (Dérivée logarithmique)**

Soit  $f$  une fonction dérivable d'un intervalle  $I$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ . Alors  $\ln \circ f$  est dérivable, de dérivée :

$$(\ln \circ f)' = \frac{f'}{f}$$

L'expression  $\frac{f'}{f}$  s'appelle dérivée logarithmique de  $f$ .

Plus généralement, si  $f$  est dérivable et de signe constant sur un intervalle ou une union d'intervalles, et ne s'annule pas, alors

$$(\ln \circ |f|)' = \frac{f'}{f}.$$

**Remarque 9.2.37**

La dérivée de  $f$  s'exprime facilement à l'aide de  $f$  et de sa dérivée logarithmique. Ainsi, la dérivée logarithmique est une façon commode de calculer  $f'$  lorsque le passage au logarithme simplifie le problème. C'est le cas en particulier lorsqu'il y a des produits en jeu, puisque le logarithme va transformer les produits en sommes, plus simples à dériver. On peut remarquer d'ailleurs que dans le cas de fonctions positives, la règle de dérivation des produits de  $n$  terme peut s'obtenir facilement par dérivation logarithmique.

Dans le cas général, l'utilisation de la dérivée logarithmique nécessitera un contrôle systématique des signes.

La formule de dérivation d'une composée se généralise au cas d'un plus grand nombre de composée. Il s'agit du produit des dérivées de chacune des fonctions, évaluées au point image du point initial  $x_1$  par les fonctions précédemment appliquées :

**Proposition 9.2.38 (Dérivation d'une composition itérée)**

Soit  $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$  des fonctions dérivables respectivement en  $x_1$ , en  $x_2 = f_1(x_1)$ , en  $x_3 = f_2(x_2) = f_2 \circ f_1(x_1)$ , ..., en  $x_n = f_{n-1}(x_{n-1}) = f_{n-1} \circ \dots \circ f_1(x_1)$ . Alors  $f_n \circ \dots \circ f_1$  est dérivable en  $x_1$  et :

$$\begin{aligned} (f_n \circ \dots \circ f_1)'(x_1) &= f_n'(x_n) \dots f_1'(x_1) \\ &= \left[ f_n' \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_1(x_1) \right] \times \left[ f_{n-1}' \circ f_{n-2} \circ \dots \circ f_1(x_1) \right] \times \dots \times f_1'(x_1). \end{aligned}$$

## ◁ Éléments de preuve.

Récurrence immédiate

▷

**Exemple 9.2.39**

Exprimer la dérivée de  $x \mapsto \ln(3 + \sin(x^3))$ .

La dernière règle de dérivation que nous voyons est la règle de dérivation des fonctions réciproques. Nous admettons pour cela le lemme suivant :

**Lemme 9.2.40 (continuité des réciproques, admis pour l'instant)**

Soit  $I$  et  $J$  deux intervalles et soit  $f$  une application bijective continue de  $I$  dans  $J$ . Alors  $f^{-1} : J \rightarrow I$  est continue sur  $J$ .

Ce lemme, à l'apparente évidence sous l'angle des graphes, nécessite quelques propriétés sur les fonctions continues sur tout un intervalle. Ces propriétés étant étudiées dans un chapitre ultérieur, nous démontrerons le lemme à cette occasion. Il s'agit en fait d'une des parties du théorème de la bijection. À l'aide de ce lemme nous pouvons démontrer facilement le théorème de dérivation des réciproques :

**Théorème 9.2.41 (Dérivation des fonctions réciproques)**

Soit  $I$  et  $J$  deux intervalles, et soit  $f$  une application bijective continue de  $I$  dans  $J$ . Soit  $t_0 \in I$ , et  $x_0 = f(t_0)$ . Alors :

- si  $f$  est dérivable en  $t_0$ , et si  $f'(t_0) \neq 0$ , alors  $f^{-1}$  est dérivable en  $x_0$ , et :

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(t_0)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x_0)}.$$

- Si  $f$  est dérivable en  $t_0$  et  $f'(t_0) = 0$ , alors  $f^{-1}$  n'est pas dérivable en  $x_0$ .

◁ **Éléments de preuve.**

Écrire le taux d'accroissement entre  $x$  et  $x_0$ , et au dénominateur, écrire  $x - x_0 = f(f^{-1}(x)) - f(f^{-1}(x_0))$  afin d'introduire le taux d'accroissement de  $f$  entre  $f^{-1}(x_0)$  et  $f^{-1}(x)$ . Passer à la limite en utilisant la continuité de  $f^{-1}$ . ▷

**Exemple 9.2.42**

- Dérivée de  $x \mapsto e^x$ , définie comme réciproque de  $\ln$ , elle-même définie comme primitive sur  $\mathbb{R}_+^*$  de  $x \mapsto \frac{1}{x}$  s'annulant en 1.
- Dérivée de  $x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

L'utilisation de la définition de la dérivée par taux d'accroissement permet alors d'obtenir un certain nombre de limites remarquables, pour les fonctions pour lesquels on a trouvé l'expression de la dérivée par des moyens autres que l'utilisation directe du taux d'accroissement :

**Proposition 9.2.43 (Limites remarquables pour exp, ln, les puissances)**

On a (pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ )

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha.$$

## II.7 Stabilité des propriétés de régularité

Les propriétés s'établissent facilement par récurrence à partir des propriétés similaires au rang 1.

**Proposition 9.2.44 (Règles pour les fonctions  $n$  fois dérivables en un point)**

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ , et  $x_0 \in I$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $\lambda$  et  $\mu$  deux réels.

1. Si  $f$  est  $n$  fois dérivable en  $x_0$ , alors  $\lambda f$  aussi et  $(\lambda f)^{(n)}(x_0) = \lambda f^{(n)}(x_0)$ .
2. Si  $f$  et  $g$  sont  $n$  fois dérivables en  $x_0$ , alors  $f + g$  aussi et  $(f + g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) + g^{(n)}(x_0)$ .
3. (**Formule de Leibniz**) Si  $f$  et  $g$  sont  $n$  fois dérivables en  $x_0$ ,  $fg$  aussi et :

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0)g^{(n-k)}(x_0).$$

4. Si  $f$  et  $g$  sont  $n$  fois dérivables en  $x_0$  et si  $g$  ne s'annule pas en  $x_0$ , alors  $\frac{f}{g}$  est  $n$  fois dérivable en  $x_0$  (pas de formule simple). Si de plus,  $f^{(n)}$  et  $g^{(n)}$  sont continues en  $x_0$ , alors  $\left(\frac{f}{g}\right)^{(n)}$  aussi.

◁ **Éléments de preuve.**

Récurrences plus ou moins immédiates. Pour la formule de Leibniz, l'argument se déroule comme pour la formule du binôme, en utilisant la formule de Pascal. D'ailleurs, la formule du binôme peut se déduire de la formule de Leibniz, appliquée à des fonctions judicieusement choisies. ▷

**Exemple 9.2.45**

Dérivée  $n$ -ième de  $x \mapsto xe^x$ .

**Proposition 9.2.46 (Composition de fonctions  $n$  fois dérivables)**

Soit  $I$  et  $J$  deux intervalles, et  $f$  une fonction de  $I$  dans  $J$ ,  $g$  une fonction de  $J$  dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $x_0 \in I$ . Si  $f$  est  $n$  fois dérivable en  $x_0$  et  $g$  est  $n$  fois dérivable en  $f(x_0)$ , alors  $g \circ f$  est  $n$  fois dérivable en  $x_0$ . Si de plus  $f^{(n)}$  et  $g^{(n)}$  sont continues en  $x_0$ , alors  $(g \circ f)^{(n)}$  également.

◁ **Éléments de preuve.**

Récurrence. ▷

**Remarque 9.2.47 (Formule de Faà di Bruno, HP, à ne surtout pas apprendre par coeur)**

Il existe une formule explicite pour la dérivée d'ordre  $n$  d'une composition (formule de Faà di Bruno), mais cette formule est fort complexe. Pour le plaisir, on énonce, sans démonstration :

$$(g \circ f)^{(n)} = \sum_{\substack{(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n \\ 1m_1 + 2m_2 + \dots + nm_n = n}} \frac{n!}{m_1!m_2! \dots m_n!} \prod_{k=1}^n \left(\frac{f^{(k)}}{k!}\right)^{m_k} \times g^{(m_1 + \dots + m_n)} \circ f.$$

Vérifiez que pour  $n = 1$ , on retombe sur la formule connue...

La seule formule de dérivation itérée d'une composée à connaître est le cas simple d'une composée du type  $x \mapsto f(ax + b)$ , qui s'obtient par une récurrence immédiate (contrairement à celle permettant d'obtenir la formule de Faà di Bruno).

**Théorème 9.2.48 (Dérivée de  $x \mapsto f(ax + b)$ )**

Soit  $a$  et  $b$  deux réels,  $x_0 \in \mathbb{R}$  et  $f$  une application  $n$  fois dérivable en  $ax_0 + b$ . Alors la fonction  $g : x \mapsto f(ax + b)$  est  $n$  fois dérivable en  $x_0$  et

$$g^{(n)}(x_0) = a^n f^{(n)}(ax_0 + b).$$

◁ **Éléments de preuve.**

Récurrence immédiate. ▷

Le lecteur curieux pourra s'assurer que cette formule est bien conforme à la formule générale de Faà di Bruno.

En exprimant ces résultats pour tous les points d'un intervalle, on obtient :

**Corollaire 9.2.49 (Règles de stabilité dans  $\mathcal{D}^n(I)$ )**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$

1. L'ensemble  $\mathcal{D}^n(I)$  est stable par combinaisons linéaires, produit et quotient par une fonction ne s'annulant pas.
2. Soit  $f \in \mathcal{D}^n(I)$  à valeurs dans un intervalle  $J$ , et  $g \in \mathcal{D}^n(J)$ . Alors  $g \circ f \in \mathcal{D}^n(I)$
3. Soit  $f \in \mathcal{D}^n(I)$ , bijective de  $I$  dans  $J$ , et telle que  $f'$  ne s'annule pas sur  $I$ . Alors  $f^{-1} \in \mathcal{D}^n(J)$ .

◁ **Éléments de preuve.**

Seul le dernier point n'a pas encore été justifié. Faire une récurrence en passant par l'expression de la dérivée de  $f^{-1}$ . Étudier dans la même récurrence le cas  $f \in \mathcal{C}^n(I)$ , de sorte à démontrer du même coup la propriété suivante. ▷

On a les mêmes règles pour la classe  $\mathcal{C}^n$  :

**Corollaire 9.2.50 (Règles de stabilité dans  $\mathcal{C}^n(I)$ )**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , ou  $n = +\infty$ .

1. L'ensemble  $\mathcal{C}^n(I)$  est stable par combinaisons linéaires, produit et quotient par une fonction ne s'annulant pas.
2. Soit  $f \in \mathcal{C}^n(I)$  à valeurs dans un intervalle  $J$ , et  $g \in \mathcal{C}^n(J)$ . Alors  $g \circ f \in \mathcal{C}^n(I)$
3. Soit  $f \in \mathcal{C}^n(I)$ , bijective de  $I$  dans  $J$ , et telle que, si  $n \neq 0$ ,  $f'$  ne s'annule pas sur  $I$ . Alors  $f^{-1} \in \mathcal{C}^n(J)$ .

◁ **Éléments de preuve.**

Tout a déjà été fait. C'est un récapitulatif. ▷

## II.8 Dérivations de fonctions réelles à valeurs dans $\mathbb{C}$

Nous élargissons dans ce paragraphe la notion de dérivation au cas de fonctions complexes, ou plus précisément, de fonctions d'une variable réelle, à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .

**Définition 9.2.51 (Dérivation d'une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ )**

Soit  $I = ]a, b[$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  ( $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ ) et  $x_0 \in I$ . Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction à valeurs complexes. On dit que  $f$  est dérivable en  $x_0$  si l'expression  $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$  admet une limite dans  $\mathbb{C}$  lorsque le réel  $h$  tend vers 0, c'est-à-dire s'il existe  $\ell \in \mathbb{C}$  tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \ell \right| = 0.$$

Dans ce cas, on définit la dérivée de  $f$  en  $x_0$  par :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

La dérivation d'une fonction à valeurs dans  $\mathbb{C}$  se ramène en fait à la dérivation de deux fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}$  (la partie réelle et la partie imaginaire) :

**Proposition 9.2.52 (Dérivation des parties réelles et imaginaires)**

Soit, avec les mêmes notations,  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ , et définissons les fonctions  $f_r$  et  $f_i$  de  $I$  dans  $\mathbb{C}$  par :

$$\forall x \in I, \quad f_r(x) = \operatorname{Re}(f(x)) \quad \text{et} \quad f_i(x) = \operatorname{Im}(f(x)).$$

Alors  $f$  est dérivable en  $x_0$  si et seulement si  $f_r$  et  $f_i$  le sont, et dans ce cas,

$$f'(x_0) = f'_r(x_0) + i f'_i(x_0).$$

◁ **Éléments de preuve.**

Immédiat en revenant à la définition, et en utilisant le résultat similaire pour les limites de fonctions à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . ▷

Les règles de dérivation des fonctions à valeurs dans  $\mathbb{C}$  sont les mêmes que pour les fonctions à valeurs réelles :

**Proposition 9.2.53 (principales règles de dérivation des fonctions complexes)**

Soit  $f, g : I \rightarrow \mathbb{C}$  deux fonctions complexes définie sur un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$  et dérivables en  $x_0 \in I$ . Alors :

- (i)  $f + g$  est dérivable en  $x_0$  et  $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$  ;
- (ii) pour tout  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha f$  est dérivable en  $x_0$  et  $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$  ;
- (iii)  $fg$  est dérivable en  $x_0$  et  $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$  ;
- (iv) si  $g(x_0) \neq 0$ ,  $\frac{f}{g}$  est dérivable en  $x_0$  et  $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$ .

◁ **Éléments de preuve.**

Les démonstrations faites dans le cas réel s'adaptent. On pourrait aussi envisager de décomposer en  $f_r + i f_i$ . ▷

On ne donne pas de règle générale de dérivation de compositions : composer à la source par une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  ne pose pas de problème en considérant partie réelle et partie imaginaire. Composer à l'arrivée est plus délicat, car cela implique des fonctions dont la variable est complexe ; la notion de dérivation de fonctions d'une variable complexe existe (fonctions holomorphes), mais c'est une autre histoire. Nous nous contentons du cas particulier de la composition par l'exponentielle complexe, très utile en physique :

**Proposition 9.2.54 (Dérivée de  $t \mapsto e^{\varphi(t)}$ )**

Soit  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction à valeurs complexes définie sur un intervalle  $I$  ouvert de  $\mathbb{R}$  et soit  $x_0 \in I$ .

Soit  $\psi : x \mapsto e^{\varphi(x)}$ .

Si  $\varphi$  est dérivable en  $x_0$ , alors  $\psi$  aussi, et

$$\psi'(x_0) = \varphi'(x_0)e^{\varphi(x_0)}.$$

◁ **Éléments de preuve.**

En décomposant  $\varphi = \varphi_r + i \varphi_i$ , on décompose  $\psi$  en

$$\psi = e^{\varphi_r} \cos \circ \varphi_i + i e^{\varphi_r} \sin \circ \varphi_i.$$

Dériver ces composées réelles. ▷

**Exemples 9.2.55**

1. Calculer la dérivée de  $x \mapsto e^{ix}$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Calculer la dérivée de  $x \mapsto e^{ix^2}$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. Calculer la dérivée de  $x \mapsto e^{e^{ix}}$  sur  $\mathbb{R}$ .

En identifiant  $\mathbb{C}$  à  $\mathbb{R}^2$ , la dérivée de  $\varphi$  correspond à un vecteur tangent (dans un sens que nous ne définissons pas) à la courbe paramétrée par  $\varphi$  au point  $\varphi(x_0)$  (voir l'exemple de  $x \mapsto e^{ix}$  : la tangente au cercle trigonométrique est orthogonal au rayon, donc obtenu par multiplication par un imaginaire pur, ce qui correspond bien au facteur  $i$  qu'on obtient dans la dérivation)

**II.9 Dérivées partielles d'une fonction de deux variables**

Ce paragraphe a pour but de donner les principes de base du calcul différentiel pour les fonctions de plusieurs variables, en vue d'utilisations en physique.

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , et  $f$  une fonction définie sur  $U$ . Soit  $X_0 = (x_0, y_0)$  un point de  $U$ . On note

$$I_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid (x, y_0) \in U\} \quad \text{et} \quad I_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid (x_0, y) \in U\}.$$

Du fait que  $U$  est ouvert,  $I_1$  est un voisinage de  $x_0$  et  $I_2$  est un voisinage de  $y_0$ .

**Définition 9.2.56 (Applications partielles)**

Les deux applications partielles de  $f$  en  $(x_0, y_0)$  sont les deux applications  $f_1$  et  $f_2$  définies sur  $I_1$  et sur  $I_2$  respectivement par :

$$f_1(x) = f(x, y_0) \quad \text{et} \quad f_2(y) = f(x_0, y).$$

Les applications  $f_1$  et  $f_2$  ne dépendent donc plus que d'une variable (soit  $x$ , soit  $y$ ), l'autre ayant été fixée. Elles peuvent être vues comme des restrictions de  $f$  aux deux droites de  $\mathbb{R}^2$  parallèles aux axes et passant par  $(x_0, y_0)$ .

**Définition 9.2.57 (Dérivées partielles)**

Avec les notations précédentes, on dit que  $f$  admet une dérivée partielle par rapport à  $x$  en  $X_0$  si  $f_1$  est dérivable en  $x_0$ , et on note alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X_0) = f_1'(x_0).$$

De même, en cas d'existence, on note :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(X_0) = f_2'(y_0).$$

**Remarque 9.2.58**

En physique, la même notation, mais avec des  $d$  « droits », est déjà utilisée pour les dérivées de fonctions d'une variable. Les notations usuelles imposent d'employer un  $\partial$  ( $d$  « rond ») pour les dérivées partielles.

Ainsi, sous réserve d'existence de ces limites,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(X_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

**Remarque 9.2.59**

L'existence des deux dérivées partielles en un point  $X_0$  n'assure pas la continuité en  $X_0$

**Exemple 9.2.60**

Soit  $f$  la fonction indicatrice de l'union des deux axes. Les dérivées partielles en  $(0, 0)$  existent, mais  $f$  n'est clairement pas continue en  $(0, 0)$ .

**Remarque 9.2.61**

Le fait même de se restreindre à une droite sur laquelle  $y$  est fixé égal à  $y_0$  pour définir  $\frac{\partial f}{\partial x}(X_0)$  nous assure qu'en pratique, la dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial x}$  peut se calculer en tout point en utilisant les mêmes règles de dérivation que pour les fonctions d'une variable, mais en considérant  $y$  comme une constante (donc de dérivée nulle). De même  $\frac{\partial f}{\partial y}$  se calcule en dérivant par rapport à la variable  $y$  avec les règles usuelles, en considérant que  $x$  est une constante.

**Exemple 9.2.62**

Dérivées partielles de  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$f(x, y) = e^{x \cos(xy)}.$$

**Définition 9.2.63 (Fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ )**

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  si  $f$  admet des dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  en tout point de  $U$ , et que les applications

$$X \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(X) \quad \text{et} \quad X \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(X)$$

soient continues sur  $U$ .

**Proposition 9.2.64 (Règles générales sur les fonctions  $\mathcal{C}^1$ )**

1. Une somme, une combinaison linéaire, un produit, un quotient défini de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$ .
2. Soit  $f : U \rightarrow Y$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$  d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  à valeurs dans  $Y \subset \mathbb{R}$ , et  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Alors  $g \circ f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

**Définition 9.2.65**

Exprimer les dérivées partielles.

On introduit un outil très pratique pour écrire de façon synthétique certaines formules, et largement utilisé en physique :

**Définition 9.2.66 (Gradient)**

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ . Le gradient de  $f$  est défini sur  $U$  par :

$$\forall X \in U, \quad \nabla f(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(X) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(X) \end{pmatrix}.$$

Le symbole  $\nabla$  se lit « nabra ».

On admet la règle de dérivation composée suivante, très utile en physique :

**Théorème 9.2.67 (Règle de la chaîne, admis provisoirement)**

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $U$  et  $x, y : I \rightarrow U$  deux applications de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$ . On note  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ . Alors la fonction  $t \mapsto f(\gamma(t))$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , et

$$\frac{d}{dt}(f(x(t), y(t))) = x'(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) = \langle \gamma'(t), \nabla f(\gamma(t)) \rangle,$$

où la dérivée  $\gamma'$  est calculée coordonnées par coordonnées, et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire usuel de  $\mathbb{R}^2$ .

**Remarque 9.2.68 (Dérivée de long d'un chemin)**

La fonction  $\gamma$  peut être vue comme un chemin dans  $\mathbb{R}^2$ , paramétré par  $t$ , parcouru à une certaine vitesse donnée par l'évolution de  $x(t)$  et  $y(t)$  au fil du temps. C'est ce qu'on appelle un arc paramétré. Ainsi, la règle de la chaîne peut être interprétée comme une dérivée le long d'un arc.

**Corollaire 9.2.69 (Dérivée partielle de composées)**

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\varphi$  et  $\psi$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $V$  de  $\mathbb{R}^2$  tel que  $\varphi(V) \subset U$  et  $\psi(V) \subset U$ . Alors la fonction  $(u, v) \mapsto f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $V$ , et :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial u} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial}{\partial v} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) \end{cases}$$

◁ **Éléments de preuve.**

Quand on fixe une variable en un point  $X$ , on peut restreindre l'autre à un intervalle de sorte à se ramener à la règle de la chaîne. ▷

**Définition 9.2.70 (ligne de niveau)**

La ligne de niveau de  $f$  de hauteur  $a$  est l'ensemble des points  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $f(x, y) = a$ . Autrement dit, il s'agit de  $f^{-1}(\{a\})$ .

**Remarque 9.2.71 (Le gradient est orthogonal aux courbes de niveau)**

Si  $\gamma$  est un arc parcourant une ligne de niveau de  $f$  (i.e.  $f \circ \gamma$  est constante), alors

$$\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0.$$

Ainsi,  $\nabla f(\gamma(t))$  est orthogonal à  $\gamma'(t)$ , lui-même tangent à l'arc  $\gamma$ . En d'autres termes, le gradient est orthogonal aux lignes de niveau.

**Définition 9.2.72 (Dérivée selon un vecteur  $u$ )**

Soit  $u = (a, b)$  un vecteur de  $\mathbb{R}^2$  et  $f$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $U$ . La dérivée de  $f$  en  $X = (x, y) \in U$  selon le vecteur  $u$  est la dérivée en 0 de la fonction  $t \mapsto f(X + tu)$ , notée  $D_u f(X)$ .

**Proposition 9.2.73 (Expression de la dérivée le long d'un vecteur avec  $\nabla$ )**

Avec les notations de la définition précédente, si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  au voisinage de  $X$ ,

$$D_u f(X) = \langle \nabla f(X), u \rangle = a \frac{\partial f}{\partial x}(X) + b \frac{\partial f}{\partial y}(X).$$

◁ **Éléments de preuve.**

Il s'agit de dériver selon l'arc  $\gamma : t \mapsto X + tu$ . ▷

**Définition 9.2.74 (Dérivée directionnelle)**

Si de plus  $u$  est unitaire (i.e. de norme 1),  $D_u(f)$  est appelée dérivée directionnelle de  $f$  en  $X$  dans la direction de  $u$ .

**Proposition 9.2.75 (interprétation de la direction de  $\nabla f$ )**

Pour  $u$  unitaire,  $D_u f(X)$  est maximal lorsque  $u$  et  $\nabla f(X)$  sont colinéaires de même sens. Ainsi,  $\nabla f$  pointe vers la direction de plus forte pente.

◁ **Éléments de preuve.**

C'est le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz. ▷

**Théorème 9.2.76 ( $\mathcal{C}^1$  implique  $\mathcal{C}^0$ )**

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Alors  $f$  est continue sur  $U$ .

◁ **Éléments de preuve.**

Fixer  $X \in U$  et  $\varepsilon > 0$ , et par continuité des dérivées partielles, majorer  $\|\nabla f\|$  sur un voisinage de  $x$ . Utiliser alors l'IAF sur chacune des directions. ▷

**Notation 9.2.77 (Dérivées partielles d'ordre supérieur)**

Chaque dérivée partielle de  $f$  est elle-même une fonction de 2 variables. Si elles admettent elles-mêmes des dérivées partielles, on les note :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \end{cases}$$

**Définition 9.2.78 (Classe  $\mathcal{C}^2$ )**

Une fonction définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ , à valeurs réelles, est dite de classe  $\mathcal{C}^2$  si et seulement si elle admet des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 en tout point de  $U$  et que ces dérivées sont continues sur  $U$ .

On verra en exercice que si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  au voisinage de  $(x, y) \in U$ , alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \quad (\text{Théorème de Schwarz}).$$

**III Fonctions convexes****III.1 Notion de convexité****Définition 9.3.1 (Convexité, concavité)**

Soit  $I$  un intervalle, et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est *convexe* sur  $I$  si :

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1], \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

On dit que  $f$  est *concave* sur  $I$  si :

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1], \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

**Remarque 9.3.2 (Interprétation géométrique de la convexité)**

$f$  est convexe si la courbe reste sous les cordes (i.e. sous les segments reliant deux points de la courbe)

**Théorème 9.3.3 (Inégalité de Jensen)**

Soit  $f$  une fonction convexe sur un intervalle  $I$ , et soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$  tels que  $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ . Alors,

pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$ , le réel  $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$  est dans  $I$ , et

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k).$$

◁ **Éléments de preuve.**

Récurrence sur  $n$ . Il ne faut pas oublier de renormaliser les poids. ▷

On obtient bien évidemment un énoncé similaire pour les fonctions concaves, l'inégalité étant dans l'autre sens.

### III.2 Étude des pentes d'une fonction convexe

#### Lemme 9.3.4 (Lemme des pentes)

Soit  $f$  une fonction convexe sur un intervalle  $I$ , et  $x < y < z$  trois points de  $I$ . Alors

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Justifier qu'il existe un  $\lambda \in ]0, 1[$  tel que  $y = (1 - \lambda)x + \lambda z$ . On obtient alors le lemme des pentes en utilisant l'inégalité de convexité. ▷

On note  $F_u$  la fonction taux d'accroissement, définie comme usuellement sur  $I$  par :

$$\forall t \in I, \quad F_u(t) = \frac{f(t) - f(u)}{t - u}.$$

#### Théorème 9.3.5

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. La fonction  $f$  est convexe sur  $I$  si et seulement si pour tout  $u \in I$ , l'application  $F_u$  est croissante sur  $I \setminus \{u\}$ .

◁ **Éléments de preuve.**

Le sens direct s'obtient à l'aide du lemme des pentes, en comparant  $F_u(t_1)$  et  $F_u(t_2)$ . Il faut discuter sur la position relative de  $t_1, t_2$  et  $u$ .

Réciproquement, pour obtenir l'inégalité de convexité, considérer  $u = x, t_2 = y$ , et  $t_1$ ? ▷

On remarque que le lemme des pentes permet de préciser un peu l'inégalité définissant la convexité, qui positionne la courbe par rapport aux cordes, en considérant la sécante (la droite qui supporte la corde)

#### Proposition 9.3.6 (Positionnement de la courbe par rapport à la sécante)

Soit  $f$  une fonction convexe sur un intervalle  $I$ , et  $x < y$  deux points de  $I$ . La sécante aux points  $x$  et  $y$  est en-dessous de la courbe (au sens large) sur  $[x, y]$ , et au-dessus sur  $I \setminus [x, y]$ .

### III.3 Étude de la dérivabilité des fonctions convexes

#### Théorème 9.3.7 (Dérivabilité des fonctions convexes)

Soit  $I$  un intervalle ouvert, et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe. Alors  $f$  est dérivable à droite et à gauche en tout point de  $I$ , et :

1.  $\forall x \in I, f'_g(x) \leq f'_d(x)$  ;
2.  $\forall (x, y) \in I^2, x < y \implies f'_d(x) \leq f'_g(y)$  ;
3.  $f'_g$  et  $f'_d$  sont croissantes sur  $I$

◁ Éléments de preuve.

Que dire de l'existence des limites de fonctions croissantes? ▷

### Corollaire 9.3.8

Soit  $I$  un intervalle ouvert, et  $f$  convexe sur  $I$ . Alors  $f$  est continue sur  $I$ .

### Remarque 9.3.9

Le théorème et son corollaire sont faux si on ne suppose pas que  $I$  est ouvert.

### Proposition 9.3.10

Soit  $I$  un intervalle ouvert et  $x_0 \in I$ . Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe sur  $I$ . Puisque  $f$  est dérivable à gauche et à droite, sa courbe admet une tangente à gauche et une tangente à droite en  $x_0$ . Alors la courbe de  $f$  est au-dessus de sa tangente à gauche, et au-dessus de sa tangente à droite.

◁ Éléments de preuve.

La croissance des taux d'accroissement permet de comparer la tangente (à droite ou à gauche) en un point et les cordes issues du même point. ▷

### Remarque 9.3.11

Les résultats ci-dessus se transcrivent évidemment au cas de fonctions concaves. Dans ce cas, les dérivées à droite et à gauche sont décroissantes.

## III.4 Caractérisation de la convexité pour les fonctions $\mathcal{D}^1$ ou $\mathcal{D}^2$

Afin de pouvoir dès à présent utiliser des propriétés de convexité pour obtenir des inégalités, on donne dès maintenant le théorème suivant, permettant d'avoir un critère simple et pratique pour prouver la convexité d'une fonction.

### Théorème 9.3.12 (Caractérisation des fonctions convexes dérivables)

Soit  $I$  un intervalle ouvert, et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable sur  $I$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $f$  est convexe ;
- (ii)  $f'$  est croissante ;
- (iii) la courbe de  $f$  se trouve au-dessus de toutes ses tangentes.

◁ Éléments de preuve.

- (i)  $\implies$  (ii) provient du lemme des pentes.
- (ii)  $\implies$  (iii) provient du théorème des accroissements finis.
- (iii)  $\implies$  (i) : Considérer la tangente en un point intermédiaire ; elle est sous la corde (pourquoi) ?


**Corollaire 9.3.13 (Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables)**

Soit  $I$  un intervalle ouvert, et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction deux fois dérivable sur  $I$ . Alors  $f$  est convexe si et seulement si pour tout  $x \in I$ ,  $f''(x) \geq 0$ .

**Exemples 9.3.14**

1.  $x \mapsto e^x$  est convexe sur  $\mathbb{R}$  ;
2.  $x \mapsto \ln x$  est concave sur  $\mathbb{R}_+^*$  ;
3.  $x \mapsto \sin x$  est concave sur chacun des intervalles  $]2k\pi, (2k + 1)\pi[$  et convexe sur chacun des intervalles  $](2k - 1)\pi, 2k\pi[$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

On déduit de ces exemples les inégalités suivantes, obtenues en considérant la position des courbes par rapport à leur tangente en 0 :

**Exemples 9.3.15**

1.  $\forall x \in ]-1, +\infty[, \ln(1 + x) \leq x$  ;
2.  $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$  ;
3.  $\forall x \geq 0, \sin x \leq x$  et  $\forall x \leq 0, \sin x \geq x$ .

## IV Étude d'une fonction

Dans ce paragraphe, nous voyons comment appliquer les méthodes calculatoires développées dans début de ce chapitre à l'étude des fonctions. Le lien est bien sûr fait par le résultat que vous connaissez bien reliant le signe de la dérivée et les variations de la fonction. Avant d'aborder ce point, nous faisons quelques rappels sur le graphe d'une fonction et les symétries.

### IV.1 Graphe

Nous rappelons que le domaine de définition d'une fonction  $f$  est le sous-ensemble  $D_f$  (de  $\mathbb{R}$  ici) constitué de l'ensemble des éléments  $x$  tels que  $f(x)$  soit défini.

Dans le cas d'une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , le graphe, tel que nous l'avons défini dans un chapitre antérieur, correspond au sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$  constitué des éléments  $(x, f(x))$ , pour  $x \in D_f$ .

Le graphe permet d'avoir une idée générale de la fonction étudiée. Un graphe précis (par approximations et interpolation à partir d'un grand nombre de points, obtenus par exemple par des expériences) permet d'obtenir facilement une première approximation de solutions de certaines équations ou inéquations.

Certaines opérations simples sur les fonctions se traduisent facilement sur le graphe, comme la composition à la source ou à l'arrivée par  $x \mapsto ax$  ou  $x \mapsto x - a$ .

Une autre opération se traduisant élégamment sur les graphes est la réciproque des fonctions bijectives.

**Proposition 9.4.1 (Graphe d'une fonction réciproque, figure 9.2)**

Soit  $I, J \subset \mathbb{R}$ , et  $f : I \rightarrow J$  une bijection. Alors le graphe de  $f^{-1}$  est l'image du graphe de  $f$  par la symétrie d'axe  $D$ , où  $D$  est la droite d'équation  $y = x$ .

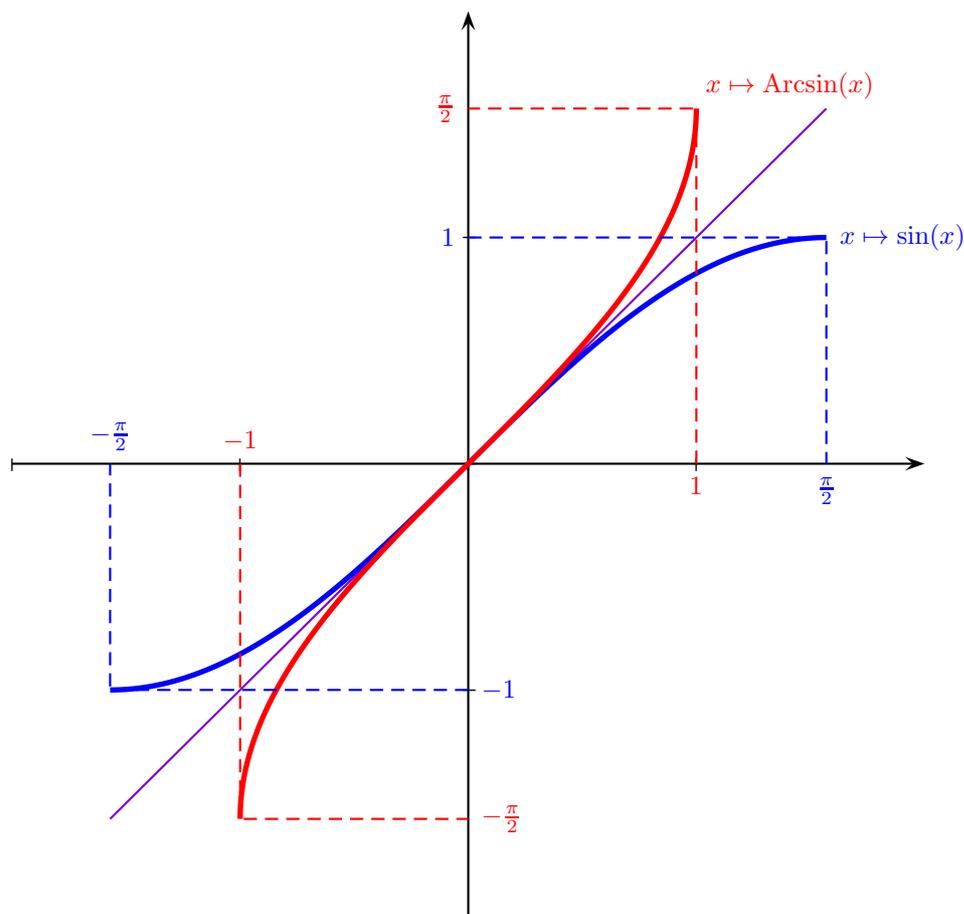


FIGURE 9.2 – Graphe d'une fonction réciproque

**Remarque 9.4.2**

Interprétez géométriquement la formule de dérivation des réciproques.

**IV.2 Symétries d'une fonction****Définition 9.4.3 (fonctions paires, impaires, périodiques)**

Soit  $f$  une fonction de domaine de définition  $D_f \subset \mathbb{R}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

- On dit que  $f$  est *paire* si  $D_f$  est symétrique par rapport à 0 (donc  $D_f = -D_f = \{-x, x \in D_f\}$ ), et

$$\forall x \in D_f, \quad f(-x) = f(x).$$

- On dit que  $f$  est *impaire* si  $D_f$  est symétrique par rapport à 0 et

$$\forall x \in D_f, \quad f(-x) = -f(x).$$

- On dit que  $f$  est *périodique* de période  $T$  si  $D_f + T = D_f$  et

$$\forall x \in D_f, \quad f(x + T) = f(x).$$

**Remarque 9.4.4**

Comment se traduit la parité et l'imparité sur le graphe ?

**Définition 9.4.5 (période minimale)**

Soit  $f$  une fonction périodique, et soit  $\mathcal{T}^+$  l'ensemble des périodes strictement positives de  $f$ . Si  $\mathcal{T}^+$  admet un minimum  $T$ , alors  $T$  est appelée *période minimale de  $f$* , ou *plus petite période de  $f$* .

**Exemples 9.4.6**

1.  $\cos$  et  $\sin$  sont périodiques de période  $2\pi$ . Il s'agit de la période minimale.
2.  $\tan$  est également périodique de période  $2\pi$ , mais ce n'est pas la période minimale. La période minimale est  $\pi$ .
3. Il existe des fonctions périodiques n'admettant pas de période minimale, par exemple  $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ . Quelles sont ses périodes ?

On peut montrer plus généralement qu'une fonction périodique sans période minimale admet un ensemble de périodes dense dans  $\mathbb{R}$ . Ce résultat est basé sur la description des sous-groupes de  $\mathbb{R}$ , que nous aurons l'occasion d'évoquer dans un chapitre ultérieur.

**IV.3 Monotonie**

On rappelle que  $f$  est croissante si elle préserve la relation d'ordre large : pour tout  $x, y \in D_f$ ,

$$x \leq y \implies f(x) \leq f(y).$$

De même,  $f$  est strictement croissante si elle préserve la relation d'ordre stricte. On définit de même la décroissance et la stricte décroissance, par inversion de la relation d'ordre.

On dit qu'une fonction est (strictement) monotone si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.

**Avertissement 9.4.7**

Si  $f$  est croissante (ou décroissante) sur deux intervalles  $I$  et  $J$ , elle n'est pas nécessairement croissante sur l'union  $I \cup J$ . Considérer par exemple  $f : x \mapsto \frac{1}{x}$  et  $I = ]-\infty, 0[$ ,  $J = ]0, +\infty[$ .

La monotonie suit une règle ressemblant à la règle des signes :

**Proposition 9.4.8 (monotonie et composition)**

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur les sous-ensembles  $E$  et  $F$  de  $\mathbb{R}$ , et telles que  $f(E) \subset F$ . Alors :

- Si  $f$  et  $g$  sont croissantes, ou si  $f$  et  $g$  sont décroissantes, alors  $g \circ f$  est croissante ;
- Si  $f$  est croissante et  $g$  décroissante, ou si  $f$  est décroissante et  $g$  croissante, alors  $g \circ f$  est décroissante.

De plus, si la monotonie de  $f$  et  $g$  est stricte, celle de  $g \circ f$  l'est également.

◁ **Éléments de preuve.**

Pas dur en utilisant la définition : partir de  $x < y$ .

▷

**Remarque 9.4.9**

Cette règle des monotonies composées est très utile en pratique, et permet souvent d'obtenir les variations de certaines fonctions de façon beaucoup plus élégante, efficace et rapide que par étude de fonction. C'est le premier réflexe à avoir lorsqu'on vous demande les variations d'une fonction composée.

**Proposition 9.4.10 (monotonie et réciproque)**

Soit  $f : I \rightarrow J$  une fonction bijective réelle définie sur un sous-ensemble  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Si  $f$  est monotone (nécessairement strictement), alors  $f^{-1}$  est monotone, de même sens de monotonie que  $f$ .

◁ **Éléments de preuve.**

Par la définition, en montrant la contraposée. ▷

**Proposition 9.4.11 (monotonie et injectivité)**

Une fonction strictement monotone sur un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  est injective sur ce sous-ensemble.

**IV.4 Variations des fonctions, extremum**

Nous commençons par un rappel de certaines propriétés (admisses pour le moment) permettant une étude efficace d'une fonction d'une variable, puis nous rappelons le schéma général d'étude d'une fonction.

**Théorème 9.4.12 (Caractérisation des fonctions croissantes dérivables)**

Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , et  $I$  un intervalle tel que  $f$  est dérivable sur  $I$ . Alors :

1.  $f$  est croissante sur  $I$  si et seulement si pour tout  $x \in I$ ,  $f'(x) \geq 0$ .
2.  $f$  est constante sur  $I$  ssi  $f' = 0$  sur  $I$ .
3.  $f$  est strictement croissante sur  $I$  si et seulement si  $f' \geq 0$ , et que pour tout  $(a, b) \in I^2$  tel que  $a < b$ ,  $f'$  n'est pas nulle sur  $]a, b[$  (cela revient à dire que l'ensemble des zéros de  $f'$  est d'intérieur vide).
4. Énoncés similaires pour la décroissance.

◁ **Éléments de preuve.**

1. Pour la réciproque, utiliser l'IAF.
2.  $f$  est constante équivaut ssi  $f$  est croissante et décroissante.
3. La croissance (stricte) implique déjà  $f' \geq 0$ ; Si  $f'$  s'annulait sur tout un  $]a, b[$ ,  $f$  serait constante sur cet  $]a, b[$  donc pas strictement monotone. Réciproquement, si  $f$  était monotone, mais pas strictement, elle serait constante sur tout un intervalle  $[a, b]$ , avec  $a < b$ , et  $f'$  serait nulle sur cet intervalle. ▷

**Méthode 9.4.13 (Étude des variations d'une fonction)**

Pour étudier les variations d'une fonction, on étudiera le signe de  $f$ . On pourra donc dresser un tableau de variation, consignnant le signe de  $f'$  suivant les valeurs de  $x$ , et le sens de variation de  $f$  qu'on en déduit.

**Exemple 9.4.14**

Étudier les variations de  $f : x \mapsto x \ln(x)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . En déduire l'existence et la valeur du minimum de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Définition 9.4.15 (Maximum, maximum local)**

Soit  $f$  défini sur  $X$ .

- On dit que  $f$  admet en  $x$  un maximum si pour tout  $y \in X$ ,  $f(y) \leq f(x)$ .
- Ce maximum est strict s'il n'est atteint en aucun autre  $y$  (donc  $f(y) < f(x)$  pour tout  $y \neq x$ )
- $f$  admet en  $x$  un maximum local s'il existe un voisinage  $V$  de  $x$  tel que pour tout  $y \in V$ ,  $f(y) \leq f(x)$  (donc si  $f|_V$  admet un maximum en  $x$ ).

**Théorème 9.4.16 (condition nécessaire pour un extrémum)**

Soit  $f$  dérivable sur un intervalle ouvert  $I$ . Si  $f$  admet en  $x$  un extrémum local (minimum ou maximum), alors  $f'(x) = 0$ .

◁ **Éléments de preuve.**

Considérer le signe du taux d'accroissement  $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$  à gauche et à droite de  $x$ . ▷

Cette condition n'est pas suffisante, comme le montre l'exemple de  $x \mapsto x^3$  en 0.

**Définition 9.4.17 (point critique)**

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle ouvert  $I$ , et  $x \in I$ . On dit que  $x$  est un point critique de  $f$  si  $f'(x) = 0$ .

Ainsi, une CN pour que  $f$  présente un extrémum local en  $x \in I$  (ouvert) est que  $x$  soit un point critique. Attention, c'est évidemment faux si  $I$  n'est pas ouvert (cas d'un extrémum sur le bord).

Puisqu'un extrémum d'une fonction de deux variables correspond aussi à un extrémum après restriction à toute direction (notamment la direction des axes), on obtient une condition similaire :

**Corollaire 9.4.18 (CN pour un extrémum d'une fonction de 2 variables)**

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^1$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  (ou au moins admettant des dérivées partielles). Si  $f$  admet un extrémum en  $X_0 \in U$ , alors  $\nabla f(X_0) = 0$ . Un tel point  $X_0$  est appelé point critique de  $f$ .

**IV.5 Comportement asymptotique**

Le comportement à l'infini (comportement asymptotique) peut aussi aider à cerner l'allure de la courbe. On définit pour cela la notion de droite asymptote : il s'agit d'une droite qui approche d'autant plus près qu'on veut une portion de la courbe lorsqu'on s'éloigne vers l'infini dans l'une des deux directions. Plus précisément :

**Définition 9.4.19 (asymptotes)**

- asymptote verticale en  $a$  : droite d'équation  $x = a$  en  $a$  telle que  $\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \pm\infty$  ;
- asymptotes en  $+\infty$  : la droite  $D$  d'équation  $y = ax + b$  est dite asymptote à la courbe  $\mathcal{C}$  de  $f$  en  $+\infty$  si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

On définit évidemment une notion similaire en  $-\infty$ .

**Méthode 9.4.20 (Déterminer une droite asymptote (non verticale))**

On verra plus tard comment obtenir les asymptotes à l'aide de développements asymptotiques. De façon plus élémentaire, si  $a$  existe, c'est nécessairement la limite de  $\frac{f(x)}{x}$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ . le cas échéant, il ne reste qu'à vérifier que  $f(x) - ax$  tend vers une limite finie  $b$ .

**Exemples 9.4.21**

La courbe de  $f : x \mapsto \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 + 1}$  admet-elle une asymptote en  $+\infty$  ?

On peut aussi définir des paraboles asymptotes, avec la condition  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax^2 - bx - c = 0$ .

**IV.6 Convexité**

Enfin, l'allure de la courbe va dépendre fortement de « l'orientation de la courbure », c'est-à-dire des propriétés de convexité. Celles-ci seront obtenues par l'étude du signe de  $f''$ . On pourra donc consigner, conjointement au tableau de variations.

**Définition 9.4.22 (point d'inflexion)**

Un point d'inflexion de la courbe de  $f$  est un point en lequel  $f$  change de convexité.

**Exemple 9.4.23**

Étude de la fonction  $x \mapsto e^{-x^2}$ , avec les propriétés de convexité et les points d'inflexion.

## Les fonctions usuelles

*L'invention des logarithmes, en réduisant le temps passé aux calculs de quelques mois à quelques jours, double pour ainsi dire, la vie des astronomes.*

(Pierre-Simon Laplace)

*Le logarithme d'un sinus donné est le nombre qui a progressé arithmétiquement avec la même vitesse avec laquelle le rayon a diminué géométriquement jusqu'au sinus donné.*

(John Napier, connu en France sous le nom de Jean Néper)

*Comme pour trois sinus en proportion continue le carré du moyen est égal au produit des extrêmes, ainsi pour leurs logarithmes, le double du moyen est égal à la somme des deux extrêmes*

(John Napier)

Ce chapitre est un catalogue des fonctions usuelles au programme de Math Sup. On y trouve bien entendu le logarithme et l'exponentielle, et les fonctions trigonométriques, mais également les réciproques (partielles) de celles-ci (Arcsin, Arccos et Arctan), et les fonctions hyperboliques (ch, sh, et th), mais sans leurs fonctions réciproques Argch, Argsh et Argth qui ne sont pas au programme.

### I Prérequis

Afin de justifier correctement l'existence des fonctions usuelles, nous admettons quelques résultats d'analyse que nous verrons dans un chapitre ultérieur. On rappelle que si  $f$  est une fonction définie sur un intervalle  $I$ , une primitive de  $f$  est une application  $F$  telle que  $F' = f$

#### **Théorème 10.1.1 (CS d'existence d'une primitive, admis)**

*Toute fonction continue sur un intervalle  $I$  admet une primitive*

#### **Théorème 10.1.2 (Théorème fondamental de l'analyse, admis)**

*Soit  $f$  une fonction continue sur  $I = [a, b]$  et  $F$  une primitive de  $f$  sur  $[a, b]$ . Alors*

$$\int_a^b f(t) \, dt = F(b) - F(a).$$

**Théorème 10.1.3 (Unicité d'une primitive de valeur imposée)**

Supposons de plus qu'on dispose de  $x_0 \in I$  et  $y_0 \in \mathbb{R}$ . Alors il existe une unique primitive  $G$  de  $f$  telle que  $G(x_0) = y_0$ , donnée explicitement par

$$G(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Se déduit des deux précédents, en remarquant que  $G$  est bien une primitive (la calculer en fonction de  $F$  par le théorème fondamental), et que 2 primitives sur un intervalle diffèrent d'une constante ▷

**Théorème 10.1.4 (Théorème des valeurs intermédiaires, admis)**

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ . Alors toute valeur  $y_0$  comprise entre  $f(a)$  et  $f(b)$  est dans l'image de  $f$ .

**II Exponentielle, logarithme, puissances**

Afin de contourner le problème de l'existence de l'exponentielle (admise au lycée), nous abordons les choses en sens inverse, en commençant par définir le logarithme.

**II.1 Logarithme****Définition 10.2.1 (fonction logarithme (népérien)  $\ln$ , courbe figure 10.1)**

La fonction  $\ln$  est l'unique primitive de  $x \mapsto \frac{1}{x}$  sur  $]0, +\infty[$  s'annulant en 1

Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{dx}{x}.$$

**Propriétés 10.2.2 (propriétés de  $\ln$ )**

Soit  $f : x \mapsto \ln(x)$ .

- Domaine de définition :  $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ .
- Dérivation :  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $]0, +\infty[$ ,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{1}{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

- Variations :  $\ln$  est croissante sur son domaine.
- Propriétés de convexité :  $\ln$  est **concave** sur  $\mathbb{R}_+^*$
- Inégalité classique :  $\forall x \in ]-1, \infty[$ ,  $\ln(1+x) \leq x$
- Propriété remarquable : si  $a > 0$  et  $b > 0$ ,  $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ ,  $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ .  
En particulier,  $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$ .
- Valeurs remarquables et limites :
  - \*  $\ln(1) = 0$
  - \*  $\ln(e) = 1$  (c'est la définition de  $e$ )
  - \*  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$
  - \*  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ .
- Limite remarquable :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ .

◁ **Éléments de preuve.**

- Propriété remarquable : considérer  $x \mapsto \ln(ax)$  dont la dérivée est  $\frac{1}{x}$ . Ainsi,  $x \mapsto \ln(x)$  et  $x \mapsto \ln(ax)$  diffèrent d'une constante. Évaluer en un point bien choisi.
- Limite en  $+\infty$  : elle existe dans  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . Considérer  $\ln(2x) - \ln(x)$  pour justifier qu'elle ne peut pas être finie.
- Limite en 0 : Se ramener en  $+\infty$ .
- Limite remarquable : c'est un taux d'accroissement.

▷

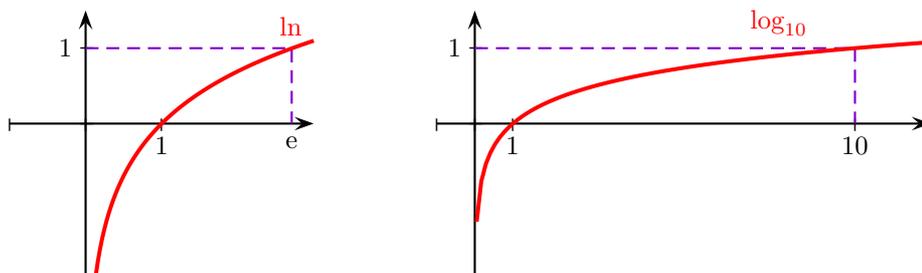


FIGURE 10.1 – Graphes de  $\ln$  et  $\log_{10}$

## II.2 Exponentielle réelle

**Lemme 10.2.3 (Version faible du théorème de la bijection)**

Soit  $a < b$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$ , et  $I = ]a, b[$ . Soit  $f : I \rightarrow +\infty$  une fonction strictement croissante. On note  $\alpha = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  et  $\beta = \lim_{x \rightarrow b} f(x)$ , qui existent par croissance de  $f$ . Alors  $f$  est bijective de  $I$  sur  $] \alpha, \beta [$  et

$$\lim_{y \rightarrow \alpha} f^{-1}(y) = a \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow \beta} f^{-1}(y) = b.$$

◁ **Éléments de preuve.**

L'injectivité découle de la croissance stricte, la surjectivité provient du TVI. Comme  $f^{-1}$  est strictement monotone, les limites existent, et, si on les note  $a'$  et  $b'$ ,  $\text{Im}(f^{-1}) \subset ]a', b'[,$  et doivent être adhérentes à  $]a, b[$ .

▷

**Lemme 10.2.4 (Bijection induite par le ln)**

Le logarithme se restreint en une bijection de  $\mathbb{R}_+^*$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Définition 10.2.5 (fonction exponentielle exp, courbe figure 10.2)**

La fonction exp est la réciproque de ln (bijective de  $\mathbb{R}_+^*$  sur  $\mathbb{R}$ ). Elle est indifféremment notée  $x \mapsto \exp(x)$  ou  $x \mapsto e^x$ . On justifiera cette notation plus loin. En attendant, on préfère la première.

**Propriétés 10.2.6 (propriétés de la fonction exp)**

Soit  $f : x \mapsto \exp(x)$ .

- Domaine de définition :  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ .
- Dérivation :  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ ,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \exp(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, f^{(n)}(x) = \exp(x).$$

- Variations :  $\exp$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .
- Propriétés de convexité :  $\exp$  est convexe sur  $\mathbb{R}$
- Inégalité classique :  $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \geq x + 1$
- Valeurs remarquables et limites :
  - \*  $\exp(0) = 1$
  - \*  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$
  - \*  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$ .
  - \* On définit le réel  $e$  par  $e = \exp(1)$ .
- Limite remarquable :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$ .
- Autres propriétés remarquables :
  - \*  $\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b)$
  - \*  $\ln(\exp(x)) = x$ , en particulier  $\ln(e) = 1$ .
  - \*  $\exp(\ln x) = x$

◁ **Éléments de preuve.**

- Dérivée : utiliser la formule de dérivation des réciproques
- Inégalité classique : par convexité
- Limites en  $+\infty$  et  $-\infty$  : se déduisent des limites du logarithme.
- Limite remarquable : c'est un taux d'accroissement
- Autres propriétés remarquables : se ramener au logarithme. Les dernières ne font qu'exprimer la définition.

▷

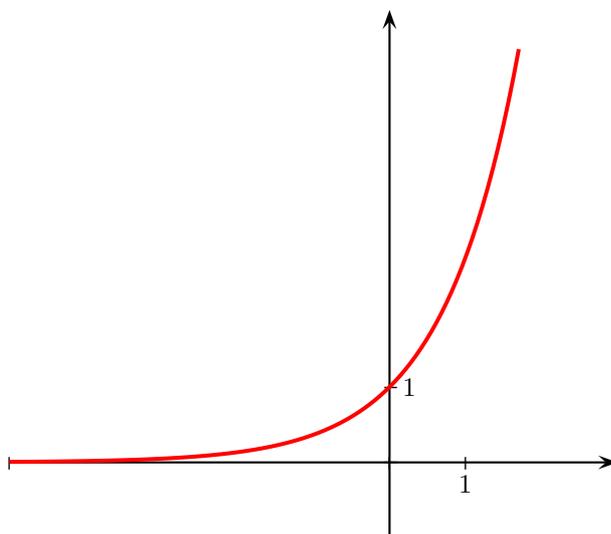


FIGURE 10.2 – Courbe de la fonction  $\exp$

### II.3 Fonctions puissances

**Définition 10.2.7 (puissance, ou exponentiation)**

Pour tout  $x > 0$  et tout  $y \in \mathbb{R}$ , on définit  $x^y = \exp(y \ln x)$ .

Si  $y = n \in \mathbb{Z}$ , cela correspond à la puissance  $x^n$  obtenue par itération du produit. Remarquez que dans ce cas (et uniquement dans ce cas), on peut étendre, par itération du produit, la définition de la puissance  $x^y$  pour  $x \leq 0$ , mais prenez garde à ne pas écrire cette puissance sous forme exponentielle : cela n'a pas de sens. On pose aussi par convention :

### Convention 10.2.8 (puissances de 0)

Soit  $y \in \mathbb{R}^+$ , on pose :

$$0^y = \begin{cases} 0 & \text{si } y > 0 \\ 1 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

Il s'agit du prolongement par continuité de  $x \mapsto x^y$ , à  $y$  fixé.

On a alors les règles suivantes :

### Propriétés 10.2.9 (règles d'exponentiation)

Soit  $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ , et  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

- $\exp(x) = e^x$
- $\ln(x^a) = a \ln x$ .
- $x^{a+b} = x^a x^b$
- $(x^a)^b = x^{ab}$
- $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$
- Si  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$
- $x^a y^a = (xy)^a$

#### ◁ Éléments de preuve.

Cela découle des règles usuelles vérifiées par le logarithme et l'exponentielle. ▷

### Définition 10.2.10 (Fonctions puissances)

Les fonctions puissances sont les fonctions  $x \mapsto x^a$ ,  $a \in \mathbb{R}$

### Proposition 10.2.11 (Domaine de définition des fonctions puissance)

- Si  $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$ ,  $x \mapsto x^a$  est définie sur  $\mathbb{R}_+$
- Si  $a \in \mathbb{R}_- \setminus \mathbb{Z}$ ,  $x \mapsto x^a$  est définie sur  $\mathbb{R}_+^*$
- Si  $a \in \mathbb{N}$ ,  $x \mapsto x^a$  est définie sur  $\mathbb{R}$  (par itération du produit)
- Si  $a \in \mathbb{Z}_-^*$ ,  $x \mapsto x^a$  est définie sur  $\mathbb{R}^*$  (par itération du produit par l'inverse de  $x$ ).

### Proposition 10.2.12 (Dérivation des fonctions puissance)

- La fonction  $f_a : x \mapsto x^a$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'_a(x) = ax^{a-1}.$$

- Si  $a \geq 1$ , cette propriété s'étend à  $\mathbb{R}_+$ .
- Si  $a \in \mathbb{N}^*$ , cette propriété s'étend à  $\mathbb{R}$ .
- Si  $a \in \mathbb{Z}_-$ , cette propriété s'étend à  $\mathbb{R}^*$ .

## II.4 Exponentielle et logarithme de base $b$

### Définition 10.2.13 (Exponentielle de base $b$ )

Soit  $b > 0$ . L'exponentielle de base  $b$  est l'application définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\exp_b(x) = b^x$$

### Proposition 10.2.14

*Dérivée et bijectivité*

- La fonction  $\exp_b$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp_b'(x) = \ln(b) \exp_b(x).$$

- La fonction  $\exp_b$  se corestreint en une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ .

### Définition 10.2.15 (logarithme de base $b > 1$ )

Soit  $b > 1$ , le logarithme de base  $b$  est la fonction réciproque de  $x \mapsto b^x$ , bijective de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ . Elle est notée  $\log_b$ . Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\log_b(b^x) = x$ , et en particulier,  $\log_b(b) = 1$ .

Par exemple, on utilise beaucoup en physique le logarithme en base 10, défini par la relation  $\log_{10}(10^x) = x$ . Le logarithme en base 10 est souvent notée simplement  $\log$  au lieu de  $\log_{10}$ . Il n'est pas très utilisé en mathématiques.

En informatique, c'est le logarithme en base 2 qui est le plus fréquemment utilisé. On le note souvent  $\lg$ .

### Proposition 10.2.16 (expression de $\log_b$ en fonction de $\ln$ )

Pour tout  $x > 0$ ,  $\log_b(x) = \frac{\ln x}{\ln b}$ . En particulier, on en déduit que

$$\log_b'(x) = \frac{1}{x \ln(b)}.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Vérifier  $b^{\frac{\ln(x)}{\ln(b)}} = x$ . ▷

Ainsi, la courbe de  $\log_b$  (donnée en figure 10.1 pour  $b = 10$ ) s'obtient de celle de  $\ln$  par affinité verticale de rapport  $\frac{1}{\ln b}$ . On en déduit notamment la croissance, la concavité, les limites, l'égalité  $\log_b(1) = 0$ , ainsi que l'identité remarquable :

$$\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y).$$

Remarquons pour terminer que le logarithme népérien n'est rien d'autre que le logarithme en base  $e$ .

## II.5 Croissances comparées

Les fonctions exponentielle, logarithme, puissances sont souvent utilisées pour donner des ordres de grandeur au voisinage de 0 ou vers l'infini. Il est donc important de pouvoir comparer entre elles ces fonctions, au moins pour les très grandes ou très petites (en valeurs absolues) valeurs.

### Théorème 10.2.17 (théorème des croissances comparées en $+\infty$ )

1. Pour tout  $\alpha > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$ .
2. Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$ .

◁ **Éléments de preuve.**

- Le cas de  $\frac{\ln(x)}{x}$  s'obtient en majorant le logarithme : pour cela, exprimer le logarithme sous forme intégrale, et majorer dans l'intégrale  $\frac{1}{t}$  par  $\frac{1}{\sqrt{t}}$ .
- Pour  $\frac{\ln(x)}{x^\alpha}$ , se ramener au cas précédent, en posant  $y = x^\alpha$ .
- Pour  $\frac{x^\alpha}{e^x}$  évacuer le cas  $\alpha \leq 0$ , puis poser  $y = (e^x)^{\frac{1}{\alpha}}$ .

▷

Ce théorème affirme que la fonction  $\ln$  est très petite à l'infini (= « négligeable ») devant les fonctions puissances (d'exposant fixe), elles mêmes très petites devant l'exponentielle. Aussi dit-on souvent « l'exponentielle l'emporte sur les puissances, qui l'emportent sur le  $\ln$  ».

Comme de plus, on peut facilement comparer les fonctions puissances entre elles, on peut écrire, pour synthétiser les croissances comparées :

$$\text{Si } a < b, \text{ au voisinage de } +\infty, \boxed{\ln(x) \ll x^a \ll x^b \ll e^x}$$

Ici le signe  $\ll$  est à lire « est négligeable devant » (prenez-le pour le moment au sens intuitif).

Dans les situations plus complexes, on peut toujours se ramener à ces situations, en écrivant les puissances sous forme exponentielle, et en étudiant la limite de l'exposant.

**Exemple 10.2.18**

1. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x}$
2. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\ln x} e^{-\sqrt{x}}$
3. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-\sqrt{\ln x}}$ .

**Théorème 10.2.19 (théorème des croissances comparées en 0)**

Pour tout  $\alpha > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0$

◁ **Éléments de preuve.**

Poser  $y = \frac{1}{x}$  pour se ramener en  $+\infty$ .

▷

Ainsi,  $\ln x$  est « négligeable » devant les fonctions  $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ , ce qui signifie que ces dernières tendent vers  $-\infty$  beaucoup plus vite que  $\ln$ .

### III Fonctions trigonométriques

Nous avons déjà défini et fait une étude sommaire des fonctions trigonométriques  $\sin$ ,  $\cos$  et  $\tan$ . Nous complétons un peu cette étude, notamment avec l'expression des dérivées, que nous n'avions pas données à ce moment-là.

#### III.1 Sinus

**Propriétés 10.3.1 (propriétés de  $\sin$ )**

Soit  $f : x \mapsto \sin x$ .

- Domaine de définition :  $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ .
- Symétries :  $\sin$  est  $2\pi$ -périodique et impaire.

- Dérivation :  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ ,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall N \in \mathbb{N}^*, \quad f^{(N)}(x) = \sin\left(x + \frac{N\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^n \sin(x) & \text{si } N = 2n \\ (-1)^n \cos(x) & \text{si } N = 2n + 1. \end{cases}$$

- Variations : Voir le chapitre sur les nombres complexes
- Valeurs particulières : Voir le chapitre sur les nombres complexes
- Limites : Pas de limite en  $+\infty$  et  $-\infty$ .
- Propriétés de convexité :  
sin est convexe sur les intervalles  $[-\pi, 0] + 2k\pi$  et concave sur les intervalles  $[0, \pi] + 2k\pi$
- Inégalités classiques
  - \*  $\forall x \in \mathbb{R}_+, \sin x \leq x$
  - \*  $\forall x \in \mathbb{R}_-, \sin x \geq x$
  - \* Ou de façon plus synthétique :  $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|$ .
  - \*  $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \sin x \geq \frac{2x}{\pi}$ .
- Limite remarquable :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

#### ◁ Éléments de preuve.

Les inégalités classiques s'obtiennent par concavité sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  (comparaison à la tangente en 0 ou aux cordes), qu'on prolonge facilement à  $\mathbb{R}_+$  pour la première. La limite remarquable peut être vue comme un taux d'accroissement. Mais comme on a établi la formule de dérivation du sinus à partir de cette limite, ce point de vue n'est pas satisfaisant. Se rappeler qu'on a obtenu cette limite par un argument géométrique, en comparant certaines aires dans le cercle trigonométrique. ▷

## III.2 Cosinus

### Propriétés 10.3.2 (propriétés de cos)

Soit  $f : x \mapsto \cos x$ .

- Domaine de définition :  $\mathbb{R}$ .
- Symétries : cos est  $2\pi$ -périodique et paire.
- Dérivation :  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ ,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -\sin(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall N \in \mathbb{N}^*, \quad f^{(N)}(x) = \cos\left(x + \frac{N\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^n \cos(x) & \text{si } N = 2n \\ (-1)^{n+1} \sin(x) & \text{si } N = 2n + 1. \end{cases}$$

- Variations : Voir le chapitre sur les nombres complexes
- Valeurs particulières : Voir le chapitre sur les nombres complexes
- Limites : Pas de limite en  $+\infty$  et  $-\infty$ .
- Limite remarquable :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ .

#### ◁ Éléments de preuve.

La limite remarquable se déduit de celle portant sur le sinus, en exprimant  $1 - \cos(x)$  à l'aide de  $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ . ▷

### III.3 Tangente

#### Propriétés 10.3.3 (propriétés de tan)

Soit  $f : x \mapsto \tan x$ .

- Domaine de définition :  $\tan : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ .
- Symétries :  $\tan$  est  $\pi$ -périodique et impaire.
- Dérivation :  $\tan$  est de classe  $C^\infty$  sur son domaine,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2(x)$$

- Variations : Voir le chapitre sur les nombres complexes
- Valeurs particulières : Voir le chapitre sur les nombres complexes
- Inégalités classiques :
  - \*  $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ ,  $\tan(x) \geq x$  (comparaison à la tangente en 0)
  - \*  $\forall x \in ]-\frac{\pi}{2}, 0]$ ,  $\tan(x) \leq x$ .
  - \* Ou de façon plus synthétique :  $\forall x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ,  $|\tan(x)| \geq |x|$
- Limite remarquable :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

#### ◁ Éléments de preuve.

Les inégalités classiques sont des inégalités de convexité. La limite remarquable est un taux d'accroissement, ou découle de celle portant sur le sinus. ▷

Les deux expressions de la dérivée de  $\tan$  sont à connaître, car suivant les situations, on peut avoir intérêt à utiliser l'une ou l'autre.

Les courbes des fonctions trigonométriques sont représentées dans le chapitre sur les nombres complexes. Évidemment, parmi les propriétés importantes à bien connaître, il y a toutes les formules de trigonométrie déjà vues dans un chapitre antérieur.

## IV Réciproques des fonctions trigonométriques

Les fonctions trigonométriques ne sont pas bijectives ni même injectives (elles ne peuvent pas l'être puisqu'elles sont périodiques). Même sur une période, on n'a pas l'injectivité (sauf pour la tangente). Mais en restreignant davantage le domaine de définition, on obtient des fonctions injectives, surjectives sur leur image. Cela permet de considérer leurs fonctions réciproques. Le graphe de ces fonctions s'obtient alors en utilisant la proposition 9.4.1, par symétrie par rapport à la première bissectrice.

### IV.1 Arctangente

La plus importante des fonctions réciproques de fonctions trigonométriques est probablement l'arctangente. Nous commençons donc par elle.

#### Définition 10.4.1 (arctangente, Arctan, courbe figure 10.3)

La fonction  $\tan$  se restreint en une bijection de  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  sur  $\mathbb{R}$ .

La fonction arctangente, notée  $\text{Arctan}$ , est par définition la réciproque de  $\tan$  restreinte à  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Le théorème de dérivation des fonctions réciproques permet d'obtenir le résultat important suivant :

#### Théorème 10.4.2 (Dérivée de Arctan)

La fonction  $f = \text{Arctan}$  est définie et de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

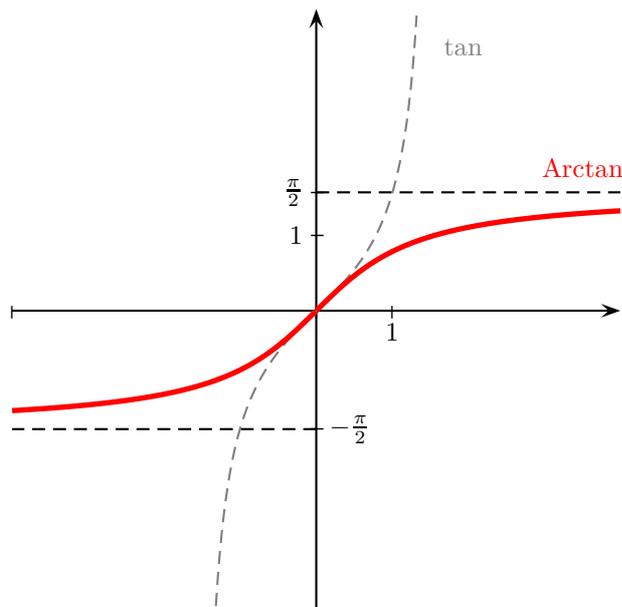


FIGURE 10.3 – Courbe de Arctan

◁ **Éléments de preuve.**

Utiliser la formule de dérivation des fonctions réciproques. ▷

Ainsi, il faut toujours garder en tête les deux facettes de l'Arctan :

- définition comme fonction réciproque de la tangente
- l'arctangente se « dérive bien » (en une fraction rationnelle); autrement dit, Arctan est une primitive d'une fonction rationnelle simple (à retenir, on s'en sert très souvent dans des calculs d'intégrales)

Une fois l'expression de la dérivée obtenue, le reste de l'étude de la fonction Arctan est classique.

**Propriétés 10.4.3 (propriétés de Arctan)**

Soit  $f : x \mapsto \text{Arctan}(x)$

- Domaine de définition :  $\text{Arctan} : \mathbb{R} \rightarrow ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .

- Symétries : Arctan est impaire.

- Variations : Arctan est croissante sur  $\mathbb{R}$ .

- Valeurs remarquables :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arctan}(x) = -\frac{\pi}{2}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Arctan}(0) = 0$$

$$\text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}; \quad \text{Arctan}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

$$\text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}; \quad \text{Arctan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{Arctan}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}; \quad \text{Arctan}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$$

- Inégalité classique :  $\forall x \in \mathbb{R}, |\text{Arctan}(x)| \leq |x|$

- Limite remarquables :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arctan } x}{x} = 1$ .

- Autres propriétés remarquables :

$$* \forall x \in \mathbb{R}, \tan(\text{Arctan}(x)) = x$$

$$* \forall x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \text{Arctan}(\tan(x)) = x$$

$$* \forall x \in ]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[, \text{Arctan}(\tan(x)) = x - k\pi.$$

- \*  $\forall x \in \mathbb{R}^*$ ,  $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \varepsilon(x) \frac{\pi}{2}$ , où  $\varepsilon(x)$  est le signe de  $x$ .
- Arctangente et argument d'un complexe  
Soit  $z = a + ib$  un nombre complexe,  $a$  et  $b$  étant réels et  $a \neq 0$ . Alors

$$\arg(z) \equiv \operatorname{Arctan} \frac{b}{a} [\pi].$$

L'égalité est valable modulo  $2\pi$  si et seulement si  $a > 0$ .

#### ◁ Éléments de preuve.

Les limites découlent des asymptotes verticales de la tangente.

Encore une fois, les inégalités sont des inégalités de convexité. La limite remarquable est un taux d'accroissement. On peut aussi déduire ces propriétés des propriétés similaires de la tangente.

Les deux premiers points des propriétés remarquables ne font qu'exprimer la définition de l'arctangente. Le troisième ramène à l'intervalle  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  pour pouvoir utiliser la définition. Le quatrième peut s'obtenir par dérivation de l'expression et simplification (c'est un procédé classique). ▷

## IV.2 Arcsinus

### Définition 10.4.4 (fonction arcsinus, Arcsin, courbe figure 10.4)

La fonction sin induit par restriction une bijection de  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  dans  $[-1, 1]$ . La réciproque de cette fonction est appelée arcsinus, notée  $\operatorname{Arcsin} : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

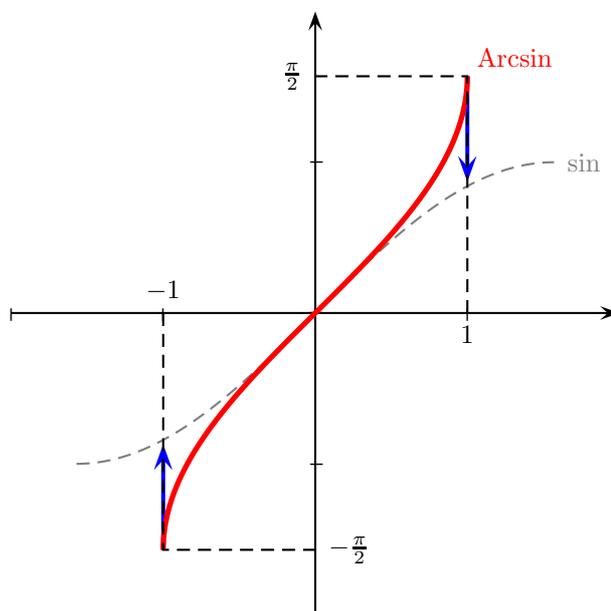


FIGURE 10.4 – Graphe de Arcsin

Comme pour la fonction  $\operatorname{Arctan}$ , la première étape de l'étude est l'obtention de l'expression de la dérivée. Là encore, on obtient une dérivée très simple ; ainsi,  $\operatorname{Arcsin}$  est à voir comme primitive d'une certaine expression, qui n'est pas une fraction rationnelle cette fois, mais qu'on rencontre tout de même assez souvent dans des calculs d'intégrales.

**Théorème 10.4.5 (Dérivée de Arcsin)**

La fonction  $f = \text{Arcsin}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -1, 1[$ , et

$$\forall x \in ] -1, 1[, \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

En revanche, elle n'est pas dérivable en  $-1$  et  $1$ , et la courbe présente en ces points des tangentes verticales.

◁ **Éléments de preuve.**

Dérivée de fonctions réciproques. ▷

**Propriétés 10.4.6 (propriétés de Arcsin)**

Soit  $f : x \mapsto \text{Arcsin}(x)$

- Domaine de définition :  $[-1, 1]$ .
- Dérivation :  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -1, 1[$ , et :  $\forall x \in ] -1, 1[, \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .
- Symétries : Arcsin est impaire.
- Variations : Arcsin est croissante sur  $[-1, 1]$ .
- Valeurs remarquables : voir tableau figure 10.6
- Limite remarquables :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arcsin}x}{x} = 1$ .
- Autres propriétés remarquables :
  - \*  $\forall x \in [-1, 1], \quad \sin(\text{Arcsin}(x)) = x$
  - \*  $\forall x \in ] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad \text{Arcsin}(\sin(x)) = x$
  - \*  $\forall x \in ] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[, \quad \text{Arcsin}(\sin(x)) = \pi - x$
  - \* Les autres valeurs de  $\text{Arcsin}(\sin(x))$  s'obtiennent en se ramenant à un de ces deux intervalles par périodicité, comme dans le cas de l'arctangente.

◁ **Éléments de preuve.**

C'est toujours un peu pareil. Pour les derniers points, on peut toujours se ramener à  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$  par périodicité. Sur la deuxième moitié de l'intervalle, il faut utiliser la symétrie par  $\pi - x$  pour se ramener au bon intervalle. ▷

**IV.3 Arccosinus**

L'étude de l'arccosinus, réciproque de cos sur un intervalle adéquat, est très similaire à celle de l'arcsin.

**Définition 10.4.7 (fonction arccosinus, Arccos, courbe figure 10.5)**

La fonction cos induit par restriction une bijection de  $[0, \pi]$  dans  $[-1, 1]$ . La réciproque de cette fonction est appelée arccosinus, notée  $\text{Arccos} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ .

De par les symétries existant entre sin et cos, les courbes de Arccos et Arcsin peuvent se déduire l'une de l'autre par des symétries (qu'on explicite dans les propriétés ci-dessous). On obtient donc sans surprise :

**Théorème 10.4.8 (Dérivée de Arccos)**

La fonction  $f = \text{Arccos}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -1, 1[$ , et

$$\forall x \in ] -1, 1[, \quad f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

En revanche, elle n'est pas dérivable en  $-1$  et  $1$ , et la courbe présente en ces points des tangentes verticales.

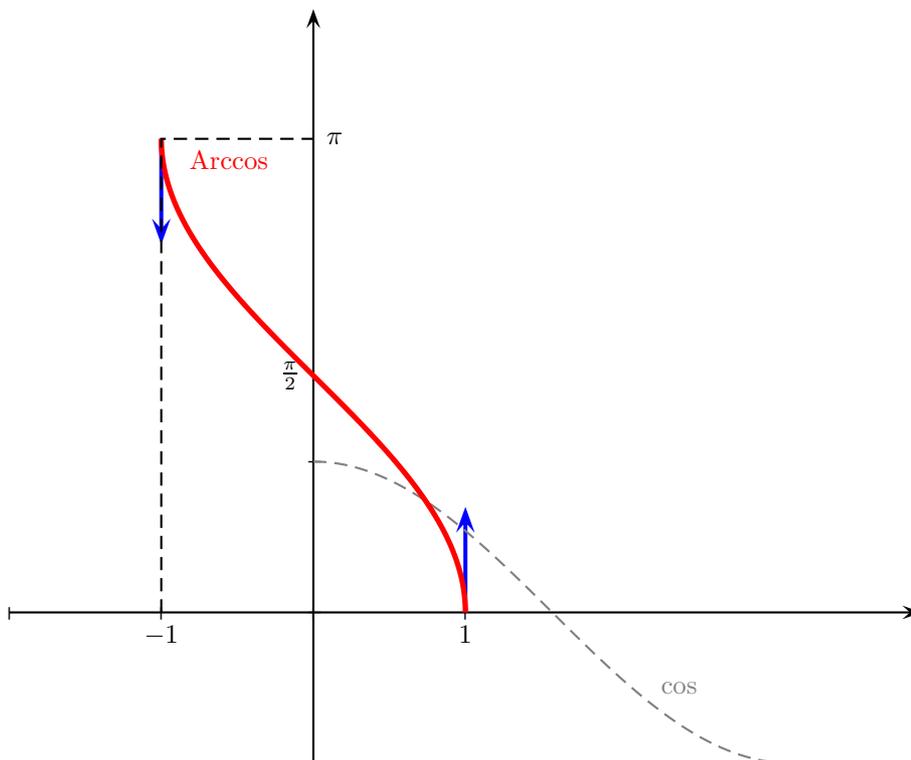


FIGURE 10.5 – Graphe de Arccos

◁ **Éléments de preuve.**

Dérivée de fonctions réciproques.

▷

**Propriétés 10.4.9 (propriétés de Arccos)**

Soit  $f : x \mapsto \text{Arccos}(x)$

- Domaine de définition :  $[-1, 1]$ .
- Dérivation :  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -1, 1[$ , et  $\forall x \in ] -1, 1[$ ,  $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .
- Variations : Arccos est décroissante sur  $[-1, 1]$ .
- Valeurs remarquables : voir tableau figure 10.6
- Autres propriétés remarquables :
  - \*  $\forall x \in [-1, 1]$ ,  $\cos(\text{Arccos}(x)) = x$
  - \*  $\forall x \in [0, \pi]$ ,  $\text{Arccos}(\cos(x)) = x$
  - \*  $\forall x \in [-\pi, 0]$ ,  $\text{Arccos}(\cos(x)) = -x$
  - \* Les autres valeurs de  $\text{Arccos}(\cos(x))$  s'obtiennent en se ramenant à un de ces deux intervalles par périodicité.
  - \*  $\text{Arccos}(x) + \text{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}$  (symétrie entre Arccos et Arcsin)

## V Fonctions hyperboliques

D'autres fonctions qu'on rencontre fréquemment en physique, et qui sont bien utiles en mathématiques, notamment pour le calcul de certaines intégrales, sont les fonctions hyperboliques, qui sont obtenues à l'aide de l'exponentielle réelle par des formules ressemblant aux formules d'Euler, liant les fonctions trigonométriques et l'exponentielle complexe. Cette analogie forte avec les fonctions trigonométriques motive

	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$
Arctan	0		$\frac{\pi}{6}$			$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
Arcsin	0	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	
Arccos	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	

FIGURE 10.6 – Tableau des valeurs particulières de Arctan, Arcsin, Arccos.

la terminologie utilisée (sinus hyperbolique, cosinus hyperbolique...), et explique pourquoi la plupart des formules de trigonométrie ont un analogue hyperbolique.

**Définition 10.5.1 (sinus, cosinus, tangente hyperboliques, figure 10.7)**

Les fonctions « sinus hyperbolique », « cosinus hyperbolique » et « tangente hyperbolique », notées respectivement sh, ch et th, sont les fonctions définies par les formules :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}.$$

Vous pouvez constater que sh et ch sont en fait, de par leur définition même, la partie impaire et la partie paire de la fonction exponentielle. Ainsi, sh est impaire, ch est paire, et  $\text{sh} + \text{ch} = \exp$ .

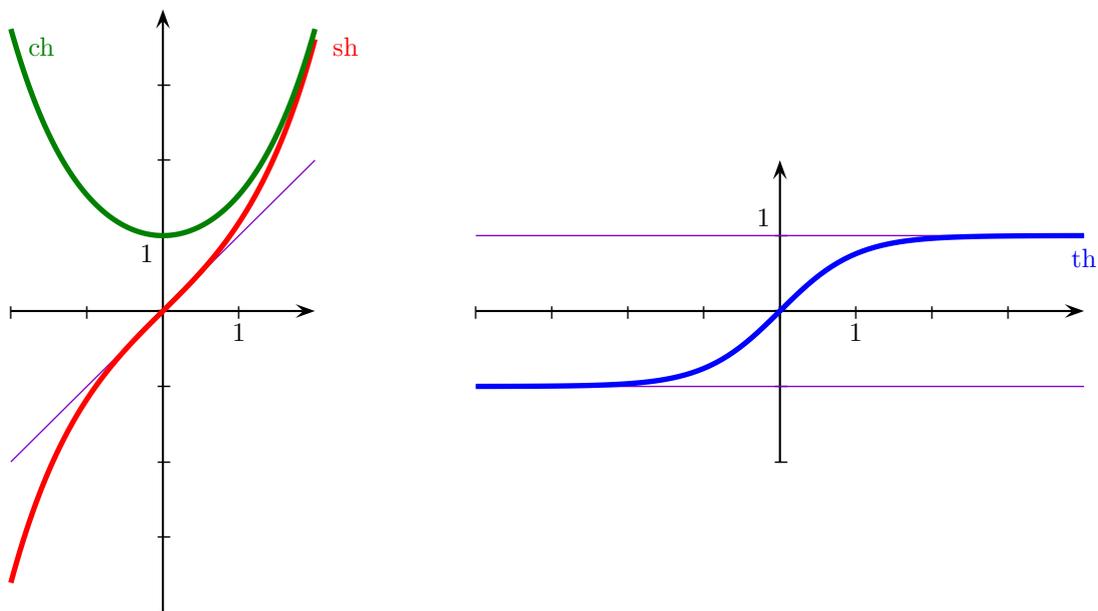


FIGURE 10.7 – Graphes des fonctions hyperboliques

**Propriétés 10.5.2 (propriétés de sh)**

Soit  $f : x \mapsto \text{sh}(x)$

- Domaine de définition :  $\mathbb{R}$ .

- Dérivation :  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \operatorname{ch}(x), \quad f^{(n)}(x) = \begin{cases} \operatorname{ch}(x) & \text{si } n \text{ impair} \\ \operatorname{sh}(x) & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

- Symétries :  $\operatorname{sh}$  est impaire.
- Variations :  $\operatorname{sh}$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .
- Valeurs remarquables :  $\operatorname{sh}(0) = 0$
- Inégalités classiques :
  - \*  $\forall x \in \mathbb{R}_+$ ,  $\operatorname{sh}(x) \geq x$  (comparaison à la tangente en 0)
  - \*  $\forall x \in \mathbb{R}_-$ ,  $\operatorname{sh}(x) \leq x$  (idem)
- Limite remarquables :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}(x)}{x} = 1$ .

### Propriétés 10.5.3 (propriétés de $\operatorname{ch}$ )

Soit  $f : x \mapsto \operatorname{ch}(x)$

- Domaine de définition :  $\mathbb{R}$ .
- Dérivation :  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \operatorname{sh}(x), \quad f^{(n)}(x) = \begin{cases} \operatorname{sh}(x) & \text{si } n \text{ impair} \\ \operatorname{ch}(x) & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

- Symétries :  $\operatorname{ch}$  est paire.
- Variations :  $\operatorname{ch}$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_-$  et croissante sur  $\mathbb{R}_+$ .
- Valeurs remarquables :  $\operatorname{ch}(0) = 1$
- Limite remarquables :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch}(x) - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$ .

◁ Éléments de preuve.

Sans difficulté, toujours pareil. ▷

Nous ne donnons qu'une formule de trigonométrie hyperbolique, les autres peuvent être retrouvées à l'aide des exponentielles (par exemple des formules pour  $\operatorname{sh}(a+b)$ ,  $\operatorname{sh}(a) + \operatorname{sh}(b)$  etc).

### Théorème 10.5.4 (identité remarquable)

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$ .

◁ Éléments de preuve.

Factoriser cette différence de deux carrés. ▷

### Propriétés 10.5.5 (propriétés de $\operatorname{th}$ )

Soit  $f : x \mapsto \operatorname{th}(x)$

- Domaine de définition :  $\mathbb{R}$ .
- Dérivation :  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , et :  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 1 - \operatorname{th}^2(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$
- Symétries :  $\operatorname{th}$  est impaire.
- Variations :  $\operatorname{th}$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .
- Valeurs remarquables :  $\operatorname{th}(0) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{th}(x) = -1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{th}(x) = 1$ .
- Limite remarquables :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{th}(x)}{x} = 1$ .

**Note Historique 10.5.6**

- Le premier à introduire les fonctions hyperboliques est le mathématicien et physicien italien Jacopo Riccati en 1760, dans le but d'exprimer l'aire sous une hyperbole (d'où le nom donné à ces fonctions). Ses définitions sont purement géométriques, et ne font pas référence à l'exponentielle.
- C'est Jean-Henri Lambert vers 1770 qui exprime sh et ch à l'aide de la fonction exponentielle, et qui en fait une étude complète.

**VI Réciproques des fonctions hyperboliques (HP)**

Les réciproques des fonctions hyperboliques sont hors programme. Signalons tout de même que :

- sh est bijective de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , et sa réciproque est appelée « argument sinus hyperbolique » et notée Argsh.
- ch est bijective de  $\mathbb{R}_+$  sur  $[1, +\infty[$ , et sa réciproque, définie sur  $[1, +\infty[$ , est appelée « argument cosinus hyperbolique » et notée Argch
- th est bijective de  $\mathbb{R}$  sur  $] - 1, 1[$ , et sa réciproque, définie sur  $] - 1, 1[$ , est appelée « argument tangente hyperbolique », et notée Argth.

Une propriété remarquable des fonctions Argsh, Argch et Argth est qu'elles peuvent s'exprimer explicitement à l'aide des fonctions ln et  $\sqrt{\quad}$ .

Soit en utilisant ces expressions explicites, soit en utilisant le théorème de dérivation des fonctions réciproques, on obtient la dérivabilité de ces fonctions (sauf Argch en 1) et les expressions

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad \forall x \in ]1, +\infty[, \text{Argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad \forall x \in ]-1, 1[, \text{Argth}'(x) = \frac{1}{1 - x^2}.$$

**VII Tableau des dérivées des fonctions usuelles**

Le tableau 10.8 rappelle l'ensemble des dérivées à bien connaître. Nous n'y incluons pas les dérivées des réciproques des fonctions hyperboliques (HP).

$f(x)$	domaine de définition	domaine de dérivabilité	$f'(x)$
$c$ ( $c \in \mathbb{R}$ )	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
$x^n$ ( $n \in \mathbb{N}^*$ )	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$nx^{n-1}$
$x^n$ ( $n \in \mathbb{Z}_-^*$ )	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$nx^{n-1}$
$x^\alpha$ ( $\alpha \in ]1, +\infty[ \setminus \mathbb{N}$ )	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$x^\alpha$ ( $\alpha \in ]0, 1[$ )	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$
cas particulier $\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x^\alpha$ ( $a \in \mathbb{R}_-^*$ )	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$e^x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$e^x$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$
$\log_b(x)$ ( $b \in \mathbb{R}_+^*$ )	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x \ln b}$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$	idem	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
$\text{Arcsin}(x)$	$[-1, 1]$	$] -1, 1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\text{Arccos}(x)$	$[-1, 1]$	$] -1, 1[$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\text{Arctan}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\text{sh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\text{ch}(x)$
$\text{ch}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\text{sh}(x)$
$\text{th}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$1 - \text{th}^2(x) = \frac{1}{\text{ch}^2(x)}$

FIGURE 10.8 – Tableau des dérivées à connaître



# Calcul intégral

*Lorsqu'on a vu un étudiant de deuxième ou troisième année en Faculté des Sciences peiner pendant 10 minutes pour faire un changement de variables ou une intégration par parties, on ne peut être que prodigieusement agacé, surtout (comme c'est parfois le cas) si le même étudiant assaisonne son ignorance et sa maladresse d'un jargon prétentieux et inutile qu'il n'a pas su davantage assimiler*

(Jean Dieudonné)

Le but de ce chapitre est de fournir les bases du calcul intégral. Il s'agit donc de développer les techniques calculatoires, sans se préoccuper pour le moment des fondements théoriques du calcul intégral (à savoir la théorie de l'intégration, avec la construction de l'intégrale). Pour ce faire, notre point de départ sera le théorème fondamental du calcul intégral affirmant que l'intégrale est obtenue comme différence de la primitive évaluée aux deux bornes. Ce théorème sera démontré dans un chapitre ultérieur.

À partir de là, nous développons toutes les techniques calculatoires usuelles, en particulier l'intégration par parties et le changement de variables. Nous donnons une ouverture vers les formules de Taylor, la formule de Taylor avec reste intégral étant obtenue par intégrations par parties itérées.

Sauf mention explicite du contraire, les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur un intervalle  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$ , et à valeurs réelles. Nous discuterons rapidement en fin de chapitre du cas des fonctions d'une variable réelle à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .

## I Calcul intégral et primitivation

Cette section a pour but de mettre en place de façon rapide (et sans aborder tous les aspects théoriques sous-jacents) les techniques du calcul intégral. La notion d'intégrabilité est à prendre ici dans un sens assez vague : une fonction sera dite intégrable sur un intervalle  $[a, b]$  si on sait définir correctement son intégrale  $\int_a^b f(x) dx$ . Nous préciserons ce point plus tard. L'exemple le plus important de fonctions intégrables est le cas des fonctions continues sur  $[a, b]$ , ou continues par morceaux. Vous pouvez dans ce chapitre vous limiter à cette situation.

### I.1 Résultats issus de la théorie

Nous admettons **provisoirement** les résultats de ce paragraphe, issus de la construction de l'intégrale. Certains avaient déjà été rappelés en préambule du chapitre précédent.

**Théorème 11.1.1 (Linéarité de l'intégrale, admis provisoirement)**

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions intégrables sur  $[a, b]$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors  $f + \lambda g$  est aussi intégrable et

$$\int_a^b f(x) + \lambda g(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \lambda \int_a^b g(x) \, dx.$$

**Théorème 11.1.2 (Chasles, admis provisoirement)**

Soit  $f$  une fonction intégrable sur  $[a, b]$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , et  $c \in [a, b]$ . Alors

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

**Théorème 11.1.3 (Croissance, positivité et stricte positivité de l'intégrale, admis prov.)**

1. Soit  $a < b$  et  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $[a, b]$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , et telles que  $f \leq g$  sur  $[a, b]$ . Alors :

$$\int_a^b f(t) \, dt \leq \int_a^b g(t) \, dt$$

2. En particulier, si  $f \geq 0$  sur  $[a, b]$ , alors  $\int_a^b f(t) \, dt \geq 0$ .

3. Enfin, si  $f$  est continue positive et non identiquement nulle sur  $[a, b]$ , alors  $\int_a^b f(t) \, dt > 0$ .

**Théorème 11.1.4 (Inégalité triangulaire intégrale, admis provisoirement)**

Soit  $a < b$ , et  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Alors

$$\left| \int_a^b f(t) \, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| \, dt.$$

Si  $a$  et  $b$  ne sont pas dans le bon sens, il faut penser à rétablir l'ordre des bornes d'abord. On peut aussi par convention désigner par  $[a, b]$  l'intervalle fermé dont les extrémités sont  $a$  et  $b$  (même si  $b < a$ ), et écrire dans tous les cas :

$$\left| \int_a^b f(t) \, dt \right| \leq \int_{[a, b]} |f(t)| \, dt,$$

cette notation signifiant qu'on considère l'intégrale de la borne inférieure à la borne supérieure de l'intervalle.

Ces deux résultats ne nous seront pas indispensables pour la plus grande partie de ce chapitre, mais peuvent être utiles au détour d'un exercice.

**Théorème 11.1.5 (Intégrabilité des fonctions continues, admis provisoirement)**

Les fonctions continues sur un intervalle fermé borné  $[a, b]$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , sont intégrables : on peut donc considérer leur intégrale  $\int_a^b f(t) \, dt$ .

Par ailleurs, nous rappelons la notion de primitive :

**Définition 11.1.6 (primitive)**

Soit  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Soit  $E$  un sous-ensemble ouvert de  $\mathbb{R}$  et  $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ . Une primitive  $F$  de  $f$  est une fonction  $F : E \rightarrow \mathbb{C}$ , dérivable sur  $E$  et telle que pour tout  $x \in E$ ,  $F'(x) = f(x)$ .

Les fonctions de dérivée nulle sur un intervalle étant les fonctions constantes, on a de façon immédiate :

**Proposition 11.1.7 (unicité d'une primitive à constante près)**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f$  admettant une primitive  $F$ . Alors l'ensemble des primitives de  $f$  sur  $I$  est  $\{F + c, c \in \mathbb{R}\}$ .

Autrement dit, deux primitives de  $f$  sur un intervalle  $I$  ne diffèrent que d'une constante additive.

En particulier, si  $f$  admet au moins une primitive, alors, étant donné  $x_0 \in I$  et  $y_0 \in \mathbb{R}$ , il existe une unique primitive  $F$  de  $f$  telle que  $F(x_0) = y_0$ .

**Avertissement 11.1.8**

Attention, ce résultat n'est pas vrai si  $I$  n'est pas un intervalle. Si  $I$  est une réunion disjointe d'intervalles ouverts, les primitives diffèrent d'une fonction constante sur chacun des intervalles ouverts de l'union (mais pouvant différer d'un intervalle à l'autre).

Nous pouvons maintenant énoncer, et démontrer à l'aide des résultats admis, notre point de départ pour l'étude pratique de l'intégration :

**Théorème 11.1.9 (Expression intégrale d'une primitive)**

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , et  $x_0 \in I$ . Alors la fonction :

$$F : x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) \, dt$$

est une primitive de  $f$ . Il s'agit de LA primitive s'annulant en  $x_0$ .

◁ **Éléments de preuve.**

Utiliser un résultat précédent pour justifier que  $F$  est bien défini. Étudier la dérivabilité en  $x$  par taux d'accroissement. Pour passer à la limite, encadrer  $f$  au voisinage de  $x$  entre  $f(x) - \varepsilon$  et  $f(x) + \varepsilon$ , par continuité. ▷

**Remarque 11.1.10**

En particulier, ce théorème affirme que toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle. On va même un peu plus loin puisqu'on donne une explicitation de cette primitive sous forme d'une intégrale.

**Remarque 11.1.11**

- Il existe des fonctions non continues admettant des primitives. On peut montrer par exemple que la fonction  $f : x \mapsto x^2 \sin(\frac{1}{x})$  est dérivable, de dérivée non continue. Cette dérivée, bien que non continue, admet donc une primitive.
- Cependant, toute fonction n'admet pas de primitive. On peut montrer par exemple qu'une dérivée vérifie toujours la propriété des valeurs intermédiaires, même si elle n'est pas continue (théorème de Darboux). Ainsi, toute fonction ne vérifiant pas la propriété des valeurs intermédiaires n'est pas primitivable. C'est le cas par exemple de  $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ , ou plus simplement de  $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ .

On en déduit de façon immédiate le théorème fondamental du calcul intégral :

**Théorème 11.1.12 (Théorème fondamental du calcul des intégrales)**

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Soit  $F$  une primitive de  $f$ . Alors :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

◁ **Éléments de preuve.**

$F$  diffère de  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  d'une constante, qu'on détermine en  $a$ . ▷

Nous faisons les mises en garde suivantes :

**Avertissement 11.1.13**

Le théorème fondamental du calcul des intégrales est énoncé pour des fonctions continues uniquement :

- Si  $f$  n'est pas continue,  $x \mapsto \int_{x_0}^x f(x) dx$  peut ne pas être une primitive de  $f$  (voir le cas d'une fonction obtenue en modifiant une valeur d'une fonction continue) ; il existe même des fonctions intégrables non primitivables
- Il existe des fonctions non intégrables  $f$  admettant des primitives ;  $f$  étant non intégrable, le théorème fondamental du calcul des intégrales tombe en défaut !

**Exemples 11.1.14**

- Pour un exemple illustrant le premier point, on peut admettre le théorème de Darboux énoncé dans la remarque précédente. Une fonction ne vérifiant pas la propriété des valeurs intermédiaires n'est donc pas une dérivée, et n'est par conséquent pas primitivable. Ce n'est pas dur de trouver une telle fonction, en s'arrangeant pour qu'elle soit intégrable (par exemple une fonction continue par morceaux).

Remarquez qu'on peut construire un exemple simple en partant d'une fonction continue simple (par exemple une fonction constante) et en remplaçant la valeur en un point. Les fonctions intégrales associées à la fonction initiale et à la fonction modifiée sont alors les mêmes et ne peuvent pas être primitive des deux fonctions à la fois.

- Pour un exemple illustrant le second point, on admettra qu'une fonction intégrable (au sens de Riemann) sur un intervalle fermé borné est bornée. On le justifiera dans un chapitre ultérieur. Considérez alors la fonction

$$F : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Vérifiez (en formant le taux d'accroissement en 0) que  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  donc sur  $[-1, 1]$ . Sa dérivée  $f$  est-elle intégrable ?

**Théorème 11.1.15 (Dérivation d'une intégrale dépendant de ses bornes)**

Soit  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $I$ . Soit  $u$  et  $v$  deux applications dérivables de  $J$  à valeurs dans  $I$ . Alors la fonction  $F$  définie sur  $J$  par  $F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$  est dérivable sur  $J$ , et

$$\forall x \in J, F'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)).$$

Si de plus  $f$  est de classe  $C^{n-1}$  et  $u$  et  $v$  sont de classe  $C^n$ , alors  $F$  est de classe  $C^n$ .

◁ **Éléments de preuve.**

Étant donné  $G$  une primitive de  $f$ , exprimer  $F$  en fonction de  $G$ ,  $u$  et  $v$  et dériver. ▷

## I.2 Primitivations composées

Dans toute la suite, et sauf mention explicite du contraire, les fonctions considérées sont définies sur un intervalle  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Le théorème fondamental du calcul intégral montre à quel point il est important de savoir calculer des primitives. En particulier, une bonne connaissance des primitives des fonctions usuelles est indispensable pour une bonne maîtrise du calcul intégral. Ces primitives dont une bonne connaissance est indispensable sont rappelées dans le tableau de la figure 11.1. **À connaître sur le bout des doigts.**

Par commodité, et par référence au théorème fondamental du calcul intégral, nous introduisons la notation suivante :

### Notation 11.1.16

Étant donnée une fonction continue  $f$ , on désigne par  $\int^x f(t) dt$  (fonction de la variable  $x$ ), ou parfois plus simplement par  $\int f$  une primitive générique de  $f$ .

### Avertissement 11.1.17

Il faut être bien conscient que cette notation n'est définie qu'à une constante près. Il s'agit donc d'un abus de notation, à manipuler avec précautions, comme toute notation abusive.

Des primitives usuelles, nous pouvons en déduire d'autres, obtenues par les règles de compositions, en lisant à l'envers la formule de dérivation des fonctions composées :

### Proposition 11.1.18 (primitivation de fonctions composées)

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert  $I$  et admettant une primitive  $F$ . Soit  $u$  une fonction dérivable de  $J$  dans  $I$ , où  $J$  est un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ . Alors, une primitive de  $u' \times f \circ u$  est  $F \circ u$  :

$$\int (u' \times f \circ u) = \left( \int f \right) \circ u.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Dériver  $F \circ u$ . ▷

### Avertissement 11.1.19

Attention, la fonction  $f \circ u$  ne se primitive pas en  $\frac{F \circ u}{u'}$  !!

### Exemples 11.1.20

1. Primitives de  $x \mapsto \frac{1}{x(1 + \ln x^2)}$ .
2. Primitives de  $x \mapsto \frac{x^3}{1 + x^4}$  et  $x \mapsto \frac{x}{1 + x^4}$

Un cas fréquent est celui d'une composition par  $x \mapsto (ax + b)$ . Ici, la dérivée de cette dernière fonction étant constante, on peut la passer du côté de la primitive (par linéarité de la dérivation). On obtient alors :

**Corollaire 11.1.21 (Primitivation de  $x \mapsto f(ax + b)$ )**

Soit  $F$  une primitive de  $f$  sur un intervalle  $I$ , et  $a$  et  $b$  deux réels,  $a \neq 0$ . Soit  $J$  un intervalle tel que  $aJ + b \subset I$ . Alors la fonction  $g : x \mapsto f(ax + b)$  est primitivable sur  $J$ , et une primitive en est  $G : x \mapsto \frac{1}{a}F(ax + b)$ .

Ce n'est bien sûr qu'une réexpression dans un cas très particulier du théorème général de primitivation des composées.

Nous voyons comment utiliser ce corollaire pour deux situations typiques importantes : la primitivation des fonctions du type  $e^{ax} \cos(bx)$ , et la primitivation des fractions rationnelles du type  $\frac{1}{ax^2 + bx + c}$ , qu'on rencontre assez fréquemment. La méthode, basée sur la mise sous forme canonique, est à savoir mettre en place sans hésiter

**Méthode 11.1.22 (primitivation de  $f : x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$ )**

Cette méthode s'adapte évidemment aussi pour le sinus.

- Voir  $f(x)$  comme partie réelle de  $e^{\lambda x}$ , avec  $\lambda = a + ib$
- Utiliser le corollaire (valide aussi pour des fonctions à valeurs complexes) pour obtenir une primitive
- Utiliser la quantité conjuguée pour se débarrasser des complexes au dénominateur
- La partie réelle de la fonction obtenue est une primitive de  $f$ .

**Méthode 11.1.23 (primitivation d'inverses de trinômes)**

Soit  $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$  un polynôme de degré 2 ( $a \neq 0$ ).

1. Si  $P$  admet une racine double  $r$ ,  $\frac{1}{P}$  se primitive en  $x \mapsto \frac{-1}{a(x-r)}$ .
2. Si  $P$  admet deux racines réelles  $r_1$  et  $r_2$ , chercher  $\alpha$  et  $\beta$  tels que

$$\frac{1}{P(x)} = \frac{\alpha}{x - r_1} + \frac{\beta}{x - r_2}.$$

La fonction  $\frac{1}{P}$  se primitive en  $x \mapsto \alpha \ln|x - r_1| + \beta \ln|x - r_2|$

3. Si  $P$  n'a pas de racine réelle, effectuer une mise sous forme canonique pour obtenir :

$$\frac{1}{P(x)} = \frac{\gamma}{(\alpha x + \beta)^2 + 1},$$

puis utiliser une primitivation composée : une primitive en est

$$x \mapsto \frac{\gamma}{\alpha} \operatorname{Arctan}(\alpha x + \beta).$$

Cette méthode est adaptable au cas de  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ . La mise sous forme canonique nous ramène dans ce cas soit à une dérivée (composée) de  $\operatorname{Arcsin}$ , soit  $\operatorname{Argch}$ , soit encore  $\operatorname{Argsh}$ .

**Exemples 11.1.24**

1. Primitives de  $x \mapsto \frac{1}{x^2 + 2x + 3}$
2. Primitives de  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - 2x - x^2}}$ .

Nous avons indiqué dans la figure 11.1 les différentes expressions composées qu'on peut primitiver en partant de chacune des fonctions usuelles. Par convention, dans ce tableau les fonctions dont le nom est

une lettre majuscule correspondent aux primitives des fonctions en lettres minuscules correspondantes. Par ailleurs, dans la dernière colonne, nous avons noté par abus  $\sin(u)$  pour la fonction composée de  $\sin$  et  $u$ , et de même pour un certain nombre d'autres fonctions. Cette notation est incorrecte, mais commode ici.

$f(x)$	$F(x)$	intervalle	$g$	$G$
0	0	$\mathbb{R}$	0	0
$a$	$ax$	$\mathbb{R}$	$au'$	$au$
$x^p$ ( $p \neq -1$ )	$\frac{x^{p+1}}{p+1}$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+$ suivant $p$	$u'u^p$	$\frac{u^{p+1}}{p+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$\mathbb{R}^*$	$\frac{u'}{u}$	$\ln u $
$e^x$	$e^x$	$\mathbb{R}$	$u'e^u$	$e^u$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$u'\cos(u)$	$\sin(u)$
$\tan(x)$	$-\ln \cos(x) $	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$	$u'\tan(u)$	$-\ln \cos(u) $
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$	$\frac{u'}{\cos^2(u)}$	$\tan(u)$
$1 + \tan^2(x)$	$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$	$u' + u'\tan^2(u)$	$\tan(u)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\text{Arctan}(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{u'}{1+u^2}$	$\text{Arctan}(u)$ .
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{Arcsin}(x)$ ou $-\text{Arccos}(x)$	$] -1, 1[$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\text{Arcsin}(u)$
$\text{sh}(x)$	$\text{ch}(x)$	$\mathbb{R}$	$u'\text{sh}(u)$	$\text{ch}(u)$
$\text{ch}(x)$	$\text{sh}(x)$	$\mathbb{R}$	$u'\text{ch}(u)$	$\text{sh}(u)$
$\text{th}(x)$	$\ln(\text{ch}(x))$	$\mathbb{R}$	$u'\text{th}(u)$	$\ln(\text{ch}(u))$
$\frac{1}{\text{ch}^2(x)}$	$\text{th}(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{u'}{\text{ch}^2(u)}$	$\text{th}(u)$
$1 - \text{th}^2(x)$	$\text{th}(x)$	$\mathbb{R}$	$u' - u'\text{th}^2(u)$	$\text{th}(u)$

FIGURE 11.1 – Tableau des primitives à connaître

## II Techniques de calcul intégral

Comme annoncé ci-dessus, notre point de départ est le théorème fondamental du calcul intégral (qui, vu son importance, est parfois aussi appelé théorème fondamental de l'analyse). Ce théorème est à la base des deux grandes techniques (outre le calcul direct à l'aide d'une primitive) permettant de calculer des intégrales :

## II.1 Intégration par parties

### **Théorème 11.2.1 (Intégration par parties ; nous autoriserons l'abréviation IPP)**

Soit  $f, g$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$  (ou  $[b, a]$ ). Alors :

$$\int f'g = fg - \int fg' \quad \text{et} \quad \int_a^b f'(x)g(x) \, dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) \, dx.$$

Cette formule reste valide si  $a \geq b$ .

#### ◁ Éléments de preuve.

Utiliser le théorème fondamental sur la fonction  $f'g + fg'$  dont une primitive est  $fg$ . ▷

### **Exemple 11.2.2**

1. Calcul d'une primitive de  $x \mapsto \ln(x)$ .
2. Calcul de  $\int_0^1 \text{Arctan}(x)$

En effectuant plusieurs intégrations par parties successives, on obtient :

### **Théorème 11.2.3 (Intégration par parties itérée, HP)**

Soit  $n \geq 1$ , et soit  $f$  et  $g$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $[a, b]$  (ou  $[b, a]$ ). Alors :

$$\int_a^b f^{(n)}(x)g(x) \, dx = \left[ \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i f^{(n-1-i)}(x)g^{(i)}(x) \right]_a^b + (-1)^n \int_a^b f(x)g^{(n)}(x) \, dx.$$

#### ◁ Éléments de preuve.

Récurrence, ou bien vérifier que ce qu'il y a entre crochets est une primitive de la partie intégrale (dériver et télescoper). ▷

### **Remarque 11.2.4 (Comment retenir cette formule)**

- La partie variations est la partie intégrée de la formule : pour chaque terme de la somme l'ordre total de dérivation est un de moins que l'ordre total dans l'intégrale, donc  $n - 1$ . On somme sur toutes les façons de dériver  $f$  et  $g$  avec un ordre total de  $n - 1$ .
- Le signe qui alterne dans la somme provient du fait qu'à chaque étape, on change le signe de l'intégrale. La première étape doit donner un signe positif. Or, la première étape de l'IPP donne le facteur  $f^{(n-1)}g$ , donc correspond à l'indice  $i = 0$ . Ainsi, le signe est  $(-1)^i$ .
- Le signe devant l'intégrale provient du fait qu'on a effectué  $n$  intégrations par partie (autant qu'il faut pour abaisser le degré de dérivation de  $f$  jusqu'à 0) ; chaque intégration par parties change le signe devant l'intégrale.

Cette formule étant théoriquement hors programme, on peut l'utiliser, mais en disant qu'on répète plusieurs intégrations par parties plutôt que d'invoquer directement la formule d'intégration par parties itérée. La différence est subtile, et permet de respecter le programme à peu de frais. Si vous n'êtes pas trop sûr de vous, sachez qu'une IPP itérée à un ordre  $n$  indéterminé peut toujours se ramener à un raisonnement par récurrence utilisant une IPP simple.

**Exemple 11.2.5**

Calculer pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $F_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t} dt$  sous forme d'une somme. Déterminer la limite de  $F_n(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

Il s'agit d'un cas particulier de la fonction  $\Gamma$  d'Euler, définie pour tout  $x > 0$  par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\Gamma(n) = (n - 1)!$ . On peut donc voir la fonction  $\Gamma$  comme un prolongement à  $\mathbb{R}$  de la factorielle.

Une conséquence importante du théorème d'intégration par parties itérée est la formule de Taylor avec reste intégral :

**Théorème 11.2.6 (Formule de Taylor avec reste intégral)**

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur  $[a, b]$  (ou  $[b, a]$ ). Alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Effectuer  $n + 1$  intégrations par parties successives, en dérivant  $t \mapsto \frac{(b-t)^n}{n!}$ . La dernière dérivation annule ce terme. ▷

**Corollaire 11.2.7 (Inégalité de Taylor-Lagrange)**

Soit  $a < b$ , et  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur  $[a, b]$ , telle que  $m \leq f^{(n+1)} \leq M$  sur  $[a, b]$ . Alors

$$\frac{m(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leq f(b) - \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} \leq \frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

**Remarque 11.2.8**

1. L'inégalité de Taylor-Lagrange est souvent utilisée dans la version suivante : si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur  $[a, b]$  et  $|f^{(n+1)}| \leq M$  sur  $[a, b]$ , alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} \right| \leq \frac{M|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

2. Sous cette forme (avec les valeurs absolues à droite), elle reste valide si  $b \leq a$ .
3. Si  $a < b$ , la version générale de l'inégalité permet d'établir par exemple que sous les mêmes hypothèses, si  $f^{(n+1)} \geq 0$ , alors

$$f(b) \geq \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!},$$

et de même dans l'autre sens lorsque  $f^{(n+1)} \leq 0$ .

4. Que reconnaissez-vous pour  $n = 0$ , pour  $n = 1$  ?

## II.2 Changements de variables

La deuxième grande technique du calcul intégral est celle du changement de variable, qui n'est en fait qu'une réexpression commode de la primitivation de fonctions composées.

### Théorème 11.2.9 (Changement de variables)

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[\alpha, \beta]$ , et  $u$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $[a, b]$  vers  $[\alpha, \beta]$ . Alors  $f$  est intégrable entre  $u(a)$  et  $u(b)$ , et :

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(x) \, dx = \int_a^b f(u(t))u'(t) \, dt.$$

On dit qu'on a fait le changement de variable  $x = u(t)$ .

◁ Éléments de preuve.

Utiliser le théorème fondamental sur chacune des deux intégrales pour les comparer. ▷

### Remarque 11.2.10 (Comment ne pas s'embrouiller dans les bornes)

Dans l'intégrale de gauche, les bornes sont pour la variable  $x$ , dans celle de droite, elles sont pour la variable  $t$ . On passe de la variable  $t$  à la variable  $x$  en appliquant  $u$  : il en est de même pour les bornes : les bornes pour la variable  $x$  sont obtenues en appliquant  $u$  aux bornes pour la variable  $t$ .

### Remarques 11.2.11

1. Si  $u$  est bijective, on peut écrire :  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, dx = \int_{u^{-1}(\alpha)}^{u^{-1}(\beta)} f(u(t))u'(t) \, dt$ .
2. Cette formule peut s'utiliser dans les deux sens, comme le montre l'exemple suivant.

### Exemples 11.2.12

1.  $\int_2^3 \frac{4t^3}{1-t^8} \, dt$
2.  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx$ .

## II.3 Intégrales de fonctions admettant des symétries

On donne trois conséquences importantes du théorème de changement de variable, et du théorème de dérivation d'une intégrale dépendant de ses bornes, pour le calcul d'intégrales de fonctions paires, impaires ou périodiques.

### Proposition 11.2.13 (Intégrale d'une fonction impaire)

Soit  $I = [-a, a]$  et  $f$  une fonction continue et impaire sur  $I$ . Alors

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 0.$$

◁ Éléments de preuve.

Changement de variable  $y = -x$ . ▷

**Proposition 11.2.14 (Intégrale d'une fonction paire)**

Soit  $I = [-a, a]$  et  $f$  une fonction continue et paire sur  $I$ . Alors

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Couper en 2 en 0 (par la relation de Chasles), et faire le changement de variable  $y = -x$  sur l'intégrale sur  $[-a, 0]$ . ▷

**Proposition 11.2.15 (Intégrale d'une fonction périodique)**

Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ , périodique de période  $T > 0$ . Alors, pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_a^{a+T} f(x) \, dx = \int_0^T f(x) \, dx.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Dériver par rapport à  $a$ . ▷

Ainsi, l'intégrale d'une fonction périodique sur une période ne dépend pas du choix de la période.

### III Rapide introduction aux intégrales impropres

Il est très fréquent de considérer l'intégrale d'une fonction, sur un intervalle sur lequel  $f$  n'est pas continue partout. Le cas le plus fréquent est le cas d'une fonction continue sur  $]a, b[$  ou  $[a, b[$ , ou  $]a, b[$ , les bornes ouvertes pouvant être des infinis. Si  $f$  est discontinue en un nombre fini de points, on peut se ramener à ces situations en coupant l'intervalle en morceaux, et même aux deux premiers cas, en coupant encore en 2. Nous allons donc rapidement évoquer les intégrales de fonctions continues sur un intervalle  $[a, b[$ .

**Définition 11.3.1 (Convergence d'intégrales impropres)**

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b[$ ,  $b$  pouvant être infini. On dit que l'intégrale (impropre)  $\int_a^b f(t) \, dt$  converge si la fonction

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t) \, dt,$$

admet une limite finie lorsque  $x$  tend vers  $b^-$ . On note alors :

$$\int_a^b f(t) \, dt = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) \, dt.$$

Cette notion étant largement étudiée en Spé, nous ne développons pas davantage. Pour le moment, si vous avez à manipuler des intégrales impropres, ramenez-vous systématiquement à cette définition par restriction de l'intervalle d'intégration puis passage à la limite.



# Équations différentielles linéaires

Ce chapitre a vocation à justifier les techniques de résolution des équations différentielles, admises en physique. Nous nous limitons à l'étude de certaines équations différentielles linéaires. Les autres types ne peuvent en général pas se résoudre explicitement, à moins de pouvoir se ramener à des équations différentielles linéaires. Cela n'empêche pas de pouvoir donner des conditions d'existence et d'unicité, et de savoir étudier les solutions de ces équations différentielles, mais la problématique de résolution explicite qui nous occupe dans ce chapitre est absente dans ce contexte. Les fonctions considérées peuvent être à valeurs réelles ou complexes. On notera  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  suivant la situation.

## I Équations différentielles linéaires

### Définition 12.1.1 (Équation différentielle linéaire)

Une équation différentielle linéaire d'ordre  $r$  d'une fonction inconnue  $y$  est une équation différentielle de la forme :

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_r(x)y^{(r)} = b(x),$$

où  $a_r$  n'est pas la fonction nulle, et les  $a_i$  sont des fonctions à valeurs réelles ou complexes, et  $y$  une fonction définie sur un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  (souvent à déterminer), à valeurs dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

On définit de la même manière une équation différentielle linéaire d'ordre  $r$  de plusieurs variables  $y_1, \dots, y_p$  comme une relation affine à coefficients fonctionnels entre les dérivées des  $y_i$  jusqu'à l'ordre  $r$  (au moins l'un des coefficients d'un des termes d'ordre  $r$  étant non nul).

On définit aussi les systèmes d'équations linéaires.

On étudie de façon directe le cas d'équations linéaires d'ordres 1 et 2, mais auparavant, on se sert de la description générale pour donner un résultat de structure de l'ensemble des solutions.

### Théorème 12.1.2 (Structure de l'ensemble des solutions)

Soit  $(E) : a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_r(x)y^{(r)} = b(x)$  une équation différentielle linéaire à résoudre sur un intervalle  $I$ .

S'il n'est pas vide, l'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions de  $(E)$  s'exprime sous la forme :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + y_0,$$

où :

- $\mathcal{S}_0$  est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée

$$(EH) : a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_r(x)y^{(r)} = 0;$$

- $y_0$  est une solution particulière.

De plus,  $\mathcal{S}_0$  est alors non vide et stable par combinaison linéaire.

On dit que  $\mathcal{S}_0$  est un espace vectoriel (sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^I$ ) et que  $\mathcal{S}$  est un sous-espace affine de  $\mathbb{R}^I$  dirigé par  $\mathcal{S}_0$ .

#### ◁ Éléments de preuve.

Par linéarité de la dérivation, justifier que  $y$  vérifie (E) ssi  $y - y_0$  vérifie (EH). ▷

La recherche d'une solution particulière peut se faire en plusieurs temps, si  $b$  se décompose en somme de fonctions plus simples :

#### Proposition 12.1.3 (Principe de superposition)

Si  $b = b_1 + b_2$ , pour trouver une solution particulière  $y_0$  de l'équation (E), il suffit de trouver :

- une solution particulière  $y_1$  de  $(E_1) : a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_r(x)y^{(r)} = b_1(x)$
- une solution particulière  $y_2$  de  $(E_2) : a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_r(x)y^{(r)} = b_2(x)$ .

Une solution particulière de (E) est alors  $y_1 + y_2$ .

#### ◁ Éléments de preuve.

Vérification facile, par linéarité de la dérivation. ▷

## II Équations différentielles linéaires d'ordre 1

On notera  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### II.1 Situation

Nous nous intéressons ici aux équations linéaires d'ordre 1 sur un intervalle  $I$ , dont la forme générale est :  $a_1(x)y' + a_0(x)y = \beta(x)$ , où  $a_0$  et  $a_1$  sont des fonctions d'une variable réelle, à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

On se restreint ici au cas où la fonction  $a_1$  ne s'annule pas sur l'intervalle  $I$  considéré, et où les fonctions  $a_1$ ,  $a_0$  et  $\beta$  sont continues, à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . Ainsi, en divisant par  $a_1$  et en isolant le terme  $y'$ , on est ramené à une équation « sous forme normale » :  $y' = a(x)y + b(x)$ , où  $a$  et  $b$  sont continues à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

Nous allons étudier l'ensemble des solutions d'une équation de ce type, à l'aide de deux « quadratures » (c'est-à-dire deux primitivations). Les méthodes mises en oeuvre sont à connaître, car ce sont elles qui vous permettront de résoudre explicitement une équation différentielle.

Au passage, cette étude nous permettra de constater que le théorème de Cauchy-Lipschitz est bien valide dans cette situation : ce théorème affirme, sous certaines conditions, l'existence et l'unicité d'une solution, vérifiant des conditions initiales données.

Le théorème de structure et le théorème de superposition s'appliquent à cette situation. On peut donc se contenter d'étudier l'équation homogène, et de trouver une solution particulière.

### II.2 Solutions de l'équation homogène

#### Théorème 12.2.1 (Résolution de l'équation $y' = a(x)y$ ( $a$ continue))

L'ensemble des solutions de l'équation homogène  $y' = a(x)y$  est :

$$\mathcal{S}_0 = \{y : x \mapsto Ce^{A(x)}, C \in \mathbb{K}\},$$

où  $A$  est une primitive de la fonction (continue)  $a$ , et  $C$  est une constante.

◁ **Éléments de preuve.**Poser  $z(x) = y(x)e^{-A(x)}$  et dériver  $z$ . ▷**Remarque 12.2.2 (Comment retrouver cette formule si on l'a oubliée)**

- Au brouillon, on s'autorise des divisions par  $y$  (rigoureusement incorrect si on n'a pas justifié que la fonction ne s'annule pas!) L'équation s'écrit alors  $\frac{y'}{y} = a(x)$ .
- On reconnaît en  $\frac{y'}{y}$  la dérivée de  $\ln|y|$  (appelée dérivée logarithmique de  $y$ ). On primitive, on passe à l'exponentielle et le tour est joué.
- Au propre, il est préférable d'utiliser directement la formule du cours, pour éviter les problèmes de justification issus de la division par  $y$ .

**Exemples 12.2.3**

1. Résolution de  $y' = ay$  ( $a$  constant)
2. Résolution de  $y' = yx^\alpha$  sur  $\mathbb{R}$  si  $\alpha \geq 0$ , sur  $\mathbb{R}_+^*$  sinon.

**II.3 Recherche d'une solution particulière de  $y' = a(x)y + b(x)$** 

Pour commencer, fractionner éventuellement le problème en problèmes plus simples par le principe de superposition énoncé plus haut. On suppose cette première étape effectuée, et on cherche une solution particulière de l'équation  $y' = a(x)y + b(x)$ .

En premier lieu, essayez de DEVINER une solution particulière. Vous pouvez par exemple pour cela vous aider de l'homogénéité. Vous pouvez aussi rechercher une solution constante ou polynomiale.

Mais n'y perdez pas trop de temps : s'il n'y a pas de solution évidente qui vous saute aux yeux, voici une méthode efficace pour trouver une solution particulière (au moins sous forme intégrale) à partir d'une solution de l'équation homogène :

**Méthode 12.2.4 (Méthode de variation de la constante)**

1. Les solutions de l'équation homogène étant de la forme  $x \mapsto Ce^{A(x)}$ , on recherche une solution particulière de l'équation non homogène sous la forme  $x \mapsto C(x)e^{A(x)}$  (on « rend la constante variable »)
2. En remplaçant dans l'équation différentielle,  $x \mapsto C(x)$  s'obtient par primitivation :

$$C(x) = \int b(x)e^{-A(x)} dx.$$

**Exemples 12.2.5**

1. Résoudre  $y' = 2y + \sin(x) + e^x + x$  sur  $\mathbb{R}$
2. Résoudre  $y' = -\frac{y}{x} + \text{Arctan}(x)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$

**Remarque 12.2.6**

Comme dit plus haut, et j'insiste dessus, il n'est pas toujours nécessaire d'employer la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière : parfois elle est suffisamment évidente pour être devinée.

**Exemples 12.2.7**

1. Si  $a$  et  $b$  sont constants, la fonction constante égale à  $-\frac{b}{a}$  est solution de  $y' = ay + b$ .
2. La fonction  $y : x \mapsto ce^{\alpha x}$  est solution de  $y' = ay + be^{\alpha x}$ , où  $c$  vérifie l'équation  $\alpha c = ac + b$ .

**II.4 Problème de Cauchy associé à une EDL du premier ordre**

Nous pouvons maintenant résoudre le problème de Cauchy associé à une EDL du premier ordre :

**Théorème 12.2.8 (Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations linéaires d'ordre 1)**

Soit  $a$  et  $b$  deux fonctions continues sur un intervalle  $I$ , à valeurs dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Soit  $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$ . Alors il existe une et une seule solution  $y$  de l'équation différentielle  $y' = a(x)y + b(x)$  telle que  $y(x_0) = y_0$ .

◁ **Éléments de preuve.**

À partir du théorème de structure, et de la forme de la solution homogène, voir quelle condition sur le coefficient inconnu impose  $y(x_0) = y_0$ . ▷

**II.5 Problèmes de raccordement (ou recollement)**

Lorsqu'on cherche à résoudre une équation différentielle  $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ , on se ramène à la situation précédente en divisant par  $a(x)$ . Si  $a$  ne s'annule pas sur  $I$ , cela ne pose pas de problème. Mais il peut arriver que  $a$  s'annule.

Si par exemple  $a$  s'annule en un nombre fini de points  $x_1 < \dots < x_n$ , cela définit des intervalles  $I_1, I_2, \dots, I_{n+1}$  ouverts en  $x_1, \dots, x_n$ , et dont l'union fait  $I \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$

On peut résoudre l'équation sur chaque intervalle selon la méthode précédente, puis essayer de prolonger les fonctions obtenues sur chaque intervalle, en définissant des valeurs adéquates en  $x_1, \dots, x_n$ . Ainsi, la solution générale sur  $I$  s'obtiendra en raccordant des solutions sur chaque  $I_k$  selon des valeurs de  $y(x_k)$ . Pour qu'on puisse affirmer qu'on obtient ainsi une solution de l'équation différentielle sur  $I$  tout entier, la fonction que l'on cherche à définir sur  $I$  entier doit être dérivable sur  $I$  (pour que l'ED ait un sens, même si  $a(x)$  s'annule en un des points particulier), donc en particulier, elle doit être continue. Il faut donc procéder de la façon suivante :

- Raccorder les solutions par continuité aux points  $x_i$ . Ainsi, les deux branches à raccorder en  $x_i$  doivent avoir même limite pour que ce soit possible. Cela contraint souvent les constantes laissées indéterminées lors de la résolution de l'ED.
- Vérifier que la fonction ainsi obtenue par prolongement par continuité est dérivable aux points de raccordement et que sa dérivée vérifie bien l'ED.

**Exemple 12.2.9**

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  les équations différentielles suivantes :

1.  $\sqrt{|x|}y' = y$
2.  $xy' = y$ .

**II.6 Résolution des EDL d'ordre 1 à coefficients constants**

Du fait de son importance pratique, on isole dans le résultat suivant la résolution complète du cas d'une équation  $y = ay + b$  dans le cas où  $a$  et  $b$  sont constants (réels ou complexes). Ce théorème est un corollaire immédiat des résultats des sections précédentes.

**Théorème 12.2.10 (Résolution d'une équation linéaire  $y' = ay + b$  à coefficients constants)**

Soit  $a$  et  $b$  deux éléments de  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . L'ensemble des solutions de l'équation différentielle  $y' = ay + b$  est :

$$\mathcal{S} = \left\{ y : x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}, C \in \mathbb{K} \right\},$$

En particulier, l'unique solution telle que  $y(x_0) = y_0$  est :

$$y : x \mapsto \left( \frac{b}{a} + y_0 \right) e^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Application simple du théorème général. ▷

**III Résolution des EDL d'ordre 2 à coefficients constants****III.1 Position du problème**

L'outil matriciel permet de se ramener à une équation différentielle matricielle d'ordre 1 (en introduisant comme nouvelles fonctions la dérivée de  $y$ ), qui s'étudie comme plus haut, mais nécessite quelques connaissances supplémentaires sur le calcul matriciel (notamment la définition de l'exponentielle de matrices).

En attendant d'avoir ces outils, nous nous contentons d'une étude dans un cas beaucoup moins général, celui où tous les coefficients de l'équation sont constants, dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Par commodité, on note  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , selon le contexte dans lequel on se place, pour éviter d'avoir à distinguer les deux cas dans les énoncés. Si le coefficient du terme en  $y''$  est nul, on est ramené à l'étude d'une équation d'ordre 1. On peut donc supposer que ce coefficient est non nul, et en divisant l'équation par ce coefficient, on est ramené à l'étude d'une équation de la forme suivante :

$$y'' + ay' + by = f(x) \text{ où } a, b \in \mathbb{K} \text{ et } f \text{ continue à valeurs dans } \mathbb{K}.$$

Dans cette situation encore, on peut :

1. utiliser le théorème de structure de l'ensemble des solutions, qui nous dit qu'on peut se contenter de la résolution du système homogène  $y'' + ay' + by = 0$ , et de la recherche d'une solution particulière
2. utiliser le principe de superposition pour ramener la recherche des solutions particulières au cas de fonctions  $f$  les plus simples possibles.

**III.2 Résolution de l'équation homogène**

La méthode ci-dessous est importante en soi, même si l'utilisation directe du théorème qu'on en déduit est plus efficace. Cependant, le deuxième point de cette méthode se généralise au cas d'équations linéaires d'ordre 2 à coefficients non constants, à condition d'avoir réussi à trouver une solution particulière de l'équation homogène (ce qui constitue alors souvent le point délicat de la résolution). C'est une situation plus générale s'adaptant au cas d'équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients quelconques, homogènes ou non.

**Méthode 12.3.1 (Recherche des solutions de  $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$ )**

Cette méthode nécessite la connaissance d'une solution particulière de l'équation homogène.

- Soit  $y_0$  une solution particulière de l'équation homogène  $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ . On pose  $y = y_0 z$  (changement de fonction ; remarquez qu'il s'agit encore d'une variation de constante, puisque  $Ky_0$  est solution).

- Vérifier que  $z$  vérifie l'équation (en tout point en lequel  $y_0$  ne s'annule pas) :

$$2y_0'z' + y_0z'' + ay_0z' = f(x).$$

- Résoudre l'équation différentielle d'ordre 1 d'inconnue  $z'$  et primitiver encore pour obtenir  $z$ . Comme il y a deux quadratures, on obtient deux paramètres sur chaque intervalle : l'espace des solutions est de dimension 2.
- Attention aux éventuels raccordements à faire si  $y_0$  s'annule.

### Exemples 12.3.2

- Il peut arriver qu'une solution soit évidente, mais pas les autres. La méthode ci-dessus est adaptée dans ce cas.
- Si les coefficients  $a$  et  $b$  sont polynomiaux, on peut espérer trouver une solution polynomiale (ce n'est pas systématiquement possible). Essayer de déterminer *a priori* le degré du polynôme par un argument sur le coefficient dominant, puis écrire l'ED avec les coefficients du polynôme à déterminer. On trouve alors l'ensemble de toutes les solutions par la méthode ci-dessus.

On obtient, par application de cette méthode, en recherchant d'abord une solution exponentielle :

### Théorème 12.3.3

Soit  $a$  et  $b$  des nombres complexes. L'ensemble des solutions à valeurs complexes de l'équation  $y'' + ay' + by = 0$  est :

$$\begin{cases} \mathcal{S}_0 = \{y : x \mapsto ce^{r_1x} + de^{r_2x}, c, d \in \mathbb{C}\} & \text{si } \Delta \neq 0 \\ \mathcal{S}_0 = \{y : x \mapsto (c + dx)e^{rx}, c, d \in \mathbb{C}\} & \text{si } \Delta = 0, \end{cases}$$

où  $\Delta$  est le discriminant du polynôme  $X^2 + aX + b$ , et où  $r_1$  et  $r_2$  sont les racines (réelles ou complexes) de ce polynôme (notée simplement  $r$ , en cas de racine double).

### Terminologie 12.3.4 (polynôme caractéristique)

Le polynôme  $X^2 + aX + b$  est appelé *polynôme caractéristique* de l'équation différentielle  $y'' + ay' + by = 0$ .

### Remarques 12.3.5

1. Si  $\Delta \neq 0$ , la première étape de la méthode exposée pour trouver ces solutions nous fournissait déjà la totalité des solutions (puisque l'on pouvait choisir indifféremment  $r_1$  ou  $r_2$  et puisque l'ensemble des solutions est stable par combinaison linéaire). La deuxième étape sert dans ce cas seulement à prouver qu'il n'y a pas d'autre solution.
2. Dans le cas où  $\Delta = 0$ , la deuxième étape nous fournit une solution que la première étape ne nous permettait pas d'obtenir. La méthode trouve là toute sa pertinence.
3. La méthode exposée ci-dessus est aussi valable pour des coefficients variables, à partir du moment où on connaît une solution particulière.

Même si les coefficients  $a$  et  $b$  sont réels, il peut arriver que l'expression obtenue au bout fasse intervenir des exponentielles complexes (cas où  $\Delta < 0$ ). La solution générale obtenue est alors une fonction à valeurs complexes. Parmi celles-ci, certaines sont à valeurs réelles. On est souvent intéressé par ces fonctions spécifiquement. Voici un résultat permettant de retrouver facilement l'ensemble des solutions à valeurs réelles

**Proposition 12.3.6 (Passer des solutions complexes aux solutions réelles)**

Soit  $y'' + ay' + by = 0$  une équation différentielle linéaire à coefficients constants réels. Soit  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$  l'ensemble de toutes ses solutions à valeurs complexes et  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$  l'ensemble des solutions à valeurs réelles. Alors :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{\operatorname{Re}(y) \mid y \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}\}.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Par double-inclusion :

- Par définition de la dérivation de fonctions à valeurs complexes, si  $y$  est solution,  $\operatorname{Re}(y)$  aussi, et est à valeurs réelles.
- Une solution réelle est aussi dans  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$  et est partie réelle d'elle-même.

▷

On obtient alors :

**Théorème 12.3.7 (Expression des solutions réelles de  $y'' + ay' + by = 0$ )**

Soit  $\Delta$  le discriminant du polynôme caractéristique  $X^2 + aX + b = 0$  et  $r_1$  et  $r_2$  ses racines réelles ou complexes ( $r = r_1 = r_2$  si  $\Delta = 0$ ). Alors, l'ensemble des solutions réelles est :

- $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto ce^{r_1x} + de^{r_2x} \mid (c, d) \in \mathbb{R}^2\}$  si  $\Delta > 0$  ;
- $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto (cx + d)e^{rx} \mid (c, d) \in \mathbb{R}^2\}$  si  $\Delta = 0$  ;
- $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto e^{\alpha x} (c \cos(\omega x) + d \sin(\omega x)) \mid (c, d) \in \mathbb{R}^2\}$  si  $\Delta < 0$ ,  
où  $\alpha$  et  $\omega$  sont tels que  $r_1 = \alpha - i\omega$  et  $r_2 = \alpha + i\omega$ .

Dans le cas où  $\Delta < 0$ , la valeur de  $\alpha$  est unique, mais  $\omega$  n'est unique qu'au signe près. On peut par exemple choisir :

$$\alpha = -\frac{a}{2} \quad \text{et} \quad \omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}.$$

On peut aussi réexprimer les solutions en regroupant sin et cos :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto Ae^{\alpha x} \cos(\omega x - \varphi) \mid (A, \varphi) \in \mathbb{R}^2\} \quad (\Delta < 0),$$

ou encore :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \mapsto Ae^{\alpha(x-x_0)} \cos(\omega(x-x_0) - \varphi) \mid (A, \varphi) \in \mathbb{R}^2\right\} \quad (\Delta < 0),$$

forme qui peut être plus adaptée si les conditions initiales sont données en  $x_0$  (vous pouvez réexprimer de même les autres cas).

### III.3 Solution générale du système non homogène

Comme pour le cas d'EDL de degré 1, la première étape est l'utilisation du principe de superposition pour se ramener à des études plus simples.

Pour les EDL d'ordre 1, comme dans le cas des équations d'ordre 1, il existe une méthode dite « de variation des constantes » pour trouver une solution particulière, mais elle est plus délicate à mettre en oeuvre. Comme elle n'est pas au programme, nous nous limitons à l'étude de cas particuliers intervenant souvent en physique.

**Proposition 12.3.8 (Solutions particulières pour un second membre  $Q(x)e^{\lambda x}$ , admis)**

Soit  $Q \in \mathbb{C}[X]$ , et l'équation différentielle  $(E) : y'' + ay' + by = Q(x)e^{\lambda x}$ . Soit  $P$  le polynôme caractéristique de l'équation  $(E)$ , et  $m$  la multiplicité de  $\lambda$  comme racine de  $P$ . Alors, il existe une solution particulière de  $(E)$  de la forme :

$$y_P(x) = x^m R(x)e^{\lambda x},$$

où  $R$  est un polynôme de même degré que  $Q$ . Ce résultat reste valide pour des équations d'ordre plus important.

Admettre ce théorème n'est pas gênant puisque son seul intérêt est pratique. Il suffira de se rendre compte qu'en pratique, il fournit une méthode qui aboutit !

Toute résolution avec un second membre d'une autre forme est hors-programme. On pourra néanmoins remarquer que la méthode 12.3.1 permet de se ramener dans tous les cas à une équation d'ordre 1.

#### Exemples 12.3.9

1. Résoudre sur  $\mathbb{R}$  :  $y'' + 2y' + y = e^x$ .
2. Résoudre sur  $\mathbb{R}$  :  $y'' + y' + y = \sin(x)$ .

### III.4 Problème de Cauchy

#### Théorème 12.3.10 (Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les EDL d'ordre 2 (admis))

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$  et  $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$ . Soit  $f$  une fonction continue sur  $I$ . Alors il existe une unique solution  $y$  de l'équation  $y'' + ay' + by = f(x)$  telle que  $y(x_0) = y_0$  et  $y'(x_0) = y_1$ .

# Suites numériques

*Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et que l'on fait toujours la même chose, il restera une grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées.*

(Euclide)

*L'ensemble de la série renferme donc en bloc toutes les approximations, c'est-à-dire les valeurs immédiatement supérieures et inférieures, car, à mesure qu'on la considère de plus en plus loin, l'erreur sera moindre que toute grandeur donnée*

(Gottfried Wilhelm Leibniz)

*Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur finie, de manière à en différer aussi peu qu'on voudra, cette dernière est appelée limite de toutes les autres.*

(Augustin Louis Cauchy)

Nous rappelons :

## Définition 13.0.1 (Suite numérique)

Une suite numérique (réelle ou complexe) est une famille  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  indexée sur  $\mathbb{N}$  (parfois sur  $\mathbb{N}^*$ , ou sur  $\mathbb{N} \setminus \{0, \dots, n_0 - 1\}$ ). Il s'agit donc d'une fonction de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## I Convergence de suites

### I.1 Définition de la limite d'une suite

#### Note Historique 13.1.1

- L'appréhension de la notion de limite d'une suite est ancienne. On trouve déjà dans les *Éléments* d'Euclide (citation ci-dessus).

Traduisons cette citation en langage mathématique : pour tout  $(\varepsilon, a) \in \mathbb{R}_+^*$  (une grandeur est toujours strictement positive pour les grecs), si  $(u_n)$  est une suite (strictement positive pour la même raison) telle que pour tout  $n$ ,  $u_{n+1} \leq \frac{u_n}{2}$ , alors (en sous-entendant « à un moment, il restera... »), il existe  $N$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $u_n < \varepsilon$ .

C'est exactement dire (en langage moderne) que la suite  $(u_n)$  (qui est sous-géométrique de raison 2) converge vers 0...

- Archimède également utilise intuitivement une limite, lorsqu'il calcule une valeur approchée de  $\pi$  en approchant le cercle par des polygones réguliers dont il calcule la circonférence.
- Au 17-ième siècle, même si la notion de limite semble assez claire, elle n'est pas bien définie, et tous les arguments de convergence sont expliqués qualitativement, avec assez peu de rigueur, comme le montre la citation de Leibniz en 1682, pour justifier l'égalité  $\pi = 4 \left[ 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right]$ .
- Il faut attendre Augustin Louis baron Cauchy pour avoir une définition précise (mais pas encore énoncée mathématiquement) de la limite, donnée dans son *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* (1821). Cauchy définit ce qu'on appelle maintenant les suites de Cauchy, permettant d'étudier (dans  $\mathbb{R}$ ) la convergence de suites sans en connaître la limite.  
Le *Cours d'Analyse* a été pour Cauchy l'occasion d'apporter rigueur et clarification à un grand nombre de notions jusque-là utilisées intuitivement. Dans ce sens, cet ouvrage a eu une importance capitale dans l'évolution de l'analyse.
- Il faut attendre la deuxième moitié du 19<sup>e</sup> siècle pour voir naître la définition moderne (énoncée mathématiquement) de la limite, grâce à Karl Weierstrass, à qui on doit également toutes les définitions similaires relatives aux limites et à la continuité des fonctions.

Intuitivement, une suite admet une limite  $\ell$  si ses termes s'en approchent aussi près qu'on veut, sans plus s'en éloigner, donc si, quitte à prendre  $n$  suffisamment grand,  $u_n$  est une approximation aussi fine que l'on souhaite de  $\ell$ . Nous formalisons cette définition de la sorte :

**Définition 13.1.2 (limite d'une suite, convergence, divergence)**

- Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  admet une limite  $\ell \in \mathbb{K}$  si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \in B(\ell, \varepsilon).$$

- Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet une limite  $\ell \in \mathbb{K}$ , on dit qu'elle est convergente.
- Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'admet aucun  $\ell$  de  $\mathbb{K}$  comme limite, alors on dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est divergente (dans  $\mathbb{K}$ ).

**Remarque 13.1.3**

Comme nous l'avons vu dans un chapitre antérieur, cette définition est un cas particulier de la notion générale de limite d'une fonction. Il s'agit ici d'étudier la limite en  $+\infty$  d'une fonction de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{K}$ .

De même que dans le contexte général des limites de fonctions, cette définition est valable dans un contexte plus général : elle permet de définir la convergence d'une suite à valeurs dans n'importe quel espace métrique. En particulier, cela nous permet de parler de convergence de suites de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ , la distance considérée étant la distance euclidienne canonique (ou n'importe quelle distance définie à l'aide d'une norme ; en effet, vous montrerez l'an prochain qu'en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, ce qui signifie plus ou moins qu'elles définissent les mêmes propriétés de convergence).

Comme dans la situation générale, on dispose de plusieurs caractérisations (réexpression par  $\varepsilon$  de la caractérisation métrique, et caractérisation topologique qui permet de généraliser la notion de convergence pour des suites à valeur dans un espace topologique).

**Proposition 13.1.4 (Diverses caractérisations de la convergence)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle ou complexe. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell \in \mathbb{C}$  ;
- (ii)  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon$  ;
- (iii) pour tout voisinage  $V$  de  $\ell$ , il existe  $N$  tel que pour tout  $n \geq N, u_n \in V$ .

◁ **Éléments de preuve.**

Cela a déjà été vu dans le contexte plus général des limites de fonctions. On en rappelle rapidement les arguments :

- (i)  $\implies$  (ii) :  $u_n \in B(x, \varepsilon) \iff |u_n - \ell| < \varepsilon$  ; Cela donne même l'équivalence entre les deux points.
- (ii)  $\implies$  (iii) :  $V$  étant un voisinage, il existe  $\varepsilon$  tel que  $B(x, \varepsilon) \subset V$ . Utiliser (ii) avec cet  $\varepsilon$ .
- (iii)  $\implies$  (i) : utiliser (i) avec le voisinage  $V = B(x, \varepsilon)$ .

▷

Comme dans le cas des limites de fonctions, hormis pour l'inégalité  $\varepsilon > 0$ , on peut considérer indifféremment des inégalités strictes ou larges.

Nous nous plaçons désormais, par pure commodité, dans le cas de suites réelles. La plupart des résultats se généralisent au cas de suites complexes.

Dans le cas d'une suite réelle, on peut également définir une convergence vers les deux infinis :

**Définition 13.1.5 (Limite  $+\infty$  ou  $-\infty$  d'une suite réelle)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle.

1. On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet la limite  $+\infty$  si et seulement si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n > A.$$

2. On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet la limite  $-\infty$  si et seulement si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n < A.$$

On remarquera qu'une suite tendant vers  $+\infty$  est divergente dans  $\mathbb{R}$ , mais convergente dans  $\overline{\mathbb{R}}$ . Ainsi, suivant le point de vue, on pourra parler de divergence ou de convergence. En particulier, on rencontre aussi bien l'expression «  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $+\infty$  » que «  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $+\infty$  ». Pour éviter toute controverse, on peut se contenter de dire : «  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$  », ou encore «  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet la limite  $+\infty$  ».

**Avertissement 13.1.6**

Il existe des suites n'admettant pas de limite, même dans  $\overline{\mathbb{R}}$  ! Par exemple  $(-1)^n$ . Attention à ne pas dire que cette suite admet deux limites 1 et  $-1$  (confusion limite / valeur d'adhérence).

En effet, comme cas particulier d'un résultat vu pour les fonctions :

**Théorème 13.1.7 (Unicité de la limite)**

La limite d'une suite réelle ou complexe, si elle existe (dans  $\overline{\mathbb{R}}$  ou dans  $\mathbb{C}$ ), est unique.

On a déjà vu qu'en définissant un voisinage  $V \subset \mathbb{R}$  de  $+\infty$  comme étant un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  tel qu'il existe  $a$  vérifiant  $]a, +\infty[ \subset V$ , la caractérisation des limites par les voisinages permet d'unifier les définitions relatives aux limites finies et infinies :

**Proposition 13.1.8 (Caractérisation par voisinage pour les limites dans  $\overline{\mathbb{R}}$ )**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle, et  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ . Alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet la limite  $\ell$  si et seulement si pour tout voisinage  $V$  de  $\ell$ , il existe  $N$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $u_n \in V$ .

◁ **Éléments de preuve.**

L'équivalence est déjà prouvée dans le cas d'une limite finie. Dans le cas d'une limite  $+\infty$ , elle provient du fait que tout voisinage de  $+\infty$  contient un  $]A, +\infty[$  et que réciproquement,  $]A, +\infty[$  est un voisinage de  $+\infty$ . De même en  $-\infty$ .

▷

Cette unification du fini et de l'infini permet souvent d'éviter de faire des distinctions de cas dans des démonstrations théoriques.

**Définition 13.1.9 (Suite stationnaire)**

Une suite  $(u_n)$  est dite stationnaire s'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $u_n = u_N$ .

Une suite stationnaire est toujours convergente (vers sa valeur de stationnement). La réciproque est bien sûr fautive, comme le montre l'exemple de la suite  $(\frac{1}{n})$ .

Il est une situation dans laquelle on peut tout de même obtenir cette réciproque (mais attention à ne pas l'utiliser hors de ce cadre!)

**Proposition 13.1.10 (Suites convergentes à valeurs entières)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ . La suite  $(u_n)$  est convergente si et seulement si elle est stationnaire.

◁ **Éléments de preuve.**

Réciproque évidente. Sens direct : considérer  $\varepsilon < \frac{1}{2}$ . Il ne peut y avoir qu'un entier dans la boule  $B(\ell, \varepsilon)$ . ▷

## I.2 Cas des suites complexes et vectorielles

Comme cas particulier du théorème similaire pour les fonctions :

**Proposition 13.1.11 (Caractérisation de la convergence d'une suite complexe)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite complexe. Alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge dans  $\mathbb{C}$  si et seulement si  $(\operatorname{Re}(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\operatorname{Im}(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  convergent dans  $\mathbb{R}$ , et dans ce cas :

$$\lim u_n = \lim \operatorname{Re}(u_n) + i \lim \operatorname{Im}(u_n).$$

Plus généralement :

**Proposition 13.1.12 (Caractérisation de la convergence d'une suite de vecteurs)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de vecteurs de  $\mathbb{R}^p$ . On note pour tout  $n$ ,  $\begin{pmatrix} u_{n,1} \\ \vdots \\ u_{n,p} \end{pmatrix}$  les coordonnées de  $u_n$ .

Alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge dans  $\mathbb{R}^p$  si et seulement si pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $(u_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$  converge dans  $\mathbb{R}$ . Dans ce cas :

$$\lim u_n = \begin{pmatrix} \lim u_{n,1} \\ \vdots \\ \lim u_{n,p} \end{pmatrix}.$$

◁ **Éléments de preuve.**

De même que dans  $\mathbb{C}$ , en utilisant le fait que si  $X = (x_1, \dots, x_p)$ , pour la norme euclidienne canonique,  $|x_i| \leq \|X\|$ , et réciproquement, par IT,  $\|X\| \leq |x_1| + \dots + |x_p|$ .

Cela reste vrai pour toute autre norme, en utilisant un résultat que vous verrez l'année prochaine (équivalence des normes en dimension finie). ▷

Ainsi, la convergence d'un vecteur équivaut à la convergence coordonnée par coordonnée. Là aussi, cela nous assure l'unicité de cette limite, sous réserve d'existence.

### I.3 Premières propriétés des suites convergentes

Une propriété bien utile, notamment pour l'étude de suites récurrentes :

**Proposition 13.1.13 (Limite d'un translaté)**

Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $\ell$ , alors  $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$  aussi.

◁ **Éléments de preuve.**

Par voisinage. Si  $N$  convient pour  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $N + 1$  convient pour  $(u_{n-1})$ . ▷

Plus généralement, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $(u_{n+k})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{n-k})_{n \geq k}$  convergent alors vers  $\ell$ .

**Proposition 13.1.14**

Toute suite convergente (dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , mais pas  $\overline{\mathbb{R}}$ ) est bornée.

◁ **Éléments de preuve.**

À partir d'un certain rang, tous les termes restent dans une boule  $B(\ell, 1)$ . Les autres termes sont en nombre fini. ▷

Enfin, en ne considérant que la moitié des inégalités présentes dans la définition, on obtient, dans le cas de suites réelles, la propriété suivante parfois plus simple à utiliser que la définition. Attention, comme on oublie ici la moitié des inégalités, chaque point de cette propriété est moins fort que la définition. La conjonction des deux points équivaut à la définition.

**Proposition 13.1.15 (Lemme du tunnel)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite, et  $\ell \in \mathbb{R}$ . Alors  $(u_n)$  converge vers  $\ell$  ssi pour tout  $(\ell', \ell'') \in \mathbb{R}^2$  tels que  $\ell' < \ell < \ell''$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \geq N, \ell' < u_n < \ell''$$

◁ **Éléments de preuve.**

Remarquer que  $] \ell', \ell'' [$  est voisinage de  $\ell$ . Réciproquement, prendre en particulier  $\ell' = \ell - \varepsilon$  et  $\ell'' = \ell + \varepsilon$ . ▷

**Remarque 13.1.16**

On utilise souvent ce lemme dans le sens direct, en n'utilisant qu'une des deux inégalités : si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $\ell$ , alors  $(u_n)$  finit par dépasser n'importe quelle valeur  $\ell' < \ell$ , et de même,  $(u_n)$  finit par passer sous n'importe quelle valeur  $\ell'' > \ell$ .

**Avertissement 13.1.17**

Ce n'est évidemment pas vrai si  $\ell' = \ell$ , même au sens large. Une suite n'est pas forcément majorée (ou minorée) par sa limite. Elle peut tendre vers sa limite en faisant de petites oscillations, comme la suite  $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  par exemple.

## II Propriétés des suites liées à la convergence

### II.1 Préambule : caractérisation séquentielle de la limite

Nous commençons par un résultat théorique, qui nous permettra de convertir tous les résultats qu'on obtiendra sur les limites de suites en des résultats similaires sur les limites des fonctions.

**Théorème 13.2.1 (Caractérisation séquentielle de la limite)**

Soit  $X$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{R}^2$ ),  $f : X \mapsto \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ), et  $a \in \overline{X}$ . Alors  $f$  admet une limite  $\ell$  en  $a$  si et seulement si pour toute suite  $(u_n)$  à valeurs dans  $X$  et telle que  $u_n \rightarrow a$ , on a  $f(u_n) \rightarrow \ell$ .

◁ **Éléments de preuve.**

- Sens direct : étant donné un voisinage  $V$  de  $\ell$ , trouver un voisinage  $U$  de  $a$  exprimant la limite de  $f$ , puis appliquer la définition topologique de la limite de  $u_n$  avec ce voisinage  $U$ .
- Sens réciproque : par la contraposée, supposer que  $f$  n'admet pas la limite  $\ell$  en  $a$ . L'exprimer par quantifications (en niant la définition topologique de la limite), en déduire une construction d'une suite  $u_n \rightarrow a$ , telle que  $f(u_n)$  reste hors d'un certain voisinage contenant  $\ell$  (coller  $u_n$  à  $a$  en choisissant des voisinages collant de plus en plus à  $a$ ).

▷

En particulier, en considérant  $\ell = f(a)$ , on obtient :

**Théorème 13.2.2 (Caractérisation séquentielle de la continuité)**

Soit  $X$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ ,  $f : X \mapsto \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ), et  $a \in X$ . Alors  $f$  est continue en  $a$  si et seulement si pour toute suite  $(u_n)$  à valeurs dans  $X$  et telle que  $u_n \rightarrow a$ , on a  $f(u_n) \rightarrow f(a)$ .

**Remarque 13.2.3**

Ces caractérisations séquentielles, outre leur utilisation théorique pour transférer les propriétés des limites de suites aux fonctions, sont souvent utilisées pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite. Il suffit pour cela :

- soit de trouver  $u_n \rightarrow a$  telle que  $f(u_n)$  n'a pas de limite ;
- soit de trouver  $u_n, v_n \rightarrow a$  telles que  $f(u_n)$  et  $f(v_n)$  ont des limites différentes.

**Exemple 13.2.4**

- Montrer que  $x \mapsto \sin(x)$  n'a pas de limite en  $+\infty$
- Montrer que  $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$  n'admet pas de limite en 0.

**II.2 Opérations sur les limites**

Nous montrons maintenant sur les suites les différentes propriétés qu'on avait admises sur les limites de fonctions. La caractérisation séquentielle permet de faire le lien entre les deux.

**Théorème 13.2.5 (Opérations sur les limites finies)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles ou complexes convergentes, et  $\lambda$  et  $\mu$  deux scalaires (réels ou complexes). Alors :

1.  $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente, et  $\lim |u_n| = |\lim u_n|$  ;
2.  $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente, et  $\lim(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \lim u_n + \mu \lim v_n$  ;
3.  $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente, et  $\lim(u_n v_n) = \lim u_n \cdot \lim v_n$  ;
4. si  $\lim v_n \neq 0$ , alors  $v_n \neq 0$  à partir d'un certain rang ; ainsi,  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$  est définie à partir d'un certain rang, est convergente, et  $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}$ .

◁ **Éléments de preuve.**

1. Utiliser l'IT pour majorer  $||u_n| - |\ell||$ .
2. Par commodité on peut étudier séparément la somme (couper  $\varepsilon$  en 2, en en réservant la moitié pour chaque suite) et la multiplication par un scalaire (considérer  $\frac{\varepsilon}{\lambda}$ ; que dire si  $\lambda = 0$ ?).
3. Écrire  $u_n v_n - \ell \ell' = u_n(v_n - \ell') + \ell'(u_n - \ell')$ , et utiliser le fait que  $(u_n)$  est majorée. S'arranger pour majorer ensuite chaque membre par  $\frac{\varepsilon}{2}$  en choisissant convenablement le epsilon de la définition des convergences de  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .
4. D'après 3, on peut se limiter à l'étude de  $\frac{1}{v_n}$ . Faire la différence avec  $\frac{1}{\ell}$ , mettre au même dénominateur, et utiliser le fait que  $v_n \ell$  est plus grand que  $\frac{\ell^2}{2}$  pour  $n$  assez grand.

▷

**Théorème 13.2.6 (Opérations impliquant des limites infinies)**

Dans le cas où  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont des suites réelles, les résultats ci-dessus restent vrais si la limite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et/ou de  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est infinie, avec les règles arithmétiques suivantes (règles usuelles dans  $\overline{\mathbb{R}}$ ) :

$$a + \infty = +\infty; \quad +\infty + \infty = +\infty; \quad a \cdot (+\infty) = (\text{sg}(a))\infty \text{ (pour } a \neq 0\text{)};$$

$$(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = \pm\infty; \quad \frac{1}{\pm\infty} = 0, \quad \frac{1}{0^+} = +\infty, \quad \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

◁ **Éléments de preuve.**

- $a + \infty$  : si  $u_n \rightarrow a$  fini,  $(u_n)$  est bornée. Si  $M$  est un majorant de  $|u_n|$ , considérer  $A' = A - M$  dans l'expression de la suite de limite  $\infty$ .
- $\infty + \infty$  : La première suite est positive à partir d'un certain rang. Appliquer directement la définition de la limite infinie sur la deuxième.
- $a \cdot \infty, a > 0$  : Considérer  $n$  tel que  $u_n > \frac{a}{2}$ , puis appliquer la définition de la limite infinie avec  $A' = \frac{2A}{a}$ . S'adapte dans le cas  $a < 0$ .
- $+\infty \times +\infty$  : de même, en plus simple : la première suite est minorée par 1 à partir d'un certain rang, la deuxième par  $A$ . S'adapte aux autres cas de signes.
- $\frac{1}{+\infty}$  : Utiliser  $A = \frac{1}{\varepsilon}$ . S'adapte à  $\frac{1}{-\infty}$ .

▷

**Avertissement 13.2.7 (Formes indéterminées)**

En revanche, les opérations arithmétiques suivantes ne sont pas définies, et donnent des formes indéterminées (ayez des exemples en tête) :

$$\infty - \infty; \quad 0 \cdot \infty; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad \frac{0}{0}$$

Aux règles précédentes, nous ajoutons la suivante :

**Proposition 13.2.8 (Produit 0 × borné)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles ou complexes telles que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tende vers 0 et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  soit bornée. Alors  $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 0.

◁ **Éléments de preuve.**

Tant qu'on n'a pas le théorème d'encadrement, on revient à  $\varepsilon$ . Si  $M$  est un majorant de  $|v_n|$ , utiliser  $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M}$  pour exprimer la limite de  $(u_n)$ .

▷

Les règles relatives à l'exponentiation découlent de la continuité de l'exponentielle, *via* la caractérisation séquentielle de la continuité, ou plutôt ici uniquement de l'implication la plus simple de cette caractérisation.

**Proposition 13.2.9 (Passage à la limite pour les puissances)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles,  $(u_n)$  étant de plus strictement positive. On suppose que  $u_n \rightarrow \ell$  et  $v_n \rightarrow \ell'$ , et que  $(\ell, \ell') \notin \{(+\infty, 0), (0, 0), (1, +\infty), (1, -\infty)\}$ . Alors :

$$u_n^{v_n} \longrightarrow \ell^{\ell'}.$$

Dans cette proposition, les règles d'exponentiation ont été étendues par les opérations suivantes dans  $\overline{\mathbb{R}}$  :

- $a^{+\infty} = 0$  si  $a \in [0, 1[$ ,
- $a^{+\infty} = +\infty$  si  $a \in ]1, +\infty]$
- $a^{-\infty} = +\infty$  si  $a \in [0, 1[$ ,
- $a^{-\infty} = 0$  si  $a \in ]1, +\infty]$ ,
- $0^b = 0$  si  $b \in ]0, +\infty]$ .

◁ **Éléments de preuve.**

Se ramener au critère séquentielle de la continuité de l'exponentielle et du logarithme, ou de leurs limites aux bords du domaine. ▷

**Avertissement 13.2.10 (Formes indéterminées pour les puissances)**

On notera les formes indéterminées relatives aux exponentiations :

$$\infty^0, \quad 0^0 \quad \text{et} \quad 1^\infty.$$

**Exemple 13.2.11**

Trouver des exemples illustrant ces formes indéterminées (se ramener à des formes indéterminées sur des produits)

**Théorème 13.2.12 (Opérations sur les limites des fonctions)**

Les règles ci-dessus restent valables pour les limites de fonctions en un point fini ou infini.

◁ **Éléments de preuve.**

Par critère séquentiel. Le développer sur un cas suffira à se convaincre que cela s'adapte à tous les cas. ▷

## II.3 Limites et inégalités

Les suites considérées dans cette section sont réelles. Pour les suites complexes, l'utilisation de résultats de ce type nécessite de séparer les études de la partie réelle et de la partie imaginaire.

**Théorème 13.2.13 (Conservation des inégalités larges)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles, et  $N \in \mathbb{N}$  tels que  $\forall n \geq N, u_n \leq v_n$ . Alors, si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admettent des limites dans  $\overline{\mathbb{R}}$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ .

◁ **Éléments de preuve.**

Par l'absurde, en notant  $\ell$  la limite de  $(u_n)$  et  $\ell'$  celle de  $(v_n)$ , si  $\ell > \ell'$ , considérer deux voisinages  $V$  et  $W$  de  $\ell$  et  $\ell'$  tels que  $W < V$  (ie pour tout  $x$  de  $W$  et  $y$  de  $V$ ,  $x < y$ ). En quoi cela contredit-il les hypothèses ? ▷

**Remarque 13.2.14**

Avant de passer à la limite dans une inégalité, il faut avoir justifié soigneusement l'existence des limites.

**Avertissement 13.2.15**

Les inégalités strictes ne se conservent pas !

**Exemple 13.2.16**

Pour tout  $n \geq 1$ ,  $0 < \frac{1}{n}$ . Passez à la limite...

**Théorème 13.2.17 (théorème de convergence par encadrement)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , trois suites réelles, et  $N \in \mathbb{N}$ , tels que :  $\forall n \geq N$ ,  $u_n \leq v_n \leq w_n$ . Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent toutes deux vers une même limite finie, alors  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge aussi, et

$$\lim v_n = \lim u_n = \lim w_n.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Définition de la limite par  $\varepsilon$ , appliquée à  $(u_n)$  et  $(w_n)$ , puis trouver  $N$  commun aux deux (prendre le plus grand). ▷

Dans le cas d'une limite infinie, on n'a pas besoin d'un encadrement. Suivant l'infini, une majoration ou une minoration suffit (pas besoin de contrôler le côté infini !):

**Théorème 13.2.18 (théorème de divergence par minoration ou majoration)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $N \in \mathbb{N}$  tels que pour tout  $n \geq N$ ,  $u_n \leq v_n$ .

1. Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$ , alors  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$ .
2. Si  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $-\infty$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $-\infty$ .

◁ **Éléments de preuve.**

Immédiat en appliquant la définition de  $u_n \rightarrow +\infty$  (dans le premier cas). ▷

**Remarque 13.2.19**

Les deux théorèmes ci-dessus donnent l'existence de la limite de  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Il n'est pas utile de l'avoir justifiée avant. Mais notamment pour le théorème de convergence par encadrement, il faut faire attention à la rédaction, et bien faire ressortir le fait que le théorème donne l'existence de la limite, avant d'écrire l'égalité sur les limites.

**Avertissement 13.2.20**

Ne surtout jamais présenter le théorème de convergence par encadrement comme un double passage à la limite dans les inégalités (à l'extrême rigueur si on connaît déjà l'existence de toutes les limites, mais c'est maladoit)

**Méthode 13.2.21 (Méthode de calcul de limites par majoration/minoration :)**

- Si on parvient à trouver une majoration :  $\forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq v_n$ , où  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de limite nulle, alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $\ell$ .
- Si on parvient à minorer  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par une suite de limite  $+\infty$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$ .
- Si on parvient à majorer  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par une suite de limite  $-\infty$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $-\infty$ .

**Exemples 13.2.22**

1.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n} = 0$  ;
2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^b a^n = +\infty$  si  $a > 1$  ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^b a^n = 0$  si  $|a| < 1$  ;
3.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$  ;

Dans deux des exemples ci-dessus apparaît la méthode suivante :

**Méthode 13.2.23 (Comparaison à une suite géométrique)**

- Étudier l'existence et le cas échéant la valeur de  $\lim \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$ .
- En cas d'existence, notons  $\ell = \lim \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$ .
  - \* Si  $\ell < 1$ , on peut majorer à partir d'un certain rang  $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  par une suite géométrique de raison  $r \in ]\ell, 1[$ , et on en déduit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 0.
  - \* Si  $\ell > 1$ , on peut minorer à partir d'un certain rang  $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  par une suite géométrique de raison  $r \in ]1, \ell[$ , donc  $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$ . Si  $(u_n)$  est de signe constant pour  $n$  assez grand, on en déduit sa convergence vers un des deux infinis, sinon, la suite ne converge pas dans  $\overline{\mathbb{R}}$ .
  - \* Si  $\ell = 1$ , on ne peut pas conclure.

**Exemple 13.2.24**

L'indétermination du cas  $\ell = 1$  peut être illustré par les suites  $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , ou par n'importe quelle suite convergeant vers une limite finie non nulle.

**Théorème 13.2.25 (Conservation des inégalités et encadrement pour les fonctions)**

*Les théorèmes de conservation des inégalités et d'encadrement restent valables pour les limites de fonctions (en un point fini ou infini).*

◁ **Éléments de preuve.**

C'est toujours le critère séquentiel qui nous permet de passer des suites aux fonctions. Pour la conservation des inégalités, il suffit de considérer une suite  $(u_n)$  de limite  $a$  (car on a déjà l'existence des limites). Pour le théorème d'encadrement, il faut en revanche considérer toutes les suites  $u_n \rightarrow a$ , pour obtenir l'existence de la limite par critère séquentiel. ▷

**II.4 Suites monotones**

Les notions de croissance, décroissance, croissance stricte, décroissance stricte et monotonie, découlent des définitions générales pour les fonctions.

On parlera de suite croissante à partir du rang  $N$  si les inégalités ne sont vérifiées qu'à partir du rang  $N$ , et de même pour la décroissance.

Une propriété importante des suites monotones, c'est qu'elles sont toujours convergentes dans  $\overline{\mathbb{R}}$ . Plus précisément :

**Théorème 13.2.26 (Théorème de la convergence monotone)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle.

1. Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et majorée, alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge dans  $\mathbb{R}$ .
2. Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et non majorée, alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $+\infty$ .
3. Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et minorée, alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge dans  $\mathbb{R}$ .
4. Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et non minorée, alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $-\infty$ .

◁ **Éléments de preuve.**

C'est un cas particulier du théorème de convergence monotone pour les fonctions. Si on reprend la preuve de ce résultat (dans le cas d'une limite en  $+\infty$ , cela revient à considérer  $\ell = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$ , puis à trouver  $n_0$  tel que  $u_{n_0}$  soit proche de  $\ell$ , et utiliser la croissance pour dire que c'est le cas de tout  $u_n$ ,  $n \geq n_0$ . ▷

**Remarque 13.2.27**

Puisque dans le cas d'une suite croissance majorée,  $\ell = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$ , on a, assez logiquement, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq \ell$  (ce qui résulte aussi du théorème de prolongement des inégalités). De plus, l'inégalité est stricte pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , sauf si la suite est stationnaire.

Les inégalités sont bien sûr inversées pour des suites décroissantes.

**Remarque 13.2.28**

Ce théorème est faux si on se place dans  $\mathbb{Q}$ . Il est donc spécifique à  $\mathbb{R}$ . Il pourrait en fait être pris comme axiome de la construction de  $\mathbb{R}$  à la place de la propriété de la borne supérieure.

**Remarque 13.2.29**

Ce théorème est particulièrement utile pour établir la convergence de suites définies par une récurrence de type  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

**Exemple 13.2.30**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$ . Étudier la convergence de  $(u_n)$ .

## II.5 Suites adjacentes

**Définition 13.2.31 (Suites adjacentes)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles. On dit qu'elles sont adjacentes si et seulement si :

1. l'une est croissante et l'autre décroissante ;
2.  $(v_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 0.

**Proposition 13.2.32 (Comparaison de deux suites adjacentes)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites adjacentes (avec  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  croissante et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  décroissante). Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq v_n$ .

◁ **Éléments de preuve.**

Sinon, on ne peut pas avoir  $v_n - u_n \rightarrow 0$ , cette différence étant décroissante. ▷

**Théorème 13.2.33 (Théorème des suites adjacentes)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles adjacentes. Alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent, et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ .

◁ **Éléments de preuve.**

On se place dans le cas  $(u_n)$  croissante,  $(v_n)$  décroissante. Alors  $(u_n)$  est majorée (par exemple par  $v_0$ ) et  $(v_n)$  est minorée. Utiliser le théorème de convergence des suites monotones, ainsi que la limite de leur différence, pour conclure. ▷

**Proposition 13.2.34**

Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes, de limite  $\ell$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|v_n - \ell| \leq |v_n - u_n|$ .

Le théorème des suites adjacentes est notamment utile pour l'étude des « séries alternées », c'est à dire de la limite de sommes  $\sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$ , où  $(a_k)$  est décroissante de limite nulle :

**Théorème 13.2.35 (Critère spécial de convergence des séries alternées, CSCSA)**

Soit  $\sum_{n \neq 0} (-1)^n a_n$  une série alternée, c'est à dire telle que  $(a_n)$  soit décroissante et de limite nulle.

Alors  $\sum (-1)^n a_n$  converge, c'est à dire  $\left( \sum_{n=0}^N (-1)^n a_n \right)_{N \in \mathbb{N}}$  admet une limite finie quand  $N$  tend vers  $+\infty$ . De plus, le « reste » de la série vérifie

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k \right| \leq a_{n+1}.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Montrer que si  $S_n$  désigne la somme partielle,  $(S_{2n})$  et  $(S_{2n+1})$  sont adjacentes. La majoration provient de la proposition 13.2.34. ▷

**Remarque 13.2.36**

Le théorème des suites adjacentes n'est pas vrai si on se place dans  $\mathbb{Q}$ . Encore une fois, on aurait pu choisir ce résultat comme axiome de la construction de  $\mathbb{R}$ .

## II.6 Digression sur la construction de $\mathbb{R}$

Au cours de ce chapitre et des précédents, nous avons croisé un certain nombre de propriétés dont nous avons dit qu'elles auraient pu être prises comme axiome de  $\mathbb{R}$ . Voici un petit bilan.

Supposons que nous sachions définir l'ensemble  $\mathbb{R}$ , mais que nous ne connaissions aucune propriété de  $\mathbb{R}$ . Alors, on pourrait établir :

**Théorème 13.2.37 (Propriétés équivalentes à la propriété fondamentale, HP)**

Les résultats suivants sont équivalents :

- (i) La propriété de la borne supérieure
- (ii) La description des intervalles de  $\mathbb{R}$
- (iii) Le théorème de convergence monotone
- (iv) Le théorème des suites adjacentes

◁ **Éléments de preuve.**

On a déjà montré  $(i) \implies (ii)$ ,  $(i) \implies (iii) \implies (iv)$ . On termine avec :

- $(ii) \implies (i)$  : Soit  $X$  non vide majoré. Considérer  $I = \{x \mid \exists y \in X, x \leq y\}$ . Montrer que  $I$  est un intervalle, et que sa borne supérieure est la borne supérieure de  $X$ .
- $(iv) \implies (i)$  : Procéder par dichotomie en partant de l'intervalle  $[x, M]$  où  $x \in X$  et  $M$  est un majorant de  $X$ . À chaque étape, garder la partie supérieure si elle contient un élément de  $X$ , la partie inférieure sinon. Les bornes des intervalles ainsi définis forment deux suites adjacentes, convergeant vers un réel  $\ell$ . Justifier que  $\ell$  est la borne supérieure de  $X$ .

▷

Pour pouvoir construire  $\mathbb{R}$ , il faut s'imposer l'une de ces propriétés, les autres en découlent. Nous avons admis la propriété de la borne supérieure, mais nous aurions pu faire un autre choix.

**Note Historique 13.2.38**

Les constructions les plus classiques sont celle de Richard Dedekind (basée sur les coupures, ce qui revient à peu près à la description des intervalles), et celle de Charles Méray (1869, basée sur les suites de Cauchy, je vous laisse vous renseigner vous-même sur cette notion importante, mais hors-programme)

## II.7 Caractérisations séquentielles

Nous avons déjà caractérisé séquentiellement la limite de fonctions et la continuité. Nous donnons ici trois autres caractérisations.

**Théorème 13.2.39 (Caractérisation séquentielle de la densité)**

Soit  $X$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ . L'ensemble  $X$  est (partout) dense dans  $\mathbb{R}$  si et seulement si pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , il existe  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $X$  tels que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $x$ .

◁ **Éléments de preuve.**

- Sens direct : poser  $u_n$  dans  $V_n \cap X$ , où  $V_n$  est un voisinage de  $x$  collant de plus en plus à  $X$ . Comment choisir  $V_n$  ?
- Réciproque : en considérant  $a < b$  dans  $\mathbb{R}$ , et  $x \in ]a, b[$  quelconque, par exemple le milieu, appliquer la définition de la convergence de  $u_n$  vers  $x$  avec le voisinage  $]a, b[$  de  $x$ .

▷

**Exemple 13.2.40**

À l'aide de l'approximation décimale des réels, on montre ainsi que  $\mathbb{D}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ . On peut retrouver de la sorte la densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ .

La démonstration de la caractérisation séquentielle de la densité montre qu'on peut choisir une suite dont tous les termes sont supérieurs à  $x$ , ou de façon symétrique, dont tous les termes sont inférieurs à  $x$ . On peut même faire un peu mieux :

**Proposition 13.2.41**

Soit  $X$  un sous-ensemble dense de  $\mathbb{R}$ . Alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , il existe une suite croissante  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $X$  tels que  $\lim u_n = x$ . On peut trouver de même une suite décroissante.

**Théorème 13.2.42 (Caractérisation séquentielle de la borne supérieure)**

Soit  $X$  un sous-ensemble non vide de  $\mathbb{R}$ . Alors  $M \in \overline{\mathbb{R}}$  est la borne supérieure de  $X$  si et seulement si

1.  $M$  est un majorant de  $X$
2. il existe une suite d'éléments de  $X$  convergeant vers  $M$ .

◁ **Éléments de preuve.**

- Sens réciproque immédiat par caractérisation par  $\varepsilon$  de la borne supérieure, et définition de la limite.
- Sens direct : utiliser la caractérisation de la borne sup avec des  $\varepsilon$  de plus en plus petits pour définir une suite qui colle à la borne supérieure.

▷

On peut dans ce cas toujours trouver une suite *croissante* convergeant vers  $\sup(X)$ , et même *strictement croissante* si  $\sup(X) \notin X$ .

**Théorème 13.2.43 (Caractérisation des fermés)**

Un sous-ensemble  $F$  (de  $\mathbb{R}$  ou d'un espace métrique) est fermé si et seulement si toute suite convergente d'éléments de  $F$  converge vers une limite elle-même élément de  $F$ .

◁ **Éléments de preuve.**

- Si  $F$  n'est pas fermé, considérer  $x \notin F$  tel que toute boule  $B(x, \varepsilon)$  rencontre  $F$ . En considérant des  $\varepsilon$  de plus en plus petits, construire  $x_n \rightarrow x$ , avec  $x_n \in F$ .
- S'il existe  $(x_n)$  dans  $F$  convergeant vers  $\ell \notin F$ , montrer que toute boule  $B(\ell, \varepsilon)$  rencontre  $F$ .

▷

Ceci se réexprime en disant que toutes les valeurs d'adhérence des suites de  $F$  sont encore dans  $F$ .

### III Suites extraites

#### III.1 Définitions

**Définition 13.3.1 (Suite extraite, fonction extractrice)**

1. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Une *suite extraite* de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle qu'il existe  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = u_{\varphi(n)}$ .
2. La fonction  $\varphi$  est appelée *fonction extractrice* de la suite extraite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Ainsi formellement, une suite extraite de  $(u_n)$  est une composée de  $u_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  par une fonction strictement croissante  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . En pratique, cela signifie que  $(v_n)$  est constitué de termes de  $(u_n)$ , dans l'ordre, et sans répétition d'indice.

**Exemples 13.3.2**

1. Les deux suites extraites des termes d'indice pair et des termes d'indice impair :  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ .

2.  $(u_{n^2})_{n \geq 0}$
3. Pas  $(u_{n(n-1)})_{n \geq 0}$

La beauté poétique de la démonstration du lemme suivant nous laisse rêveurs :

**Lemme 13.3.3 (Lemme des pics ou lemme du soleil levant, HP)**

*De toute suite réelle on peut extraire une suite monotone.*

◁ **Éléments de preuve.**

La ligne brisée des points du graphe de la suite (dans  $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ ) forme un relief (les pics). L'éclairer par la droite par une lumière rasante (soleil levant). Un pic (ou son sommet) est éclairé s'il n'est caché par aucun autre (strictement) plus grand. S'il existe une infinité de pics éclairés, ils forment une suite décroissante. Sinon, se placer au-delà du dernier pic éclairé, et partir d'un pic, qui sera caché par un autre, lui-même caché par un troisième etc. Ces pics forment une suite croissante. ▷

### III.2 Suites extraites et convergence

Le comportement des suites extraites à l'infini donne des indications quant au comportement de la suite initiale. Si le comportement de la suite initiale détermine le comportement d'une suite extraite, il est beaucoup plus délicat de faire chemin arrière, une suite extraite ne pouvant fournir qu'une information partielle sur la suite totale.

**Théorème 13.3.4 (Théorème de convergence des suites extraites)**

*Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite convergente dans  $\overline{\mathbb{R}}$  ou dans  $\mathbb{C}$ . Alors toutes les suites extraites de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont convergentes, de même limite que  $(u_n)$ .*

◁ **Éléments de preuve.**

La stricte croissance de l'extractrice  $\varphi$  montre que pour tout  $n$ ,  $\varphi(n) \geq n$ . Le résultat est alors immédiat par la définition de la limite (version topologique pour éviter les discussions). ▷

Réciproquement, on peut sous certaines conditions contrôler la convergence d'une suite à partir de la convergence d'un petit nombre de suites extraites. Le cas typique est le suivant :

**Proposition 13.3.5**

*Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle ou complexe. Alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge dans  $\overline{\mathbb{R}}$  ou  $\mathbb{C}$  si et seulement si  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  convergent vers une même limite  $\ell$ , et dans ce cas,  $\lim u_n = \ell$ .*

◁ **Éléments de preuve.**

Sens direct déjà acquis. Pour le sens réciproque, considérer  $\varepsilon > 0$ ,  $N_1$  et  $N_2$  provenant de la convergence de  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$ , puis définir un rang  $N$  adéquat pour  $(u_n)$  en fonction de  $N_1$  et  $N_2$ . ▷

Nous pouvons bien sûr adapter la proposition précédente au cas des suites extraites  $(u_{3n})$ ,  $(u_{3n+1})$  et  $(u_{3n+2})$ , etc.

On pourrait formuler un théorème plus général : Intuitivement, pour contrôler tous les termes de  $(u_n)$ , il faut que les images des fonctions extractrices des suites extraites auxquelles on limite notre étude forment un recouvrement de  $\mathbb{N}$ . A cela, il faut rajouter une hypothèse de finitude, pour une question d'uniformité du contrôle qu'on a sur les termes de la suite.

La notion de suite extraite est intimement liée à celle de valeur d'adhérence :

**Définition 13.3.6 (valeur d'adhérence, Spé)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels (ou complexes). On dit que le réel (ou complexe, ou  $\pm\infty$ )  $x$  est une *valeur d'adhérence* de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  s'il existe une suite extraite  $(v_n)$  de  $(u_n)$  telle que  $\lim v_n = x$ .

Ainsi, l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est l'ensemble de toutes les limites (finies) des suites extraites de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Proposition 13.3.7**

Si  $u_n \rightarrow \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ , alors  $\ell$  est valeur d'adhérence de  $(u_n)$  et c'est la seule dans  $\overline{\mathbb{R}}$ .

◁ **Éléments de preuve.**

C'est une réexpression du théorème de convergence des suites extraites. ▷

On verra plus loin que cette proposition admet une réciproque.

**Proposition 13.3.8 (Caractérisation des valeurs d'adhérence)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle, et  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ . Alors  $a$  est valeur d'adhérence de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  si et seulement si pour tout voisinage  $V$  de  $a$ , il existe une infinité d'indices  $n$  tels que  $u_n \in V$ , c'est-à-dire s'il existe un sous-ensemble infini  $I$  de  $\mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \in I$ ,  $u_n \in V$ .

◁ **Éléments de preuve.**

- Sens direct : utiliser la définition topologique de la convergence d'une suite extraite vers  $a$ .
- Sens réciproque : construire  $\varphi$  par récurrence, en utilisant des voisinages  $V_n$  collant de plus en plus à  $a$  (distinguer le cas  $a$  fini et  $a$  infini). Le fait qu'il existe une infinité de termes  $u_k$  dans  $V_n$  nous assure l'existence d'un terme avec un indice strictement supérieur à  $\varphi(n-1)$ . cela nous donne la construction d'une suite extraite convergeant vers  $a$ .

▷

**Corollaire 13.3.9 (Caractérisation d'une valeur d'adhérence finie)**

Soit  $(u_n)$  une suite et  $a \in \mathbb{R}$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $a$  est valeur d'adhérence de  $(u_n)$  ;
- (ii) pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$  contient une infinité de termes de la suite  $(u_n)$  ;
- (iii)  $\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, u_n \in ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$

◁ **Éléments de preuve.**

- (i)  $\implies$  (ii) : conséquence immédiate de la caractérisation précédente.
- (ii)  $\implies$  (i) : utiliser la caractérisation précédente, en remarquant que tout voisinage de  $a$  contient un  $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ .
- (ii)  $\iff$  (iii) assez clair.

▷

**Corollaire 13.3.10 (Caractérisation d'une valeur d'adhérence infinie)**

Soit  $(u_n)$  une suite. Alors  $+\infty$  est valeur d'adhérence de  $(u_n)$  si et seulement si  $(u_n)$  n'est pas majorée.

◁ **Éléments de preuve.**

- Sens direct : caractérisation précédente avec des voisinages  $]A, +\infty[$ .
- Sens réciproque : prendre  $V$  voisinage de  $+\infty$  et  $]A, +\infty[ \subset V$ . Si  $]A, +\infty[$  contient un nombre fini de termes de  $(u_n)$ , ces valeurs admettent un majorant ; les autres sont majorées par  $A$ . Donc  $(u_n)$  est majorée.

▷

**Avertissement 13.3.11**

Une suite peut ne pas avoir de valeur d'adhérence dans  $\mathbb{R}$ . Elle en a toujours une dans  $\overline{\mathbb{R}}$ . On peut montrer que l'unicité de la valeur d'adhérence dans  $\overline{\mathbb{R}}$  caractérise la convergence de la suite.

**Proposition 13.3.12 (Existence d'une valeur d'adhérence, HP)**

Toute suite réelle  $(u_n)$  admet une valeur d'adhérence au moins dans  $\overline{\mathbb{R}}$ .

◁ **Éléments de preuve.**

Appliquer le lemme des pics.

▷

**Théorème 13.3.13 (Caractérisation de la convergence par les valeurs d'adhérence)**

Une suite  $(u_n)$  converge dans  $\overline{\mathbb{R}}$  si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence dans  $\overline{\mathbb{R}}$ .

◁ **Éléments de preuve.**

Sens direct déjà étudié. Sens réciproque : pour tout voisinage  $V$  de  $a$  (unique valeur d'adhérence), seul un nombre fini de termes de  $u_n$  est hors de  $V$  (sinon on peut en extraire une suite convergente d'après la proposition précédente, et on obtient une deuxième valeur d'adhérence).

▷

**III.3 Théorème de Bolzano-Weierstrass**

Le théorème suivant est important, car il donne l'existence d'une valeur d'adhérence non infinie.

**Théorème 13.3.14 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)**

De toute suite réelle bornée on peut extraire une suite convergente.

◁ **Éléments de preuve.**

C'est un cas particulier du théorème d'existence d'une valeur d'adhérence, cette valeur d'adhérence étant ici finie.

Afin de contourner l'utilisation du lemme des pics (HP), on en propose une démonstration directe, par dichotomie, en partant d'un intervalle  $[m, M]$  où  $m < M$ , et  $m$  et  $M$  sont un minorant et un majorant de  $(u_n)$ . On coupe l'intervalle en 2 en conservant à chaque fois la (ou une) moitié contenant une infinité de termes de la suite  $(u_n)$ . Le point limite est alors valeur d'adhérence.

▷

Le cas d'une suite complexe se déduit du cas réel en deux étapes : on extrait une première suite telle que la partie réelle converge, puis de cette suite extraite on extrait une deuxième suite pour assurer la convergence de la partie imaginaire. On peut itérer le procédé pour davantage de coordonnées :

**Corollaire 13.3.15 (Bolzano-Weierstrass dans  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{R}^n$ )**

Soit  $(u_n)$  une suite bornée dans  $\mathbb{C}$  ou dans  $\mathbb{R}^n$ . Alors  $(u_n)$  admet une valeur d'adhérence.

◁ **Éléments de preuve.**

Extraire une première suite assurant la convergence de la partie réelle, et de cette suite, extraire une seconde assurant la convergence de la partie imaginaire. ▷

**Note Historique 13.3.16**

Le théorème de Bolzano-Weierstrass a été énoncé par Bolzano en 1830, et démontré par Weierstrass en 1860. Weierstrass connaissait-il l'énoncé de Bolzano ? Ce n'est pas certain, car ce dernier est interdit de publication par l'empire austro-hongrois, car trop critique vis-à-vis de l'ordre établi. Il en résulte que ses résultats ont été très peu diffusés.

**Corollaire 13.3.17**

Soit  $I = [a, b]$  un intervalle fermé borné de  $\mathbb{R}$ . Alors de toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $I$  on peut extraire une suite convergeant vers un réel  $\ell \in I$ .

◁ **Éléments de preuve.**

C'est quasiment une réexpression du théorème de Bolzano-Weierstrass. Le seul point supplémentaire est l'appartenance  $a \in I$ , provenant du fait que l'intervalle est fermé (utiliser la conservation des inégalités par passage à la limite). ▷

Cette propriété définit la notion d'ensemble *compact*

**Définition 13.3.18 (Sous-ensemble compact, Spé)**

Soit  $E$  un espace métrique et  $K \subset E$ . On dit que  $K$  est *compact* si de toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $K$ , on peut extraire une suite convergeant vers un élément de  $K$ .

Ainsi, les intervalles fermés bornés de  $\mathbb{R}$  sont des sous-ensembles compacts de  $\mathbb{R}$ . On peut montrer plus généralement que les sous-ensembles compacts de  $\mathbb{R}$  sont exactement les sous-ensembles fermés et bornés de  $\mathbb{R}$  (ce qui inclut en particulier les intervalles fermés bornés).

## IV Étude de suites particulières

Nous étudions dans cette section un certain nombre de suites d'un type qu'on rencontre souvent, et qu'il faut savoir étudier.

### IV.1 Suites définies par une récurrence affine

Nous étudions ici les suites définies par une relation  $u_{n+1} = au_n + b$ . Une telle suite est entièrement déterminée par la donnée de cette relation, et la donnée de son terme initial  $u_0$  (ou éventuellement  $u_N$ , si la suite ne débute pas au rang 0).

Les suites arithmétiques et les suites géométriques en sont des cas particuliers, par lesquels nous commencerons cette étude.

**Définition 13.4.1 (Suite arithmétique)**

Une *suite arithmétique*  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite vérifiant une relation de récurrence du type  $u_{n+1} = u_n + b$ .

**Proposition 13.4.2 (Explicitation des suites arithmétiques)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique, vérifiant la relation  $u_{n+1} = u_n + b$ . Alors :

- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = u_0 + nb$  ;
- plus généralement, pour tout  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ ,  $u_n = u_m + (n - m)b$ ,
- ou encore, pour tout  $(m, k) \in \mathbb{N}^2$ ,  $u_{m+k} = u_m + kb$ .

◁ Éléments de preuve.

Récurrence immédiate

▷

#### Définition 13.4.3 (Suites géométriques)

Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une *suite géométrique* si et seulement elle vérifie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , une relation du type  $u_{n+1} = au_n$ .

#### Proposition 13.4.4 (Explicitation des suites géométriques)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite géométrique, vérifiant la relation  $u_{n+1} = au_n$ . Alors :

- $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = u_0 \cdot a^n$  ;
- plus généralement, pour tout  $m < n$ ,  $u_n = u_m a^{n-m}$ ,
- ou encore, pour tout  $(m, k) \in \mathbb{N}^2$ ,  $u_{m+k} = u_m a^k$ .

◁ Éléments de preuve.

Récurrence immédiate.

▷

#### Définition 13.4.5 (Suites arithmético-géométriques)

Une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite *arithmético-géométrique* si elle vérifie une relation du type  $u_{n+1} = au_n + b$ , avec  $a \neq 1$ .

#### Théorème 13.4.6 (Structure)

L'ensemble des suites vérifiant la relation de récurrence  $u_{n+1} = a_n u_n + b_n$  où  $(b_n)$  est une suite fixée, est un sous-espace affine de l'ensemble des suites, obtenu comme somme d'une solution particulière, et de l'ensemble des suites géométriques de raison  $a$  (i.e. solutions de l'équation homogène  $u_{n+1} = au_n$ ).

La structure affine se traduit par le fait que l'ensemble des solutions est obtenu en ajoutant une solution particulière à l'ensemble des solutions de la relation homogène associée, et que l'ensemble des solutions de la relation homogène est non vide et stable par combinaison linéaire.

◁ Éléments de preuve.

- L'ensemble des solutions de l'équation homogène est clairement non vide (contient la suite nulle) et stable par CL.
- si  $(u_n)$  est une solution particulière,  $(u_n)$  est une solution ssi  $(u_n - v_n)$  est solution de la relation homogène associée.

▷

Ce résultat s'applique notamment dans le cas où  $(b_n)$  est constant (cas des suites arithmético-géométriques) :

#### Méthode 13.4.7 (Explicitation des suites arithmético-géométriques)

- Rechercher une solution particulière constante (c'est un point fixe de la relation)
- Ajouter la solution générale de la relation homogène (c'est-à-dire une suite géométrique)

**Exemple 13.4.8**

Expliciter la suite  $(u_n)$  telle que  $u_0 = 2$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n - 2$ .

**Méthode 13.4.9 (Explicitation de  $u_{n+1} = au_n + \lambda^n P(n)$ ,  $P$  polynôme)**

- Si  $\lambda \neq a$ . Chercher une solution sous la même forme  $\lambda^n Q(n)$ , avec  $Q$  de même degré que  $P$ . Procéder par identification des coefficients.
- Si  $\lambda = a$ , chercher la solution sous la forme  $n\lambda^n Q(n)$ ,  $Q$  de même degré que  $P$ .

**Exemple 13.4.10**

1. Explicitation de  $u_{n+1} = 3u_n + 2^n(n^2 - 1)$ ,  $u_0 = 2$ .
2. Explicitation de  $u_{n+1} = 2u_n + n2^n$ ,  $u_0 = 1$ .

**IV.2 Suites définies par une relation linéaire d'ordre  $k$** **Définition 13.4.11 (Suites récurrentes linéaires d'ordre  $k$  à coefficients constants)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . On dit que  $(u_n)$  est une *suite récurrente linéaire d'ordre  $k$*  à coefficients constants si  $(u_n)$  vérifie une relation du type :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+k} = a_{k-1}u_{n+k-1} + \dots + a_1u_{n+1} + a_0u_n.$$

où  $(a_0, \dots, a_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$ .

Une suite récurrente d'ordre  $k$  est entièrement déterminée par sa relation de récurrence et la donnée de ses  $k$  premiers termes.

**Note Historique 13.4.12**

Leonardo Fibonacci (1175-1250), aussi appelé Leonardo Pisano, ou en français, Léonard de Pise, est un mathématicien italien, dont l'enfance passée en Kabylie a contribué à l'introduction en Europe des chiffres arabes. Il a écrit plusieurs recueils de problèmes numériques. Sa contribution aux mathématiques la plus célèbre reste la suite portant son nom. Elle aurait été introduite par Fibonacci en vue de dénombrer les lapins de son élevage en fonction du nombre de lapins des saisons précédentes. C'est la première vraie formule de récursion de l'histoire des mathématiques.

« Fibonacci » n'est pas son vrai nom. Littéralement, cela signifie « fils de Bonacci », son père s'appelant Guilielmo Bonacci. Le nom « Fibonacci » lui a été donné à titre posthume.

**Définition 13.4.13 (Polynôme caractéristique d'une récurrence linéaire)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite récurrente linéaire, de relation

$$u_{n+k} = a_{k-1}u_{n+k-1} + \dots + a_1u_{n+1} + a_0u_n \quad \text{soit:} \quad u_{n+k} - a_{k-1}u_{n+k-1} - \dots - a_1u_{n+1} - a_0u_n = 0$$

Le *polynôme caractéristique* associé à la suite récurrente  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est le polynôme

$$P(X) = X^k - a_{k-1}X^{k-1} - \dots - a_1X - a_0.$$

La recherche des racines du polynôme caractéristique permet d'explicitier les suites récurrentes linéaires. Nous nous contentons d'énoncer et démontrer le cas de récurrences linéaires d'ordre 2, le seul au programme.

**Théorème 13.4.14 (Explicitation des suites récurrentes linéaires d'ordre 2)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite récurrente linéaire d'ordre 2, et  $P$  son polynôme caractéristique, de degré 2.

1. Si  $P$  admet deux racines distinctes (réelles ou complexes)  $r$  et  $s$ , alors il existe des scalaires (réels ou complexes)  $\lambda$  et  $\mu$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r^n + \mu s^n.$$

2. Si  $P$  admet une racine double  $r$ , alors il existe des scalaires (réels ou complexes)  $\lambda$  et  $\mu$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda + \mu n)r^n.$$

◁ **Éléments de preuve.**

1. Montrer que  $(r^n)$  et  $(s^n)$ , ainsi que toutes leurs combinaisons linéaires, vérifient la relation de récurrence. Montrer ensuite qu'on peut trouver  $\lambda$  et  $\mu$  tel que la relation  $u_n = \lambda r^n + \mu s^n$  soit vraie pour  $n = 0$  et  $n = 1$ , puis propager l'égalité par récurrence (ce qui revient à dire qu'une suite vérifiant une telle relation est entièrement déterminée par ses deux premiers termes).
2. De même avec les suites  $(r^n)$  et  $(nr^n)$  cette fois.

▷

**Méthode 13.4.15 (Explicitation d'une récurrence d'ordre 2)**

- Déterminer le polynôme caractéristique, et rechercher ses racines.
- Suivant la situation, donner la forme de l'explicitation, avec les paramètres  $\lambda$  et  $\mu$
- Écrire la relation obtenue pour les deux termes initiaux (généralement  $n = 0$  et  $n = 1$ ). cela fournit un système de deux équations à deux inconnues  $\lambda$  et  $\mu$ .
- Résoudre ce système pour trouver les valeurs de  $\lambda$  et  $\mu$ .

**Exemple 13.4.16 (Suites de Fibonacci)**

Expliciter la suite de Fibonacci, définie par  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ .

Ce résultat se généralise bien au cas de suites récurrentes linéaires d'ordre  $k$ , lorsque les racines sont deux à deux distinctes. Nous donnons le résultat, mais nous nous dispenserons de la preuve, pour laquelle nous n'avons pas encore tous les outils d'algèbre linéaire adéquats.

**Théorème 13.4.17 (Explicitation des suites récurrentes linéaires, cas particulier, HP, admis)**

Si  $P$  admet exactement  $k$  racines distinctes 2 à 2 (réelles ou complexes)  $r_1, \dots, r_k$ , alors il existe des complexes  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda_1 r_1^n + \dots + \lambda_k r_k^n = \sum_{i=1}^k \lambda_i r_i^n.$$

Les complexes  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  sont déterminés par les conditions initiales, par la résolution d'un système de  $k$  équations à  $k$  inconnues.

La formule générale consiste alors à rajouter des facteurs polynomiaux multipliant les suites géométriques, dont les degrés sont strictement inférieurs à la multiplicité de la racine correspondante dans le polynôme caractéristique.

De même que pour le cas des suites d'ordre 1, on a un théorème de structure lorsqu'on ajoute un second membre. A voir comme une généralisation des suites arithmético-géométriques.

**Théorème 13.4.18 (Structure, HP)**

Soit  $(b_n)$  une suite, et les deux relations de récurrence suivantes :

- $(E) : u_{n+k} = a_{k-1}u_{n+k-1} + \dots + a_1u_{n+1} + a_0u_n + b_n$
- $(EH) : v_{n+k} = a_{k-1}v_{n+k-1} + \dots + a_1v_{n+1} + a_0v_n.$

Alors l'ensemble des suites vérifiant  $(E)$  est un sous-espace affine de l'ensemble des suites, obtenu comme somme d'une solution particulière, et du sous-espace vectoriel des solutions de  $(EH)$ .

◁ **Éléments de preuve.**

Même principe que dans le cas de récurrences d'ordre 1. ▷

**Méthode 13.4.19 (HP, mais parfois utile)**

Lorsque  $b_n = \lambda^n Q(n)$  ( $Q \in \mathbb{C}[X]$ ), on dispose d'une méthode similaire à celle décrite pour le cas des équations différentielles. Plus précisément, si  $P$  est le polynôme caractéristique, et  $m$  la multiplicité de  $\lambda$  comme racine de  $P$ , on recherchera une solution particulière sous la forme  $n^m R(n) \lambda^n$ , où  $R$  est un polynôme de même degré que  $Q$ .

### IV.3 Suites définies par une récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

Enfin, nous donnons quelques méthodes d'étude de suites récurrentes d'ordre 1 non linéaires, c'est-à-dire de suites définies par une relation du type  $u_{n+1} = f(u_n)$ , pour une certaine fonction  $f$ . Nous dirons dans ce paragraphe simplement « suite récurrente » pour désigner une telle suite. On parle aussi de système dynamique discret. Remarquez qu'une telle suite n'est pas toujours bien définie : il peut arriver qu'un terme  $u_n$  sorte du domaine de définition de  $f$ , et qu'on ne puisse plus appliquer la relation de récurrence. Une des premières tâches est souvent de vérifier que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie. Si souvent, cette justification est intuitivement évidente, son principe est basé sur la récurrence : si on parvient à définir le terme  $u_n$ , on peut encore définir le terme  $u_{n+1}$ .

Nous nous intéressons en particulier à la limite de  $(u_n)$ . La recherche de la limite d'une suite récurrente s'opère toujours sur le même principe.

**Méthode 13.4.20 (Étude de la limite d'une suite récurrente)**

- Étudier l'existence de la limite :
  - \* s'assurer que la suite est bien définie,
  - \* étudier sa monotonie, et obtenir l'existence de la limite à l'aide par exemple du théorème de la limite monotone.
- une fois assurée l'existence de la limite, déterminer les valeurs possibles de cette limite  $\ell$  en passant à la limite dans la relation de récurrence :

**Si  $f$  est continue**, soit  $\ell$  vérifie  $f(\ell) = \ell$ , soit  $\ell$  est un bord ouvert du domaine de  $f$ .

- Déterminer, parmi l'ensemble des valeurs possibles de  $\ell$  laquelle est la bonne.
- Déterminer les points fixes de  $f$  peut déjà s'avérer utile pour la première étape (aide à la recherche d'intervalles stables, de majorants et de minorants). Commencer par cela peut être efficace.

Nous donnons quelques techniques utiles pour la première étape de cette méthode.

**Définition 13.4.21 (Intervalle stable)**

On dit qu'un intervalle  $I$  est stable par  $f$  si  $f$  est définie sur  $I$  (i.e.  $I \subset D_f$ ) et  $f(I) \subset I$ .

**Remarque 13.4.22**

La recherche des points fixes aide souvent à déterminer des intervalles stables.

**Théorème 13.4.23 (CS pour que  $(u_n)$  soit bien définie)**

Si  $I$  est un intervalle stable par  $f$ , et si  $u_0 \in I$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie.

◁ **Éléments de preuve.**

Montrer par récurrence que  $u_n$  est défini, et  $u_n \in I$ . Comme  $I$  est dans le domaine, on peut alors continuer. ▷

Évidemment, si on parvient à trouver un indice  $N$  tel que  $u_N$  soit dans un intervalle stable, on parvient à la même conclusion.

Les intervalles stables permettent aussi souvent d'étudier les variations de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . La situation la plus simple est la suivante (et assez facile à détecter graphiquement) :

**Proposition 13.4.24 (Étude des variations lorsque  $f - \text{id}$  est de signe constant)**

Supposons  $f - \text{id}$  de signe constant sur un intervalle stable  $I$ , et  $u_0 \in I$ . Alors  $(u_n)$  est monotone, de sens de monotonie déterminé par le signe de  $f - \text{id}$ .

◁ **Éléments de preuve.**

D'après ce qui précède, pour tout  $n$ ,  $u_n \in I$ . Appliquer  $f$  pour comparer  $u_{n+1}$  à  $u_n$ . ▷

Lorsque  $f$  admet des propriétés de monotonie sur un intervalle stable, on peut aussi conclure assez facilement.

**Proposition 13.4.25 (Étude des variations lorsque  $f$  est croissante)**

Supposons  $f$  croissante sur un intervalle stable  $I$ , et  $u_0 \in I$  (peut s'adapter si on n'a pas cette inclusion dès le rang initial). Alors  $(u_n)$  est monotone. On trouve le sens de monotonie en comparant  $u_0$  et  $u_1$ .

◁ **Éléments de preuve.**

Tout d'abord, tous les termes  $u_n$  sont dans  $I$ . On peut alors propager par récurrence l'inégalité initiale entre  $u_0$  et  $u_1$ , en appliquant la fonction croissante  $f$ . ▷

**Proposition 13.4.26 (Étude des variations lorsque  $f$  est décroissante)**

Supposons  $f$  décroissante sur un intervalle stable  $I$ , et  $u_0 \in I$  (peut s'adapter si on n'a pas cette inclusion dès le rang initial). Alors  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  sont monotones, de sens de monotonie opposés. On trouve les sens de monotonie en comparant  $u_0$  et  $u_2$ .

◁ **Éléments de preuve.**

Appliquer le résultat précédent à  $f \circ f$ , décrivant la récurrence associée aux suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$ . ▷

**Avertissement 13.4.27**

Dans le cas d'une fonction  $f$  décroissante, il ne suffit pas de comparer  $u_0$  et  $u_1$  :  $u_0 < u_1$  ne suffit pas pour établir la croissance de  $(u_{2n})$  et la décroissance de  $(u_{2n+1})$ . Ce serait suffisant si on savait de plus que ces deux suites admettent une même limite, mais ce n'est en général pas le cas.

**Remarque 13.4.28**

Lorsque  $f$  est croissante, l'argument ci-dessus suffit à obtenir la convergence dans  $\overline{\mathbb{R}}$ . Il suffit de majorer ou minorer suivant le cas pour obtenir la convergence vers  $\mathbb{R}$ . La connaissance des points fixes de  $f$  peut aider à trouver des majorants. En effet, si  $f$  est croissante, et  $c$  un point fixe tel que  $u_0 \leq c$ , on peut propager cette inégalité aux rangs suivants. Ainsi, on cherchera en général à majorer ou minorer par des points fixes.

**Avertissement 13.4.29**

Ainsi, si  $f$  est décroissante sur un intervalle stable, les deux suites extraites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  sont monotones de sens de variation opposés. Cela ne suffit pas pour prouver que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge. Pour cela, il faut encore s'assurer que  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  ont même limite. Les limites de ces deux suites sont à rechercher parmi les points fixes de  $f \circ f$ . Si  $f \circ f$  a deux points fixes distincts, on peut très bien avoir convergence de  $(u_{2n})$  vers l'un des deux et de  $(u_{2n+1})$  vers l'autre. Essayez de construire un exemple graphique.

**Avertissement 13.4.30**

Les points fixes de  $f$  sont évidemment points fixes de  $f \circ f$ , mais la réciproque est fautive en général ! On n'a qu'une inclusion de l'ensemble des points fixes de  $f$  dans l'ensemble des points fixes de  $f \circ f$ . Ainsi, pour trouver les limites de  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$ , il ne faut pas se contenter de considérer les points fixes de  $f$ . L'équation permettant de calculer les points fixes de  $f \circ f$  peut parfois être un peu compliqué, mais on peut parfois s'aider de la connaissance de certaines solutions particulières pour la simplifier (les points fixes de  $f$  sont solutions).

**Exemple 13.4.31**

Étude de la suite  $u_0 \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 - u_n$ .

Enfin, une dernière technique d'étude importante, permettant notamment d'apprécier ensuite la vitesse de convergence, est basée sur l'IAF, et plus particulièrement sur le caractère lipschitzien.

**Proposition 13.4.32**

Soit  $f$  une application contractante sur un intervalle  $I$ , de facteur de Lipschitz  $k < 1$ , et  $(u_n)$  une suite récurrente à valeurs dans  $I$ , définie par  $f$ . Soit  $\ell$  un point fixe de  $f$  sur  $I$ . Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|.$$

En particulier,  $u_n \rightarrow \ell$ .

On peut même montrer (par exemple par l'étude de la convergence de la série télescopique)  $\sum u_{n+1} - u_n$  que sous les hypothèses précédentes,  $f$  admet toujours un (et un seul) point fixe (théorème du point fixe de Banach-Picard). Ainsi, une suite définie par récurrence à partir d'une fonction  $f$  contractante sur un intervalle stable est toujours convergente si  $u_0$  est dans cet intervalle stable.

# Propriétés des fonctions continues ou dérivables sur un intervalle

*Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivées.*

Charles Hermite

Nous étudions dans ce chapitre les premières propriétés de régularité d'une fonction, à savoir la continuité, et la dérivabilité. Les études locales ayant déjà été faites en grande partie dans un chapitre antérieur, notre but sera essentiellement, après quelques rappels ou précisions, d'étudier des propriétés plus globales des fonctions continues ou dérivables sur tout un intervalle.

Dans tout ce chapitre, on considère des applications  $f$  définies sur un intervalle  $I$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

## I Fonctions continues sur un intervalle

### I.1 Fonctions continues et continues par morceaux

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

#### Définition 14.1.1 (Fonction continue sur un intervalle)

On dit que  $f$  est continue sur  $I$  si et seulement si  $f$  est continue en tout  $a$  de  $I$ .

#### Définition 14.1.2 (Fonction continue par morceaux sur un intervalle)

- On dit que  $f$  est continue par morceaux sur un segment  $I = [a, b]$  si et seulement s'il existe des réels  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  tels que :
  - $f$  soit continue sur chaque intervalle  $]x_i, x_{i+1}[$ ,  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$
  - $f$  admette des limites à gauche finies en  $x_1, \dots, x_n$  et des limites à droite finies en  $x_0, \dots, x_{n-1}$ .
- On dit que  $f$  est continue par morceaux sur un intervalle  $I$  quelconque, si pour tout segment  $J \subset I$ ,  $f$  est continue par morceaux sur  $J$ .

#### Exemples 14.1.3

- La fonction  $x \mapsto \lfloor x \rfloor$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ .

2. La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  sur  $\mathbb{R}^*$  prolongée par  $f(0) = 0$  est-elle continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$  ?
3. La fonction  $x \mapsto \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$  est-elle continue par morceaux sur  $]0, 1[$  ?

Nous n'étudierons pas tellement les fonctions continues par morceaux dans ce chapitre. Nous les retrouverons plus tard, lorsque nous définirons l'intégrale de Riemann.

## I.2 Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Une première propriété importante des fonction continues sur un intervalle est le théorème des valeurs intermédiaires.

Dans ce qui suit, par convention, et dans un soucis d'unification des énoncés,  $f(+\infty)$  désigne  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  dans le cas où cette limite existe, et de même pour  $f(-\infty)$ .

### Théorème 14.1.4 (TVI, version 1 : existence d'un zéro)

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  d'extrémités  $a$  et  $b$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$  (avec existence des limites dans le cas de bornes infinies). Alors, si  $f(a) > 0$  et  $f(b) < 0$  (ou l'inverse), il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(c) = 0$

#### ◁ Éléments de preuve.

Méthode 1 : considérer  $c = \sup\{x \in [a, b] \mid f(x) > 0\}$ , vérifier  $f(c) = 0$  et  $c \in ]a, b[$ . Attention à bien justifier  $c$  non infini, dans le cas où  $a$  ou  $b$  est infini.

Méthode 2 : par dichotomie, après s'être ramené au cas de bornes finies. ▷

### Avertissement 14.1.5

Attention,  $c$  n'a aucune raison d'être unique !

### Théorème 14.1.6 (TVI, version 2 : réalisation des valeurs intermédiaires)

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ , et soit  $M = \sup_{x \in I} f(x)$  et  $m = \inf_{x \in X} f(x)$ . Alors  $f$  prend toutes les valeurs de l'intervalle  $]m, M[ : \forall x_0 \in ]m, M[, \exists c \in I, f(c) = x_0$ .

#### ◁ Éléments de preuve.

Appliquer la version 1 à  $f - x_0$ . ▷

### Théorème 14.1.7 (TVI, version 3 : image d'un intervalle)

L'image d'un intervalle quelconque par une fonction continue est un intervalle.

#### ◁ Éléments de preuve.

Obtenir la convexité de  $\text{Im}(f)$  à partir de la version 2. ▷

Le théorème des valeurs intermédiaire affirme plus ou moins que pour passer d'un côté à l'autre d'une droite, sans lever le crayon, on est bien obligé à un moment de croiser cette droite !

### Note Historique 14.1.8

Le théorème des valeurs intermédiaires, aussi appelé théorème de Bolzano, a été démontré par Bolzano à l'aide de la borne supérieure, mais à un moment où, la construction de  $\mathbb{R}$  n'ayant pas encore été précisée, les propriétés fondamentales de  $\mathbb{R}$  restaient mal fondées. Cauchy dans son cours d'analyse, donne le résultat sans preuve rigoureuse, se contentant d'un dessin. Peano prouve le résultat par dichotomie à la fin du 19<sup>e</sup> siècle.

### I.3 Continuité uniforme

La notion de continuité traduit le fait que localement,  $f(x)$  approche  $f(a)$  à  $\varepsilon$  près fixé arbitrairement à l'avance. L'aspect local de cette approximation se traduit par  $\eta$  intervenant dans la définition :  $\eta$  nous donne le domaine de validité de l'approximation. Plus  $\eta$  est petit, plus il faut rester proche de  $x$  pour que l'approximation soit correcte. La taille de ce domaine de validité peut d'ailleurs dépendre de  $x$ . En général, il n'y a pas de raison de pouvoir trouver un réel  $\eta$  convenant pour toutes les valeurs de  $x$  du domaine de définition d'une fonction continue. Cela signifie que, une marge  $\varepsilon$  étant donnée, il peut exister des points pour lesquels il faudra rester très très proche (infiniment proche si on fait tendre  $x$  vers un des bords du domaine) de  $x$  pour que l'approximation à  $\varepsilon$  près reste vraie.

#### Exemples 14.1.9

1.  $x \mapsto e^x$  sur  $\mathbb{R}$ .
2.  $x \mapsto \frac{1}{x}$  sur  $]0, 1[$ .

Si pour tout  $\varepsilon$ , on peut trouver un  $\eta$  convenable pour toute valeur de  $x$ , on parlera de continuité uniforme. Remarquez qu'il ne s'agit de rien de moins que d'une interversion de quantificateurs par rapport à la définition de la continuité sur un domaine.

#### Définition 14.1.10 (Continuité uniforme)

Soit  $f$  une fonction définie sur un sous-ensemble  $X$  de  $\mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est uniformément continue sur  $X$  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in X^2, |x - y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Le réel  $\eta$  est appelé *module de continuité uniforme de  $f$  pour l'approximation  $\varepsilon$*

#### Proposition 14.1.11 (Critère séquentiel de la continuité uniforme)

Soit  $f$  une fonction définie sur un sous-ensemble  $X$  de  $\mathbb{R}$ . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $f$  est uniformément continue sur  $X$
- (ii) Pour toutes suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  d'éléments de  $X$  telles que  $x_n - y_n \rightarrow 0$ , on a aussi  $f(x_n) - f(y_n) \rightarrow 0$ .

#### ◁ Éléments de preuve.

Le sens direct est une conséquence immédiate de la définition. de la continuité uniforme et de la convergence de suites. Réciproquement, raisonner par la contraposée. ▷

Les exemples précédents montrent qu'il existe des fonctions continues sur un intervalle sans y être uniformément continues. En revanche, cette situation est impossible sur un segment (intervalle fermé borné) :

#### Théorème 14.1.12 (Heine)

Soit  $I = [a, b]$  un segment, et  $f$  une fonction continue sur  $I$ . Alors  $f$  est uniformément continue sur  $I$ .

#### ◁ Éléments de preuve.

Par l'absurde, construire  $(x_n)$  et  $(y_n)$  telles que  $x_n - y_n \rightarrow 0$  et  $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$ . Extraire une suite convergente de  $(x_n)$  et contredire le critère séquentiel. ▷

## I.4 Extrema des fonctions continues sur un intervalle fermé borné

On rappelle qu'un sous-ensemble  $K$  de  $\mathbb{R}$  est dit compact s'il vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass :

### Définition 14.1.13 (Compacité)

Soit  $K \subset \mathbb{R}$ . On dit que  $K$  est compact si de toute suite  $(x_n)$  d'éléments de  $K$ , on peut extraire une suite convergente vers un élément  $a$  de  $K$ .

### Lemme 14.1.14 (Caractérisation des intervalles compacts)

Les intervalles compacts sont exactement les segments, i.e. les intervalles fermés bornés  $[a, b]$ .

#### ◁ Éléments de preuve.

On a déjà justifié que les segments sont des compacts. Réciproquement, si  $I$  n'est pas borné, ou  $I$  n'est pas fermé, il n'est pas dur de construire une suite n'ayant pas de valeur d'adhérence dans  $I$ . ▷

### Lemme 14.1.15 (Image d'un compact par une fonction continue)

Soit  $f$  une fonction définie et continue sur un compact  $K$ . Alors  $f(K)$  est un compact.

#### ◁ Éléments de preuve.

Prendre une suite dans  $f(K)$ , la relever dans  $K$ , en extraire une suite convergente et reprendre l'image par  $f$ . ▷

### Corollaire 14.1.16 (Image d'un segment par une fonction continue)

Soit  $f$  continue sur un segment  $I$ . Alors  $f(I)$  est un segment.

#### ◁ Éléments de preuve.

C'est la fusion des deux lemmes précédents, ainsi que la version 3 du TVI. ▷

Une version affaiblie, mais souvent suffisante, de ce corollaire est :

### Théorème 14.1.17 (Théorème de compacité, ou théorème de la borne atteinte)

Soit  $I = [a, b]$  un segment (c'est-à-dire un intervalle fermé borné), et soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $I$ . Alors  $f$  est bornée, et atteint ses bornes.

#### ◁ Éléments de preuve.

C'est le fait que l'image est un intervalle borné, dont les bornes sont fermées (donc les bornes sont dans l'image, donc atteintes). On perd en revanche dans cet énoncé la propriété de convexité. ▷

En d'autres termes, toute fonction continue sur un segment admet un maximum et un minimum.

## I.5 Autour des fonctions monotones – Théorème de la bijection

### Théorème 14.1.18

Soit  $I$  un intervalle, et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors  $f$  est injective si et seulement si  $f$  est strictement monotone.

◁ **Éléments de preuve.**

Réciproque déjà établie. Pour le sens direct, raisonner par contraposée. Si  $f$  n'est pas monotone, il existe  $a < b < c$  tel que  $f(a) < f(b)$  et  $f(b) > f(c)$ , ou l'inverse. Appliquer le TVI sur chacun des deux intervalles  $[a, b]$  et  $[b, c]$  pour contredire l'injectivité. ▷

**Théorème 14.1.19**

Soit  $I$  un intervalle, et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  monotone. Si  $f(I)$  est un intervalle, alors  $f$  est continue

◁ **Éléments de preuve.**

Sinon, en supposant  $f$  croissante, on peut trouver  $a$  tel que l'une des 2 inégalités suivantes soit définie et vérifiée :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) < f(a), \quad f(a) < \lim_{x \rightarrow a^+} f(x).$$

Alors, par croissance, les valeurs intermédiaires à ces inégalités ne sont pas atteintes. Cela contredit la convexité. ▷

Ce théorème constitue une réciproque du théorème des valeurs intermédiaires dans le cas où  $f$  est monotone.

**Avertissement 14.1.20**

Le résultat peut être mis en défaut si  $f$  n'est pas monotone, par exemple en considérant

$$x \mapsto f(x) = x\mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}(x) + (1-x)\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x).$$

**Définition 14.1.21 (Homéomorphisme)**

Soit  $A, B \subset \mathbb{R}$ . Un homéomorphisme  $f : A \rightarrow B$  est une application continue bijective dont la réciproque est continue.

**Théorème 14.1.22 (Théorème de la bijection)**

Soit  $I$  un intervalle d'extrémités  $a$  et  $b$ . Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  strictement monotone et continue. Soit :

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \text{et} \quad \beta = \lim_{x \rightarrow b} f(x)$$

(ces limites existent car  $f$  est monotone). Alors  $f(I)$  est un intervalle d'extrémités  $\alpha$  et  $\beta$ , et  $f$  est un homéomorphisme de  $I$  sur  $f(I)$ .

Plus précisément, la borne  $\alpha$  de  $f(I)$  est ouverte si et seulement la borne  $a$  de  $I$  est ouverte, et de même pour  $\beta$ .

◁ **Éléments de preuve.**

- $f(I)$  est un intervalle par TVI. Si  $I$  contient une borne, l'image de cette borne est une borne de  $f(I)$ . La stricte monotonie empêche que la borne de  $f(I)$  soit atteinte ailleurs.
- Soit  $J = f(I)$ . Alors  $f^{-1}$  est monotone sur l'intervalle  $J$ , et son image est l'intervalle  $I$ . Conclure avec le théorème précédent.

▷

On affirme en particulier que si  $f$  est une fonction continue strictement monotone, elle induit une bijection sur son image, et sa réciproque est également continue.

**Remarque 14.1.23**

On dispose maintenant des outils adéquats pour compléter la démonstration du théorème de dérivation des réciproques. En effet, il nous restait à montrer que si  $f$  est continue sur un intervalle  $I$  et bijective, sa réciproque est continue aussi. Ceci est une conséquence du théorème de la bijection auquel on se ramène grâce au théorème 14.1.18.

## II Fonctions dérivables sur un intervalle

Nous avons déjà étudié la dérivabilité en un point, ainsi que toutes les propriétés calculatoires. Nous nous contentons donc ici de l'étude des propriétés des fonctions dérivables sur tout un intervalle.

La dérivabilité d'une fonction est une hypothèse de régularité assez forte (la fonction ne peut pas être localement « hérissée »). La dérivabilité d'une fonction sur tout un intervalle a de ce fait des implications assez fortes.

### II.1 Théorème de Rolle

Graphiquement, le théorème suivant est une évidence :

**Théorème 14.2.1 (Rolle)**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ . Alors, si  $f(a) = f(b)$ , il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

◁ **Éléments de preuve.**

Par compacité,  $f$  admet un maximum et un minimum. Sauf si  $f$  est constante, l'un des deux est différent de  $f(a)$  et  $f(b)$ , donc atteint en  $c \in ]a, b[$ . ▷

On peut étendre le théorème de Rolle de plusieurs façons. Les résultats suivants sont des exercices classiques (à savoir démontrer à la demande, il ne s'agit pas de résultats du cours) :

**Corollaire 14.2.2 (Rolle sur un intervalle infini d'un côté, HP)**

Soit  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue, dérivable sur  $]a, +\infty[$ , et telle que  $f(a) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Alors il existe  $c \in ]a, +\infty[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

◁ **Éléments de preuve.**

Si  $f$  non constante considérer  $d$  tel que  $f(d) \neq f(a)$ , puis à l'aide du TVI trouver  $b$  distinct de  $a$  tels que  $f(a) = f(b)$ . ▷

**Corollaire 14.2.3 (Rolle sur  $\mathbb{R}$ , HP)**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et telle que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Alors il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $f'(c) = 0$ .

◁ **Éléments de preuve.**

Même principe en coupant les infinis des deux côtés. ▷

**Corollaire 14.2.4 (Rolle itéré, HP)**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , continue sur  $[a, b]$ ,  $n$  fois dérivable sur  $]a, b[$ , et telle qu'il existe  $n + 1$  réels  $a \leq a_0 < a_1 < \dots < a_n \leq b$  tels que  $f(a_0) = f(a_1) = \dots = f(a_n)$ . Alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f^{(n)}(c) = 0$ .

◁ Éléments de preuve.

Récurrence immédiate. ▷

**Note Historique 14.2.5**

- Michel Rolle (1659-1719) démontre une version purement algébrique de ce théorème dans le cadre des polynômes. Il ne possède même pas à ce moment-là de la notion de dérivée : il recherche des encadrements de racines d'un polynôme en constatant qu'elles sont séparées par les racines non nulles du polynôme obtenu en multipliant chaque monôme par son degré. Cette construction purement algébrique n'est rien d'autre, après simplification par  $X$ , que la dérivée du polynôme...
- Lagrange, puis Cauchy, démontrent le théorème de Rolle dans une version plus générale, en établissant d'abord l'inégalité des accroissements finis, puis en utilisant le TVI sur  $f'$  : ils utilisent donc une hypothèse supplémentaire, la continuité de  $f'$ .
- C'est Pierre-Ossian Bonnet (1819-1892) qui propose le point de vue actuel, permettant de se dispenser de l'hypothèse de continuité de  $f'$ , et simplifiant considérablement la preuve du théorème des accroissements finis, le voyant comme une conséquence du théorème de Rolle plutôt que l'inverse.

**II.2 Théorème des accroissements finis**

Une première conséquence importante du théorème de Rolle est :

**Théorème 14.2.6 (Théorème des accroissements finis, TAF)**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$ . Alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que :

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

◁ Éléments de preuve.

Considérer  $g(x) = f(x) - (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ . ▷

**Remarque 14.2.7 (Interprétation géométrique)**

Il existe une tangente parallèle à la corde.

Remarquez que le TAF est une généralisation du théorème de Rolle. On a même une équivalence entre les deux propriétés, le TAF étant simplement obtenu du théorème de Rolle par ajout d'une partie affine.

**Corollaire 14.2.8 (Inégalité des accroissements finis, IAF)**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$ . Soit  $M$  un majorant de  $f'$  sur  $]a, b[$ , et  $m$  un minorant de  $f'$  sur  $]a, b[$ . Alors :

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a).$$

En particulier, si  $M$  est un majorant de  $|f'|$ , alors  $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$ .

Attention à bien considérer  $a < b$  pour le premier encadrement, sans les valeurs absolues. En revanche, le rôle symétrique de  $a$  et  $b$  dans l'inégalité  $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$  nous dit qu'on peut s'affranchir de l'hypothèse  $a < b$  pour utiliser cette inégalité.

### Corollaire 14.2.9

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ . Si  $f'$  est bornée sur  $I$ , alors  $f$  est lipschitzienne sur  $I$ . Plus précisément, si  $k$  est un majorant de  $|f'|$ , alors  $f$  est  $k$ -lipschitzienne. La réciproque est vraie pour une fonction dérivable.

En revanche, il peut exister des fonctions lipschitziennes non dérivables.

## II.3 Extension aux fonctions dérivables à valeurs dans $\mathbb{C}$

On a déjà vu comment étendre les notions liées à la dérivation aux fonctions d'une variable réelle et à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . Il est important de se souvenir que la dérivabilité d'une telle fonction est caractérisée par la dérivabilité de sa partie réelle et de sa partie imaginaire.

Certains résultats relatifs aux fonctions dérivables sur un intervalle se généralisent également au cas de fonctions à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , mais pas tous cependant. Ainsi, par exemple les résultats liés à l'étude d'extrema ou de variations n'ont pas de sens dans ce cadre, car ils nécessiteraient la donnée d'une relation d'ordre sur  $\mathbb{C}$ . En particulier :

- Le théorème de Rolle, dont la démonstration repose sur l'existence d'un extremum, n'a pas d'équivalent pour une fonction à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . On pourra en revanche, sous les conditions idoines, l'appliquer à la partie réelle  $f_1$  et à la partie imaginaire  $f_2$ , trouvant ainsi deux réels  $c_1$  et  $c_2$  tels que  $f'_1(c_1) = 0$  et  $f'_2(c_2) = 0$ , mais comme  $c_1$  et  $c_2$  n'ont aucune raison d'être égaux, on ne pourra pas en conclure l'existence d'un réel  $c$  tel que  $f'(c) = 0$ . Pensez à une fonction décrivant, à vitesse constante, un cercle dans  $\mathbb{C}$ ; la dérivée sera un vecteur de norme constante, tangent au cercle, donc ne s'annulant pas. Pourtant, si entre  $a$  et  $b$ , on fait un tour complet, on aura  $f(a) = f(b)$ .
- Le théorème des accroissements finis, dont la démonstration repose sur le théorème de Rolle, entre également en défaut. D'ailleurs, le théorème de Rolle n'est qu'un cas particulier du théorème des accroissements finis. Là encore, sous les conditions idoines, on pourra trouver des réels  $c_1$  et  $c_2$  tels que  $(f_1(b) - f_1(a)) = f'_1(c_1)(b - a)$  (pour la partie réelle) et  $(f_2(b) - f_2(a)) = f'_2(c_2)(b - a)$  (pour la partie imaginaire), mais  $c_1$  et  $c_2$  étant en général distincts, on ne pourra, sauf cas exceptionnels, pas trouver de réel  $c$  tel que  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ .

De façon remarquable cependant, l'inégalité des accroissements finis reste vraie :

### Théorème 14.2.10 (IAF pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ )

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ , et  $M$  un réel tel que  $|f'| \leq M$  sur  $]a, b[$ . Alors

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|.$$

Le résultat n'est au programme que sous l'hypothèse  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$ .

#### ◁ Éléments de preuve.

Nous nous contentons d'une démonstration sous l'hypothèse au programme :  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$ . Écrire dans ce cas  $f$  comme intégrale de sa dérivée.

La démonstration générale est un peu plus délicate, et hors-programme. ▷

### Remarque 14.2.11

En particulier, les théorèmes de prolongement, basés sur l'IAF, restent vrais.

# Calcul asymptotique

Dans ce chapitre, on introduit certains outils permettant de mieux comprendre le comportement des suites ou fonctions au voisinage de l'infini (pour les suites), ou d'un point quelconque de  $\overline{\mathbb{R}}$  (pour les fonctions). Ces outils permettent d'affiner la notion de limite, notamment dans le cas d'une limite nulle ou infinie : ils nous permettront d'exprimer le fait qu'une suite converge plus rapidement vers 0 qu'une autre, ou sensiblement à la même vitesse.

## I Domination, négligeabilité

### I.1 Cas des suites

#### Définition 15.1.1 (Domination, cas des suites)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles. On dit que  $(u_n)$  est *dominée* par  $(v_n)$  si et seulement s'il existe un réel  $M$  tel que à partir d'un certain rang  $n_0$ ,  $|u_n| \leq M|v_n|$ , soit, formellement :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n| \leq M|v_n|.$$

De manière équivalente,  $(u_n)$  est dominée par  $(v_n)$  si et seulement s'il existe une suite  $(\mu_n)$  telle que pour tout  $n$  assez grand,  $u_n = \mu_n v_n$ , et  $(\mu_n)$  est bornée.

Ainsi,  $(u_n)$  est dominée par  $(v_n)$  si et seulement si l'ordre de grandeur de  $(u_n)$  ne dépasse pas celui de  $(v_n)$ , à une constante multiplicative près.

#### Définition 15.1.2 (Négligeabilité, cas des suites)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles. On dit que  $(u_n)$  est *négligeable* devant  $(v_n)$  si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,

$$|u_n| \leq \varepsilon |v_n|.$$

De manière équivalente,  $(u_n)$  est négligeable devant  $(v_n)$  si et seulement s'il existe une suite  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et un entier  $n_0$  tels que :

$$\forall n \geq n_0, u_n = \varepsilon_n v_n \quad \text{et} \quad \lim \varepsilon_n = 0.$$

Il est souvent plus pratique d'utiliser, lorsque c'est possible, les caractérisations suivantes de la domination et de la négligeabilité.

**Proposition 15.1.3**

Si  $(v_n)$  ne s'annule pas (à partir d'un certain rang au moins), alors :

1.  $(u_n)$  est dominée par  $(v_n)$  si et seulement si  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$  est bornée ;
2.  $(u_n)$  est négligeable devant  $(v_n)$  si et seulement si  $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$

Enfin, pour pouvoir gérer facilement des relations de domination ou de négligeabilité, ou pour pouvoir écrire des approximations de façon commode, on utilise les notations suivantes :

**Notation 15.1.4 (Notations de Bachmann et de Landau)**

1. Si  $(u_n)$  est dominée par  $(v_n)$ , on note  $u_n = O(v_n)$
2. Si  $(u_n)$  est négligeable devant  $(v_n)$ , on note  $u_n = o(v_n)$

L'intérêt de cette notation est qu'on peut l'utiliser dans les calculs. On peut par exemple considérer  $u_n = v_n + o(v_n)$ . C'est notamment pratique pour formaliser des approximations. Ainsi, dire que

$$u_n = 2 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

signifie que pour  $n$  assez grand,  $u_n$  est à peu près égal à  $2 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2}$ , et que l'erreur faite en approchant  $u_n$  par cette expression est négligeable devant le plus petit terme de cette expression polynomiale. Il s'agit d'une bonne approximation par une expression polynomiale en  $\frac{1}{n}$  à l'ordre 2. Il s'agit même de la meilleure.

**Avertissement 15.1.5**

Attention à l'abus de notation que l'on fait en écrivant cette égalité. Il ne s'agit pas vraiment d'une égalité, et c'est à prendre plus dans le sens d'une appartenance ( $(u_n)$  appartient à l'ensemble des suites dominées par  $(v_n)$ ). Si on garde en tête l'idée qu'il s'agit d'une appartenance, on évite un certain nombre d'erreurs que peut véhiculer la notation. Par exemple :

- $u_n = o(v_n)$  et  $u'_n = o(v_n)$  n'implique pas  $u_n = u'_n$ , ce qui est assez troublant formellement pour une égalité.
- on ne peut pas simplifier des  $o$  :  $u_n + o(w_n) = v_n + o(w_n)$  n'implique pas  $u_n = v_n$

**Proposition 15.1.6**

Si  $u_n = o(v_n)$ , alors  $u_n = O(v_n)$ .

◁ **Éléments de preuve.**

Une suite tendant vers 0 est bornée.

▷

**Note Historique 15.1.7**

- La notation  $O$  pour la dominance a été introduite par le mathématicien allemand Paul Bachmann dans son livre *Die analytische Zahlentheorie* (1894)
- Le mathématicien allemand Edmond Landau, spécialiste de la théorie des nombres, introduit la notation  $o$  dans son *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* (1909)
- Le mathématicien et informaticien Donald Knuth (spécialiste de l'informatique théorique, et créateur du célèbre logiciel TeX, référence encore aujourd'hui pour la composition de documents mathématiques

professionnels, notamment sous sa forme dérivée LaTeX) introduit la notation  $\Omega(u_n)$  dans un article de 1976 (*Big Omicron and Big Omega and Big Theta*) :

$$v_n = \Omega(u_n) \iff \exists C > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, v_n \geq C u_n.$$

Il définit également la notation  $\Theta(u_n)$  :

$$v_n = \Theta(u_n) \iff \exists C, C' > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, C' u_n \leq v_n \leq C u_n.$$

Ces notations sont plus adaptées que  $o$  et  $O$  pour l'étude de la complexité des algorithmes : une minoration de la complexité permet de mieux cerner les limitations d'un algorithme !

### Exemple 15.1.8 (Reexpression des croissances comparées)

1.  $\ln n = o(n^\alpha)$  ( $\alpha > 0$ )
2.  $n^\alpha = o(e^n)$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ).
3.  $n! = o(n^n)$ .
4.  $a^n = o(n!)$  ( $a \in \mathbb{R}$ )
5.  $n^a = o(n^b)$  si  $a < b$

Ainsi, pour  $\alpha > 0$ ,  $\boxed{\ln(n) \ll n^\alpha \ll e^n \ll n! \ll n^n}$ .

### Proposition 15.1.9

Soit  $(u_n)$  une suite réelle.

1.  $u_n = O(1)$  si et seulement si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée.
2.  $u_n = o(1)$  si et seulement si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 0.
3.  $\lim u_n = \ell$  si et seulement si  $u_n = \ell + o(1)$ .

◁ Éléments de preuve.

C'est juste la réexpression de trois cas particuliers de la définition. ▷

## I.2 Propriétés des $o$ et $O$

À part qu'elle n'est pas anti-symétrique, la relation de domination (resp. de négligeabilité) se comporte à peu près comme une relation d'ordre large (resp. stricte), ce qu'expriment les propriétés suivantes. Dans ces énoncés,  $(u_n)$ ,  $(v_n)$ ,  $(w_n)$  et  $(x_n)$  désignent des suites réelles.

### Propriétés 15.1.10 (Transitivités strictes et larges de $o$ et $O$ )

1. Si  $u_n = O(v_n)$  et  $v_n = O(w_n)$ , alors  $u_n = O(w_n)$ .
2. Si  $u_n = o(v_n)$  et  $v_n = o(w_n)$ , alors  $u_n = o(w_n)$ .
3. Si  $u_n = o(v_n)$  et  $v_n = O(w_n)$ , alors  $u_n = o(w_n)$ .
4. Si  $u_n = O(v_n)$  et  $v_n = o(w_n)$ , alors  $u_n = o(w_n)$ .

◁ Éléments de preuve.

Intrduire des suites  $(\mu_n)$  et  $(\varepsilon_n)$  traduisant les propriétés de domination et de négligeabilité. On est ramené à des propriétés sur les produits de limites :  $0 \times 0$ ,  $0 \times$  borné, borné  $\times 0$ , ainsi que borné  $\times$  borné = borné. ▷

**Propriétés 15.1.11 (sommées de  $o$  et  $O$ )**

1. Si  $u_n = o(w_n)$  et  $v_n = o(w_n)$ , alors  $u_n + v_n = o(w_n)$ .
2. Si  $u_n = O(w_n)$  et  $v_n = O(w_n)$ , alors  $u_n + v_n = O(w_n)$ .
3. Si  $u_n = o(w_n)$  et  $v_n = O(w_n)$ , alors  $u_n + v_n = O(w_n)$ .
4. Si  $u_n = O(w_n)$  et  $v_n = o(w_n)$ , alors  $u_n + v_n = O(w_n)$ .

◁ **Éléments de preuve.**

Même principe. cette fois-ci, on a des sommes au lieu de produits. ▷

**Propriétés 15.1.12 (produits de  $o$  et  $O$ )**

1. Si  $u_n = o(w_n)$  et  $v_n = o(x_n)$ , alors  $u_n v_n = o(w_n x_n)$ .
2. Si  $u_n = O(w_n)$  et  $v_n = o(x_n)$ , alors  $u_n v_n = o(w_n x_n)$ .
3. Si  $u_n = o(w_n)$  et  $v_n = O(x_n)$ , alors  $u_n v_n = o(w_n x_n)$ .
4. Si  $u_n = O(w_n)$  et  $v_n = O(x_n)$ , alors  $u_n v_n = O(w_n x_n)$ .
5. En particulier,  $w_n o(x_n) = o(w_n x_n)$  et  $w_n O(x_n) = O(w_n x_n)$   
(Les  $o$  et  $O$  sont multiplicatifs : on peut rentrer ou sortir un facteur multiplicatif).

◁ **Éléments de preuve.**

Même principe. ▷

**Remarque 15.1.13 (Intérêt des  $o$  et  $O$ )**

On se sert souvent des  $o$  et  $O$  pour estimer (ou borner) la vitesse de convergence d'une suite vers sa limite, en étudiant  $u_n - \ell$ . On compare ainsi souvent la différence  $u_n - \ell$  à une suite de référence de limite nulle, ou  $u_n$  à une suite de référence de limite  $+\infty$ . Par exemple, une suite telle que  $|u_n - \ell| = o(e^{-n})$  aura une convergence rapide (exponentielle), alors que l'information  $|u_n - \ell| = o\left(\frac{1}{\ln n}\right)$  ne permet pas de contrôler aussi bien la convergence (mais une telle égalité n'empêche pas que la convergence puisse être rapide).

Les propriétés des  $o$  et  $O$  ressemblent beaucoup à des propriétés de relations d'ordre. Plus précisément :

**Proposition 15.1.14 ( $o$  se comporte comme une inégalité stricte)**

La relation  $o$  est une relation d'ordre stricte sur l'ensemble des suites non ultimement nulles (i.e. nulles à partir d'un certain rang).

◁ **Éléments de preuve.**

Vérifier l'irréflexivité (immédiat) et l'asymétrie (par l'absurde). ▷

**Proposition 15.1.15 (Pourquoi  $O$  se comporte presque comme une inégalité large, HP)**

La relation  $\Theta$  est une relation d'équivalence sur  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . La relation  $O$  passe au quotient et définit une relation d'ordre large sur  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\Theta$ .

◁ **Éléments de preuve.**

L'affirmation sur  $\Theta$  est immédiate, la possibilité de passer au quotient se montre en justifiant que l'affirmation  $u_n = O(v_n)$  est indépendante de la classe d'équivalence de  $(u_n)$  et de  $(v_n)$ . Le passage au quotient de  $O$  permet de récupérer l'antisymétrie qui manquait. ▷

### I.3 Extension au cas des fonctions

#### Définition 15.1.16 (Domination, cas des fonctions)

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $X$  et  $a \in \overline{X}$ . On dit que  $f$  est *dominée* par  $g$  au voisinage de  $a$  si et seulement s'il existe un voisinage  $V$  de  $a$  et une application  $h$  définie sur  $V \cap X$ , et bornée, telle que  $f = hg$  sur  $V \cap X$ .

On note  $f(x) = O_{x \rightarrow a}(g(x))$  ou  $f = O_a(g)$ .

Ainsi,  $f$  est dominée par  $g$  si et seulement si l'ordre de grandeur de  $f$  ne dépasse pas celui de  $g$ , à une constante multiplicative près, au voisinage de  $a$ .

Si  $g$  ne s'annule pas au voisinage de  $a$ , il revient au même de dire que  $\frac{f}{g}$  est bornée au voisinage de  $a$ .

#### Définition 15.1.17 (Négligeabilité, cas des fonctions)

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $X$ , et  $a \in \overline{X}$ . On dit que  $f$  est *négligeable* devant  $g$  s'il existe un voisinage  $V$  de  $a$ , et une fonction  $h$  définie sur  $V$ , tels que

$$\forall x \in V, \quad f(x) = h(x)g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0.$$

On note  $f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$  ou  $f = o_a(g)$ .

Si  $g$  ne s'annule pas au voisinage de  $a$ , il revient au même de dire que  $\frac{f}{g}$  admet une limite nulle en  $a$ .

#### Théorème 15.1.18 (Caractérisation par $\varepsilon$ )

Sous les hypothèses précédentes :

1.  $f = O_a(g)$  si et seulement s'il existe un réel  $M$  et un voisinage  $V$  de  $a$  tel que pour tout  $x \in V \cap X$ ,  $|f(x)| \leq M|g(x)|$ .
2.  $f = o_a(g)$  si et seulement si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un voisinage  $V$  de  $a$  tel que pour tout  $x \in V \cap X$ ,  $|f(x)| \leq \varepsilon|g(x)|$ .

#### ◁ Éléments de preuve.

Les deux équivalences se démontrent de même. Le sens direct est assez facile, en exprimant le fait que  $h$  est borné, ou sa limite nulle par  $\varepsilon$ . Pour le sens réciproque, commencer par montrer qu'il existe un voisinage  $V_0$  tel que pour tout  $x \in V_0 \cap X$ ,  $g(x) = 0 \implies f(x) = 0$ . Définir alors  $h$  par  $\frac{f}{g}$  lorsque  $g$  ne s'annule pas et 0 sinon, et vérifier que  $h$  vérifie les propriétés requises (par  $\varepsilon$  pour la limite). ▷

Ainsi,  $f$  est dominée par  $g$  si et seulement si l'ordre de grandeur de  $f$  ne dépasse pas celui de  $g$ , à une constante multiplicative près, au voisinage de  $a$ ;  $f$  est négligeable devant  $g$  si au voisinage de  $a$ ,  $|f|$  peut être rendu aussi petit qu'on veut devant  $|g|$ .

#### Théorème 15.1.19 (Caractérisation séquentielle)

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $X$ , et  $a \in \overline{X}$ . Alors :

1.  $f = O_a(g)$  si et seulement si pour toute suite  $u_n \rightarrow a$  à valeurs dans  $X$ ,  $f(u_n) = O(g(u_n))$ .
2.  $f = o_a(g)$  si et seulement si pour toute suite  $u_n \rightarrow a$  à valeurs dans  $X$ ,  $f(u_n) = o(g(u_n))$ .

#### ◁ Éléments de preuve.

1. Sens direct : introduire  $h$  bornée au voisinage de  $a$ . Alors  $(h(u_n))$  bornée.

Sens réciproque : par contraposée, à partir de la caractérisation par  $M$ ; construire une suite  $x_n \rightarrow a$  (coller le voisinage  $V$  à  $a$ ) telle que pour tout  $n$ ,  $f(x_n) > n g(x_n)$ .

2. Sens direct : introduire  $h$  définie au voisinage de  $a$  et de limite nulle, puis appliquer  $x_n$ .

Sens réciproque : par contraposée, à partir de la caractérisation par  $\varepsilon$ . Construire  $x_n \rightarrow a$  tel que  $f(x_n) > \varepsilon g(x_n)$  pour un certain  $\varepsilon > 0$ .

▷

Comme dans le cas des limites, cette caractérisation séquentielle permet de transférer toutes les propriétés des  $o$  et  $O$  pour les suites au cas des fonctions. Ces propriétés peuvent aussi se montrer directement sur le même principe que dans le cas des suites. Pour les propriétés relatives aux relations d'ordres définies par  $o$  et  $O$ , il faut remplacer l'hypothèse « non ultimement nul » par « non identiquement nulle sur un voisinage de  $a$  ».

## II Équivalents

### II.1 Cas des suites

#### Définition 15.2.1 (Équivalence)

Deux suites réelles  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont dites *équivalentes* s'il existe une suite  $(\alpha_n)$  et un entier  $n_0$  tels que

$$\forall n \geq n_0, u_n = \alpha_n v_n \quad \text{et} \quad \lim \alpha_n = 1.$$

#### Notation 15.2.2

Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont équivalentes, on note  $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ , ou simplement  $u_n \sim v_n$ .

De la définition découle le résultat important suivant :

#### Proposition 15.2.3 (Caractérisation de l'équivalence par la négligeabilité)

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \iff u_n = v_n + o(v_n).$$

#### ◁ Éléments de preuve.

Dans le sens direct, il suffit d'écrire  $u_n - v_n$  en fonction de  $v_n$  et de la suite  $\alpha_n$  de la définition de l'équivalence. Pour la réciproque, démarche inverse. ▷

Cette propriété implique notamment qu'une somme de terme est équivalente à son terme prépondérant (celui devant lequel tous les autres sont négligeables). La recherche de l'équivalent d'une somme passe de fait souvent par l'étude des négligeabilités des termes les uns par rapport aux autres. On en déduit par exemple :

#### Proposition 15.2.4 (équivalent d'un polynôme)

Soit  $P$  un polynôme de monôme dominant  $a_d X^d$ . Alors  $P(n) \sim a_d n^d$ .

#### ◁ Éléments de preuve.

Soit faire le quotient par le monôme dominant, soit utiliser la propriété précédente, en remarquant que pour tout  $k < d$ ,  $n^k = o(n^d)$  (donc une CL de termes de ce type aussi). ▷

Par exemple,  $2n^2 + n - 1 \sim 2n^2$ .

Comme pour la négligeabilité et la dominance, on a une version commode lorsque  $(v_n)$  ne s'annule pas

**Proposition 15.2.5**

Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites telles que  $(v_n)$  ne s'annule pas (au moins à partir d'un certain rang).  
Alors

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \iff \lim \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

**Remarque 15.2.6**

Dans les trois notations  $u_n = O(v_n)$ ,  $u_n = o(v_n)$  et  $u_n \sim v_n$ , les égalités s'appliquent bien aux termes  $u_n$  et  $v_n$ , et non aux suites. Cependant on ne quantifie pas les expressions dans lesquelles interviennent des  $o$ ,  $O$  ou des équivalents : il s'agit d'une égalité au voisinage de  $+\infty$ , comme les limites.

**Proposition 15.2.7**

La relation  $\sim$  est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites réelles.

◁ **Éléments de preuve.**

Vérifications immédiates à partir de la définition. ▷

**II.2 Propriétés des équivalents****Théorème 15.2.8 (Conservation des limites par équivalence)**

Si  $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ , et si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$ , alors  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge, et sa limite est  $\ell$ .

◁ **Éléments de preuve.**

Propriété de produit de limites à partir de la définition. ▷

**Avertissement 15.2.9**

La réciproque est fautive en général. Elle est vraie en cas de limite non nulle et non infinie, mais en revanche, deux suites de même limite nulle ou infinie ne sont pas nécessairement équivalentes

**Exemples 15.2.10**

1.  $(n)$  et  $(n^2)$  ne sont pas équivalentes
2.  $(e^{-n})$  et  $(e^{-2n})$  ne sont pas équivalentes.

Ainsi, la notion d'équivalent n'a vraiment d'intérêt que pour des suites de limite nulle ou infinie. Dans ce cas, la recherche d'un équivalent permet d'estimer la vitesse de convergence. On recherche pour cela un équivalent sous une forme simple et bien connue, par exemple  $n^a$ , ou  $n^a \ln^b n$  etc. On peut ainsi comparer la vitesse de convergence de deux suites.

**Proposition 15.2.11 (Conservation du signe)**

Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites équivalentes. Alors il existe  $n_0$  tels que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $u_n$  et  $v_n$  soient de même signe.

◁ **Éléments de preuve.**

Si  $\alpha_n \rightarrow 1$ , alors  $\alpha_n$  est positive à partir d'un certain rang. ▷

**Avertissement 15.2.12**

Attention, cela ne signifie pas qu'à partir du rang  $n$ ,  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont de signe constant ! Le signe peut varier, mais de la même manière pour les deux suites.

On peut faire un peu mieux, et obtenir une conservation stricte : il existe  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $u_n$  et  $v_n$  sont soit tous les deux nuls, soit strictement de même signe.

Comme les  $o$  et  $O$ , les équivalents se comportent bien vis-à-vis des produits et des quotients :

**Proposition 15.2.13 (Équivalents de produits, quotients, puissances)**

Soit  $(u_n)$ ,  $(v_n)$ ,  $(u'_n)$  et  $(v'_n)$  quatre suites réelles.

1. Si  $u_n \sim u'_n$  et  $v_n \sim v'_n$ , alors  $u_n v_n \sim u'_n v'_n$ .
2. Si de plus  $v_n$  est non nulle à partir d'un certain rang, alors  $\frac{u_n}{v_n} \sim \frac{u'_n}{v'_n}$ .
3. Si  $u_n \sim u'_n$  et si  $a$  est un réel fixé, alors  $(u_n)^a \sim (u'_n)^a$ .

◁ **Éléments de preuve.**

Immédiat par définition (en introduisant des suites  $\alpha_n$ ). Remarquez que ces suites ne s'annulent pas à partir d'un certain rang. ▷

En revanche, le passage à une puissance dépendant de  $n$  requiert de la prudence (revenir à la notation exponentielle).

Lors de l'étude des fonctions usuelles, nous avons rencontré un certain nombre de limites remarquables, qui en fait s'expriment sous forme d'un équivalent, et sont généralement plus commodes à utiliser sous cette forme.

**Proposition 15.2.14 (Équivalences et négligeabilité)**

Les relations  $o$  et  $O$  au voisinage de  $a$  sont indépendantes des classes d'équivalence pour la relation  $\sim_a$ . Ainsi, si  $u_n \sim_a u'_n$  et  $v_n \sim_a v'_n$ , alors  $u_n = o(v_n)$  si et seulement si  $u'_n = o(v'_n)$  (et de même pour  $O$ ).

◁ **Éléments de preuve.**

Immédiat à partir des définitions en introduisant des suites adéquates. Ou bien en remarquant que  $u_n \sim v_n$  implique  $u_n = \Theta(v_n)$ , pour se raccorder à un résultat déjà vu. ▷

**II.3 Cas des fonctions****Définition 15.2.15 (Équivalence entre fonctions)**

Deux fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $X$  sont dites *équivalentes* au point  $a \in \overline{X}$  s'il existe un voisinage  $V$  de  $a$  et une fonction  $h$  définie sur  $V \cap X$  de  $a$  tel que

$$\forall x \in V \cap X, f(x) = h(x)g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} h(x) = 1.$$

On note  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ .

Si  $g$  ne s'annule pas au voisinage de  $a$ , il revient au même de dire que  $\frac{f}{g}$  tend vers 1 en  $a$ . Il revient également au même de dire que  $f = g + o_a(g)$ .

Encore une fois, toutes les propriétés vues pour les équivalents de suites restent valables pour les équivalents de fonctions, par démonstration directe sur le même principe que pour les suites, ou grâce au théorème suivant :

**Théorème 15.2.16 (Caractérisation séquentielle de l'équivalence)**

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $X$  et  $a \in \overline{X}$ . Alors  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$  si et seulement pour toute suite  $(x_n)$  d'éléments de  $X$  telle que  $x_n \rightarrow a$ ,  $f(x_n) \sim g(x_n)$ .

◁ **Éléments de preuve.**

Conséquence de la caractérisation séquentielle de  $o$ , appliquée à  $f - g = o_a(g)$ .

▷

**II.4 Équivalents classiques****Proposition 15.2.17 (Équivalents classiques, à connaître sur le bout des doigts)**

- |   |  |
|---|--|
| 1. $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ ;                    | 6. $\operatorname{sh}(x) \underset{0}{\sim} x$ ;                 |
| 2. $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ ;                     | 7. $\operatorname{ch}(x) - 1 \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ ; |
| 3. $(1+x)^a - 1 \underset{0}{\sim} ax$ ( $a \neq 0$ ) ; | 8. $\operatorname{th}(x) \underset{0}{\sim} x$ ;                 |
| 4. $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ ;                     | 9. $\operatorname{Arcsin}(x) \underset{0}{\sim} x$ ;             |
| 5. $\cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ ;    | 10. $\operatorname{Arctan}(x) \underset{0}{\sim} x$ ;            |
| 6. $\tan(x) \underset{0}{\sim} x$ ;                     |  |

◁ **Éléments de preuve.**

Ce sont des réexpressions des limites remarquables. Pour rappel, la plupart de ces limites sont obtenues par taux d'accroissement.

▷

**Théorème 15.2.18 (Formule de Stirling, admis)**

On a :  $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ .

◁ **Éléments de preuve.**

Traditionnel DM. La démonstration est hors-programme, mais pas la formule.

▷

**II.5 Problème de la somme et de la composition des équivalents**

Nous n'avons pas vu de règle pour sommer des équivalents. C'est normal. C'est interdit.

**Avertissement 15.2.19 (Sommes d'équivalents)**

**Ne pas sommer des équivalents.**

Si les parties principales se compensent, on s'expose à des erreurs.

**Exemple 15.2.20**

$u_n = \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ ,  $v_n = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} \sim -\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}$  ; Faites la somme des deux.

**Méthode 15.2.21 (Pour contourner le problème des sommes d'équivalents)**

- Étudier les négligeabilités entre les termes de la somme, pour ne garder que les termes d'ordre prépondérant.

- Écrire les équivalents avec un  $o$  et effectuer la somme sous cette forme.
- Si les parties principales ne se compensent pas, on peut revenir à un équivalent.
- Sinon, on ne peut pas conclure directement. Il faut étudier l'ordre de grandeur de ce qu'il reste après simplification des parties principales, et pour cela, il faut avoir une meilleure approximation de chaque terme (la connaissance de l'équivalent ne suffit pas). On peut par exemple utiliser un développement limité (voir chapitre correspondant).

**Exemple 15.2.22**

Déterminer un équivalent de  $\sin\left(\frac{2}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ .

**Avertissement 15.2.23 (Composition d'équivalents)**

**Ne composez pas un équivalent par une fonction.**

En général,  $u_n \sim v_n$  n'implique pas  $f(u_n) \sim f(v_n)$ . Même avec des fonctions « gentilles » comme le logarithme ou l'exponentielle, ça peut être faux.

**Exemples 15.2.24**

1. Est-ce que  $e^n \sim e^{n+1}$  ?
2. Est-ce que  $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$  ?

**Méthode 15.2.25 (Trouver un équivalent simple de  $\ln(u_n)$ )**

1. Si  $u_n \rightarrow 1$ , utiliser l'équivalent classique
2. Sinon, écrire  $u_n = v_n(1 + o(1))$ , où  $v_n$  est un équivalent simple de  $u_n$ , puis  $\ln(u_n) = \ln(v_n) + \ln(1 + o(1))$ . Comparer ensuite les deux termes. Autrement dit, il s'agit de mettre le terme prépondérant en facteur dans le logarithme pour le sortir du logarithme.
3. Évidemment, cela s'adapte aux fonctions.

**Exemple 15.2.26**

Trouver un équivalent de  $\ln\left(\sin\frac{1}{n}\right)$ .

**Méthode 15.2.27 (Trouver un équivalent de  $e^{u_n}$ )**

Développer  $u_n$  à  $o(1)$  près :  $u_n = v_n + o(1)$ . S'adapte aux fonctions.

**Exemple 15.2.28**

En admettant qu'au voisinage de 0,  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ , montrer que

$$e^{\frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} \ln(1+x)} \underset{0}{\sim} \frac{e^{\frac{5}{x}}}{\sqrt{e}}.$$

# Développements limités

*J'ai bien dit des injures, et de bien grosses, à mon ami Mr Taylor [...] sur l'obscurité étonnante, et la mauvaise façon de son livre.*

(Monmortius)

*Le Calcul infinitésimal [...] est l'apprentissage du maniement des inégalités bien plus que des égalités, et on pourrait le résumer en trois mots : MAJORER, MINORER, APPROCHER.*

(Jean Dieudonné)

Le but de ce chapitre est d'affiner l'étude locale d'une fonction au voisinage d'un point. L'étude des dérivées permet d'approcher localement une courbe par une droite (la tangente). Dans ce chapitre, nous généralisons ce point de vue en montrant comment les formules de Taylor permettent d'approcher une courbe au plus près (localement) par une courbe polynomiale de degré donné. Nous étudions ensuite la qualité de cette approximation, en majorant (localement ou globalement) l'erreur faite en approchant la courbe par cette courbe polynomiale. C'est l'objet de l'étude des restes de Taylor. Nous terminons par l'application de ces approximations polynomiales au calcul de limites, et par quelques outils permettant de calculer ces approximations sans avoir à revenir à la formule de Taylor (et donc au calcul bien fastidieux de toutes les dérivées successives). Il s'agit du calcul des développements limités.

Nous supposons connue les notions de fonction polynomiale réelle (que nous appellerons plus simplement polynôme), et de degré. Nous ne ferons qu'un usage intuitif de ces notions; il est inutile d'avoir étudié le chapitre sur les polynômes avant celui-ci. Un polynôme  $x \mapsto P(x)$  sera aussi désigné formellement par  $P(X)$  (où  $X$  n'a plus le rôle d'une variable; c'est ce qu'on appelle une indéterminée formelle). On pourra donc parler du polynôme  $X^2 + X + 1$  par exemple. On note  $\mathbb{R}[X]$  l'ensemble de tous les polynômes à coefficients réels, et  $\mathbb{R}_n[X]$  le sous-ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ .

## I Formule de Taylor-Young et DL des fonctions usuelles

Dans toute cette section,  $f$  désigne une fonction d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ , et  $x_0 \in I$ .

### I.1 Développement de Taylor

But : étant donné  $n$ , définir un polynôme  $P$  de degré au plus  $n$  qui approche au mieux  $f$  au voisinage d'un point  $x_0 \in I$ . Tout d'abord, la valeur au point doit être la même :  $P(x_0) = f(x_0)$ . Ensuite, les deux courbes doivent être tangentes, ce qui impose que  $P'(x_0) = f'(x_0)$ . La variation des tangentes au voisinage de  $x_0$  doit ensuite être la plus semblable possible, ce qui impose que  $P''(x_0) = f''(x_0)$ . Intuitivement, on en déduit que le meilleur polynôme de degré  $n$  approchant la courbe au voisinage de  $x_0$  vérifie donc les conditions :

$$P(x_0) = f(x_0) \quad P'(x_0) = f'(x_0) \quad \dots \quad P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0),$$

à condition bien sûr que ces dérivées de  $f$  soient définies. On dit que les courbes de  $P$  et  $f$  sont *tangentes à l'ordre  $n$*  en  $x_0$ .

**Définition 16.1.1 (Développement de Taylor de  $f$ )**

Soit  $f$  une fonction admettant en  $x_0$  une dérivée d'ordre  $n$ . Alors un *développement de Taylor* de  $f$  en  $x_0$  à l'ordre  $n$  est un polynôme  $P$  de degré au plus  $n$  vérifiant les conditions :

$$P(x_0) = f(x_0), \quad P'(x_0) = f'(x_0), \quad \dots, \quad P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

donc un polynôme dont la courbe est tangente à l'ordre  $n$  à celle de  $f$  en  $x_0$ .

**Théorème 16.1.2 (Existence, unicité et expression du développement de Taylor de  $f$ )**

Soit  $f$  une fonction  $n$  fois dérivable en  $x_0$ . Alors le développement de Taylor de  $f$  en  $x_0$  à l'ordre  $n$  existe, est unique, et est donné explicitement par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x - x_0)^k}{k!} \cdot f^{(k)}(x_0).$$

◁ **Éléments de preuve.**

Justifier d'abord que tout polynôme peut s'écrire sous la forme  $\sum_{k=0}^n a_k (X - x_0)^k$  (récurrence sur le degré). Procéder par analyse synthèse pour trouver les  $a_k$ , en dérivant et évaluant en  $x_0$ , de façon répétée. ▷

**Remarque 16.1.3**

Le développement de Taylor à l'ordre 1 au voisinage de  $x_0$  n'est autre que l'expression de la droite tangente à la courbe de  $f$  en  $x_0$ . Les développements de Taylor sont donc à voir comme une généralisation polynomiale de la droite tangente, aux ordres supérieurs.

**Définition 16.1.4 (Reste de Taylor à l'ordre  $n$ )**

Si  $f$  admet en  $x_0$  une dérivée d'ordre  $n$ , on note  $R_n$  la différence entre  $f$  et son développement de Taylor :

$$\forall x \in I, \quad R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(x - x_0)^k}{k!} \cdot f^{(k)}(x_0).$$

$R_n$  est appelé *reste de Taylor à l'ordre  $n$  de  $f$  au point  $x_0$* .

On note parfois  $R_n(x, x_0)$  pour indiquer la dépendance vis-à-vis du point  $x_0$ .

L'objet des formules de Taylor est d'étudier ce reste. Nous avons déjà vu comment estimer globalement (sur tout un intervalle  $[a, b]$ ) ce reste à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, donnant une valeur exacte de ce reste sous forme intégrale, lorsque  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur  $[a, b]$  :

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x - a)^k}{k!} \cdot f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

L'inégalité de Taylor-Lagrange permet d'obtenir des majorations ou minorations de ce reste sur tout un intervalle.

L'estimation qui nous intéresse maintenant est une estimation purement locale. On cherche à comparer le reste  $R_n$  à  $(x - x_0)^n$ , le terme de plus haut degré en  $x - x_0$  du développement de Taylor. C'est l'objet de la formule de Taylor-Young.

**Note Historique 16.1.5**

Les formules de Taylor doivent leur nom au mathématicien anglais Brook Taylor (1685-1731). Il donne deux versions du théorème, dont l'une obtenue par généralisation d'un résultat de Halley (celui de la comète). On doit aussi à Brook Taylor la naissance du calcul des différences finies, et l'intégration par parties.

**I.2 Formule de Taylor-Young****Théorème 16.1.6 (Formule de Taylor-Young à l'ordre  $n$  au point  $x_0$ )**

Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$ , et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$  au voisinage de  $x_0$ . Alors, au voisinage de  $x_0$  :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n).$$

◁ **Éléments de preuve.**

Cette formule est une conséquence de la formule de Taylor avec reste intégral prise à l'ordre  $n - 1$  (on n'a pas les hypothèses suffisantes pour aller à un ordre supérieur), en procédant à un encadrement à l'aide d' $\varepsilon$  de l'intégrale. ▷

**Remarques 16.1.7**

1. La formule de Taylor-Young ne nous donne qu'une information locale, au voisinage de  $x_0$ . En aucun cas elle ne peut être utilisée pour une étude globale, contrairement à la formule de Taylor avec reste intégral ou à l'inégalité de Taylor-Lagrange.
2. La formule de Taylor-Young fournit ce qu'on appelle le *développement limité de  $f$*  au voisinage de  $x_0$  à l'ordre  $n$ .

**Note Historique 16.1.8**

La formule de Taylor-Young a été démontrée par le mathématicien anglais William Henry Young (1863-1942), spécialiste de l'analyse complexe, de la théorie de la mesure et des séries de Fourier. Il ne doit pas être confondu avec Alfred Young (1873-1940), célèbre pour l'étude du groupe symétrique et de ses représentations, étude pour laquelle il introduit les tableaux qui portent son nom (tableaux de Young).

**I.3 Développement limité des fonctions usuelles****Théorème 16.1.9 (DL des fonctions usuelles)**

Lorsque  $x$  est au voisinage de 0, on a :

1.  $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$
2.  $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n)$
3.  $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$
4.  $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$

$$5. \operatorname{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$6. \operatorname{ch}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$$7. (1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n).$$

◁ **Éléments de preuve.**

Calculer les dérivées successives en 0 pour pouvoir utiliser la formule de Taylor-Young. Les fonctions sh et ch peuvent aussi s'obtenir à partir de leur définition en fonction de l'exponentielle. ▷

**Remarque 16.1.10 (Cas particuliers importants de la dernière formule)**

1. Pour  $a \in \mathbb{N}$ , on retrouve le début du développement du binôme.
2. Au voisinage de 0,

$$\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n) \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n).$$

On reconnaît une troncature de série géométrique

## II Généralités sur les développements limités

En général, il va être assez malaisé d'obtenir directement le DL d'une fonction à l'aide de la formule de Taylor-Young, car le calcul des dérivées successives s'avère en général trop fastidieux. Le but de la suite de ce chapitre est de donner quelques techniques plus efficaces de calcul de DL dans lesquels les DL des fonctions usuelles qu'on vient d'établir serviront de briques élémentaires. Avant de voir ces règles calculatoires, nous établissons quelques propriétés générales sur les DL.

### II.1 Définition, exemples

Dans cette section, on se donne  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

**Définition 16.2.1 (Développement limité (DL) au voisinage d'un point)**

Soit  $f$  une fonction définie sur un voisinage de  $x_0$ . On dit que le polynôme  $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$  est un développement limité à l'ordre  $n$  de  $f$  en  $x_0$  si, au voisinage de  $x_0$  :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} P_n(x) + o((x-x_0)^n).$$

**Remarque 16.2.2**

On exprime généralement  $P_n$  dans la base  $(1, X-x_0, (X-x_0)^2, \dots, (X-x_0)^n)$ . Ainsi, un développement limité à l'ordre  $n$  sera la donnée de réels  $a_0, \dots, a_n$  tels que, au voisinage de  $x_0$ ,

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n).$$

Le développement limité est donc une approximation polynomiale locale au voisinage d'un point. Il s'agit de la meilleure approximation par un polynôme de degré au plus  $n$ , au voisinage d'un point donné.

La formule de Taylor-Young donne de façon immédiate :

**Théorème 16.2.3 (Existence du DL de fonctions de classe  $\mathcal{C}^n$ )**

*Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  au voisinage de  $x_0$ , alors  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  au voisinage de  $x_0$ , égal au développement de Taylor-Young de  $f$  à l'ordre  $n$ .*

Comme mentionné plus haut, si  $n > 1$ , l'existence de la dérivée  $n$ -ième suffirait en fait.

**Théorème 16.2.4 (Unicité du DL)**

*Si  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  au voisinage de  $x_0$ , alors ce développement est unique.*

◁ **Éléments de preuve.**

Sinon, considérer la première différence de deux DL (au degré  $k$ ), et obtenir  $x^k = o(x^k)$ . ▷

On en déduit en particulier :

**Proposition 16.2.5 (DL de fonctions paires ou impaires)**

*Soit  $f$  une fonction admettant un DL à l'ordre  $n$  au voisinage de 0.*

1. *Si  $f$  est paire, son DL n'est constitué que de monômes de degré pair ;*
2. *Si  $f$  est impaire, son DL n'est constitué que de monômes de degré impair.*

◁ **Éléments de preuve.**

Cas  $f$  pair : évaluer le DL en  $-x$ , et l'identifier au DL de  $x$ . Qu'est-ce qui autorise cette identification ?

Même principe pour  $f$  impair. ▷

**Remarques 16.2.6**

1. Toutes les fonctions n'admettent pas un DL en un point  $x_0$ . Certaines fonctions peuvent admettre des DL jusqu'à un certain ordre  $n_0$  et plus ensuite.
2. **Attention !** L'existence d'un DL à l'ordre  $n$  en  $x_0$  n'implique pas l'existence de la dérivée  $n$ -ième de  $f$  en  $x_0$ . Ainsi, tous les DL ne sont pas obtenus par la formule de Taylor-Young.
3. Cependant, pour les petits ordres :
  - Si  $f$  admet un DL à l'ordre 0 en  $x_0$ ,  $f$  est continue en  $x_0$  ;
  - Si  $f$  admet un DL à l'ordre 1 en  $x_0$ ,  $f$  est dérivable en  $x_0$  ;
  - **et ça s'arrête là !**

**Exemples 16.2.7**

1.  $x \mapsto \sqrt{|x|}$  n'admet pas de DL à l'ordre 1 au voisinage de 0
2. La fonction  $f : t \mapsto \cos(t) + t^3 \sin \frac{1}{t}$ , prolongée en 0 par  $f(0) = 1$ , admet-elle un développement limité à l'ordre 2 en 0 ? Est-elle 2 fois dérivable en 0 ?

On peut renforcer un peu la définition des DL :

**Définition 16.2.8 (DL au sens fort)**

Soit  $f$  une fonction définie sur un voisinage de  $x_0$ . On dit que le polynôme  $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$  est un développement limité au sens fort à l'ordre  $n$  de  $f$  en  $x_0$  si, au voisinage de  $x_0$  :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} P_n(x) + O((x - x_0)^{n+1}).$$

Cette définition est plus restrictive que la première, car il impose qu'il n'y ait pas, dans un développement à un ordre supérieur de  $f$ , de termes d'ordre non entier  $(x - x_0)^\alpha$ ,  $\alpha \in ]n, n + 1[$ , ni de terme logarithmique du type  $(x - x_0)^n \ln(x - x_0)$ , etc.

La propriété d'unicité reste vraie, ainsi que l'existence (si  $f$  est  $n + 1$  fois dérivable en  $x_0$ , notez l'hypothèse plus forte !)

De la formule de Taylor-Young, nous déduisons donc les DL des fonctions usuelles. Ces DL, rappelés en fin de chapitre, serviront de briques pour la plupart des calculs de DL que nous effectuerons, grâce aux règles de calculs que nous établirons dans la suite de ce chapitre.

## II.2 Restriction

Soit, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}_n[X]$  l'ensemble des polynômes de degré au plus  $n$ . D'après la formule de Taylor pour les polynômes, tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  peut s'écrire sous la forme

$$P(X) = a_0 + a_1(X - x_0) + \cdots + a_n(X - x_0)^n.$$

Cette écriture est unique (cela provient du fait qu'on justifiera plus tard que  $(1, X - x_0, \dots, (X - x_0)^n)$  est une base de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}_n[X]$ , mais peut aussi se voir comme une conséquence de l'unicité du développement limité à l'ordre  $n$  au voisinage de  $x_0$ ). On peut alors définir :

### Définition 16.2.9 (Troncature)

Soit  $P = a_0 + a_1(X - x_0) + \cdots + a_n(X - x_0)^n$  un polynôme de  $\mathbb{R}_n[X]$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  et  $m \leq n$ . La troncature de  $P$  à l'ordre  $m$  au voisinage de  $x_0$  est le polynôme  $T_{m,x_0}(P)$  défini par :

$$T_{m,x_0}(P) = a_0 + a_1(X - x_0) + \cdots + a_m(X - x_0)^m.$$

### Proposition 16.2.10 (Restriction)

Si  $f$  admet un DL à l'ordre  $n$  au point  $x_0$ , alors  $f$  admet des DL à tous ordres  $m \leq n$ , obtenus en tronquant le DL à l'ordre  $n$  à la puissance  $m$ -ième en  $(x - x_0)^m$  : autrement dit, si  $m \leq n$ ,

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} P(x) + o((x - x_0)^n) \implies f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} T_{m,x_0}(P)(x) + o((x - x_0)^m).$$

#### ◁ Éléments de preuve.

C'est juste dire que les termes qu'on oublie rentrent dans le  $o((x - x_0)^m)$ , ce qui provient du fait que leur exposant est strictement supérieur à  $m$ . ▷

### Remarque 16.2.11

Si  $f$  n'admet pas de DL à l'ordre  $n_0$  en  $x_0$ , elle n'en admet pas non plus aux ordres supérieurs.

### Exemple 16.2.12

Pour quels ordres  $t \mapsto t^n \ln |t|$  admet-elle un DL au voisinage de 0 ?

## II.3 Forme normalisée et partie principale

Pour faciliter la recherche des ordres minimaux de développement nécessaires lors de certaines opérations sur les DL, nous introduisons la forme normalisée d'un DL.

**Proposition/Définition 16.2.13 (Forme normalisée d'un DL au voisinage de 0)**

Soit  $f$  une fonction définie au voisinage de  $x_0$ , admettant à l'ordre  $n$  un DL non nul. Alors il existe un unique entier  $m \leq n$  tel que, pour  $h$  au voisinage de 0, on ait :

$$f(x_0 + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} h^m (a_0 + a_1 h + \cdots + a_{n-m} h^{n-m} + o(h^{n-m})),$$

avec  $a_0 \neq 0$ . Il s'agit de la forme normalisée du DL à l'ordre  $n$  de  $f$  au voisinage de  $x_0$ .

◁ **Éléments de preuve.**

Faire le changement de variable  $h = x - x_0$  dans le DL (cela ramène à un DL en 0). Il suffit alors de factoriser par la puissance de  $h$  correspondant au premier terme non nul du DL (unique par unicité du DL). ▷

**Remarques 16.2.14**

- La forme normalisée inclut le changement de variable  $h = x - x_0$ . Dans la pratique, ce changement de variable est effectué de manière quasi-systématique, car il permet d'utiliser les DL des fonctions usuelles, tous donnés au voisinage de 0.
- $m$  est l'ordre minimal pour lequel  $\frac{f(x_0+h)}{h^m}$  ne tende pas vers 0 lorsque  $h$  tend vers 0. Plus précisément,  $h \mapsto \frac{f(x_0+h)}{h^m}$  est prolongeable par continuité en une fonction  $g$ , non nulle en 0, et  $g$  admet un développement limité à l'ordre  $n - m$  en 0, égal à

$$g(h) \underset{h \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1 h + \cdots + a_{n-m} h^{n-m} + o(h^{n-m}).$$

La forme normalisée d'un DL permet notamment d'obtenir un équivalent de  $f$ .

**Proposition 16.2.15 (Équivalent déduit d'un DL)**

Soit  $f$  une fonction définie au voisinage de  $x_0$ , telle que

$$f(x_0 + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} h^m (a_0 + a_1 h + \cdots + a_{n-m} h^{n-m} + o(h^{n-m})), \quad a_0 \neq 0.$$

Alors  $f(x_0 + h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} a_0 h^m$ , c'est-à-dire  $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} a_0 (x - x_0)^m$ .

◁ **Éléments de preuve.**

Par restriction,  $f(x_0 + h) = a_0 h^m + o(h^m)$ , puis caractérisation des équivalents par  $o$ . ▷

Ainsi, le développement limité est à voir comme une généralisation et un affinement des équivalents : l'ordre le plus grossier d'un DL non trivial fournit l'équivalent, les termes suivants du DL permettent d'affiner l'approximation donnée par l'équivalent : ces termes ne sont pas accessibles directement par le calcul d'équivalent.

**Définition 16.2.16 (Partie principale)**

Soit  $f$  une fonction admettant, à un certain ordre  $n$  au voisinage de  $x_0$ , un développement limité non trivial, s'écrivant sous forme normalisée :

$$f(x_0 + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} h^m (a_0 + a_1 h + \cdots + a_{n-m} h^{n-m} + o(h^{n-m})), \quad a_0 \neq 0.$$

La partie principale de  $f$  (sur l'échelle polynomiale) est la fonction  $x \mapsto a_0 (x - x_0)^m$ . On dira dans cette situation que  $f$  admet une partie principale d'ordre  $m$ .

### III Opérations sur les développements limités

On se limite dans tout ce paragraphe à des développements limités en 0; les fonctions usuelles étant développées en ce point, on se ramènera en pratique systématiquement à ce cas par un changement de variable.

Pour simplifier, on note simplement  $T_n$  pour l'application linéaire  $T_{n,0}$  définie ci-dessus.  $T_n(P)$  est donc obtenu de  $P$  en ne gardant que les monômes de degré inférieur ou égal à  $n$  dans l'écriture de  $P$  dans la base  $(1, X, \dots, X^k, \dots)$ .

#### III.1 Somme de DL

La règle la plus simple concerne la somme.

##### Proposition 16.3.1 (Somme de DL)

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies au voisinage de 0, et  $P$  et  $Q$  deux polynômes de degré au plus  $n$ . Si au voisinage de 0,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} Q(x) + o(x^n),$$

alors  $(f + g)(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + Q(x) + o(x^n)$ .

Autrement dit, si  $f$  et  $g$  admettent des DL à l'ordre  $n$  en 0, leur somme aussi, et ce DL est obtenu en sommant les DL de  $f$  et  $g$ .

◁ Éléments de preuve.

Somme de  $o$ .

▷

#### III.2 Produit de DL

##### Proposition 16.3.2 (Produit de DL)

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies au voisinage de 0, et  $P$  et  $Q$  deux polynômes de degré au plus  $n$ . Si au voisinage de 0,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} Q(x) + o(x^n),$$

alors  $(fg)(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} T_n(PQ)(x) + o(x^n)$ .

Autrement dit, si  $f$  et  $g$  admettent des DL à l'ordre  $n$  en 0, leur produit aussi, et ce DL est obtenu en faisant le produit des DL de  $f$  et  $g$ , et en ne gardant que les monômes de degré inférieur ou égal à  $n$ .

◁ Éléments de preuve.

$P$  étant borné au voisinage de  $x_0$ ,  $P(x)o(x^n) = o(x^n)$ . En déduire d'abord  $fg(x) = PQ(x) + o(x^n)$ , puis mettre à la poubelle (dans  $o$ ) les termes de trop grand exposant.

▷

##### Exemples 16.3.3

$$1. \frac{\cos(x)}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3).$$

$$2. (e^x)^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3).$$

$$3. \ln(1+x)^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o(x^4).$$

**Remarque 16.3.4**

- Dans le troisième exemple ci-dessus, les termes d'ordre 4 du DL de  $\ln(1+x)$  n'interviennent pas dans le résultat final. Ceci était prévisible, car la partie principale de  $\ln(1+x)$  au voisinage de 0 est d'ordre 1, donc le terme  $x^4$  est au moins multiplié par un terme d'ordre 1, donc fournit dans le produit des termes d'ordre au moins égal à 5.
- De façon plus générale, si le premier terme du développement de  $f$  n'est pas constant, on ne sera pas obligé d'aller jusqu'à l'ordre  $n$  pour le développement de  $g$  pour obtenir le développement à l'ordre  $n$  de  $fg$ . On pourrait établir une règle générale pour déterminer à quel ordre il convient d'aller, mais plutôt qu'une utilisation non comprise d'une règle stérile, il est préférable de réfléchir par soi-même au cas par cas.

**Exemple 16.3.5**

1.  $(\sin(x) - x)(\cos(x) - 1) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^5}{12} - \frac{x^7}{90} + o(x^8)$ .
2.  $\sin(x)^6 \underset{x \rightarrow 0}{=} x^6 - x^8 + o(x^9)$ .

**III.3 Composition de DL****Proposition 16.3.6 (Composition de DL)**

Soit  $f$  et  $g$  des fonctions définies au voisinage de 0 telles que  $f(0) = 0$ , et soit  $n \geq 1$ . Si  $P$  et  $Q$  sont des développements limités de  $f$  et  $g$  en 0 à l'ordre  $n$ , alors  $T_n(Q \circ P)$  est un DL en 0 à l'ordre  $n$  de  $g \circ f$  :

$$\left( f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + o(x^n) \text{ et } g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} Q(x) + o(x^n) \right) \implies g \circ f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} T_n(Q \circ P)(x) + o(x^n).$$

◁ **Éléments de preuve.**

Appliquer le DL de  $g$  à  $y = P(x)$ , avec  $y \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow 0$  (par l'hypothèse  $f(0) = 0$ ). Remarquer que  $P(x) = O(x)$  pour contrôler de  $o$ . ▷

**Exemples 16.3.7**

1.  $e^{\sin(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ .
2.  $e^{\cos(x)-1} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)$ .

Encore une fois, il n'est pas toujours nécessaire d'aller jusqu'à l'ordre  $n$  pour les deux fonctions : si le plus petit terme du développement de  $f$  est  $x^k$ , un terme  $y^\ell$  du développement contribuera à des termes en  $x$  de degré au moins  $k\ell$ . Ainsi, on peut se contenter de garder dans le développement de  $g$  uniquement les termes de degré  $\ell$  tel que  $k\ell \leq n$ . Cela permet de diminuer l'ordre du développement de  $g$  d'un facteur multiplicatif  $k$ , ce qui est parfois bien appréciable.

La encore, on pourrait donner des règles précises, mais j'estime qu'il est préférable de réfléchir au cas par cas plutôt que d'appliquer une règle obscure.

**Exemples 16.3.8**

1.  $\ln(\cos(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$ .
2.  $\tan(\operatorname{sh}(x) - x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + o(x^8)$ .

$$3. \sin\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) - \frac{x^2}{1+x^2} = -\frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{2} + o(x^9).$$

**Méthode 16.3.9 (DL d'une réciproque)**

Soit  $f$  une fonction bijective (au moins injective au voisinage de 0) de classe  $C^n$ , telle que  $f(0) = 0$  et  $f'(0) \neq 0$ . Alors  $f^{-1}$  admet un DL à l'ordre  $n$  en 0. On peut le déterminer en identifiant les DL :

$$x = f^{-1} \circ f(x) + o(x^n),$$

fournissant  $n + 1$  équations dont les inconnues sont les coefficients du DL de  $f^{-1}$ . L'identification est possible du fait de l'unicité du DL.

**Exemple 16.3.10**

Montrer que  $f : x \mapsto x \cos(x)$  est injective sur un voisinage de 0, et trouver le DL à l'ordre 3 d'une réciproque locale (réponse  $f^{-1}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$ ).

**Remarque 16.3.11**

1. Pourquoi considérer  $f^{-1} \circ f$  plutôt que  $f \circ f^{-1}$  ?
2. Trouver une CN sur l'ordre de la partie principale de  $f$  pour que  $f^{-1}$  admette un DL en 0 au même ordre que  $f$ .

**III.4 Quotient de DL****Proposition 16.3.12 (DL d'un inverse)**

Soit  $g$  une fonction définie sur un voisinage de 0, et ne s'annulant pas en 0. Si  $g$  admet un DL donné par le polynôme  $P$  en 0 à l'ordre  $n$ , alors  $\frac{1}{g}$  et  $\frac{1}{P}$  aussi, et les DL à l'ordre  $n$  en 0 de  $\frac{1}{g}$  et  $\frac{1}{P}$  sont les mêmes. Autrement dit, si  $P$  et  $Q$  sont deux polynômes de  $\mathbb{R}_n[X]$ , alors :

$$(g(0) \neq 0 \text{ et } g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + o(x^n)) \implies \left( \frac{1}{g(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} Q(x) + o(x^n) \iff \frac{1}{P(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} Q(x) + o(x^n) \right).$$

Ainsi, si  $g(0) \neq 0$ , pour trouver un DL de  $\frac{1}{g}$  à l'ordre  $n$ , il suffit d'inverser un DL à l'ordre  $n$  de  $g$ .

◁ **Éléments de preuve.**

Former la différence  $\frac{1}{g} - \frac{1}{P}$ , réduire au même dénominateur, et utiliser  $\frac{1}{gP} = O(1)$ , par l'hypothèse faite sur  $g(0)$ . ▷

**Méthode 16.3.13 (Calcul pratique du DL d'un quotient)**

Soit  $g$  une fonction admettant un DL à l'ordre  $n$  au voisinage de 0, et telle que  $g(0) \neq 0$ . Soit  $P$  un polynôme de degré au plus  $n$  tel que au voisinage de 0,  $g(x) = P(x) + o(x^n)$ . Comme  $g(0) \neq 0$ , on a également  $P(0) \neq 0$ . Par conséquent, en mettant le terme constant non nul  $a$  de  $P$  en facteur, il existe un polynôme  $R$  de degré au plus  $n$  et s'annulant en 0, tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a(1 + R(x)).$$

On a alors, au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{P(x)} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1+R(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} T_n(1 - R + R^2 + \dots + (-1)^n R^n)(x) + o(x^n),$$

d'après la formule de composition appliquée à  $h \circ R$ , où  $h$  est la fonction  $y \mapsto \frac{1}{1+y}$ . On obtient donc, au voisinage de 0, d'après la proposition précédente :

$$\frac{1}{g(x)} = T_n(1 - R + R^2 + \dots + (-1)^n R^n)(x) + o(x^n).$$

Il peut parfois être plus judicieux d'écrire  $P = a(1 - R)$ , car la formule de DL de  $y \mapsto \frac{1}{1-y}$  est encore plus simple.

**Exemples 16.3.14 (Exemples archiclassiques, à savoir refaire jusqu'à l'ordre 5)**

1.  $\frac{1}{\cos x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + o(x^7)$ .
2.  $\tan x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + o(x^{10})$ .

**Remarque 16.3.15**

Si  $g(0) = 0$ , et si  $g$  admet une partie principale d'ordre  $v$ , on peut mettre  $x^v$  en facteur. Dans ce cas, on est ramené à une fonction  $x \mapsto \frac{g(x)}{x^v}$  se prolongeant en une fonction  $h$  ne s'annulant pas en 0 : au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{x^v} \cdot \frac{1}{h(x)}$$

Comme on divise par  $x^v$ , on obtiendra en fait un développement contenant également des puissances négatives de  $x$ . Ce n'est donc pas un DL. C'est ce qu'on appelle un développement asymptotique. On en reparlera un peu plus loin.

**Exemple 16.3.16**

$$\frac{1}{x^2 \cos(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} + \frac{5}{24}x^2 + o(x^2)$$

Il existe des techniques plus efficaces que la composition pour faire le quotient de deux DL, notamment pour des ordres importants, en particulier une adaptation de la division euclidienne des polynômes, faite en inversant l'ordre (et le rôle) des monômes. C'est ce qu'on appelle la division suivant les puissances croissantes. Cette méthode est hors-programme. Pour les petits ordres, la technique exposée ci-dessus est amplement suffisante.

**III.5 Primitivation d'un DL**

**Proposition 16.3.17 (Primitivation d'un DL)**

Soit  $f$  une fonction dérivable au voisinage de 0, dont la dérivée admet un DL à l'ordre  $n-1$  au voisinage de 0, donné par :

$$f'(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + o(x^{n-1}).$$

Alors  $f$  admet au voisinage de 0 un DL à l'ordre  $n$ , donné par :

$$f(x) = f(0) + a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \dots + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + o(x^n).$$

◁ **Éléments de preuve.**

Il s'agit juste de primitiver  $o(x^{n-1})$ . Le faire par IAF (on ne peut pas le faire par intégration, on n'a pas l'hypothèse de continuité locale de  $f'$ ). ▷

**Méthode 16.3.18**

Pour primitiver terme à terme un DL, ne pas oublier :

- de primitiver également le  $o(x^{n-1})$ ;
- de préciser le terme constant (constante d'intégration), égal à  $f(0)$ .

**Exemples 16.3.19**

1. DL de  $\text{Arctan } x$ ,  $\text{Arcsin}(x)$  et  $\text{Arccos}(x)$  en 0 à tous ordres.
2. Du même accabit, mais hors-programme :  $\text{Argth}$ ,  $\text{Argsh}$ ,  $\text{Argch}$ .
3.  $\text{Arctan} \left( \frac{x^2 + 1}{x - 2} \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\text{Arctan} \left( \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{5}x - \frac{12}{25}x^2 - \frac{56}{375}x^3 + o(x^3)$ .

**Remarque 16.3.20**

Dans le cas de fonctions dérivables  $n$  fois en 0, la formule de primitivation de DL peut être vue comme une conséquence immédiate de la formule de Taylor-Young.

### III.6 Dérivation

La dérivation de DL se passe moins bien que l'intégration. En effet, contrôler l'intégrale d'un  $o$  se fait bien, par majoration : si un terme est petit, son intégrale aussi, sur un intervalle donné. En revanche, un terme peut être petit, mais avoir de très fortes variations locales (petites oscillations très pentues). Ainsi, la dérivation d'un  $o$  n'est en général pas contrôlable. Il faut de ce fait des hypothèses fortes pour pouvoir dériver un DL, en revenant à la formule de Taylor-Young.

**Proposition 16.3.21 (Dérivation d'un DL)**

Soit  $f$  une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^n$  au voisinage de 0, admettant (donc) un DL à l'ordre  $n$  au voisinage de 0 :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n).$$

Alors  $f'$  admet un DL à l'ordre  $n - 1$  en 0, égal à

$$f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + o(x^{n-1}).$$

◁ **Éléments de preuve.**

Formule de Taylor-Young appliquée à  $f'$ , exprimer les dérivées successives de  $f'$  (donc de  $f$ ) en utilisant la formule de Taylor-Young appliquée à  $f$  et l'unicité des DL, qui permet d'identifier avec le DL fourni. ▷

## IV Développements asymptotiques

On peut également définir des « développements limités » en la variable  $x$  au voisinage de  $+\infty$  : dans ce cas, on se ramène à 0 par un changement de variables  $y = \frac{1}{x}$ . Ainsi, un DL en  $+\infty$  est un polynôme en la variable  $\frac{1}{x}$ . On parle plutôt dans ce cas de développement asymptotique.

**Exemple 16.4.1**

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + x + 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Un développement limité permet de comparer localement une fonction à une fonction polynomiale, donc à situer la fonction sur une échelle de comparaison constituée de fonctions  $x \mapsto (x - x_0)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Dans le cas de fonctions non bornées au voisinage d'un point, on peut être amené à introduire des puissances négatives de  $(x - x_0)$ , afin de mesurer la divergence locale. On parlera là encore de développement asymptotique d'ordre  $n$  pour une approximation du type

$$f(t) = \sum_{k=n_0}^n a_k (x - x_0)^k,$$

l'entier  $n_0$  étant dans  $\mathbb{Z}$ .

**Exemple 16.4.2**

$$\frac{1}{\operatorname{sh}(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} - \frac{x}{6} + \frac{7}{360}x^3 + o(x^4).$$

**Avertissement 16.4.3**

Si  $f$  a un développement asymptotique commençant par un terme de degré  $-k$ , pour obtenir un DL à l'ordre  $n$  du produit  $fg$ , il faut augmenter l'ordre du DL de  $g$  jusqu'à  $n + k$  (car on divisera ensuite par  $x^k$ ). N'oubliez pas de le faire ! Encore une fois, réfléchissez bien aux ordres nécessaires pour chaque développement.

**Exemples 16.4.4**

1.  $\frac{e^x - 1}{\cos(x) - 1} \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{2}{x} - 1 - \frac{1}{2}x + o(x)$
2.  $\frac{\sin(x) - x}{\ln(1+x) - x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} + o(x^2).$

On peut être amené à affiner la comparaison, en insérant des fonctions intermédiaires entre les puissances entières  $x^n$ . La notion essentielle permettant de définir correctement des développements asymptotiques est la notion d'échelle de comparaison. Les définitions que nous allons voir généralisent toutes celles données jusqu'à présent.

**Définition 16.4.5 (Échelle de comparaison, HP)**

Une échelle de comparaison au voisinage de  $t_0$  est une famille  $\mathcal{E}$  de fonctions, définies et non identiquement nulles au voisinage de  $t_0$ , et telles que pour tout  $f$  et tout  $g$  de  $\mathcal{E}$  tels que  $f \neq g$ , on ait soit  $f = o(g)$ , soit  $g = o(f)$ .

Autrement dit, les fonctions de l'échelle de comparaison peuvent toutes se classer les unes par rapport aux autres, par ordre de prépondérance. Cette situation est à comparer au cas d'un ensemble totalement ordonné. On peut en fait se ramener à cette situation en considérant la relation d'ordre définie sur l'ensemble des fonctions non identiquement nulles au voisinage de 0 par  $f \leq g$  si et seulement si  $f = o(g)$  ou  $f = g$ . On pourrait aussi définir cette relation sur un ensemble quotient de l'ensemble des fonctions définies au voisinages de  $x_0$  par la relation d'équivalence définie par  $f \equiv g$  si et seulement si  $f$  et  $g$  coïncident sur un voisinage de  $x_0$  (on parle de germes de fonctions).

**Exemples 16.4.6 (Échelles de comparaison)**

1.  $x \mapsto (x - x_0)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , au voisinage de  $x_0$  (échelle polynomiale).
2.  $x \mapsto x^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$
3.  $x \mapsto x^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ , au voisinage de  $0^+$ .
4.  $x \mapsto x^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , au voisinage de  $0^+$  ou  $+\infty$ .
5.  $x \mapsto x^\alpha \ln^\beta(x)$  au voisinage de  $0^+$  ou de  $+\infty$ .
6.  $x \mapsto x^\alpha (\ln(x))^\beta (\ln(\ln(x)))^\gamma$  au voisinage de  $+\infty$ , etc.
7.  $x \mapsto x^\alpha e^{P(x)}$ ,  $P$  polynôme sans terme constant

On définit alors :

**Définition 16.4.7 (Développement asymptotique)**

Un développement asymptotique d'une fonction  $f$  sur une échelle de comparaison  $\mathcal{E}$  au voisinage de  $x_0$  à la précision  $\varphi \in \mathcal{E}$  est la donnée d'une approximation de  $f$  de la forme :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} \sum_{\substack{\psi \in \mathcal{E} \\ \varphi = o(\psi) \text{ ou } \psi = \varphi}} a_\psi \psi(x) + o(\varphi(x)),$$

où la somme est finie.

Ainsi, un développement limité à l'ordre  $n$  n'est rien d'autre qu'un développement asymptotique sur l'échelle  $(x \mapsto (x - x_0)^k)_{k \in \mathbb{N}}$ , avec la précision  $x \mapsto (x - x_0)^n$ .

**Exemples 16.4.8**

1.  $\frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{x}}} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{3}{8}x - \frac{5}{16}x\sqrt{x} + \frac{35}{128}x^2 + o(x^2)$ .
2.  $\frac{\sin(x)}{1 + x\sqrt{x} \cdot \ln(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} x - x^2\sqrt{x}\ln(x) - \frac{x^3}{6} + x^4 \ln^2(x) + o(x^4)$ .

La plupart des techniques précédentes s'adaptent. Il faut bien sûr être très vigilant sur la manipulation des  $o$ . On peut remarquer que la notion de partie principale se généralise aussi, mais dépend de l'échelle de comparaison choisie :

**Définition 16.4.9 (Partie principale relativement à une échelle de comparaison)**

Soit  $f$  une fonction admettant sur une échelle de comparaison  $\mathcal{E}$  un développement asymptotique :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} \sum_{\substack{\psi \in \mathcal{E} \\ \varphi = o(\psi) \text{ ou } \psi = \varphi}} a_\psi \psi(x) + o(\varphi(x)).$$

Soit  $\psi_0$  tel que  $a_{\psi_0} \neq 0$ , et tel que  $a_\psi = 0$  pour tout  $\psi$  de  $\mathcal{E}$  vérifiant  $\psi_0 = o(\psi)$ . Alors la partie principale de  $f$  relativement à l'échelle de comparaison  $\mathcal{E}$  est la fonction  $a_{\psi_0} \psi_0$ .

Il s'agit donc de la partie prépondérante d'un développement asymptotique non trivial de  $f$  sur cette échelle.

**Exemples 16.4.10**

1.  $\sqrt{x} + x^2 + x^3$  sur l'échelle  $(x^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ , au voisinage de 0
2.  $\sqrt{x} + x^2 + x^3$  sur l'échelle  $(x^\alpha(1+x))_{\alpha \in \mathbb{R}}$ , au voisinage de 0.

## V Applications

### V.1 Courbes polynomiales asymptotes à une courbe

#### Méthode 16.5.1 (Recherche de courbes polynomiales asymptotes)

Pour trouver les courbes polynomiales (par exemple les droites) asymptotes à la courbe de  $f$  en  $+\infty$ , il suffit de faire un DA à l'ordre 0 de  $f$  en  $+\infty$ . En effet, les termes de degré négatifs de ce DA forment une partie polynomiale. On obtient donc (en cas d'existence d'un tel DA), pour un certain  $m \in \mathbb{N}$  :

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} a_m \left(\frac{1}{x}\right)^{-m} + \cdots + a_0 + o(1) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} a_m x^m + \cdots + a_0 + o(1).$$

Cela signifie que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (a_m x^m + \cdots + a_0) = 0$ . Par définition, cela revient à dire que la courbe polynomiale d'équation  $y = a_m x^m + \cdots + a_0$  est asymptote à la courbe de  $f$  en  $+\infty$ .

#### Méthode 16.5.2 (Position de la courbe par rapport à une courbe asymptote)

Pour trouver la position de la courbe de  $f$  par rapport à une courbe polynomiale asymptote (par exemple une droite asymptote), il suffit d'étudier le signe du terme de plus petit exposant strictement positif) dans le DA. Par exemple, si ce terme est le terme de degré 1, on va obtenir, au voisinage de  $+\infty$  :

$$f(x) = a_m x^m + \cdots + a_0 + \frac{b}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{donc:} \quad f(x) - (a_m x^m + \cdots + a_0) \underset{+\infty}{\sim} \frac{b}{x}.$$

Ainsi,  $f(x) - (a_m x^m + \cdots + a_0)$  est du signe de  $\frac{b}{x}$  au voisinage de  $+\infty$ , donc du signe de  $b$ ; cela fournit la position, au voisinage de  $+\infty$  de la courbe de  $f$  par rapport à la courbe polynomiale asymptote  $x \mapsto a_m x^m + \cdots + a_0$ .

#### Exemple 16.5.3

Montrer que la parabole d'équation  $y = ex^2 + \frac{e}{2}x - \frac{e}{24}$  est asymptote à la courbe de  $f : x \mapsto x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1+x}$ , et que la courbe de  $f$  est au-dessus de l'asymptote (le terme d'ordre 1 est  $\frac{e}{48x}$ ).

### V.2 Extréma

Supposons que  $f$  admet un DL à un certain ordre  $k \geq 1$  au voisinage de  $x_0$ , de la forme :  $f(x) = a_0 + a_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^k)$ , avec  $a_k \neq 0$ . Alors

- $f$  admet un point critique en  $x_0$  si et seulement si  $k > 1$
- la courbe de  $f$  présente alors un extremum en  $x_0$  si et seulement si  $k$  est pair; il s'agit d'un maximum si  $a_k < 0$  et d'un minimum si  $a_k > 0$ .

En d'autres termes :

#### Proposition 16.5.4 (Étude d'un point critique)

Soit  $f$  admettant en  $x_0$  un point critique. Alors :

- $f$  admet un extremum en  $x_0$  si et seulement si la partie principale de  $x \mapsto f(x) - f(x_0)$  au voisinage de  $x_0$  est d'ordre pair;
- dans ce cas, si  $ax^\alpha$  désigne cette partie principale,  $f$  admet un minimum local en  $x_0$  si  $a > 0$  et un maximum local si  $a < 0$ .

◁ **Éléments de preuve.**

L'équivalence avec la partie principale et la propriété de conservation du signe permettent de conclure.

▷

Ainsi, pour savoir si  $f$  admet un extremum local en un point critique  $x_0$ , il suffit de trouver le premier terme non nul de degré strictement positif du DL de  $f$  en  $x_0$

## VI Développements limités des fonctions de deux variables

### Définition 16.6.1 (DL d'une fonction de deux variables)

Un développement limité à l'ordre  $n$  d'une fonction  $f$  définie au voisinage de  $X_0$  est une approximation polynomiale

$$f(X_0 + H) = P(h, k) + o(\|H\|^n),$$

où  $H = (h, k)$ , et  $P$  est un polynôme des deux variables  $h$  et  $k$ , de degré total inférieur ou égal à  $n$  (le degré total d'un monôme  $h^i k^j$  étant  $i + j$ ).

La norme considérée  $\|H\|$  est ici la norme euclidienne de  $H$ . N'importe quelle autre norme définie sur  $\mathbb{R}^2$  ferait l'affaire, d'après un résultat que vous verrez l'année prochaine (équivalence des normes en dimension finie).

Le seul cas au programme est le cas des DL à l'ordre 1 :

$$f(X_0 + H) = c + ah + bk + o(\|H\|).$$

### Méthode 16.6.2

On obtient les DL de fonctions de deux variables  $x$  et  $y$  en se ramenant à des DL de fonctions d'une seule variable,  $x$ , ou  $y$ , ou une nouvelle variable définie en fonction de  $x$  et  $y$ . Il faut ensuite bien gérer le  $o$ , en remarquant qu'avec les notations précédentes,

$$|h| \leq \|H\| \quad \text{et} \quad |k| \leq \|H\|.$$

En particulier, un  $o(h)$  est aussi un  $o(\|H\|)$ . De même pour un  $o(k)$ , mais aussi par exemple pour un  $o(h + k)$ .

### Exemples 16.6.3

1. DL à l'ordre 1 en  $(0, 0)$  de  $e^{\cos(x+2y)}(1 + x + xy)$
2. DL à l'ordre 2 en  $(0, 0)$  de  $e^{x+\ln(2+y)}$ .

### Remarque 16.6.4 (Plan tangent)

Le DL à l'ordre 1 définit l'équation d'un plan, qui correspond à la meilleure approximation affine locale. Ainsi, cela définit le plan tangent à la courbe au point  $X_0$ .

### Exemple 16.6.5

Déterminer le plan tangent à  $(x, y) \mapsto e^{x-\sqrt{y}}$  au point  $(1, 1)$ .

**Théorème 16.6.6 (Unicité du DL à l'ordre 1)**

Soit  $f$  une fonction de deux variables définie au voisinage de  $X_0$ . Si  $f$  admet un DL à l'ordre 1 en  $X_0$  :

1. ce DL est unique ;
2.  $f$  admet alors des dérivées partielles par rapport à  $x$  et  $y$  en  $X_0 = (x_0, y_0)$
3. Le DL est alors donné par :

$$f(x, y) = f(X_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(X_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(X_0).$$

◁ **Éléments de preuve.**

- Tronquer le DL à l'ordre 0 pour comparer la partie constante à la valeur en  $f(X_0)$ .
- Écrire le DL pour  $X = X_0 + te_i$ ,  $i = 1$  ou  $2$ , et se ramener à l'unicité des  $DL_1$  pour les fonctions d'une variable, et leur expression en terme de dérivée.

▷

**Théorème 16.6.7 (Existence du DL à l'ordre 1, Taylor-Young)**

Soit  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  au voisinage de  $X_0$ , alors  $f$  admet un DL à l'ordre 1 au voisinage de  $X_0$ , décrit comme dans le théorème précédent, ce qui se réécrit également :

$$f(X) = f(X_0) + \langle X - X_0, \nabla f(X_0) \rangle + o(\|X - X_0\|).$$

◁ **Éléments de preuve.**

Utiliser la formule de TY pour une variable, successivement pour la première variable, puis la deuxième, puis utiliser la continuité d'une des deux dérivées partielles. ▷

Les théorèmes précédents nous permettent maintenant de démontrer la règle de la chaîne rappelée ci-dessous :

**Théorème 16.6.8 (Règle de la chaîne)**

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $U$  et  $x, y : I \rightarrow U$  deux applications de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Alors la fonction  $t \mapsto f(x(t), y(t)) = \gamma(t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , et

$$\frac{d}{dt}(f(x(t), y(t))) = x'(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) = \langle \gamma'(t), \nabla f(\gamma(t)) \rangle$$

◁ **Éléments de preuve.**

Calculer le DL à l'ordre 1, en se servant de TY pour  $f$  au point  $(x(t_0), y(t_0))$ , appliqué en  $(x(t), y(t))$ , puis en développant  $x(t)$  et  $y(t)$  par TY pour les fonctions d'une variable (ou dans l'autre sens). Utiliser le théorème d'unicité pour conclure. ▷

On termine ce paragraphe en montrant comment se servir des DL pour étudier les extrema d'une fonction de plusieurs variables.

**Définition 16.6.9 (Extremum local, global)**

Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une application définie sur un sous-ensemble  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ , et  $X_0 \in D$ . On dit que  $f$  admet en  $X_0$  un maximum :

- global si pour tout  $X \in D$ ,  $f(X) \leq f(X_0)$  ;

• local s'il existe  $V \in \mathcal{V}(X_0)$  un voisinage de  $X_0$  tel que pour tout  $X \in V \cap D$ ,  $f(X) \leq f(X_0)$ . Cette définition s'adapte pour le cas d'un minimum global ou local. On dit que  $f$  admet un extremum (local ou global) en  $X_0$  si  $f$  admet un maximum ou un minimum (local ou global) en  $X_0$ .

**Théorème 16.6.10 (CN pour un extremum local)**

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ . Alors si  $f$  admet un extremum local en  $X_0 \in U$ ,  $\nabla f(X_0) = 0$ .

**Définition 16.6.11 (Point critique)**

On dit que  $X_0$  est un point critique de  $f$  si  $\nabla f(X_0) = 0$ .

Ainsi, une CN pour que  $f$  admette un extremum local en  $X_0$  est que  $X_0$  soit un point critique de  $f$ . Comme pour les fonctions d'une variable, ce n'est pas une CS. Le même exemple vu à deux variables convient :  $(x, y) \mapsto x^3$  en  $(0, 0)$ .

**Méthode 16.6.12**

- Pour étudier l'existence d'un extremum local en un point critique  $X_0$ , étudier le signe de  $f(X_0 + H) - f(X_0)$ .
- Pour montrer que le signe n'est pas toujours le même localement, on pourra faire un DL à l'ordre 2 en ce point critique, puis étudier un changement de signe issu de la partie de degré 2. On pourra, pour le rédiger rigoureusement, se ramener à une fonction d'une variable (en paramétrant une direction).
- On pourra éventuellement se servir d'une mise sous forme canonique par rapport à l'une des deux variables, pour essayer de mettre l'expression sous forme d'une différence de 2 carrés.

**Exemple 16.6.13**

Étude des extremas locaux de  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$  par

$$f(x, y) = x(\ln(x)^2 + y^2).$$

Il y a deux points critiques  $(1, 0)$  et  $(e^{-2}, 0)$ . Le premier correspond à un minimum local (et même global), le deuxième ne correspond pas à un extremum local.

**Avertissement 16.6.14**

La positivité de la partie de degré 2 n'est pas suffisante à justifier l'existence d'un extremum local. La stricte positivité (sauf au point  $X_0$  est suffisante, mais cela nécessite quelques outils supplémentaires pour pouvoir le justifier correctement (par exemple l'équivalence des normes en dimension finie). Donc c'est un argument à éviter pour le moment.

**Exemple 16.6.15**

Étudier le point critique  $(0, 0)$  de  $f(x, y) = (x - y)^2 - x^4$

Ainsi, avant de disposer d'outils plus efficaces, le DL à l'ordre 2 peut essentiellement servir à justifier qu'un point critique n'est pas un extremum.

## VII Développement limités des fonctions usuelles

Les développements limités suivants sont à bien connaître. Les dernières lignes sont les cas particuliers les plus fréquents de la formule du DL de  $(1+x)^\alpha$ .

### Théorème 16.7.1 (DL des fonctions classiques)

1.  $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$
2.  $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} + o(x^n)$ .
3.  $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$ .
4.  $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$ .
5.  $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$ .
6.  $\text{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})$
7.  $\text{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$ .
8.  $\text{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$ .
9.  $\text{th}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$ .
10.  $(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$   
 $\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + o(x^n)$ .
11.  $\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n)$ .
12.  $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$ .
13.  $\sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$
14.  $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3)$



# Séries numériques

*Si sur une grandeur  $d$ , on prend la moitié, puis la moitié de la moitié puis encore la moitié du reste, et ainsi de suite sans limitation de divisions, la grandeur obtenue en additionnant une moitié de chaque division successive (division appelée dichotomie) ne pourra jamais être égale exactement à la distance  $d$ . Avant d'arriver à son but, un mobile doit arriver à la moitié de son parcours. Mais auparavant, il doit arriver à la moitié de la moitié... Le mobile doit parcourir une quantité infinie d'unités d'espace. Il n'arrivera donc jamais à son but.*

(Aristote, paradoxe de la dichotomie, dérivé du paradoxe de Zénon d'Élée)

*Les séries divergentes sont une invention du diable, et c'est une honte de les utiliser dans la moindre démonstration*

(Niels Abel)

Qu'est-ce qu'une série ? Répondre à cette question pose un certain nombre de problèmes. Intuitivement, ainsi que nous l'avons vu, une série est un objet collectant les différentes sommes des premiers termes d'une suite. Autrement dit, il s'agit d'un point de vue sur les suites, différent du point de vue usuel, puisqu'il s'agit ici de considérer les suites au travers de leurs sommes partielles. Mais comment définir de façon spécifique un objet qui existe déjà, et dont on veut simplement modifier le point de vue ?

Définir une série comme un objet  $\sum u_n$  de sommes de termes  $(u_n)$  nécessite de s'être donné une suite  $(u_n)$ , et de considérer les sommes partielles  $S_n$  associées à cette suite. Ainsi, une définition correcte d'une série serait de la définir comme un couple  $((u_n), (S_n))$  de deux suites, la seconde correspondant à la somme partielle de la première. De la sorte, on définit la suite  $(u_n)$  ( $u_n$  est le terme général de la série) ainsi que le point de vue (le fait que l'on considère les sommes partielles). Certains auteurs se contentent de définir une série comme la suite des sommes partielles d'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , mais cette définition sous-entend la donnée initiale d'une suite  $(u_n)$  et ne diffère donc par réellement de la définition formelle sous forme d'un couple. Même si cette définition est formellement moins rigoureuse, c'est celle-ci que nous retiendrons, afin de ne pas trop mystifier un objet somme toute assez simple à appréhender.

## I Notion de série et de convergence

### I.1 Définitions

#### Définition 17.1.1 (Série)

- (i) Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels ou complexes. La série de terme général  $u_n$ , notée  $\sum_{n \geq 0} u_n$ , ou plus simplement  $\sum u_n$ , est, avec l'abus mentionné dans l'introduction du chapitre, la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$

des sommes partielles de la suite  $(u_n)$ , à savoir :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

- (ii)  $S_n$  est appelé somme partielle (d'ordre  $n$ ) de la série  $\sum u_n$ , et  $u_n$  est appelé terme général de la série  $\sum u_n$ .

### Remarques 17.1.2

1. La donnée de la suite  $(S_n)$  des sommes partielles de  $\sum u_n$  permet de retrouver le terme général  $u_n$  de la série, puisque

$$u_0 = S_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = S_n - S_{n-1}.$$

2. La définition se généralise de façon évidente pour des séries dont le premier terme est  $u_{n_0}$ ,  $n_0 \in \mathbb{N}$  (ou même  $n_0 \in \mathbb{Z}$ ).

### Avertissement 17.1.3

Attention à ne pas confondre suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et série de terme général  $u_n$ .

### Définition 17.1.4 (Convergence d'une série)

- (i) On dit que la série  $\sum u_n$  de terme général  $u_n$  converge si la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de ses sommes partielles admet une limite finie. On note alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n.$$

Cette quantité est appelée *somme* de la série de terme général  $u_n$ .

- (ii) Une série non convergente est dite *divergente*.  
 (iii) Soit  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  une série convergente, et soit  $n \in \mathbb{N}$ . Le  $n$ -ième *reste* de la série est :

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n.$$

- (iv) La *nature* de la série  $\sum u_n$  est le fait d'être convergente ou divergente.

### Remarque 17.1.5

Par convention, afin de ne pas avoir d'ambiguïté dans la terminologie, nous parlerons de série divergente également lorsque nous adopterons un point de vue dans  $\overline{\mathbb{R}}$ , dans le cas d'une série dont les sommes partielles tendent vers  $+\infty$  ou  $-\infty$ . Nous nous autoriserons cependant parfois dans cette situation à écrire l'égalité suivante, valable dans  $\overline{\mathbb{R}}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty \quad \text{ou} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = -\infty.$$

**Avertissement 17.1.6**

Toute série divergente ne diverge pas vers  $+\infty$  ou  $-\infty$  !

**Exemple 17.1.7**

$$\sum (-1)^n$$

Nous verrons plus loin qu'une façon efficace de montrer la convergence d'une série est de la comparer à une autre série dont on connaît les propriétés de convergence. Pour cette raison, il est important de connaître les propriétés de convergence d'un certain nombre de séries de référence. De l'importance du théorème suivant !

**Théorème 17.1.8 (Séries géométriques)**

Soit  $a \in \mathbb{C}$ . La série  $\sum a^n$  converge si et seulement si  $|a| < 1$  ; dans ce cas,  $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$ .

L'exemple suivant est également d'une grande importance (peut-être encore plus que les séries géométriques). Nous nous contentons de l'indiquer en exemple pour le moment : nous énoncerons un théorème plus général un peu plus tard.

**Exemple 17.1.9 (Série de Riemann de paramètre 1)**

La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  est divergente. Cette série est appelée *série harmonique*

La comparaison à des séries de référence permettra d'obtenir des critères efficaces de convergence, rendant en général l'étude de la convergence des séries beaucoup plus aisée que celle des suites. Pour cette raison, il est souvent intéressant de pouvoir ramener l'étude de la convergence d'une suite à celle d'une série.

**Méthode 17.1.10 (Comment étudier la convergence d'une suite *via* les séries)**

La convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  équivaut à la convergence de la série  $\sum (u_{n+1} - u_n)$ . C'est un moyen pratique de démontrer la convergence de certaines suites, en utilisant les techniques spécifiques et performantes des séries.

**I.2 Propriétés liées à la convergence**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites.

**Proposition 17.1.11**

Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne diffèrent que d'un nombre fini de termes, alors  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature.

◁ **Éléments de preuve.**

À partir d'un certain rang, la différence des sommes partielles est constante. ▷

**Théorème 17.1.12 (CN de convergence portant sur le terme général)**

Si  $\sum u_n$  converge, alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 0. De manière équivalente, si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne tend pas vers 0, alors  $\sum u_n$  diverge.

◁ **Éléments de preuve.**

Écrire  $u_n = S_n - S_{n-1}$ .

▷

### Définition 17.1.13 (Divergence grossière)

Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne tend pas vers 0, on dit que  $\sum u_n$  diverge *grossièrement*.

### Avertissement 17.1.14

**La réciproque est fausse.** Une série dont le terme général est de limite nulle peut diverger. C'est le cas par exemple de  $\sum \frac{1}{n}$ . Ainsi, il existe des séries divergentes sans être grossièrement divergentes.

### Proposition 17.1.15 (Linéarité)

Soit  $\lambda$  et  $\mu$  deux complexes.

1. Si  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  convergent, alors  $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$  converge, et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

2. Si  $\sum u_n$  converge et  $\sum v_n$  diverge, alors  $\sum(u_n + v_n)$  diverge.

3. Si  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  divergent, on ne peut rien conclure sur  $\sum u_n + v_n$ .

◁ **Éléments de preuve.**

Linéarité des sommes finies, et propriété des limites sur les CL, appliquée aux sommes partielles. ▷

## II Séries à termes positifs

Dans tout ce paragraphe, sauf indication contraire, on considère des séries  $\sum u_n$ , à termes positifs, c'est-à-dire telles que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 0$ . On peut transcrire facilement tout ce qui suit :

- au cas où :  $\exists N \in \mathbb{N}$ ,  $\forall n \geq N$ ,  $u_n \geq 0$  ( $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est positive à partir d'un certain rang) : en effet deux séries ne différant que d'un nombre fini de termes ont même nature ;
- au cas d'une série à termes tous négatifs puisque  $\sum a_n$  et  $\sum(-a_n)$  ont même nature.

### II.1 Comparaisons entre séries à termes positifs

La plupart des règles rendant l'étude des séries à terme positifs plutôt aisée résultent du résultat suivant, scholie du théorème de convergence monotone des suites.

#### Proposition 17.2.1 (Convergence dans $\overline{\mathbb{R}}$ d'une série à termes positifs)

Soit  $\sum u_n$  une série à termes positifs. Alors soit  $\sum u_n$  converge, soit elle diverge vers  $+\infty$ .

◁ **Éléments de preuve.**

La somme partielle est croissante.

▷

En particulier, on en déduit le premier résultat de comparaison des séries, duquel découle tous les autres :

**Théorème 17.2.2 (Théorème de comparaison des séries à termes positifs, TCSTP)**

Soit  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes positifs telles qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $0 \leq u_n \leq v_n$ . Alors :

1. si  $\sum v_n$  converge,  $\sum u_n$  converge aussi ;
2. si  $\sum u_n$  diverge,  $\sum v_n$  diverge aussi.

De plus, si la divergence est grossière pour  $\sum u_n$ , elle l'est aussi pour  $\sum v_n$ .

◁ **Éléments de preuve.**

La propriété précédente auquel on ajoute l'information de majoration apportée par la convergence de  $\sum v_n$ . ▷

Le deuxième point (si on omet le cas de divergence grossière) n'est évidemment rien de plus que la contraposée du premier.

Il faut bien comprendre qu'une série  $\sum u_n$  est la somme de plein de  $u_n$  : si les  $u_n$  (positifs) sont suffisamment petits la somme ne grossit pas trop vite et converge ; si les  $u_n$  ne deviennent pas assez vite petits, en revanche, la somme grossit trop vite et diverge.

Ainsi, une inégalité du type  $0 \leq u_n \leq v_n$  permet de contrôler la taille des éléments que l'on somme. Si  $\sum v_n$  converge, cela signifie que les  $v_n$  restent assez petits, donc les  $u_n$  aussi. Inversement, si  $\sum u_n$  diverge, cela signifie que les  $u_n$  ne deviennent pas petits assez vite, donc les  $v_n$  non plus !

**II.2 Convergence absolue et semi-convergence**

Avant de voir d'autres théorèmes de comparaison découlant directement du théorème ci-dessus, voyons une conséquence importante de ce théorème, permettant souvent de ramener l'étude de séries à termes quelconques à des études de séries à termes positifs. Ceci est particulièrement intéressant du fait que pour les séries à termes positifs, on dispose d'outils d'étude assez efficaces, en particulier les théorèmes de comparaison.

**Définition 17.2.3 (Convergence absolue)**

On dit que  $\sum u_n$  converge *absolument* si la série  $\sum |u_n|$  est convergente.

Comme l'indique bien la terminologie, nous avons :

**Théorème 17.2.4 (Convergence absolue entraîne convergence)**

Toute série réelle ou complexe absolument convergente est convergente.

◁ **Éléments de preuve.**

Rappel : pour une série réelle, décomposer en partie positive et partie négative, et utiliser  $0 \leq x^+ \leq |x|$  et le TCSTP. Pour les séries complexes, décomposer en partie réelle et partie imaginaire. ▷

C'est cette propriété qui permet bien souvent de ramener l'étude d'une série quelconque à l'étude d'une série à termes positifs. Ce n'est malheureusement pas toujours possible :

**Avertissement 17.2.5**

La réciproque est fautive. Il existe des séries convergentes, mais pas absolument convergentes.

**Exemple 17.2.6**

Pour  $\alpha \in ]0, 1]$ , la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$  est convergente, mais pas absolument convergente. On montre sa convergence en montrant que les deux suites extraites  $(S_{2n})$  et  $(S_{2n+1})$  de la suite de ses sommes partielles sont adjacentes.

**Définition 17.2.7 (Série semi-convergente)**

Si  $\sum u_n$  est convergente sans être absolument convergente, on dit que la série est semi-convergente.

Ainsi, par exemple, la série harmonique alternée  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  est semi-convergente.

**II.3 D'autres théorèmes de comparaison**

Le théorème de comparaison des séries à termes positifs suggère, assez logiquement, que ce qui importe pour assurer la convergence d'une série, c'est que ses termes soient suffisamment petits lorsque  $n$  devient grand, donc c'est la vitesse de convergence de  $u_n$  vers 0 : plus  $u_n$  converge vite vers 0, plus la série a de chances d'être convergente. Ceci se traduit bien par des propriétés de dominance ou de négligeabilité, fournissant notre deuxième critère de convergence. Comme les relations de dominance et de négligeabilité s'exprime par des majorations des valeurs absolues, on obtiendra même ainsi des critères de convergence absolue.

**Théorème 17.2.8 (Comparaison des séries par dominance ou négligeabilité)**

Soit  $\sum u_n$  une série à termes quelconque, et  $\sum v_n$  une série à termes positifs telles que  $u_n = O(v_n)$  (ou  $u_n = o(v_n)$ ). Alors :

- la convergence de  $\sum v_n$  entraîne la convergence absolue de  $\sum u_n$ .
- la divergence de  $\sum u_n$  (celle de  $\sum |u_n|$  suffit) entraîne la divergence de  $\sum v_n$ .

◁ **Éléments de preuve.**

On a  $|u_n| \leq Mv_n$  à partir d'un certain rang, puis TCSTP. ▷

Il paraît alors raisonnable de se dire que deux séries dont les termes généraux se comportent sensiblement de la même façon en  $+\infty$  sont de même nature. Cela constitue notre troisième critère de comparaison pour les séries à termes positifs.

**Théorème 17.2.9 (Théorème de comparaison de séries à termes positifs par équivalence)**

Soit  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes positifs. Si  $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ , alors les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature.

◁ **Éléments de preuve.**

On a  $u_n = O(v_n)$  et  $v_n = O(u_n)$ . Cette propriété est plus généralement vraie avec  $u_n = \Theta(v_n)$ , à termes positifs. ▷

**Avertissement 17.2.10**

Ce résultat est faux si on ne suppose pas la positivité des séries !

**Exemple 17.2.11**

Contre-exemple dans le cas de séries à termes quelconques :  $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  converge et  $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$  diverge. Pourtant :  $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ .

**II.4 Comparaison entre une série et une intégrale**

La somme est la version discrète de l'intégrale. Si une fonction  $f$  évolue « de façon raisonnable » entre deux valeurs entières, on peut espérer que  $\sum f(n)$  et  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  ont les mêmes propriétés de convergence. La comparaison s'obtient grâce à l'encadrement suivant :

**Théorème 17.2.12 (Encadrement des sommes partielles par des intégrales)**

Soit  $n_0 \in \mathbb{Z}$ , et  $f$  une fonction continue et décroissante de  $[n_0, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_{n_0+1}^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=n_0+1}^n f(k) \leq \int_{n_0}^n f(t) dt.$$

L'encadrement reste valide pour des fonctions croissantes, en inversant le sens des inégalités.

◁ **Éléments de preuve.**

Encadrer  $f$  entre  $f(n+1)$  et  $f(n)$  sur chaque intervalle  $[n, n+1]$ , intégrer sur ces intervalles, sommer et utiliser la relation de Chasles pour recoller les morceaux. ▷

**Corollaire 17.2.13 (Théorème de comparaison entre série et intégrale)**

Soit  $a \in \mathbb{R}_+$  et soit  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction décroissante continue et positive. Alors  $\sum_{n \geq a} f(n)$  converge si et seulement si  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  converge.

En d'autres termes, sous les hypothèses du théorème, la série  $\sum_{n \geq a} f(n)$  et l'intégrale  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  sont de même nature.

La méthode d'encadrement développée ci-dessus est utile dans d'autres circonstances, par exemple pour obtenir des équivalents de sommes partielles (en cas de divergence) ou de restes (en cas de convergence).

**II.5 Séries de référence**

Pour pouvoir utiliser efficacement les théorèmes de comparaison, il faut disposer d'un certain nombre de séries de référence, dont on connaît bien le comportement, et auxquelles nous pourrions comparer les autres séries. Nous avons déjà vu les séries géométriques :

**Théorème 17.2.14 (Nature des séries géométriques)**

Soit  $z \in \mathbb{C}$ . La série  $\sum z^n$  converge si et seulement si  $|z| < 1$ . La convergence est alors absolue, tandis que la divergence est grossière.

**Théorème 17.2.15 (Nature des séries exponentielles)**

Soit  $z \in \mathbb{C}$ . La série exponentielle  $\sum \frac{z^n}{n!}$  est absolument convergente, pour toute valeur de  $z$  (sa somme étant  $e^z$ ).

◁ **Éléments de preuve.**

La convergence a déjà été démontrée pour  $x \in \mathbb{R}$  par la formule de Taylor avec reste intégrale (en exercice), ce qui est suffisant pour obtenir la CVA dans le cas général. On donnera plus loin une autre justification basé sur le critère de d'Alembert. Par ailleurs, la valeur de la somme a été également obtenue par la formule de Taylor dans le cas réel; on le justifiera plus tard dans le cas complexe en utilisant le théorème du produit de Cauchy (voir fin du chapitre). ▷

Enfin, la troisième famille de séries de référence est constituée des séries de Riemann.

**Définition 17.2.16 (Série de Riemann)**

La série de Riemann de paramètre  $\alpha \in \mathbb{R}$  est la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ .

Du théorème de comparaison entre séries et intégrales, on déduit :

**Théorème 17.2.17 (Nature des séries de Riemann)**

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . La série de Riemann  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .

◁ **Éléments de preuve.**

Dans le cas  $\alpha > 0$ , cela s'obtient par comparaison série-intégrale : les intégrales obtenues se calculent explicitement. Dans le cas  $\alpha \leq 0$ , on a divergence grossière. ▷

Voici une autre famille, généralisant les séries de Riemann, souvent prise en référence, mais hors-programme (à savoir réétudier rapidement) :

**Proposition 17.2.18 (Nature des séries de Bertrand, HP)**

La série de Bertrand de paramètre  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ , définie par  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ , est convergente si et seulement si  $(\alpha, \beta) > (1, 1)$  pour l'ordre lexicographique.

◁ **Éléments de preuve.**

Le cas limite  $\alpha = 1$  s'obtient par comparaison série-intégrale. Les autres cas s'obtiennent par comparaison à une série de Riemann, et seront développés en exemple d'application des critères de comparaison donnés dans le paragraphe suivant. ▷

**Remarque 17.2.19**

L'ordre de grandeur de la limite entre convergence et divergence, égal à  $\frac{1}{n}$  sur l'échelle  $(\frac{1}{n^\alpha})$  donnée par les séries de Riemann, peut être affinée en  $\frac{1}{n \ln(n)}$  sur l'échelle donnée par les séries de Bertrand. Les séries de Bertrand peuvent en fait être généralisées en ajoutant au dénominateur d'autres termes, puissances de composées successives du logarithme. On peut montrer que la limite de convergence s'obtient, comme plus haut, pour l'ordre lexicographique, pour tous les exposants égaux à 1. Par exemple  $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n) \ln^\gamma(\ln n) \ln^\delta(\ln(\ln(n)))}$  converge si et seulement si  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) > (1, 1, 1, 1)$ .

## II.6 Comparaison avec une série de Riemann

Des comparaisons avec les séries de référence, on déduit un certain nombre de critères de convergence assez efficaces. Ces critères n'étant pas explicitement au programme, il convient de bien se souvenir de la manière de les obtenir rapidement à partir des résultats généraux de comparaison. Connaître ces critères hors-programme permet toutefois de savoir rapidement comment diriger son raisonnement.

**Théorème 17.2.20 (Règle de Riemann, ou règle «  $n^\alpha u_n$  »)**

Soit  $\sum u_n$  une série à termes positifs.

1. S'il existe  $\alpha > 1$  tel que la suite  $(n^\alpha u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée (par exemple si elle admet une limite nulle), alors  $\sum u_n$  converge.
2. Si  $(nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est minorée à partir d'un certain rang par un réel  $k > 0$  (par exemple si  $(nu_n)$  admet une limite infinie), alors  $\sum u_n$  diverge.

◁ **Éléments de preuve.**

1. On a alors  $u_n = O(\frac{1}{n^\alpha})$ .
2. On a alors  $\frac{1}{n} = O(u_n)$ . On conclut par contraposée du théorème de comparaison.

▷

**Exemple 17.2.21**

Séries de Bertrand.

**II.7 Comparaison avec une série géométrique**

**Théorème 17.2.22 (Règle de d'Alembert)**

Soit  $\sum u_n$  une série à termes quelconques. On suppose que  $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)$  admet une limite  $\ell$ . Alors :

1. Si  $0 \leq \ell < 1$ , alors  $\sum u_n$  converge absolument.
2. Si  $\ell > 1$ , alors  $\sum u_n$  diverge grossièrement.
3. Si  $\ell = 1$ , on ne peut pas conclure par cette méthode.

◁ **Éléments de preuve.**

1. À partir d'un certain rang, on peut majorer  $(u_n)$  par une série géométrique de raison  $\ell' \in ]\ell, 1[$
2. De même dans l'autre sens, ou plus simplement,  $(u_n)$  est strictement croissante à partir d'un certain rang donc grossièrement divergente.
3. Chercher des exemples variés parmi les séries de référence.

▷

**Exemples 17.2.23**

1. On peut retrouver de manière élémentaire, et sans référence à la fonction exponentielle, la convergence de  $\sum \frac{z^n}{n!}$
2. Plus généralement, ce critère est souvent très efficace pour l'étude des séries du type  $\sum a_n z^n$  (séries entières). Par exemple  $\sum n \ln(n) z^n$ .

**III Étude de la semi-convergence**

**III.1 Séries alternées**

Le premier cas simple de semi-convergence facile à étudier est le cas de toutes les séries s'étudiant de la même façon que  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ . En étudiant de plus près la preuve de la convergence de cette série, on se rend compte que les propriétés nécessaires à établir cette convergence sont celles rassemblées dans la définition suivante :

**Définition 17.3.1 (Série alternée)**

On dit qu'une série  $\sum u_n$  est alternée s'il existe une suite positive décroissante de limite nulle  $(a_n)$  telle que  $u_n = (-1)^n a_n$ .

Nous obtenons alors, par la même technique que pour  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  (à développer à chaque fois) :

**Théorème 17.3.2 (Théorème spécial de convergence des séries alternées, TSCSA)**

1. Toute série alternée est convergente
2. Ses sommes partielles sont du signe du premier terme.
3. Ses restes sont du signe de leur premier terme et majorés en valeur absolue par ce premier terme.

◁ **Éléments de preuve.**

$(S_{2n})$  et  $(S_{2n+1})$  sont deux suites adjacentes. La monotonie de  $S_{2n}$  et  $S_{2n+1}$  permet d'obtenir également les deux propriétés sur les sommes partielles et les restes. ▷

**Avertissement 17.3.3**

N'oubliez pas l'hypothèse de décroissance dans la définition des séries alternées. Sans cette hypothèse, le TSCSA entre en défaut.

**Exemple 17.3.4**

$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$  est une série dont le terme général tend vers 0 et a un signe qui alterne. Cependant elle est divergente. C'est la série que nous avons déjà utilisée pour contredire le théorème de comparaison par équivalents pour des séries à termes quelconques.

**III.2 Critère d'Abel**

Le critère d'Abel généralise le TSCSA, permettant par exemple de remplacer le signe  $(-1)^n$  par un terme  $\cos(n\alpha)$  ou  $\sin(n\alpha)$ , ou par une exponentielle complexe  $e^{i n\alpha}$ . En particulier, contrairement au cas des séries alternées, il est utilisable dans le cas complexe.

**Théorème 17.3.5 (Critère d'Abel, HP)**

1. Soit  $\sum a_n b_n$  une série telle que  $(a_n)$  soit réelle positive décroissante de limite nulle, et telle que la suite  $(B_n)$  des sommes partielles de  $\sum b_n$  soit bornée. Alors  $\sum a_n b_n$  converge.
2. Les suites  $(b_n)$  définies par  $b_n = e^{i n\alpha}$ ,  $\cos(n\alpha)$  et  $\sin(n\alpha)$  remplissent les conditions requises, lorsque  $\alpha \neq 0 \pmod{2\pi}$ .

◁ **Éléments de preuve.**

Faire une transformation d'Abel en écrivant  $b_n = B_n - B_{n-1}$  : regrouper les  $B_n$ , étudier la convergence absolue par majoration, en remarquant qu'une des hypothèses permet de se débarrasser des valeurs absolues sur les différences de  $a_i$ , ce qui nous ramène à un type de série très particulier s'étudiant très facilement.

Les cas particuliers s'obtiennent par calcul explicite et majoration de  $B_n$ . ▷

**Exemples 17.3.6**

1. La convergence des séries alternées peut être vu comme un cas particulier de ce théorème
2.  $\sum \frac{\cos n}{\sqrt{n}}$  converge
3.  $\sum \frac{z^n}{n}$  converge si et seulement si  $|z| \leq 1$  et  $z \neq 1$ .

**IV Familles sommables**

Il n'est pas très dur de remarquer qu'en général, changer l'ordre de sommation dans une série modifie la valeur de la somme et même les propriétés de convergence (lorsque la série est semi-convergente initialement). Ainsi, l'ordre dans lequel s'effectue la sommation semble avoir une importance. Dans de nombreuses situations pourtant, on souhaite sommer des valeurs sans avoir un ordre privilégié. C'est le cas par exemple pour les calculs de probabilités, ou d'espérance, n'ayant pas d'ordre privilégié sur l'ensemble des valeurs prises par une variable  $X$ , n'ayant pas la possibilité en général de les numéroter dans l'ordre croissant, s'il y a des points d'accumulation).

Nous présentons dans ce chapitre un moyen de s'affranchir de cet ordre de sommation sous certaines hypothèses.

**IV.1 Familles sommables de nombres réels positifs**

On rappelle que l'opération  $a + \infty$  est bien définie, égale à  $+\infty$  pour tout  $a \in \overline{\mathbb{R}}_+$ . En particulier, tout couple  $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}_+$  peut être sommé dans  $\overline{\mathbb{R}}_+$ .

Par ailleurs,  $\overline{\mathbb{R}}_+$  peut être muni d'une relation d'ordre total prolongeant l'ordre de  $\mathbb{R}_+$  en posant  $+\infty \geq a$  pour tout  $a \in \overline{\mathbb{R}}_+$ . Tout sous-ensemble  $X$  de  $\overline{\mathbb{R}}_+$  admet alors une borne supérieure dans  $\overline{\mathbb{R}}_+$  muni de cet ordre :

- s'il est non vide et majoré par un réel, d'après la propriété fondamentale de  $\mathbb{R}$
- s'il est non vide et majoré par aucun réel, alors  $+\infty$  est son seul majorant, donc aussi le plus petit des majorants.
- s'il est vide, tout élément de  $\overline{\mathbb{R}}_+$  est un majorant donc le plus petit des majorants (la borne supérieure) est 0.

Remarquez l'importance de bien préciser l'ensemble ordonné de référence pour le dernier cas : la borne supérieure de  $\emptyset$  dans  $\overline{\mathbb{R}}_+$  n'est pas la même que dans  $\overline{\mathbb{R}}$  entier.

Pour tout ensemble  $I$ , on note  $\mathcal{P}_f(I)$  l'ensemble des parties finies de  $I$ .

Pour motiver la définition de la sommabilité, on reexprime la convergence d'une série à termes positifs de façon à ne plus faire intervenir l'ordre (infini) de sommation, grâce à une version symétrisée dans laquelle toutes les sommes finies ont des rôles équivalents, et plus seulement les sommes partielles.

**Théorème 17.4.1 (Reexpression de la convergence des STP)**

Soit  $\sum a_n$  une STP. Alors  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_n$  est bien définie dans  $\overline{\mathbb{R}}$  et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_n = \sup \left\{ \sum_{k \in J} a_k, J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \right\}.$$

En particulier,  $\sum a_n$  converge ssi l'ensemble de toutes les sommes finies est majoré.

◁ **Éléments de preuve.**

- Toute somme finie est majorée par une somme partielle donc par la somme totale
- Réciproquement, les sommes partielles sont des sommes sur une partie finie.

▷

Cette propriété motive la définition suivante :

**Définition 17.4.2 (Somme quelconque de termes positifs)**

Soit  $I$  un ensemble quelconque et  $(a_i)_{i \in I}$  une famille d'éléments de  $\overline{\mathbb{R}}_+$  (éventuellement infinis). On définit

$$\sum_{i \in I} a_i = \sup_{\overline{\mathbb{R}}_+} \left\{ \sum_{j \in J} a_j, J \in \mathcal{P}_f(I) \right\}.$$

**Proposition 17.4.3 (somme d'inégalités)**

Soit  $(a_i)_{i \in I}$  et  $(b_i)_{i \in I}$  deux familles à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}}_+$ . Si pour tout  $i \in I$ ,  $a_i \leq b_i$ , alors

$$\sum_{i \in I} a_i \leq \sum_{i \in I} b_i.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Les sommes finies des  $a_i$  sont majorées par les sommes finies correspondantes des  $b_i$ , donc par la somme totale des  $b_i$ . ▷

**Définition 17.4.4 (Sommabilité)**

Avec les notations ci-dessus, on dit que la famille  $(a_i)_{i \in I}$  est sommable si  $\sum_{i \in I} a_i < +\infty$ .

**Proposition 17.4.5 (Sommabilité et somme d'une famille finie)**

Si  $I$  est fini, et  $(a_i)_{i \in I}$  une famille de réels positifs (non infinis), alors  $(a_i)_{i \in I}$  est sommable et sa somme correspond à la somme finie usuelle.

◁ **Éléments de preuve.**

La somme finie sur  $I$  est le maximum (donc la borne supérieure) de l'ensemble des sommes finies. ▷

**Proposition 17.4.6 (STP et familles sommables)**

Soit  $\sum a_n$  une STP.

$$1. \text{ Alors } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$$

(le terme de gauche étant la somme de la série, le terme de droite étant la somme de la famille sommable).

2. En particulier,  $\sum a_n$  converge ssi  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est sommable.

**Corollaire 17.4.7 (Invariance de la somme d'une STP par permutation des termes)**

Soit  $\sum a_n$  une STP et  $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$  une permutation de  $\mathbb{N}$ . Alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)}.$$

Cette égalité étant valide dans  $\overline{\mathbb{R}}_+$ , en particulier, les deux séries ont même nature.

## ◁ Éléments de preuve.

La permutation  $\sigma$  induit une permutation  $J \mapsto \sigma(J)$  de  $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ . Ainsi, les sommes finies sont les mêmes pour les deux séries, donc leur borne supérieure aussi. Remarquez que c'est aussi valide pour  $i = \emptyset$ . ▷

**Remarque 17.4.8**

La somme de termes positifs étant toujours définie dans  $\overline{\mathbb{R}}_+$ , les calculs (et les majorations) effectués sur la somme sont valides sans avoir de justification de convergence à faire a priori. Cela nous autorisera dans de nombreux calculs liés à des probabilités (calculs d'espérance) à faire les calculs avant l'étude de convergence et à justifier la convergence a posteriori, par l'obtention d'un résultat non infini. Attention toutefois à n'utiliser cet argument que pour des familles *positives* !

On montre le théorème d'associativité ci-dessous, qui est en fait un théorème de sommation par paquets.

**Théorème 17.4.9 (Associativité pour les familles positives)**

Soit  $I$  un ensemble quelconque,  $(I_k)_{k \in K}$  un recouvrement disjoint de  $I$ . Soit  $a = (a_i)_{i \in I}$  une famille d'éléments de  $\overline{\mathbb{R}}_+$ . Alors

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{k \in K} \left( \sum_{i \in I_k} a_i \right).$$

## ◁ Éléments de preuve.

- Tout sous ensemble fini  $J$  de  $I$  est réunion disjointe des  $J \cap I_k$  qui sont eux-mêmes finis et dont seul un nombre fini est non vide.
- Réciproquement, si toutes les sommes sur les  $I_k$  sont finies, toute somme finie de  $\sum_{i \in I_k} a_i$  peut être rendue  $\varepsilon$ -proche d'une somme similaire où les  $I_k$  sont remplacés par des sous-ensembles finis. Le cas où l'une des sommes sur l'un des  $I_k$  est infinie est facile. ▷

**Corollaire 17.4.10 (Théorème de Fubini positif)**

Soit  $I$  et  $J$  deux ensembles quelconques, et  $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$  une famille de réels positifs. Alors

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{i,j} = \sum_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} a_{i,j}.$$

## ◁ Éléments de preuve.

Il suffit d'écrire  $I \times J = \bigsqcup_{i \in I} \{i\} \times J = \bigsqcup_{j \in J} I \times \{j\}$  ▷

**IV.2 Famille sommable de nombres complexes****Définition 17.4.11 (Famille sommable)**

- Soit  $(a_i)_{i \in I}$  une famille de réels ou complexes. On dit que  $(a_i)_{i \in I}$  est sommable si la famille de réels positifs  $(|a_i|)_{i \in I}$  est sommable, i.e. si  $\sum_{i \in I} |a_i| < +\infty$ .
- On note  $\ell^1(I)$  l'ensemble des familles sommables indexées sur  $I$ . Pour être plus précis, on peut noter  $\ell^1(I, X)$  l'ensemble des familles sommables indexées sur  $I$  à valeurs dans  $X \subset \mathbb{C}$ .

**Remarque 17.4.12**

- Toute famille finie est sommable
- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est sommable ssi  $\sum a_n$  est absolument convergente.

**Proposition 17.4.13 (Sommabilité des sous-familles)**

Toute sous-famille  $(a_j)_{j \in J}$  ( $J \subset I$ ) d'une famille sommable est sommable.

**Théorème 17.4.14 (Théorème de comparaison)**

Soit  $(u_i)_{i \in I}$  une famille de complexes et  $(v_i)_{i \in I}$  une famille de réels positifs tels que pour tout  $i \in I$ ,  $|u_i| \leq v_i$ . Si  $(v_i)_{i \in I}$  est sommable, alors  $(u_i)_{i \in I}$  l'est aussi.

◁ Éléments de preuve.

Sommer les inégalités

▷

**Proposition 17.4.15 (Caractérisation de la sommabilité par Re, Im, + et -)**

- Soit  $(a_i)_{i \in I}$  une famille de réels. Alors  $(a_i)_{i \in I}$  est sommable ssi  $(a_i^+)_{i \in I}$  et  $(a_i^-)_{i \in I}$  le sont.
- Soit  $(a_i)_{i \in I}$  une famille de complexes. Alors  $(a_i)_{i \in I}$  est sommable ssi  $(\operatorname{Re}(a_i))_{i \in I}$  et  $(\operatorname{Im}(a_i))_{i \in I}$  le sont.

◁ Éléments de preuve.

Dans un sens, les parties positives ou négatives se majorent en fonction de  $|a_i|$ . Dans l'autre, écrire le module comme somme de  $a_i^+$  et  $a_i^-$ . Pour le cas complexe, c'est un peu similaire, mais en majorant le module cette fois par la somme des valeurs absolues de la partie réelle et de la partie imaginaire. ▷

**Définition 17.4.16 (Somme d'une famille sommable de réels, de complexes)**

- Soit  $(a_i)_{i \in I} \in \ell^1(I, \mathbb{R})$ . On définit :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I} a_i^+ - \sum_{i \in I} a_i^-.$$

- Soit  $(a_i)_{i \in I} \in \ell^1(I, \mathbb{C})$ . On définit :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I} \operatorname{Re}(a_i) + i \sum_{i \in I} \operatorname{Im}(a_i).$$

**Proposition 17.4.17 (Caractérisation par  $\varepsilon$  de la somme)**

Soit  $(a_i)_{i \in I} \in \ell^1(I)$  et  $S \in \mathbb{C}$ . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i)  $S = \sum_{i \in I} a_i$

(ii) Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $J_\varepsilon \in \mathcal{P}_f(I)$  tel que pour tout  $K \in \mathcal{P}_f(I)$  vérifiant  $J_\varepsilon \subset K$ ,

$$\left| S - \sum_{i \in K} a_i \right| \leq \varepsilon.$$

◁ Éléments de preuve.

- Pour le sens direct, commencer par le cas de familles de réels : pour le sens direct, remarquer que  $I = I_+ \sqcup I_-$ , où  $I_+$  est l'ensemble des indices tels que  $a_i \geq 0$ , et  $I_-$  l'ensemble des indices tels que  $a_i < 0$ . Approcher  $\sum_{i \in I} a_i^+$  et  $\sum_{i \in I} a_i^-$  à  $\frac{\varepsilon}{2}$  près par des sommes finies sur des sous-ensembles de  $I_+$  et  $I_-$ .
- Toujours pour le sens direct dans le cas complexe, utiliser le cas réel sur  $(\operatorname{Re}(a_i))_{i \in I}$  et  $(\operatorname{Im}(a_i))_{i \in I}$ , puis considérer l'union des  $J_{\varepsilon/2}$  et  $J'_{\varepsilon/2}$  associés.
- Réciproquement, si  $S$  et  $S'$  vérifient tous deux cette propriété, en considérant  $J_\varepsilon$  et  $J'_\varepsilon$  associés à chacun des deux complexes  $S$  et  $S'$ , et  $K = J_\varepsilon \cup J'_\varepsilon$ , montrer que  $|S - S'| \leq 2\varepsilon$ .

▷

**Théorème 17.4.18 (Linéarité de la somme)**

L'ensemble  $\ell^1(I)$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, et  $(a_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} a_i$  est une forme linéaire sur  $\ell^1(I)$ .  
 En d'autres termes, si  $(a_i)_{i \in I}$  et  $(b_i)_{i \in I}$  sont deux familles sommables de complexes, et  $\lambda \in \mathbb{C}$ , alors  $(a_i + \lambda b_i)_{i \in I}$  est encore sommable, et

$$\sum_{i \in I} (a_i + \lambda b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \lambda \sum_{i \in I} b_i.$$

◁ **Éléments de preuve.**

- La sommabilité de la CL est évidente par majoration du tg par IT.
- La linéarité se montre alors facilement à l'aide de la caractérisation précédente.

▷

**Proposition 17.4.19 (Cas des séries)**

Une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est sommable si et seulement si elle est absolument convergente. On a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n.$$

De plus, la somme est invariante par permutation des termes

◁ **Éléments de preuve.**

L'invariance par permutation peut s'obtenir en deux temps, d'abord pour les séries réelles (en utilisant l'invariance par permutation des sommes des  $a_n^+$  et des  $a_n^-$ ), puis pour les séries complexes (en utilisant l'invariance par permutation des sommes des  $\operatorname{Re}(a_n)$  et des  $\operatorname{Im}(a_n)$ ). On peut aussi l'obtenir en une fois par la caractérisation ci-dessus par  $\varepsilon$ , qui est indépendante d'un ordre qu'on se serait donné sur les éléments de  $I$ .

▷

**Théorème 17.4.20 (Associativité pour les familles sommables)**

Soit  $(I_k)_{k \in K}$  un recouvrement disjoint de  $I$ . Soit  $a = (a_i)_{i \in I}$  une famille de réels ou complexes. Alors  $a$  est sommable si et seulement si chaque  $(a_i)_{i \in I_k}$  ( $k \in K$ ) est sommable, de somme  $s_k$  et de somme absolue  $t_k$ , et si la famille  $(t_k)_{k \in K}$  est sommable. Dans ce cas,  $(s_k)$  est également sommable, et :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{k \in K} s_k = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} a_i.$$

◁ **Éléments de preuve.**

En décomposant en partie réelle et partie imaginaire, on peut se contenter du cas où les  $a_i$  sont réels. En décomposant en partie positive et partie négative, on peut se ramener au cas positif, qu'on a déjà traité. Pour comparer les sommabilités, regarder dans ce cas les conditions pour obtenir une somme finie. ▷

**Corollaire 17.4.21 (Théorème de Fubini)**

Soit  $I$  et  $J$  et  $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$  une famille de réels ou complexes. Alors si  $(a_{i,j})$  est sommable,

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} a_{i,j}.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Comme avant, il suffit d'écrire  $I \times J = \bigsqcup_{i \in I} \{i\} \times J = \bigsqcup_{j \in J} I \times \{j\}$  ▷

La sommabilité peut s'exprimer sur les sommes simples successives plutôt que sur la famille doublement indexée, en vertu du théorème d'associativité.

**Théorème 17.4.22 (Produit de familles sommables)**

Soit  $(a_i)_{i \in I}$  et  $(b_j)_{j \in J}$  deux familles sommables. Alors  $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J}$  est sommable, et

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \left( \sum_{i \in I} a_i \right) \left( \sum_{j \in J} b_j \right).$$

Ce résultat se généralise évidemment à un produit d'un plus grand nombre de familles.

◁ **Éléments de preuve.**

La sommabilité peut s'obtenir par l'équivalence exprimée dans le théorème d'associativité (remarque faite après Fubini), ou de façon directe, en majorant la somme des  $|a_i b_j|$  sur un sous-ensemble fini de  $I \times J$  par la somme sur un produit cartésien fini  $I' \times J'$ . L'égalité résulte ensuite du théorème de Fubini et de la linéarité. ▷

Lorsque  $I = J = \mathbb{N}$ , on repartitionne souvent ensuite  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  en diagonales. On obtient :

**Théorème 17.4.23 (Produit de Cauchy)**

Soit  $\sum_{n \geq 0} a_n$  et  $\sum_{n \geq 0} b_n$  deux séries absolument convergentes. Soit pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Alors  $\sum_{n \geq 0} c_n$  est absolument convergente, et

$$\left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Les hypothèses de sommabilité et le résultat précédent sur le produit de familles sommables assurent la sommabilité de  $(a_n b_m)_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$ . Utiliser le théorème d'associativité en partitionnant par les diagonales. ▷

## V Autour de la série exponentielle

### V.1 La série exponentielle

#### Définition 17.5.1 (série exponentielle)

La série exponentielle de paramètre  $z \in \mathbb{C}$  est la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$

#### Théorème 17.5.2 (Convergence de la série exponentielle)

La série exponentielle est absolument convergente, quelle que soit la valeur de  $z \in \mathbb{C}$ . Sa somme définit une fonction notée momentanément

$$e(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

#### Théorème 17.5.3 (Propriété remarquable de l'exponentielle)

Soit  $z$  et  $z'$  deux complexes. Alors

$$e(z + z') = e(z)e(z').$$

##### ◁ Éléments de preuve.

Calculer  $e(z)e(z')$  sous forme d'un produit de Cauchy. ▷

#### Corollaire 17.5.4 (Propriété de morphisme de l'exponentielle)

$e$  est un morphisme de  $(\mathbb{C}, +)$  dans  $(\mathbb{C}^*, \times)$ .

##### ◁ Éléments de preuve.

Il reste à vérifier que  $e$  est bien à valeurs dans  $\mathbb{C}^*$ . La propriété remarquable et le fait que  $e(0) = 1$  nous assure de l'inversibilité de  $e(z)$ . ▷

### V.2 Lien avec la fonction exponentielle

#### Théorème 17.5.5 (Développements de exp, cos, sin)

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \text{et} \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

##### ◁ Éléments de preuve.

D'après l'ITL, en majorant le reste. ▷

#### Corollaire 17.5.6

Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $e(z) = e^z$ , i.e. :

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Le théorème précédent le donne pour les réels et pour les imaginaires pures. Terminer en utilisant la propriété remarquable de l'exponentielle. ▷

**Méthode 17.5.7 (Calcul de  $\sum P(n) \frac{x^n}{n!}$ )**

( $P \in \mathbb{C}_n[X]$ ,  $x \in \mathbb{C}$ )

Décomposer  $P$  sur la base  $1, X, X(X-1), \dots, X(X-1)\dots(X-n+1)$ , séparer, simplifier les termes supérieurs de la factorielle.

**Exemple 17.5.8**

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (n^3 + 1) \frac{2^n}{n!}$$

## VI Dérivée des séries géométriques

On justifie dans ce paragraphe que la série géométrique peut être dérivée terme à terme de la variable complexe  $z$ , en dérivant le monôme  $z^n$  de la même manière que pour les réels. Sachant exprimer (et dérivée comme dans  $\mathbb{R}$ ) la somme géométrique, ce résultat s'exprime ainsi :

**Théorème 17.6.1 (Formule du binôme négatif)**

Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , pour tout nombre complexe tel que  $|z| < 1$ , la série ci-dessous est absolument convergente, et

$$\sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)z^{n-p} = \frac{p!}{(1-z)^{p+1}}$$

Cette formule peut se réécrire

$$\frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} z^{n-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Réurrence sur  $p$ , en multipliant à chaque étape par la série géométrique, à l'aide d'un produit de Cauchy. ▷

Le cas réel se montre aussi par Taylor avec reste intégral, et s'adapte de façon plus générale au développement de  $(1+x)^\alpha$ .

**Méthode 17.6.2 (Calcul de  $\sum P(n)x^n$ )**

( $P \in \mathbb{C}_n[X]$ ,  $x \in B(0,1)$ )

Décomposer  $P$  sur la base  $(X+1)(X+2)\dots(X+n)$ , séparer, cela nous ramène à des sommes du binôme négatif.

**Exemple 17.6.3**

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^2 + n + 2}{3^n}.$$

# Intégration

*On n'entend autre chose par somme des ordonnées d'un demi-cercle sinon la somme d'un nombre indéfini de rectangles faits de chaque ordonnée avec chacune des petites portions égales du diamètre, dont la somme [...] ne diffère de l'espace d'un demi-cercle que d'une quantité moindre qu'aucune donnée.*

(Blaise Pascal)

*Je dois payer une certaine somme ; je fouille dans mes poches et j'en sors des pièces et des billets de différentes valeurs. Je les verse à mon créancier dans l'ordre où elles se présentent jusqu'à atteindre le total de ma dette. C'est l'intégrale de Riemann. Mais je peux opérer autrement. Ayant sorti tout mon argent, je réunis les billets de même valeur, les pièces semblables, et j'effectue le paiement en donnant ensemble les signes monétaires de même valeur. C'est mon intégrale.*

(Henri Lebesgue)

Une autre citation, n'ayant pas beaucoup de rapport avec les intégrales, celle-là, mais faisant une référence insolite à un autre objet mathématique issu des théories de Bernhard Riemann :

*Près de Shepherd's Bush, deux mille couples de Bêtas-Moins jouaient au tennis, en doubles mixtes, sur des surfaces de Riemann.*

(Aldous Huxley, *Le Meilleur des Mondes*)

Le but de ce chapitre est de donner un fondement rigoureux à la théorie de l'intégration. Il existe plusieurs constructions de l'intégrale. Celle que nous donnons est historiquement la première complètement formalisée, et est due à Bernhard Riemann (1826-1866).

## Note Historique 18.0.1

La notion d'intégration est ancienne, mais la théorie de l'intégration n'a vraiment été fondée que par Leibniz à la fin du 17-ième siècle. C'est lui qui introduit le symbolisme permettant de faire le lien entre dérivation et intégration. C'est à lui également qu'on doit le signe  $\int$ , représentant un S pour somme.

Il faut attendre toute la théorisation de la notion de fonction et des notions relatives à la continuité pour une formalisation rigoureuse. Il s'agit tout d'abord de la construction de l'intégrale de Riemann (1854), puis de l'intégrale de Lebesgue (1902). D'autres variantes existent.

Nous nous intéressons donc à l'approche de Riemann. L'idée sous-jacente à la construction est l'interprétation de l'intégrale comme l'aire sous la courbe. Cette aire est facile à déterminer pour des fonctions en escalier : il s'agit de la somme d'aires de rectangles. On commence donc par définir l'intégrale de fonctions en escalier, puis on définit plus généralement l'intégrale d'une fonction en l'approchant par des fonctions en escalier. La question qui se pose au passage est de savoir quelles sont les fonctions pour lesquelles cette

construction est possible (fonctions intégrables au sens de Riemann), donc quelles sont les fonctions qui peuvent être approchées d'assez près par des fonctions en escalier, (et au passage, quel sens donner à cette affirmation ?).

On commence donc par étudier les fonctions en escalier, puis on définit leur intégrale, et on étudie leurs propriétés. Seulement après, on définit la notion d'intégrabilité au sens de Riemann, et on vérifie que les propriétés sur les fonctions en escalier se transmettent au cas général. On montre que les fonctions continues par morceaux sont intégrables au sens de Riemann, donc en particulier les fonctions continues. Enfin, on termine en précisant le lien entre primitive et intégrale. L'aspect pratique et calculatoire ayant déjà été vu dans un chapitre antérieur, nous nous en dispenserons ici.

## I Intégrale des fonctions en escalier

Une fonction en escalier est une fonction constante par morceaux. Pour définir correctement les morceaux de l'intervalle  $[a, b]$  sur lesquels  $f$  est constante, on introduit la notion de subdivision.

### I.1 Notion de subdivision d'un intervalle

#### Définition 18.1.1 (subdivision d'un intervalle)

- Une *subdivision*  $\sigma$  de l'intervalle  $[a, b]$  est une suite finie strictement croissante

$$\sigma = (a = \sigma_0 < \dots < \sigma_n = b).$$

- L'entier  $n$  est le nombre de parts de la subdivision.
- Les intervalles  $[\sigma_i, \sigma_{i+1}]$ ,  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  sont appelés *intervalles de la subdivision*.
- Le *pas*  $p(\sigma)$  de la subdivision est la longueur du plus grand intervalle :

$$p(\sigma) = \max_{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket} (\sigma_{i+1} - \sigma_i).$$

On assimilera souvent une subdivision  $\sigma$  à l'ensemble  $\{\sigma_0, \dots, \sigma_n\}$  ; ainsi, on s'autorisera à parler d'appartenance, d'inclusion, d'union et d'intersection de subdivisions. Quitte à réordonner les éléments, une union de subdivisions est encore une subdivision ; de même pour une intersection de subdivisions. Une subdivision peut donc être vue comme un sous-ensemble *fini* de  $[a, b]$  contenant  $a$  et  $b$ .

#### Définition 18.1.2 (Relation de raffinement)

Soit  $\sigma$  et  $\tau$  deux subdivisions de  $[a, b]$ . On dit que  $\sigma$  est plus fine que  $\tau$ , et on note  $\sigma \leq \tau$  si  $\tau \subset \sigma$  (autrement dit, la subdivision  $\sigma$  est obtenue de  $\tau$  en rajoutant des points)

#### Théorème 18.1.3 (Le raffinement définit un ordre)

*La relation  $\leq$  sur les subdivisions est une relation d'ordre.*

### I.2 Fonctions en escalier

En vue de construire l'intégrale par approximations, en commençant par un cas simple, nous introduisons les fonctions en escalier. Nous nous contentons dans un premier temps de l'étude des fonctions d'un intervalle  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Nous généraliserons plus loin les résultats obtenus pour des fonctions de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{C}$ .

**Définition 18.1.4 (Fonctions en escalier)**

Une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est dite *en escalier* s'il existe une subdivision  $\sigma = (\alpha = \sigma_0 < \dots < \sigma_n = b)$  de  $[a, b]$  telle que  $f$  soit constante sur chacun des intervalles  $]\sigma_i, \sigma_{i+1}[$ ,  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ .

**Définition 18.1.5 (Subdivision associée)**

Soit  $f$  une fonction en escalier. Une subdivision  $\sigma$  telle que dans la définition 18.1.4 est appelée *subdivision associée* à  $f$ .

**Remarque 18.1.6**

Il n'existe pas une unique subdivision associée à une fonction en escalier  $f$ . On peut toujours en trouver une infinité. En effet, toute subdivision plus fine qu'une subdivision associée à  $f$  sera encore associée à  $f$ .

**Proposition 18.1.7 (Image d'une fonction en escalier)**

L'image d'une fonction en escalier est un ensemble fini. En particulier, une fonction en escalier est bornée.

◁ **Éléments de preuve.**

S'il y a  $n$  paliers, cela fait  $2n + 1$  valeurs possibles ( $n$  pour les paliers,  $n + 1$  pour les points de la subdivision). ▷

**Lemme 18.1.8**

Soit  $f$  une fonction en escalier de subdivision associée  $\sigma$ , et soit  $\tau$  telle que  $\tau \leq \sigma$ . Alors  $\tau$  est associée à  $f$ .

◁ **Éléments de preuve.**

Évident! ▷

**Lemme 18.1.9**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions en escalier. Il existe une subdivision commune associée à  $f$  et  $g$ .

◁ **Éléments de preuve.**

Considérer l'union d'une subdivision associée à  $f$  et d'une subdivision associée à  $g$ . ▷

**Théorème 18.1.10 (Structure de l'ensemble des fonctions en escalier)**

L'ensemble  $\text{Esc}([a, b])$  des fonctions en escalier sur  $[a, b]$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{[a, b]}$ .

◁ **Éléments de preuve.**

La stabilité par multiplication par un scalaire est évidente, la stabilité par somme découle du lemme précédent. ▷

### I.3 Intégrale d'une fonction en escalier

Dans cette section, les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

#### Définition 18.1.11

Soit  $f$  une fonction en escalier, et  $\sigma$  une subdivision associée à  $f$ . On définit :

$$I(f, \sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(\sigma_{i+1} - \sigma_i),$$

où, pour tout  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $f_i$  désigne la valeur constante de  $f$  sur l'intervalle  $]\sigma_i, \sigma_{i+1}[$ .

#### Remarque 18.1.12

$I(f, \sigma)$  est la somme de l'aire signée des rectangles situés entre l'axe des abscisses et les valeurs constantes de  $f$  sur chacun des intervalles  $]\sigma_i, \sigma_{i+1}[$ . C'est donc l'aire entre l'axe et la courbe.

#### Théorème 18.1.13

Pour toutes subdivisions  $\sigma$  et  $\tau$  associées à  $f$ ,  $I(f, \sigma) = I(f, \tau)$ . Autrement dit, la quantité  $I(f, \sigma)$  est indépendante du choix de la subdivision associée  $\sigma$ .

#### ◁ Éléments de preuve.

En passant par  $\sigma \cup \tau$ , il suffit de montrer la propriété lorsque  $\sigma \subset \tau$ . C'est alors évident, en groupant dans la somme définissant  $I(f, \tau)$  les termes en paquets de sorte à retrouver la subdivision  $\sigma$ . C'est un peu fastidieux à écrire (beaucoup d'indexations), mais géométriquement très simple à comprendre.

▷

#### Définition 18.1.14 (Intégrale d'une fonction en escalier)

On définit l'intégrale de la fonction en escalier  $f$  sur  $[a, b]$  comme étant la valeur commune des  $I(f, \sigma)$ , pour les subdivisions associées  $\sigma$ . On note cette quantité  $\int_{[a,b]} f(x) dx$ , ou, plus souvent,  $\int_a^b f(x) dx$ . Ainsi, si  $\sigma$  est une subdivision quelconque associée à la fonction en escalier  $f$ , on a :

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(\sigma_{i+1} - \sigma_i).$$

De la définition et d'un bon choix de subdivision découle immédiatement :

#### Proposition 18.1.15 (Intégrale d'une fonction nulle presque partout)

Si  $f$  est nulle sauf en un nombre fini de points, son intégrale est nulle.

#### ◁ Éléments de preuve.

C'est une fonction en escaliers de paliers tous nuls.

▷

#### Terminologie 18.1.16

Lorsque  $f$  est nulle sauf en un nombre fini de points, on dira que  $f$  est nulle presque partout, ou, en abrégé,  $f$  est nulle pp. On écrira  $f \underset{pp}{=} 0$ .

## I.4 Propriétés des intégrales de fonctions en escalier

Nous supposons toujours les fonctions à valeurs réelles.

### Proposition 18.1.17 (Additivité par rapport aux bornes – relation de Chasles)

Soit  $f$  une fonction en escalier sur  $[a, b]$ , et soit  $c \in ]a, b[$ . Alors  $f$  est en escalier sur  $[a, c]$  et sur  $[c, b]$ , et :

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

◁ Éléments de preuve.

Rajouter au besoin  $c$  dans la subdivision, et couper la somme en 2. ▷

### Proposition 18.1.18 (Linéarité)

$\int_{[a,b]} : \text{Esc}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$  est une forme linéaire sur l'espace vectoriel  $\text{Esc}([a, b])$ . Autrement dit, pour toutes fonctions en escalier  $f$  et  $g$ , et tout réel  $\lambda$ , on a :

$$\int_a^b (f(x) + \lambda g(x)) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \lambda \int_a^b g(x) \, dx.$$

◁ Éléments de preuve.

Se ramener à la linéarité de la somme, en travaillant sur une subdivision commune à  $f$  et  $g$ . ▷

En particulier, de la nullité de l'intégrale d'une fonction nulle presque partout, il découle :

### Proposition 18.1.19 (Intégrale de deux fonctions en escalier égales presque partout)

Si deux fonctions en escalier ne diffèrent qu'en un nombre fini de points, alors leurs intégrales sont égales.

◁ Éléments de preuve.

$f - g =_{pp} 0$  puis linéarité. ▷

### Proposition 18.1.20 (Positivité, ou croissance, de l'intégrale)

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions en escalier sur  $[a, b]$  telles que pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $f(x) \leq g(x)$ . Alors :

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx.$$

En particulier, si  $f$  est en escalier sur  $[a, b]$  et positive,  $\int_a^b f(x) \, dx \geq 0$ .

◁ Éléments de preuve.

Commencer par le cas  $f \geq 0$  : les  $f_i$  sont positifs, donc l'intégrale aussi. Reste vrai si la positivité n'est vérifiée que pp (les points de non positivité sont des points de la subdivision)

Cas  $f \leq g$  en étudiant  $g - f$ . ▷

**Proposition 18.1.21 (Inégalité triangulaire intégrale)**

Soit  $f$  une fonction en escalier sur  $[a, b]$ , à valeurs réelles. Alors  $|f|$  est en escalier sur  $[a, b]$ , et :

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

◁ **Éléments de preuve.**

$\sigma$  adapté à  $f$  est aussi adapté à  $|f|$ . On est alors ramené à l'IT pour les sommes. ▷

**Définition 18.1.22 (extension de la notation intégrale)**

Par convention on pose  $\int_a^a f(x) \, dx = 0$ , et, si  $a < b$ ,  $\int_a^b f(x) \, dx = -\int_b^a f(x) \, dx$ .

Alors, la relation de Chasles est vraie pour toute valeur de  $c$ , qu'elle soit ou non dans  $]a, b[$ , à condition que la fonction soit en escalier sur tous les intervalles considérés.

## II Construction de l'intégrale de Riemann

L'idée de la construction est d'encadrer une fonction donnée le plus finement possible par des fonctions en escalier, dans l'espoir de définir l'intégrale par ces approximations. Dans un premier temps, on reste dans le cadre de fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

### II.1 Fonctions intégrables

Dans toute cette section,  $f$  désigne une fonction de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Notation 18.2.1**

On définit :

1.  $\text{Esc}_-(f) = \{g \in \text{Esc}([a, b]) \mid \forall x \in [a, b], g(x) \leq f(x)\}$
2.  $\text{Esc}_+(f) = \{g \in \text{Esc}([a, b]) \mid \forall x \in [a, b], g(x) \geq f(x)\}$

Ainsi,  $\text{Esc}_-(f)$  est l'ensemble des fonctions en escalier minorant  $f$  et  $\text{Esc}_+(f)$  est l'ensemble des fonctions en escalier majorant  $f$ .

Remarquez que  $\text{Esc}_-(f)$  et  $\text{Esc}_+(f)$  peuvent être vides, par exemple si  $f$  n'est pas bornée.

**Définition 18.2.2 (Intégrabilité au sens de Riemann)**

On dit que  $f$  est intégrable (au sens de Riemann) sur  $[a, b]$  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists g \in \text{Esc}_-(f), \exists h \in \text{Esc}_+(f), \int_a^b (h(x) - g(x)) \, dx < \varepsilon.$$

Remarquez que cette intégrale est forcément positive.

**Proposition 18.2.3 (CN d'intégrabilité)**

Pour que  $f$  soit intégrable sur  $[a, b]$ , il est nécessaire que  $f$  soit bornée.

◁ **Éléments de preuve.**

...car  $g$  et  $h$  le sont. ▷

On définit :

$$A_-(f) = \left\{ \int_a^b g(x) \, dx \mid g \in \text{Esc}_-(f) \right\}, \quad \text{et} \quad A_+(f) = \left\{ \int_a^b g(x) \, dx \mid g \in \text{Esc}_+(f) \right\}.$$

On note, sous réserve d'existence :

$$I_-(f) = \sup A_-(f) \quad \text{et} \quad I_+(f) = \inf A_+(f).$$

**Théorème 18.2.4**

$f$  est intégrable si et seulement si  $I_-(f)$  et  $I_+(f)$  existent, et si  $I_-(f) = I_+(f)$ .

◁ **Éléments de preuve.**

- Sens direct : L'existence de  $I_+(f)$  et  $I_-(f)$  provient de la propriété fondamentale de  $\mathbb{R}$  (bien vérifier toutes ses hypothèses). L'inégalité  $g \leq h$  toujours vérifiée avec  $g$  et  $h$  comme dans l'énoncé montre que  $I_-(f) \leq I_+(f)$ . La propriété d'intégrabilité montre que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $I_+(f) - I_-(f) < 2\varepsilon$ . On en déduit  $I_+(f) \leq I_-(f)$ .
- Réciproque par caractérisation des bornes supérieure et inférieure, en se laissant un  $\frac{\varepsilon}{2}$  de part et d'autre de  $I_+(f) = I_-(f)$ .

▷

**Définition 18.2.5 (Intégrale de Riemann)**

Si  $f$  est intégrable, on définit son intégrale comme étant la valeur commune de  $I_+(f)$  et  $I_-(f)$  :

$$\int_a^b f(x) \, dx = I_-(f) = I_+(f).$$

**Proposition 18.2.6 (Critère d'intégrabilité)**

Une fonction  $f$  définie sur  $[a, b]$  est intégrable si et seulement si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe deux fonctions en escalier  $\varphi$  et  $\theta$  telles que

$$\forall x \in [a, b], \quad \varphi(x) - \theta(x) \leq f(x) \leq \varphi(x) + \theta(x),$$

et  $\int_a^b \theta(x) \, dx \leq \varepsilon$ . Dans ce cas, on obtient :

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b \varphi(x) \, dx \right| \leq \varepsilon.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Dans un sens, poser  $\varphi = \frac{g+h}{2}$  et  $\theta = \frac{h-g}{2}$ . Dans l'autre, pose  $g = \varphi - \theta$  et  $h = \varphi + \theta$ . ▷

**Proposition 18.2.7 (Critère séquentiel d'intégrabilité)**

Une fonction  $f$  définie sur  $[a, b]$  est intégrable si et seulement s'il existe deux suites de fonctions en escalier  $(\varphi_n)$  et  $(\theta_n)$  telles que

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x) - \varphi_n(x)| \leq \theta_n(x),$$

et  $\int_a^b \theta_n(x) dx \rightarrow 0$ . Dans ce cas,  $\int_a^b \varphi_n(x) dx$  admet une limite et

$$\int_a^b \varphi_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx.$$

◁ **Éléments de preuve.**

- Prendre  $\varepsilon_n$  de plus en plus petit dans le critère précédent.
- Réciproquement, prendre  $n$  suffisamment grand pour que l'intégrale de  $\theta_n$  soit inférieure à  $\varepsilon$  pour se ramener au critère précédent.

▷

Intuitivement, l'intégrale d'une fonction  $f$  représente donc l'aire sous la courbe, obtenue par approximation. Cette aire sous la courbe peut être vue comme l'aire d'un rectangle de base  $[a, b]$ , de hauteur égale à la valeur moyenne de  $f$  sur  $[a, b]$ . Cela motive la définition suivante :

**Définition 18.2.8 (Moyenne de  $f$ )**

Soit  $f$  une fonction intégrable sur  $[a, b]$ . La moyenne de  $f$  sur  $[a, b]$  est la quantité définie par l'intégrale

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Le théorème des sommes de Riemann que nous verrons un peu plus loin précise cette notion de moyenne : il s'agit en fait d'une limite de la moyenne des valeurs prises par  $f$  en  $n$  points régulièrement répartis sur  $[a, b]$ , limite prise lorsque le nombre de points  $n$  tend vers  $+\infty$ .

## II.2 Exemples importants de fonctions intégrables

Voici une classe importante de fonctions intégrables :

**Théorème 18.2.9 (Intégrabilité des fonctions monotones)**

Soit  $f$  une fonction monotone sur  $[a, b]$ . Alors  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$ .

◁ **Éléments de preuve.**

Encadrer  $f$  entre deux fonctions en escalier sur des subdivisions régulières de plus en plus fines (en prenant la valeur à gauche et à droite de  $f$  sur chaque intervalle). ▷

Des arguments un peu plus fins, nécessitant l'utilisation du théorème de Heine (donc de la compacité), amène l'intégrabilité de cette seconde classe de fonctions :

**Théorème 18.2.10 (Intégrabilité des fonctions continues)**

Soit  $f$  continue sur  $[a, b]$ . Alors  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$ .

◁ **Éléments de preuve.**

Encadrer de même  $f$  sur chaque part de la subdivision régulière, en remarquant que l'amplitude de cet encadrement peut être contrôlé grâce à la continuité uniforme de  $f$ . ▷

Nous verrons un peu plus loin que cela reste vrai pour les fonctions continues par morceaux. Mais auparavant, nous devons établir un certain nombre de propriétés de l'intégrale de Riemann.

Avant de quitter cette section, nous donnons un exemple de fonction bornée mais non intégrable :

**Exemple 18.2.11**

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie pour tout  $x \in [0, 1]$  par  $f(x) = 0$  si  $x \in \mathbb{Q}$  et  $f(x) = 1$  si  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Alors  $f$  est bornée, mais n'est pas intégrable. Plus précisément,  $I_-(f) = 0$  et  $I_+(f) = 1$ .

**II.3 Propriétés de l'intégrale****Proposition 18.2.12 (Additivité par rapport aux bornes – relation de Chasles)**

Soit  $f$  une fonction définie sur  $[a, b]$  et  $c \in ]a, b[$ . Alors  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$  si et seulement si  $f$  est intégrable sur  $[a, c]$  et sur  $[c, b]$ , et dans ce cas :

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Par critère séquentiel. ▷

**Proposition 18.2.13 (Structure de l'ensemble des fonctions intégrables)**

L'ensemble  $\text{Int}([a, b])$  des fonctions intégrables sur  $[a, b]$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

**Proposition 18.2.14 (Linéarité de l'intégrale)**

L'intégrale  $\int_{[a,b]} : \text{Int}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$  est une forme linéaire sur l'espace vectoriel  $\text{Int}([a, b])$ . Autrement dit, pour toutes fonctions intégrables  $f$  et  $g$ , et tout réel  $\lambda$ , on a :

$$\int_a^b (f(x) + \lambda g(x)) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \lambda \int_a^b g(x) \, dx.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Les deux propriétés sont indissociables. Il s'agit de montrer la CL, ce qui est facile par critère séquentiel. La linéarité de l'intégrale en découle par bonus. ▷

**Corollaire 18.2.15**

Si  $f$  et  $g$  sont égales presque partout, alors  $f$  est intégrable si et seulement si  $g$  l'est, et dans ce cas, leurs intégrales sont égales.

**Proposition 18.2.16 (Croissance et positivité de l'intégrale)**

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions intégrables sur  $[a, b]$  telles que pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $f(x) \leq g(x)$ . Alors :

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx.$$

En particulier, si  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$  et positive,  $\int_a^b f(x) \, dx \geq 0$ .

◁ **Éléments de preuve.**

Comme plus haut, il suffit d'établir le cas  $f \geq 0$ . N'y aurait-il pas une fonction en escalier très simple dans  $\text{Esc}_-(f)$  donnant le résultat de façon immédiate ? ▷

**Corollaire 18.2.17 (Inégalité de la moyenne)**

Soit  $f$  une fonction intégrable sur  $[a, b]$  telle que  $m \leq f \leq M$ . Alors :

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx \leq M.$$

**Proposition 18.2.18 (Inégalité triangulaire intégrale)**

Soit  $f$  une fonction intégrable sur  $[a, b]$ . Alors  $|f|$  est intégrable sur  $[a, b]$ , et :

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Encore par critère séquentiel. ▷

**Avertissement 18.2.19**

Il est important dans cette inégalité de bien respecter l'ordre des bornes : l'inégalité triangulaire n'est valable que lorsque  $a < b$ .

**Proposition 18.2.20 (Intégrabilité d'un produit)**

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions intégrables sur  $[a, b]$ . Alors le produit  $fg$  est intégrable sur  $[a, b]$ .

◁ **Éléments de preuve.**

Par critère séquentiel, avec  $\varphi_n, \theta_n$  associés à  $f$  et  $\varphi'_n$  et  $\theta'_n$  associés à  $g$ . Montrer qu'on peut supposer  $\varphi'_n \leq 2M'$ , où  $M'$  est un majorant de  $g$  (sinon, remplacer les valeurs posant problème par 0, sans changer  $\theta$ ) Décomposer alors en  $fg - f\varphi'_n + f\varphi'_n - \varphi_n\varphi'_n$ . ▷

**II.4 Intégrales des fonctions continues par morceaux****Définition 18.2.21 (Fonctions continues par morceaux sur un segment)**

Soit  $f$  une fonction définie sur un segment  $[a, b]$ . On dit que  $f$  est continue par morceaux sur  $[a, b]$  s'il existe une subdivision  $a = \sigma_0 < \dots < \sigma_n = b$  de  $[a, b]$  telle que  $f$  soit continue sur tous les intervalles ouverts  $] \sigma_i, \sigma_{i+1}[$  ( $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ), et admette des limites finies à droite en  $\sigma_0 = a$ , à droite et à gauche (pas nécessairement égales) en  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$  et à gauche en  $\sigma_n = b$ .

On définit plus généralement la notion de fonction continue par morceaux sur un intervalle quelconque, même si nous n'aurons pas à nous servir de cette notion dans l'immédiat.

**Définition 18.2.22 (Fonction continue par morceaux sur un intervalle)**

Une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$  est continue par morceaux sur cet intervalle si elle est continue par morceaux sur tout segment inclus dans l'intervalle  $I$ .

**Théorème 18.2.23 (Intégrabilité des fonctions continues par morceaux)**

Toute fonction continue par morceaux sur le segment  $[a, b]$  est intégrable.

◁ **Éléments de preuve.**

Recoller les morceaux avec Chasles. ▷

**II.5 Sommes de Riemann****Théorème 18.2.24 (Sommes de Riemann)**

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ . Alors :

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

Plus généralement, soit pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sigma^n = (\sigma_{n,k})_{k \in \llbracket 0, \ell_n \rrbracket}$  une subdivision, et supposons que  $p(\sigma^n) \rightarrow 0$  et soit pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $k \in \llbracket 0, \ell_n - 1 \rrbracket$ ,  $x_{n,k}$  un élément de  $[\sigma_{n,k}, \sigma_{n,k+1}]$ . Alors

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{\ell_n-1} (\sigma_{n,k+1} - \sigma_{n,k}) f(x_{n,k}).$$

◁ **Éléments de preuve.**

Par continuité uniforme si le pas est suffisamment petit  $f(x_{n,k})$  est une  $\frac{\varepsilon}{b-a}$ -approximation de  $f(x)$  sur tout l'intervalle  $[\sigma_{n,k}, \sigma_{n,k+1}]$ , donc la somme diffère de l'intégrale de moins de  $\varepsilon$ . ▷

On utilise souvent ce théorème sur l'intervalle  $[0, 1]$ , avec la subdivision régulière. Cela s'écrit alors :

$$\int_0^1 f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Seul le cas d'une fonction  $f$  continue est au programme, cas dans lequel la démonstration se simplifie notablement, en utilisant la continuité uniforme de  $f$ , mais il reste vrai pour toute fonction intégrable.

**II.6 Extension des résultats aux fonctions à valeurs dans  $\mathbb{C}$** 

Étant donnée une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , on peut décomposer  $f$  en  $f = f_1 + i f_2$ , où  $f_1$  et  $f_2$  sont à valeurs réelles. On définit alors :

**Définition 18.2.25 (Intégrale d'une fonction à valeurs complexes)**

Soit  $f = f_1 + i f_2$ . On dit que la fonction  $f$  est intégrable si et seulement si  $f_1$  et  $f_2$  le sont, et dans ce cas,

$$\int_a^b f(t) \, dt = \int_a^b f_1(t) \, dt + i \int_a^b f_2(t) \, dt.$$

On montre sans difficulté que l'ensemble des fonctions intégrables de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{C}$  est un espace vectoriel, et que l'intégrale est une forme linéaire. On vérifie également sans peine la relation de Chasles, ainsi que l'intégrabilité d'un produit de fonctions intégrables, en exprimant sa partie réelle et sa partie imaginaire à l'aide des parties réelles et imaginaires des deux fonctions initiales.

Par ailleurs, une fonction à valeurs dans  $\mathbb{C}$  étant continue si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont, on récupère également de la sorte l'intégrabilité des fonctions continues par morceaux à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .

Le seul résultat qu'il ne soit pas complètement immédiat de généraliser est l'inégalité triangulaire, qu'on peut déduire du cas réel par un argument de rotation :

**Théorème 18.2.26 (Inégalité triangulaire intégrale dans  $\mathbb{C}$ )**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  intégrable. Alors  $|f|$  est aussi intégrable, et

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

◁ **Éléments de preuve.**

En notant  $\int_a^b f(t) dt = re^{i\theta}$ , et en remplaçant  $f$  par  $e^{-i\theta} f$ , on peut se ramener au cas où  $\int_a^b f(t) dt > 0$ . En particulier, cette intégrale est alors égale à  $\int_a^b f_r(t) dt$  et la majoration relève alors de l'IT pour des fonctions réelles. ▷

### III Primitives et intégration

Nous renvoyons au chapitre 10 pour les résultats suivants :

**Théorème 18.3.1 (Expression intégrale d'une primitive)**

Soit  $I$  un intervalle et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ . Alors  $f$  admet une primitive sur  $I$ . De plus, soit  $x_0 \in I$  et  $y_0 \in \mathbb{R}$ . L'unique primitive  $F$  de  $f$  telle que  $F(x_0) = y_0$  est :

$$\forall x \in I, \quad F(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

En particulier, l'unique primitive  $F$  telle que  $F(x_0) = 0$  est :

$$\forall x \in I, \quad F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

**Corollaire 18.3.2 (Théorème fondamental du calcul des intégrales)**

Soit  $f$  continue sur  $[a, b]$ . Soit  $F$  une primitive de  $f$ . Alors :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Nous renvoyons également au chapitre 10 pour le tableau récapitulatif des primitives à connaître impérativement sur le bout des doigts, ainsi que pour tous les théorèmes essentiels issus du théorème fondamental, en particulier :

- Dérivation d'une intégrale dépendant de ses bornes
- Intégration par parties
- Changement de variable