

DM n° 1 : Révisions, récurrences

Corrigé du problème 1 – (D’après un vieux sujet de Bac des années 80)

Partie I –

L’objet de cette partie est d’étudier la fonction f définie sur l’intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 1.$$

1. Encadrement de $\ln(1+x)$.

- (a) • Pour tout $t \geq 0$, $1+t \geq 1$, donc $\frac{1}{1+t} \leq 1$.
 • Pour tout $t \geq 0$, l’inégalité $1-t \leq \frac{1}{1+t}$ équivaut à $(1-t)(1+t) \leq 1$, c’est-à-dire à $1-t^2 \leq 1$, donc à $t^2 \geq 0$, qui est vérifiée. Ainsi, $1-t \leq \frac{1}{1+t}$.

Des deux inégalités on déduit l’encadrement $1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$.

- (b) Soit $x \geq 0$. On intègre l’encadrement précédent entre 0 et x (l’encadrement étant vrai sur tout l’intervalle $[0, x]$) :

$$\int_0^x (1-t) dt \leq \int_0^x \frac{dt}{1+t} \leq \int_0^1 1 dt,$$

c’est-à-dire :

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

Ces inégalités peuvent aussi s’obtenir par étude de fonction. On peut aussi remarquer que l’inégalité de droite affirme que la courbe de $x \mapsto \ln(1+x)$ reste en dessous de sa tangente en 0 (au moins sur l’axe réel positif), ce qui est conséquence de la concavité du logarithme. Vous verrez plus tard que la concavité est caractérisée par la négativité de la dérivée seconde, ce qui fournit une autre démonstration, très rapide, de l’inégalité $\ln(1+x) \leq x$.

2. Étude d’une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$g(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x}.$$

- (a) La fonction g est dérivable sur $[0, +\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables, celle de droite en tant que quotient de deux fonctions dérivables, le dénominateur ne s’annulant pas sur l’intervalle considéré, celle de gauche en tant que composée de deux fonctions dérivables, l’une $(x \mapsto 1+x)$ sur $[0, +\infty[$, et à valeurs dans $[1, +\infty[$, intervalle sur lequel l’autre $(y \mapsto \ln(y))$ est dérivable.

Pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a alors

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{2(2+x) - 2x}{(2+x)^2} = \frac{(2+x)^2 - 4(1+x)}{(1+x)(2+x)^2} = \frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2} \geq 0$$

D’un autre côté, pour $x \geq 0$, $1+x \geq 1$ et $2+x \geq 2$, donc

$$\frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2} \leq \frac{x^2}{4}.$$

On a bien obtenu l’encadrement recherché :

$$\forall x \geq 0, \quad 0 \leq g'(x) \leq \frac{x^2}{4}.$$

L'étude de la dérivabilité de g a ici été faite de façon très détaillée, un peu trop. À terme, on éludera un peu cette étude. Mais il est important de savoir qu'on sait faire (notamment la justification correcte pour les composées, en faisant attention aux intervalles sur lesquels considérer la dérivabilité de chacune des fonctions).

- (b) On trouve un encadrement de g en intégrant l'encadrement entre 0 et x , pour $x \geq 0$:

$$0 \leq g(x) - g(0) \leq \frac{x^3}{12}, \quad \text{donc:} \quad \boxed{0 \leq g(x) \leq \frac{x^3}{12}}.$$

3. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée donnée par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}.$$

Pour tout $x > 0$, le signe de $g'(x)$ est donc le même que celui de

$$h(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x) = -g(x) + \frac{x}{1+x} - \frac{2x}{2+x} = -g(x) - \frac{x^2}{(1+x)(2+x)} \leq 0,$$

puisque g est positive sur $]0, +\infty[$, ainsi que le terme de droite.

Ainsi, $\boxed{f \text{ est décroissante sur }]0, +\infty[}$, donc sur $[0, +\infty[$, par continuité de f en 0.

4. Étude de f aux bornes de l'intervalle de définition.

- (a) Pour tout $x > 0$

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \cdot \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$ et $\frac{\ln(1+x)}{1+x}$ par croissances comparées, puisque $1+x \rightarrow +\infty$. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}.$$

Il peut être intéressant de noter qu'il n'y a pas une façon unique de parvenir à cette limite : on peut aussi mener le calcul de la sorte pour se ramener aux croissances comparées :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x},$$

ces deux termes tendant vers 0, le premier par croissances comparées, le second n'étant pas une forme indéterminée.

- (b) Il est naturel d'essayer dans un premier temps d'utiliser l'encadrement obtenu dans la question 1b : pour tout $x > 0$,

$$-\frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) - x \leq 0 \quad \text{donc:} \quad 0 \leq \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{1}{2}.$$

On se rend compte que l'encadrement n'est pas assez fin pour conclure. On remarque que l'encadrement de g obtenu dans la question 2b permet aussi d'obtenir un encadrement de $\ln(1+x)$, et a une précision plus importante lorsque x est proche de 0 (d'ordre 3 au lieu de 2). On a donc :

$$0 \leq \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x} = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2+x} \leq \frac{x^3}{12}.$$

On en déduit que pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{2+x} - \frac{x}{12} \leq \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{1}{2+x}.$$

Lorsqu'on fait tendre x vers 0^+ , les deux termes encadrant admettent la limite $\frac{1}{2}$. On en déduit, par le théorème d'encadrement, que

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}}.$$

Cela ne répond qu'à moitié à la question posée, puisqu'il faut aussi étudier la limite à gauche. Cette limite peut s'obtenir de même. Le raisonnement global peut facilement s'adapter, il y a juste à changer le sens de certaines inégalités (notamment du fait qu'on intègre avec des bornes données en sens décroissant).

On peut aussi (mais cela nécessite un peu d'habitude technique) se ramener au cas positif en se rappelant que pour tout $x \in]-1, 0]$,

$$\ln(1+x) = -\ln\left(\frac{1}{1+x}\right) = -\ln\left(1 - \frac{x}{1+x}\right).$$

En posant $y = -\frac{x}{1+x}$, on a alors $y \geq 0$, et $y \rightarrow 0^+$ lorsque $x \rightarrow 0^-$. On peut alors appliquer le résultat précédent sur y :

$$\frac{1}{2} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y - \ln(1+y)}{y^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{-x}{1+x} + \ln(1+x)}{\left(\frac{x}{1+x}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+x) - x}{(1+x)x^2} + \frac{\ln(1+x)}{x(1+x)}.$$

Or, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+x)}{x(1+x)} = 1 \quad \text{donc:} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+x) - x}{(1+x)x^2} = -\frac{1}{2}.$$

En rétablissant le signe et en multipliant par $x+1$ de limite 1, on a bien $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

L'égalité de la limite à gauche et de la limite à droite amènent l'existence de la limite et :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Le résultat qu'on vient de démontrer est en fait l'expression du développement limité à l'ordre 2 de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0. Vous pouvez vérifier qu'on peut en effet reexprimer ce qu'on vient de démontrer sous la forme suivant :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2),$$

où $o(x^2)$ désigne un terme négligeable devant x^2 (c'est-à-dire infiniment plus petit que x^2) au voisinage de 0.

- (c) Cela dit, l'étude de la dérivabilité de f ne nécessite que le calcul de la limite à droite de l'expression précédente, puisque f n'est pas définie à gauche de 0. C'est peut-être une erreur d'énoncé, mais qui au passage nous a permis de voir comment exploiter la symétrie du logarithme pour déduire quelque chose sur l'intervalle $]0, 1]$ à partir de quelque chose sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

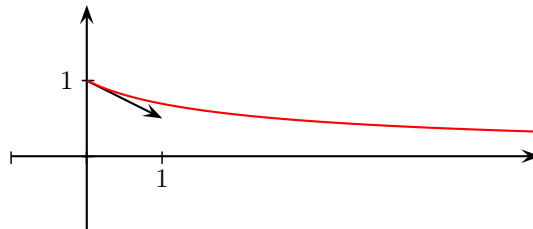
Pour étudier la dérivabilité de f , on exprime le taux d'accroissement à droite : pour tout $x > 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\frac{\ln(1+x)}{2} - 1}{x} = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2}.$$

Ainsi, f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

Connaissant $f(0) = 1$, on a alors aisément une équation de la tangente en 0 : $y = 1 - \frac{x}{2}$.

- (d) Ci-dessous la courbe de f , avec sa tangente en 0 :



Partie II –

L'objet de cette partie est d'étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels définies par les relations :

$$U_0 = c \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \ln(1 + u_n) \text{ si } n \geq 0,$$

où c est un nombre réel strictement positif donné.

1. Avant d'étudier la convergence, remarquons que (u_n) est bien définie, c'est-à-dire que u_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}$. cela provient du fait que $]0, +\infty[$ est un intervalle stable par $x \mapsto \ln(1+x)$ (c'est-à-dire que pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a aussi $\ln(1+x) \in]0, +\infty[$). On en déduit en effet par une récurrence immédiate que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et vérifie $u_n > 0$.

L'inégalité qu'on vient d'établir nous permet d'utiliser l'encadrement de la question I-1b (ou juste la majoration) : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\ln(1+u_n) \leq u_n \quad \text{donc:} \quad u_{n+1} \leq u_n.$$

Ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0, donc $\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge}}$ vers une certaine limite réelle $\ell \in \mathbb{R}_+$.

On passe alors à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ dans la relation $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$. Comme $\ln$ est continue, cela nous donne une relation sur ℓ :

$$\ell = \ln(1+\ell).$$

Cette équation admet une solution évidente dans $\mathbb{R}_+$ qui est $\ell = 0$. Montrons que c'est la seule.

Pour cela, on peut étudier les variations de la fonction $x \mapsto x - \ln(1+x)$, ou alors, remarquer que ℓ est solution non nulle de l'équation étudiée si et seulement si $f(\ell) = 1$, ce qui est impossible pour $\ell > 0$ d'après les variations de f .

Ainsi, $\boxed{\ell = 0}$.

On pose désormais $c = 1$. Le but de la fin du problème est de déterminer la limite de (nu_n) . Pour tout $n \geq 0$, on pose $v_n = \frac{1}{u_n}$.

2. Pour commencer, remarquons que (v_n) est bien définie, puisqu'on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\ln(1+u_n)} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n - \ln(1+u_n)}{u_n^2} \cdot \frac{u_n}{\ln(1+u_n)}.$$

D'après l'expression des limites remarquables et la question I-4b (utilisable du fait que $u_n \rightarrow 0$), on a

$$\boxed{\lim v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2}}.$$

3. Pour commencer, remarquons que pour tout $x \in]0, 1]$,

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\ln(1+x)} + \frac{1}{x} = \frac{x \ln(1+x) - 2x + 2 \ln(1+x)}{2x \ln(1+x)} = \frac{(x+2) \ln(1+x) - 2x}{2x \ln(1+x)} = \frac{(x+2)g(x)}{2x \ln(1+x)},$$

et là, on comprend mieux pourquoi on a introduit cette fonction g . Elle apparaît naturellement dans les calculs effectués.

Il reste donc à montrer que pour tout $x \in]0, 1]$,

$$0 \leq \frac{(x+2)g(x)}{2x \ln(1+x)} \leq \frac{3x}{16}.$$

L'inégalité de gauche résulte de la positivité de g , prouvée en I-2b. De plus, la majoration obtenue à cette même question montre que

$$\frac{(x+2)g(x)}{2x \ln(1+x)} \leq \frac{x^2(x+2)}{24 \ln(1+x)}.$$

Par ailleurs, toujours le même encadrement nous permet de minorer le logarithme :

$$\ln(1+x) \geq \frac{2x}{x+2},$$

d'où

$$\frac{(x+2)g(x)}{2x \ln(1+x)} \leq \frac{x(x+2)^2}{48} \leq \frac{9x}{48} = \frac{3x}{16},$$

en majorant $2+x$ par 3 sur $]0, 1]$. Ainsi, on a bien obtenu l'encadrement voulu :

$$\boxed{\frac{1}{2} - \frac{3x}{16} \leq \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}}.$$

4. En particulier, la suite (u_n) étant strictement décroissante de limite nulle, et initialisée par $u_0 = 1$, pour tout $n \geq 0$, $u_n \in]0, 1]$, et on peut donc utiliser la question précédente avec $x = u_n$:

$$\frac{1}{2} - \frac{3u_n}{16} \leq \frac{1}{\ln(1+u_n)} - \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{2}.$$

Or, $\frac{1}{\ln(1+u_n)} = \frac{1}{u_{n+1}} = v_{n+1}$ d'où l'encadrement

$$\boxed{\frac{1}{2} - \frac{3u_n}{16} \leq v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2}}. \quad (1)$$

Puisque $\frac{3u_n}{16} \leq \frac{1}{4}$, il vient :

$$\frac{1}{4} \leq v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2},$$

et en sommant ces inégalités et par télescopage, on obtient pour tout $n \geq 0$:

$$\frac{n}{4} \leq \sum_{k=0}^{n-1} v_{k+1} - v_k = v_n - v_0 = \frac{1}{u_n} - 1 \leq \frac{n}{2}.$$

On en déduit, pour tout $n \geq 0$:

$$\frac{n+4}{4} \leq \frac{1}{u_n} \leq \frac{n+2}{2} \quad \text{donc:} \quad \boxed{\frac{2}{n+1} \leq u_n \leq \frac{4}{n+4}}.$$

5. On fait cette fois la somme des encadrements (1) :

$$\frac{n}{2} - \frac{3}{16} \sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq \frac{1}{u_n} - 1 \leq \frac{n}{2}.$$

En divisant par n , il vient :

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{16n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq \frac{1}{nu_n} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}.$$

Montrons que $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k = 0$. Vous verrez plus tard que ceci est une conséquence immédiate du théorème de Cesaro assurant que la limite des moyennes successives des termes d'une suite est égale à la limite de la suite, si celle-ci existe. On peut aussi prouver ce résultat en se servant du fait que la somme partielle de la série harmonique alternée $\sum \frac{1}{n}$ est de l'ordre de $\ln(n)$, en utilisant l'encadrement obtenu pour u_n . On peut cependant s'en sortir par une étude plus élémentaire ne nécessitant pas de connaître ces deux résultats. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{S_n}{n}.$$

On a alors :

$$w_n - w_{n+1} = \frac{S_n}{n} - \frac{S_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n}(S_n - S_{n+1}) + S_{n+1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = -\frac{1}{n} \frac{1}{n+1} + \frac{S_{n+1}}{n(n+1)} = \frac{S_{n+1} - 1}{n(n+1)} \geq 0.$$

Ainsi, (w_n) est décroissante, et minorée par 0, donc converge vers un réel ℓ .

Adaptons l'argument de condensation de Cauchy qu'on avait utilisé pour démontrer la divergence de la série harmonique. On remarque que $2w_{2n}$ et w_n se simplifient bien :

$$2w_{2n} - w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} 2n \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n},$$

la positivité de cette expression étant évidente par la première égalité. Le théorème d'encadrement amène alors

$$2w_{2n} - w_n \rightarrow 0 \quad \text{soit:} \quad 2\ell - \ell = 0 \quad \text{soit:} \quad \ell = 0.$$

Par ailleurs, en encadrant sommant l'encadrement de (u_n) obtenu dans la question précédente,

$$\frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+2} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq \frac{4}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+4},$$

c'est-à-dire

$$(w_{n+1} - \frac{1}{n+1}) \times \frac{2(n+1)}{n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq (w_{n+3} - \frac{11}{6(n+3)}) \frac{4(n+3)}{n}.$$

Les deux encadrant ayant une limite nulle, il vient :

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k = 0,$$

d'où finalement, par encadrement

$$\lim \left(\frac{1}{nu_n} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2}, \quad \text{donc:} \quad \boxed{\lim nu_n = 2}.$$

Corrigé du problème 2 – Le problème de Josèphe (ou Josephus)

Partie I – Traitement informatique

- (a) On crée une liste des entiers de 1 à n , et on élimine successivement les personnes à partir de la personne numérotée k (donc en indice $k-1$) et en progressant de k en k . On remarquera que le fait d'enlever de la liste les personnes éliminées décale toutes les indexations suivantes, et il ne faut donc progresser que de $k-1$ dans les indices à chaque étape. Par ailleurs, lorsque les indices dépassent la longueur de la liste, il faut revenir au début de la liste, ce qu'on fait en réduisant modulo la longueur de la liste. On s'arrête lorsqu'il ne reste plus qu'une personne dans la liste.

```
def survivant(n,k):
    groupe = [i+1 for i in range(n)]
    victime = k-1
    while len(groupe) > 1:
        del groupe[victime]
        victime = (victime + k-1) % len(groupe)
        # Attention la suppression du precedent cree un decalage, on
        # n'avance donc que de k-1 dans les indices
    return groupe[0]
```

Pour les applications numériques :

```
print(survivant(41,3))
print(survivant(41,2))
```

On trouve respectivement 31 et 19.

L'algorithme ainsi conçu est loin d'être optimisé. En effet, la suppression d'un élément dans une liste Python se faisant en temps linéaire (dans le pire des cas), puisqu'il faut décaler tous les termes suivants, on obtient un algorithme quadratique (dont le temps d'exécution croît comme n^2 , lorsque n est la taille de la donnée initiale).

On peut améliorer cela en ne supprimant pas les termes de la liste, mais en les marquant d'une façon ou d'une autre. Lors de l'élimination, on parcourt alors la liste circulairement dans l'ordre, en comptant les personnes non encore marquées pour savoir où on s'arrête. La complexité obtenue est meilleure, mais les différentes étapes ne sont pas en temps constant, puisque plus on a éliminé de personnes, plus le parcours à faire pour éliminer la personne suivante est long. Il n'est pas dur de se convaincre qu'on obtient ainsi un algorithme en $n \ln(n)$. On peut enfin aboutir à une complexité linéaire en faisant effectivement les suppressions, mais en utilisant des listes chaînées au lieu des listes Python.

- Il suffit de s'arrêter dès qu'il ne reste que p personnes dans la liste. On renvoie cette fois la liste entière.

```
def survivants(n,k,p):
    groupe = [i+1 for i in range(n)]
    victime = k-1
    while len(groupe) > p:
        del groupe[victime]
        victime = (victime + k-1) % len(groupe)
    return groupe
```

Pour les applications numériques :

```
print(survivants(41,3,2))
print(survivants(100,7,50))
```

On obtient respectivement [16, 31] et

[1, 2, 4, 6, 8, 11, 15, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 27, 29, 33, 34, 37, 39, 40, 44, 45, 47, 50, 52, 55, 57, 58, 59, 61, 64, 66, 67, 68, 72, 73, 74, 76, 78, 81, 82, 83, 85, 88, 90, 92, 93, 94, 96, 100]

Partie II – Décomposition en base 2

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(c_0, \dots, c_k)$ une décomposition de n en base 2. Alors :

$$\begin{aligned} n &= \sum_{i=0}^k c_i 2^i \\ &= c_0 + \sum_{i=1}^k c_i 2^i \\ &= c_0 + 2 \sum_{i=1}^k c_i 2^{i-1} \\ &= c_0 + 2 \sum_{i=0}^{k-1} c_{i+1} 2^i. \end{aligned}$$

En posant $r = c_0 \in \{0, 1\}$ et $q = \sum_{i=0}^{k-1} c_{i+1} 2^i \in \mathbb{N}$, on reconnaît la forme d'une division euclidienne. Par unicité de la division euclidienne, c_0 est le reste de la division euclidienne, et l'expression obtenue pour le quotient q nous assure que $(c_1, \dots, c_k)$ en est une décomposition en base 2.

2. On raisonne par récurrence forte. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : n admet une unique décomposition en base 2.

- Initialisation : D'une part $1 = \overline{1}^2$. D'autre part, pour tout $i > 0$, $2^i > 1$, donc 1 ne peut pas avoir de chiffre d'indice $i > 0$ dans une de ses décompositions. Ainsi, (1) est l'unique décomposition de 1 en base 2.
- Hérédité : soit $n > 1$. On suppose que pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, k admet une unique décomposition en base 2.
- * Soit $n = 2q + c_0$, avec $c_0 \in \{0, 1\}$, la division euclidienne de n par 2. L'entier q vérifie alors $1 \leq q < n$. On peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence, et en déduire l'existence d'une décomposition

$$q = \sum_{i=0}^{\ell} d_i 2^i,$$

où, pour tout $i \in \llbracket 0, \ell \rrbracket$, $d_i \in \{0, 1\}$, et $d_\ell \neq 0$. On obtient alors :

$$n = c_0 + 2 \sum_{i=0}^{\ell} d_i 2^i = c_0 + \sum_{i=0}^{\ell} d_i 2^{i+1} = c_0 + \sum_{i=1}^{\ell+1} d_{i-1} 2^i.$$

En posant $k = \ell + 1$, et pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $c_i = d_{i-1}$, $(c_0, \dots, c_k)$ est une décomposition en base 2 de n . Par conséquent, n admet une décomposition en base 2.

- * Soit $(c_0, \dots, c_k)$ et $(d_0, \dots, d_\ell)$ deux décompositions en base 2 de n . D'après la question précédente, c_0 et d_0 sont tous deux égaux au reste de la division de n par 2, donc $c_0 = d_0$ (par unicité de la division euclidienne). De même, $(c_1, \dots, c_k)$ et $(d_1, \dots, d_\ell)$ sont tous deux des décompositions en base 2 du quotient $q \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Par hypothèse de récurrence, ce quotient admet une unique décomposition, donc

$$(c_1, \dots, c_k) = (d_1, \dots, d_\ell), \quad \text{puis:} \quad (c_0, \dots, c_k) = (d_0, \dots, d_\ell).$$

Cela prouve l'unicité de la décomposition de n en base 2.

- D'après le principe de récurrence forte, on en conclut que tout $n \in \mathbb{N}^*$ admet une unique décomposition en base 2.

Partie III – Une relation de récurrence pour le cas $k = 2$

1. Lors du premier tour du groupe, on élimine les personnes de 2 en 2 en partant de la deuxième personne. Ainsi, on élimine dans un premier temps toutes les personnes paires. Ainsi, à l'issue du procédé, il ne reste pas de personne paire, donc le dernier survivant $J(n)$ sera nécessairement impair. Pour $n = 1$, le dernier survivant est aussi la seule personne initialement présente, donc $J(1) = 1$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère un groupe de $2n$ personnes. À l'issue du premier tour de table, on a éliminé toutes les personnes paires, dans l'ordre. La dernière personne éliminée est la personne $2n$. Il reste alors les personnes $1, 3, 5, \dots, 2n-1$, donc $2\ell-1$, pour $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$. La personne suivante éliminée étant la personne 3 (correspondant à $\ell = 2$), tout se passe alors comme si on recommençait l'expérience avec un groupe de n personnes numérotées cette fois à l'aide de $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On note que la personne numérotée ℓ dans cette nouvelle numérotation est la personne initialement numérotée $2\ell-1$. Pour cette nouvelle numérotation, on sait par définition que le dernier survivant est numéroté $J(n)$, ce qui correspond à la personne initialement numérotée $2J(n)-1$. On en déduit donc la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad J(2n) = 2J(n) - 1.$$

On raisonne de même pour un groupe de $2n+1$ personnes. De la même façon, on commence par éliminer les personnes paires, puis la personne 1. Il reste cette fois les impaires, de 3 à $2n+1$, et la personne suivante éliminée est la personne 5. On renumérote les survivants par $2\ell+1$, pour $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Le survivant ultime sera alors la personne $J(n)$ dans cette nouvelle numérotation, donc $2J(n)+1$ dans l'ancienne numérotation. On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \boxed{J(2n+1) = 2J(n) + 1}.$$

3. • Soit $u_\alpha = J(2^\alpha - 1)$. On remarque que

$$u_{\alpha+1} = J(2^{\alpha+1} - 1) = J(2(2^\alpha - 1) + 1) = 2J(2^\alpha - 1) + 1 = 2u_\alpha + 1.$$

De plus $u_1 = J(1) = 1$. C'est un type de suites s'explicitant facilement (suite arithmético-géométrique). Soit vous connaissez la méthode pour le faire (trouver une constante c telle que $(u_\alpha - c)$ soit géométrique), soit, en attendant de voir cette méthode en cours, on essaye de deviner le résultat à l'aide des premières valeurs :

$$u_2 = 3, \quad u_3 = 7, \quad u_4 = 15 \dots$$

On va donc montrer par récurrence sur $\alpha \in \mathbb{N}^*$ que $u_\alpha = 2^\alpha - 1$.

- * L'initialisation provient de la valeur de u_1 .
- * Soit $\alpha \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $u_\alpha = 2^\alpha - 1$. Alors

$$u_{\alpha+1} = 2u_\alpha + 1 = 2(2^\alpha - 1) + 1 = 2^{\alpha+1} - 1.$$

Ainsi, la propriété est héréditaire.

- * D'après le principe de récurrence, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $J(2^\alpha - 1) = 2^\alpha - 1$.

- De la même façon, en posant $v_\alpha = J(2^\alpha)$,

$$v_{\alpha+1} = J(2^{\alpha+1}) = 2J(2^\alpha) - 1 = 2v_\alpha - 1.$$

De nouveau, il s'agit d'une suite arithmético-géométrique. On va comme dans la question précédente calculer les premières valeurs :

$$v_1 = J(2) = 1, \quad v_2 = 1, \quad v_3 = 1$$

Une récurrence triviale assure que $v_\alpha = J(2^\alpha) = 1$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^*$

4. • Existence : soit $n \in \mathbb{N}^*$. La suite $(2^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$ étant strictement croissante et de limite $+\infty$, et $n \leq 2^0$ il existe un entier α tel que

$$2^\alpha \leq n < 2^{\alpha+1}.$$

En effet, sinon, on montre facilement par récurrence que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, $2^\alpha \leq n$, ce qui contredirait la limite infinie.

On pose alors, $\ell = n - 2^\alpha$. On a donc

$$0 \leq \ell < 2^{\alpha+1} - 2^\alpha = 2^\alpha, \quad \text{donc:} \quad \ell \in \llbracket 0, 2^\alpha - 1 \rrbracket.$$

D'où l'existence de $\alpha \in \mathbb{N}$ et de $\ell \in \llbracket 0, 2^\alpha - 1 \rrbracket$ tels que $n = 2^\alpha + \ell$.

- Unicité : Si $n = 2^\alpha + \ell$, avec $\ell \in \llbracket 0, 2^\alpha - 1 \rrbracket$, alors

$$2^\alpha \leq n < 2^\alpha + 2^\alpha = 2^{\alpha+1}.$$

Comme la suite (2^α) est strictement croissante, un tel encadrement ne peut être vérifié que pour au plus une valeur de α . D'où l'unicité de α . Or, α détermine ℓ , d'où aussi l'unicité de ℓ . On en déduit l'unicité de la décomposition sous la forme de l'énoncé.

5. On raisonne par récurrence forte sur n , en définissant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété :

$\mathcal{P}(n) : J(n) = 2\ell + 1$, où (α, ℓ) est l'unique couple associé à n tel que dans la question précédente.

- Initialisation : Le cas $n = 1$ est immédiat (et est un cas particulier de la question 3).
- Soit $n > 1$ telle que $\mathcal{P}(m)$ soit satisfaite pour tout $m \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Soit (α, ℓ) le couple associé à n . Puisque $n > 1$, $\alpha \geq 1$. De plus, on pose

$$\ell = 2k + \varepsilon$$

la division euclidienne de ℓ par 2, avec $\varepsilon \in \{0, 1\}$. Ainsi,

$$n = 2m + \varepsilon,$$

où

$$m = 2^{\alpha-1} + k.$$

Or, $k \in \llbracket 0, 2^{\alpha-1} \rrbracket$, donc $(\alpha-1, k)$ est le couple associé à m , et d'autre part, $m \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence :

$$J(m) = 2k + 1.$$

On retrouve alors $J(n)$ avec les relations obtenues dans la question 1 :

* Si $\varepsilon = 0$,

$$J(n) = J(2m) = 2J(m) - 1 = 2(2k + 1) - 1 = 4k + 1 = 2\ell + 1;$$

* Si $\varepsilon = 1$,

$$J(n) = J(2m + 1) = 2J(m) + 1 = 2(2k + 1) + 1 = 4k + 3 = 2\ell + 1.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n)$ est satisfaite.

- On déduit du principe de récurrence forte que $\boxed{\mathcal{P}(n) \text{ est vraie pour tout } n \in \mathbb{N}^*}$.

6. Si $(c_0, \dots, c_k)$ est la décomposition en base 2 de n , on a $c_k = 1$ et

$$n = 2^k + \sum_{i=0}^{k-1} c_i 2^i \leq 2^k + \sum_{i=0}^{k-1} 2^i = 2^k + 2^k - 1 < 2^{k+1}.$$

On en déduit que le couple (α, ℓ) associé à n par la question 4 est défini par

$$\alpha = k \quad \text{et} \quad \ell = \sum_{i=0}^{k-1} c_i 2^i.$$

Ainsi,

$$J(n) = 2\ell + 1 = 2 \sum_{i=0}^{k-1} c_i 2^i + 1 = \sum_{i=0}^{k-1} c_i 2^{i+1} + 1 = 1 + \sum_{i=1}^k c_{i-1} 2^i.$$

Il s'agit du nombre dont les chiffres en base 2 sont obtenus de ceux de n en oubliant le chiffre de poids fort (c_k) et en décalant tous les autres en ajoutant un chiffre 1 en poids faible. Ainsi, si

$$n = \overline{c_k c_{k-1} \dots c_0}^2, \quad \text{alors} \quad \boxed{J(n) = \overline{c_{k-1} \dots c_0 1}^2}.$$

Dans cette écriture, les premiers chiffres peuvent être nuls. Pour obtenir la décomposition en base 2 avec écriture unique comme dans la partie II, il faut au préalable supprimer les 0 initiaux. Mais c'est un détail.

7. Trouvons la décomposition en base 2 de $n = 41$:

$$n = 41 = 32 + 8 + 1 = \overline{101001}^2.$$

On en déduit que

$$J(41) = \overline{010011}^2 = 1 + 2 + 16 = \boxed{19}.$$

C'est bien le résultat qu'on avait trouvé dans la partie I.

Partie IV – Des récurrences plus générales

1. Première méthode d'explicitation

(a) On comprend assez bien ce qui se passe en considérant la décomposition en base 2 :

- Pour $(\gamma, \beta_1, \beta_2) = (1, 0, 0)$, $A(2n + \varepsilon) = 2A(n)$, pour tout $\varepsilon \in \{0, 1\}$. Ainsi, la décomposition en base deux de $A(2n + \varepsilon)$ est obtenue de celle de $A(n)$ en rajoutant un 0. De plus n a un chiffre de moins que $2n$ dans la décomposition en base 2. On peut itérer ce procédé, en perdant un chiffre en base 2 (chaque chiffre perdu est remplacé par un 0 à la fin de la décomposition), jusqu'à se ramener à un seul chiffre (donc $A(1)$, qui vaut 1). On aura donc

$$A(n) = \overline{10 \dots 0}^2,$$

le nombre de 0 étant égal à α . Donc $A(n) = 2^\alpha$, où α est défini comme précédemment.

Si on veut ensuite rendre les choses plus rigoureuses, on peut faire une récurrence forte sur n , facilement initialisée pour $n = 1$. L'hérédité découle facilement du fait que si α est l'exposant associé à une valeur n , $\alpha - 1$ est associé au quotient de la division de n par 2.

- De même si $(\gamma, \beta_1, \beta_2) = (0, 1, 0)$, à chaque fois que le dernier chiffre de n est 0, on obtient $B(n)$ en considérant l'image par B de l'entier dont la décomposition en base 2 est celle de n amputée de son dernier chiffre, et en ajoutant un dernier chiffre, complémentaire du dernier chiffre de n . Ainsi, au fur et à mesure de la réduction, on remplace successivement les chiffres de n par leur complément à 1, jusqu'à se ramener à $B(c_\alpha) = B(1) = 0$. Ainsi, ce chiffre est également remplacé par son complémentaire. Par conséquent, si

$$n = \sum_{i=0}^{\alpha} c_i 2^i,$$

on obtient

$$B(n) = \sum_{i=0}^{\alpha} (1 - c_i) 2^i = (2^{\alpha+1} - 1) - n.$$

Là encore, la récurrence se fait bien une fois la relation devinée :

- * L'initialisation pour $n = 1$ donne bien $B(1) = (2^1 - 1) - 1 = 0$.
- * Si pour une valeur de $n > 1$, l'égalité est vérifiée pour tout $m < n$, on écrit alors $n = 2m + \varepsilon$. On a donc

$$B(n) = 2B(m) + 1 - \varepsilon.$$

Or, si α est l'exposant associé à n (i.e. l'exposant le plus fort dans sa décomposition en base 2), $\alpha - 1$ est celui associé à m . Ainsi, par hypothèse de récurrence,

$$B(n) = 2((2^\alpha - 1) - m) + 1 - \varepsilon = 2^{\alpha+1} - 2m - 1 - \varepsilon = (2^{\alpha+1} - 1) - n.$$

D'où $\mathcal{P}(n)$.

- * D'après le principe de récurrence forte, on a donc $B''(n) = 2^{\alpha+1} - 1 - n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, α étant l'exposant de plus haut degré de la décomposition de n en base 2.
- Le troisième cas est similaire, mais sans inversion des chiffres lors de la phase de réduction. Ainsi, on reporte petit à petit les chiffres de n , jusqu'à se retrouver avec $C(c_\alpha)$ qui vaut 0. Ainsi, le premier chiffre (de poids α) est remplacé par 0, les autres sont conservés. On obtient donc, toujours avec les mêmes notations, $C(n) = n - 2^\alpha$. Encore une fois, la récurrence ne pose pas de problème une fois l'expression devinée. Je vous la laisse.

(b) On montre par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(n) = \gamma A(n) + \beta_0 B(n) + \beta_1 C(n).$$

- Initialisation pour $n = 1$:

$$f(1) = \gamma = \gamma \cdot 1 + \beta_0 \cdot 0 + \beta_1 \cdot 0 = \gamma A(1) + \beta_0 B(1) + \beta_1 C(1).$$

- Hérédité. Soit $n > 1$ tel que la relation soit satisfaite pour tout $m \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

- * Si n est pair, on écrit $n = 2m$. On a alors

$$\begin{aligned} f(n) &= 2f(m) + \beta_0 = 2\gamma A(m) + \beta_0(2B(m) + 1) + 2\beta_1 C(m) \\ &= \gamma A(2m) + \beta_0 B(2m) + \beta_1 C(2m) \\ &= \gamma A(n) + \beta_0 B(n) + \beta_1 C(n), \end{aligned}$$

par définition de A , B et C .

- * De même, si n est impair, $n = 2m + 1$,

$$\begin{aligned} f(n) &= 2f(m) + \beta_1 = 2\gamma A(m) + 2\beta_0 B(m) + \beta_1(2C(m) + 1) \\ &= \gamma A(2m + 1) + \beta_0 B(2m + 1) + \beta_1 C(2m + 1) \\ &= \gamma A(n) + \beta_0 B(n) + \beta_1 C(n). \end{aligned}$$

- Ainsi, d'après le principe de récurrence forte, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(n) = \gamma A(n) + \beta_0 B(n) + \beta_1 C(n).$$

- (c) La relation de III-5 s'obtient avec $\gamma = 1$, $\beta_0 = -1$ et $\beta_1 = 1$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f(n) = A(n) - B(n) + C(n) = 2^\alpha - (2^{\alpha+1} - 1 - n) + (n - 2^\alpha) = 2n + 1 - 2^{\alpha+1} = 2(n - 2^\alpha) + 1 = \boxed{2\ell + 1}.$$

2. Deuxième méthode d'explicitation

- (a) La démonstration précédente ne nécessite que de connaître l'existence de $(A(n))$, $(B(n))$ et $(C(n))$ telles que dans IV-1(a), sans avoir besoin de connaître leur explicitation. Or, les relations peuvent se réécrire (pour A par exemple)

$$\begin{cases} A(1) = 1 \\ \forall n \geq 2, \quad A(n) = 2A\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right). \end{cases}$$

C'est une relation de récurrence de type classique, définissant chaque terme successivement en fonction des précédents. Cela définit bien sans ambiguïté la suite $(A(n))$, par récurrence forte, indépendante de γ , β_0 et β_1 .

De la même manière, B vérifie les relations :

$$\begin{cases} B(1) = 0 \\ \forall n \geq 2, \quad B(n) = 2B\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + \varepsilon_n, \end{cases}$$

où $\varepsilon_n = 0$ si n est impair, et $\varepsilon_n = 1$ si n est pair. Ceci est encore une relation de récurrence forte permettant de définir $(B(n))_{n \in \mathbb{N}}$ entièrement et sans ambiguïté, indépendamment de γ , β_0 et β_1 .

C'est encore la même chose pour $(C(n))$ en échangeant les parités dans la définition de (ε_n) .

Ainsi, de telles suites associées à ces jeux de paramètre existent, puis on peut terminer de la même manière qu'en IV-1(b) pour montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n) = \gamma A(n) + \beta_0 B(n) + \beta_1 C(n).$$

La grande différence avec IV-1, c'est qu'on ne connaît pas explicitement ces trois suites à ce stade.

- (b) • Pour tout $n = 2m + \varepsilon$, ($\varepsilon \in \{0, 1\}$) :

$$f_1(n) = 1 = 2f_1(m) - 1.$$

De plus, $f_1(1) = 1$. Ainsi, f_1 vérifie la relation de récurrence, avec les paramètres $(1, -1, -1)$.

- Pour tout $n = 2m + \varepsilon$, ($\varepsilon \in \{0, 1\}$) :

$$f_2(n) = n = 2m + \varepsilon = 2f_2(m) + \varepsilon,$$

et $f_2(1) = 1$. Donc f_2 vérifie la relation de récurrence, avec les paramètres $(1, 0, 1)$.

- (c) J est associée aux paramètres $(1, -1, 1)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc un système :

$$\begin{cases} 1 = A(n) - B(n) - C(n) \\ n = A(n) + C(n) \\ J(n) = A(n) - B(n) + C(n). \end{cases}$$

En faisant la différence de la dernière et de la première équation, on obtient

$$C(n) = \frac{1}{2}(J(n) - 1) = \frac{1}{2}(2\ell + 1 - 1) = \ell = \boxed{n - 2^\alpha}$$

On en déduit A par la deuxième équation :

$$A(n) = n - C(n) = 2^\alpha.$$

La valeur de B est obtenue à partir de la première équation :

$$B(n) = A(n) - C(n) - 1 = 2^\alpha - n + 2^\alpha - 1 = \boxed{2^{\alpha+1} - n - 1}.$$

3. Description sur la représentation binaire

On prouve par récurrence forte sur $n = \overline{1b_{\alpha-1} \dots b_0}^2$ que

$$f(\overline{1b_{\alpha-1} \dots b_0}^2) = \overline{\gamma\beta_{b_{\alpha-1}} \dots \beta_{b_1}\beta_{b_0}}^2.$$

- Pour $n = 1$,

$$f(n) = \alpha = \overline{\alpha}^2.$$

- Supposons que pour une valeur donnée $n \geq 2$, l'identité soit vérifiée pour tout $m \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. On pose $n = 2m + \varepsilon$, avec $\varepsilon \in \{0, 1\}$. On a alors :

$$f(n) = 2f(m) + \beta_\varepsilon.$$

Or, si

$$n = \overline{1b_{\alpha-1} \dots b_0}^2,$$

on a alors :

$$m = \overline{1b_{\alpha-1} \dots b_0}^2 \quad \text{et} \quad \varepsilon = \beta_0.$$

On déduit de l'hypothèse de récurrence appliquée à m que

$$\begin{aligned} f(n) &= \overline{2\gamma\beta_{b_{\alpha-1}} \dots \beta_{b_1}\beta_{b_1}}^2 + \beta_{b_0} \\ &= \overline{\gamma\beta_{b_{\alpha-1}} \dots \beta_{b_1}\beta_{b_1}0}^2 + \beta_{b_0} \\ &= \overline{\gamma\beta_{b_{\alpha-1}} \dots \beta_{b_1}\beta_{b_1}\beta_{b_0}}^2 \end{aligned}$$

- D'après le principe de récurrence forte, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{f(\overline{1b_{\alpha-1} \dots b_0}^2) = \overline{\gamma\beta_{b_{\alpha-1}} \dots \beta_{b_1}\beta_{b_0}}^2.}$$