DM nº 2 : Ensembles

Suggestion de travail supplémentaire (à ne pas me rendre) : Si vous en avez le temps, vous pouvez regarder le problème 1 de la sélection disponible sur mon site web.

Corrigé du problème 1 – Lemme de classe monotone

Partie I – Autour des σ-algèbres

1. - On a évidemment $\mathcal{P}(\Omega) \subset \mathcal{P}(\Omega)$, et de plus, $\mathcal{P}(\Omega)$ contient Ω, est stable par complémentation et par union dénombrable, de façon évidente. Ainsi, $\boxed{\mathcal{P}(\Omega) \text{ est une } \sigma\text{-algèbre sur } \Omega}$.
   - Une σ-algèbre sur Ω contient nécessairement Ω, et par complémentation, aussi $\varnothing$. Rciproquement, le sous-ensemble $\{\varnothing, \Omega\}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifie trivialement les 3 propriétés requises pour être une σ-algèbre.
     Ainsi, $\boxed{\{\varnothing, \Omega\} \text{ est la plus petite } \sigma\text{-algèbre sur } \Omega.}$
2. (a) Soit $\mathcal{A}$ une σ-algèbre.
   (i) $\Omega \in \mathcal{A}$, donc $\boxed{\varnothing = \overline{\Omega} \in \mathcal{A}}$.
   (ii) Soient A et B dans $\mathcal{A}$. On définit alors $A_0 = A$, et pour tout $n \geqslant 1$, $A_n = B$. Les A_i sont tous dans $\mathcal{A}$, donc $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ aussi par stabilité par union dénombrable. Or, cette dernière union n'est autre que $A \cup B$.
   Ainsi, $\boxed{A \cup B \in \mathcal{A}.}$
   Remarquez que l'hypothèse porte sur une union dénombrable, et non une union de deux termes seulement. Il faut donc se ramener de façon précise à cette hypothèse. Cette question avait pour but de justifier correctement que la stabilité par union dénombable entraîne la stabilité par union finie.
   (iii) Soient $A, B \in \mathcal{A}$. On utilise le résultat précédent, et la stabilité par complémntation, montrant que $\overline{A} \cup \overline{B}$ est dans $\mathcal{A}$, et en complémentant une nouvelle fois, d'après les lois de De Morgan, $A \cap B \in \mathcal{A}$.
   (iv) C'est la même chose, en partant de la stabilité par union dénombrable : si les A_n sont tous dans $\mathcal{A}$, alors aussi les $\overline{A_n}$, puis aussi $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}$, et en complémentant une nouvelle fois, et en utilisant les lois de De morgan, $\boxed{\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}}$.
3. - Soit $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ une famille de σ-algèbres. Les $\mathcal{A}_i$ étant des sous-ensembles de $\mathcal{P}(\Omega)$, il en est de même de leur intersection.
   - Comme pour tout $i \in I$, $\Omega \in \mathcal{A}_i$, on a aussi $\Omega \in \bigcap\limits_{i \in I} \mathcal{A}_i$.
   - Soit $A \in \bigcap\limits_{i \in I} \mathcal{A}_i$. Alors pour tout $i \in I$, $A \in \mathcal{A}_i$, et $\mathcal{A}_i$ étant une σ-algèbre, $\overline{A} \in \mathcal{A}_i$. Ainsi, $\overline{A} \in \bigcap\limits_{i \in I} \mathcal{A}_i$.
   - Enfin, si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$, alors pour tout $i \in I$, les A_n sous tous éléments de la σ-algèbre $\mathcal{A}_i$, donc aussi leur union $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$. On en déduit que $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \bigcap\limits_{i \in I} \mathcal{A}_i$.

   Ainsi, $\boxed{\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i \text{ est une } \sigma\text{-algèbre.}}$
4. - D'après la question précédente, $\bigcap_{\mathcal{A} \in A_{\mathcal{C}}} \mathcal{A}$ est une σ-algèbre.
   - De plus, par définition, pour tout $\mathcal{A} \in A_{\mathcal{C}}$, $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, donc $\mathcal{C} \subset \bigcap_{\mathcal{A} \in A_{\mathcal{C}}}$.
   - Montrons que $\bigcap_{\mathcal{A} \in A_{\mathcal{C}}}$ est minimal pour cette propriété, autrement dit que pour toute σ-algèbre $\mathcal{D}$ telle que $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$, on a $\bigcap\limits_{\mathcal{A} \in A_{\mathcal{C}}} \subset \mathcal{D}$. Cela résulte simplement du fait que dans ce cas, $\mathcal{D}$ est un des éléments de $A_{\mathcal{C}}$, donc un des termes de l'intersection.

   Ainsi, $\boxed{\text{il existe une plus petite } \sigma\text{-algèbre } \sigma(\mathcal{C}) \text{ contenant } \mathcal{C}.}$ Cette σ-algèbre est donnée explicitement par la formule :
   $$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{\mathcal{A} \in A_{\mathcal{C}}} \mathcal{A}.$$

5. • Soit $\mathcal{C} = \{A\}$. Une σ-algèbre contenant A contient nécessairement aussi $\overline{A}$, ainsi que Ω et $\varnothing$. Ainsi, $\{\varnothing, A, \overline{A}, \Omega\} \subset \sigma(\mathcal{C})$. Réciproquement, il n'est pas dur de voir que cet ensemble est bien une σ-algèbre. Ainsi, par minimalité de $\sigma(\mathcal{C})$, on obtient :

$$\boxed{\sigma(\mathcal{C}) = \{\varnothing, A, \overline{A}, \Omega\}}.$$

Remarquez que cet ensemble peut être réduit à 2 éléments si $A = \varnothing$ ou $A = \Omega$.

• Soit $\mathcal{C} = \{A_i, i \in I\}$, où $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de Ω, I étant un ensemble fini. Par stabilité par union (dénombrable ou finie d'après ce qui a été vu plus haut), on peut affirmer que pour tout $J \subset I$,

$$\bigcup_{j\in J} A_j \in \sigma(\mathcal{C}).$$

Définissons donc $\mathcal{D} = \{\bigcup_{j\in J} A_j, \quad J \in \mathcal{P}(I)\}$. On a $\mathcal{D} \subset \sigma(\mathcal{C})$. De plus :

∗ $\Omega = \bigcup_{i\in I} A_i$, et $I \in \mathcal{P}(I)$, donc $\Omega \in \mathcal{D}$.

∗ Si $A \in \mathcal{D}$, il existe $J \subset I$ tel que

$$A = \bigcup_{j\in J} A_j.$$

On a alors :

$$\overline{A} = \bigcup_{j\in \overline{J}} A_j,$$

le complémentaire de J étant pris dans I (ceci résultat du fait que les A_i forment une partition de Ω). Donc $\overline{A} \in \mathcal{D}$.

∗ Enfin, étant donnée une famille $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{D}$, il existe une famille $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles de I tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n = \bigcup_{j\in J_n} A_j.$$

On a alors :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{j\in J_n} A_j = \bigcup_{j\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n} A_j \in \mathcal{D}.$$

Ainsi, $\mathcal{D}$ est une σ-algèbre, et par minimalité de $\sigma(\mathcal{C})$, $\boxed{\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{D}.}$

Ce raisonnement reste valable si l'ensemble I des indices est dénombrable, mais pas s'il est infini non dénombrable (car si J n'est pas dénombrable, il n'y a pas de raison que l'union correspondante soit dans $\sigma(\mathcal{C})$). Il faut dans ce cas se restreindre aux sous-ensembles J au plus dénombrables, ce qui impose aussi de garder les sous-ensembles J au moins codénombrables (de complémentaire au plus dénombrable), pour avoir la stabilité par complémentation. Vous pouvez montrer en exercice qu'on obtient bien une σ-algèbre en définissant $\mathcal{D}$ de la sorte.

6. Soit $\mathcal{B}'$ la tribu engendrée par les $[a, +\infty[$.

• Par stabilité par complémentation, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $]a, +\infty[\in \mathcal{B}$. Par ailleurs,

$$[a, +\infty[= \bigcap_{n\in\mathbb{N}*}]a - \frac{1}{n}, +\infty[.$$

Ainsi, par stabilité d'une σ-algèbre par intersection dénombrable, $[a, +\infty[\in \mathcal{B}$. Ainsi, par minimalité de $\mathcal{B}'$, on obtient $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$

• De même, comme $[a, +\infty[\in \mathcal{B}'$, on a aussi $]-\infty, a[\in \mathcal{B}'$, donc

$$]-\infty, a] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}*}]-\infty, a + \frac{1}{n}[\in \mathcal{B}'.$$

Par minimalité de $\mathcal{B}$, on a donc $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$.

• Les deux inclusions amènent $\boxed{\mathcal{B} = \mathcal{B}'}$, donc $\mathcal{B}$ est aussi engendrée par les $[a, +\infty[$.

Partie II – Autour des classes monotones

1. Soit $\mathcal{A}$ une σ-algèbre. Les points (i) et (iii) de la définition d'une classe monotone sont immédiats pour $\mathcal{A}$. Vérifions le point (ii). Soient A et B deux éléments de $\mathcal{A}$. Alors $\overline{A} \in \mathcal{A}$, et par stabilité par intersection :
$$B \backslash A = B \cap \overline{A} \in \mathcal{A}.$$
Ainsi, $\boxed{\mathcal{A} \text{ est bien une classe monotone}}$.
2. Soit $\mathcal{M}$ une classe monotone.
   (a) On prend $A = B = \Omega$ dans (ii), on obtient $\boxed{\varnothing = \Omega \backslash \Omega \in \mathcal{M}}$.
   (b) On prend $B = \Omega$ dans (ii), on obtient : $\boxed{A \in \mathcal{M} \Longrightarrow \overline{A} \in \mathcal{M}}$.
   (c) On utilise les lois de De Morgan, la stabilité par complémentation, et le point (iii) : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{M}$, alors $(\overline{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{M}$, donc $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$ est dans $\mathcal{M}$, puis par complémentation et loi de De Morgan, $\boxed{\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}.}$
3. Même principe que pour les intersections de tribus, je ne développe pas.
4. Encore le même principe que pour les tribus : on défini $M_{\mathcal{C}}$ l'ensemble des classes monotones contenant $\mathcal{C}$. On pose alors
$$\mathcal{M}_0 = \bigcap_{\mathcal{M}\in M_{\mathcal{C}}} \mathcal{M}.$$
Le question précédente permet d'affirmer que c'est bien une classe monotone ; de façon immédiate $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_0$ car l'inclusion est vérifiée pour tous les termes de l'intersection ; enfin, toute autre classe monotone contenant $\mathcal{C}$ est un des termes de l'intersection, donc est plus grosse que cette intersection.
Ainsi, $\boxed{\mathcal{M}_0 \text{ est la plus petite classe monotone contenant } \mathcal{C}}$. On la note $m(\mathcal{C})$
5. D'après ce qui précède, $\sigma(\mathcal{C})$ est une classe monotone, et contient $\mathcal{C}$ par définition. Ainsi, par minimalité de $m(\mathcal{C})$, $\boxed{m(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{C}).}$

Partie III – Lemme de classe monotone

1. Soit $\mathcal{M}$ une classe monotone stable par intersections finies (donc si A et B sont dans $\mathcal{M}$, $A \cap B$ aussi)
   (a) C'est une récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ la propriété suivante : pour toute famille $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ d'éléments de $\mathcal{M}$, $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ et $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ sont dans $\mathcal{M}$.
   La propriété $\mathcal{P}(1)$ est triviale. Nous aurons à utiliser $\mathcal{P}(2)$, qui découle de l'hypothèse en ce qui concerne l'intersection, et qui se ramène au cas de l'intersection par stabilité par complémentation, et par utilisation des lois de De Morgan, en ce qui concerne l'union.
   Soit donc $n \geqslant 2$, et supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Soit $(A_i)_{i\in[\![1,n+1]\!]}$ une famille de $n+1$ éléments de $\mathcal{M}$. D'après l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$, on a :
$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{M} \qquad \text{et} \qquad \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{M}.$$
   En utilisant $\mathcal{P}(2)$ avec chacun de ces 2 ensembles obtenus, et l'ensemble A_{n+1}, il vient donc :
$$\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i = \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1} \in \mathcal{M} \qquad \text{et} \qquad \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1} \in \mathcal{M}.$$
   Cela prouve $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence on en déduit que :
$$\boxed{\mathcal{M} \text{ est stable par union et intersection d'un nombre fini de termes.}}$$
   (b) Le seul point à voir est le point (iii) (stabilité par union dénombrable). Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'éléments de $\mathcal{M}$. On observe que :
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n,$$

où $B_n = \bigcup_{i=0}^{n} A_i$. Or, (B_n) est clairement une suite croissante pour l'inclusion, et d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n \in \mathcal{M}$. D'après le point (iii) de la définition d'une classe monotone, il vient donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{M}$, soit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$.

Ainsi, $\mathcal{M}$ est bien stable par union dénombrable. Il en résulte que $\boxed{\mathcal{M} \text{ est une } \sigma\text{-algèbre}}$.

2. Jusqu'à la fin de cette partie, on suppose que $\mathcal{C}$ est un π-système, c'est à dire un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$ stable par intersections finies.

   (a) • Puisque $A \in m(\mathcal{C})$, on a $\Omega \in \mathcal{D}_A$

   • Soient B et C dans $\mathcal{D}_A$, vérifiant $C \subset B$. On a $A \cap B \in m(\mathcal{C})$ et $A \cap C \in m(\mathcal{C})$. Or,

$$\begin{aligned}(B\backslash C) \cap A = B \cap \overline{C} \cap A &= (B \cap A \cap \overline{C}) \cup (B \cap A \cap \overline{A}) \\ &= B \cap A \cap (\overline{C} \cup \overline{A}) \\ &= (B \cap A) \cap (\overline{C \cap A}) = (B \cap A)\backslash(C \cap A).\end{aligned}$$

   • Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{D}_A$. L'égalité de distributivité :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B_n \cap A) = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \cap A,$$

   et le fait que si (B_n) est croissante pour l'inclusion, alors $(B_n \cap A)$ aussi, permet de montrer, en utilisant (iii) pour la famille $(B_n \cap A)$ d'éléments de $\mathcal{M}$, que $\mathcal{D}_A$ vérifie aussi (iii)

   $\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{D}_A \text{ est une classe monotone.}}$

   (b) Soit $C \in \mathcal{C}$. Par hypothèse, pour tout $D \in \mathcal{C}$, $D \cap C \in \mathcal{C} \subset m(\mathcal{C})$. Ainsi, $D \in \mathcal{D}_C$. On en déduit que $\boxed{\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_C}$.
   Comme par ailleurs, $\mathcal{D}_C$ est une classe monotone, par minimalité de $m(\mathcal{C})$, il vient $m(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D}_C$. Par ailleurs, par définition, $\mathcal{D}_C$ est constituée d'éléments de $m(\mathcal{C})$, donc $\mathcal{D}_C \subset m(\mathcal{C})$.

   Les deux incusions amènent donc l'égalité $\boxed{\mathcal{D}_C = m(\mathcal{C}).}$

   (c) On en déduit notamment que $A \in \mathcal{D}_C$, donc que $A \cap C \in m(\mathcal{C})$, donc que $C \in \mathcal{D}_A$. Ceci étant valable pour tout $C \in \mathcal{C}$, on obtient $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_A$.

   On termine comme dans la question précédente pour obtenir alors $\boxed{\mathcal{D}_A = m(\mathcal{C}).}$

3. L'égalité de la question précédente, valable pour tout $A \in m(\mathcal{C})$, montre que $m(\mathcal{C})$ est stable par intersection finie : étant donnés A et B dans $m(\mathcal{C})$, $B \in \mathcal{D}_A$, donc $A \cap B \in m(\mathcal{C})$. On utilise la question 1 pour conclure que $m(\mathcal{C})$ est une σ-algèbre contenant $\mathcal{C}$. Donc, par minimalité de $\sigma(\mathcal{C})$, $\sigma(\mathcal{C}) \subset m(\mathcal{C})$.

   L'inclusion réciproque étant déjà aquise (question II-5), on a $\boxed{m(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})}$.

Partie IV – Caractérisation des mesures bornées

1. Soit $(A, B) \in \mathcal{A}^2$, tel que $A \subset B$. On a alors $B = A \sqcup (B\backslash A)$, donc, en posant $A_0 = A$, $A_1 = B\backslash A$, et pour tout $n \geqslant 2$, $A_n = \varnothing$, on a :

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B\backslash A) + \sum_{n\geqslant 2} \mu(\varnothing).$$

   Tous les termes de cette somme étant positifs, il vient $\boxed{\mu(B) \leqslant \mu(A)}$.

   Il faut bien être conscient qu'en écrivant cela, on peut être amené à manipuler des infinis.

2. Supposons μ bornée, et M une borne associée. Alors par définition, $\mu(\Omega) \in [0, M]$, donc $\mu(\Omega) < +\infty$.
   Réciproquement, si $\mu(\Omega) < +\infty$, posons $M = \mu(\Omega)$. Comme μ est positive, on a bien pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) \geqslant 0$, et par ailleurs, $A \subset \Omega$ implique $\mu(A) \leqslant \mu(\Omega) = M$. Ainsi, $\mu(A) \in [0, M]$, et μ est bornée.

   Ainsi, $\boxed{\mu \text{ est bornée si et seulement si } \mu(\Omega) \neq +\infty}$.

3. La mesure μ étant bornée, en considérant la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \varnothing$, on constate que la seule valeur possible de $\mu(\varnothing)$ est $\mu(\varnothing) = 0$ (dans tout autre cas, la somme serait infinie)
   Ainsi, en reprenant l'argument de la question 1, la somme $\sum_{n\geqslant 2} \mu(\varnothing)$ étant nulle, il vient :

$$\mu(A) + \mu(B\backslash A) = \mu(B) \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{\mu(B\backslash A) = \mu(B) - \mu(A)}.$$

4. On considère $\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{A} \mid \mu(A) = \nu(A)\}$.
   - L'hypothèse $\mu(\Omega) = \nu(\Omega)$ amène $\Omega \in \mathcal{M}$
   - Si A et B sont dans $\mathcal{M}$ et vérifient $A \subset B$, on a
$$\mu(B\backslash A) = \mu(B) - \mu(A) = \nu(B) - \nu(A) = \nu(B\backslash A).$$
   - Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{M}$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu(A_n) = \nu(A_n)$. De plus, la croissance de la suite implique
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\backslash A_{n-1},$$
en posant par convention $A_{-1} = \varnothing$ (les $A_n\backslash A_{n-1}$ sont les anneaux concentriques qu'on obtient lorsqu'on représente les ensembles A_n en respectant la contrainte d'inclusion). On peut montrer cette égalité par double inclusion :
     * Si $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, on prend k minimal (existe par propriété fondamentale de $\mathbb{N}$) tel que $x \in A_k$. Alors $x \in A_k\backslash A_{k-1}$, donc x est dans l'union de droite.
     * Si x est dans l'union de droite, il est dans un des $A_k\backslash A_{k-1}$, dons dans A_k, donc dans l'union de gauche.
     * Par ailleurs, l'union de droite est disjointe, car si $k < \ell$, on ne peut pas avoir simultanément $x \in A_\ell\backslash A_{\ell-1}$ et $x \in A_k\backslash A_{k-1}$. En effet, l'inégalité $k < \ell$ implique $k \leqslant \ell - 1$, donc la seconde appartenance implique $x \in A_{\ell-1}$ (par croissance de la suite) ce qui contredit la première appartenance.

   On utilise maintenant ce qu'on a démontré dans le point précédent : les $A_n\backslash A_{n-1}$ sont dans $\mathcal{M}$, donc, par σ additivité :
$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mu\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\backslash A_{n-1}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n\backslash A_{n-1}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \nu(A_n\backslash A_{n-1}),$$
   puis, en refaisant la démarche inverse sur ν :
$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$
   On a bien obtenu $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$.

   Ainsi, $\mathcal{M}$ est une classe monotone, contenant

   On considère μ et ν deux mesures bornées sur $\mathcal{A}$, vérifiant de plus $\mu(\Omega) = \nu(\Omega)$ et un π-système $\mathcal{C}$ tel que μ et ν coïncident sur $\mathcal{C}$, c'est-à-dire :
$$\forall C \in \mathcal{C}, \quad \mu(C) = \nu(C).$$
   Montrer que μ et ν coïncident sur $\sigma(\mathcal{C})$.

   On pourra commencer par montrer que $\{A \in \mathcal{A} \mid \mu(A) = \nu(A)\}$ est une classe monotone contenant $\mathcal{C}$. Elle contient en particulier $m(\mathcal{C})$. Comme μ et ν coïncident sur $\mathcal{M}$, elles coïncident aussi sur $m(\mathcal{C})$.

   Par ailleurs, $\mathcal{C}$ étant un π-système, la partie III permet d'affirmer que $m(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$.

   Ainsi, $\boxed{\mu \text{ et } \nu \text{ coïncident sur } \sigma(\mathcal{C})}$.

5. - Si $\mu = \nu$, on a évidemment $F_\mu = F_\nu$.
   - Si $F_\mu = F_\nu$, alors μ et ν coïncident sur tous les intervalles $]-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$. Comme ces intervalles engendrent $\mathcal{B}$, pour montrer que μ et ν coïncident sur $\mathcal{B}$, il suffit, en vertu de la question précédente, de justifier que $\mu(\Omega) = \nu(\Omega)$, et que l'ensemble $\mathcal{C}$ des intervalles $]-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$, est un π-système. Ce dernier point est une évidence puisque si $]-\infty, a]$ et $]-\infty, b]$ sont deux intervalles de $\mathcal{C}$, on a
$$]-\infty, a] \cap]-\infty, b] =]-\infty, \min(a, b)],$$
   qui est encore un intervalle de $\mathcal{C}$.

   De plus,
$$\begin{aligned}
\mu(\Omega) &= \mu\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}}]n-1, n]\right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu\left(]n-1, n]\right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\mu\left(]-\infty, n]\right) - \mu(]-\infty, n-1]\right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\nu\left(]-\infty, n]\right) - \nu(]-\infty, n-1]\right) \\
&= \nu(\Omega)
\end{aligned}$$

Ainsi, μ et ν coïncident sur $\mathcal{B}$.

On a montré que $\boxed{\mu = \nu \text{ si et seulement si } F_\mu = F_\nu.}$

Étant donnée une variable aléatoire X à valeurs réelles, si μ_X est la mesure définie sur un borélien $B \in \mathcal{B}$ par $\mu_X(B) = P(X \in B)$ (on peut montrer qu'il s'agit bien d'une mesure, appelée loi de X), la fonction F_{μ_X} n'est autre que la fonction de répartition de X. On a ainsi montré que la fonction de répartition de X détermine entièrement la loi μ_X de X.