Lycée Louis-Le-Grand, Paris — Pour le 20/10/2023
MP2I – Mathématiques
A. Troesch

DM n° 5 : Combinatoire

Suggestion de travail supplémentaire (à ne pas me rendre) : Le deuxième problème du DS2 de l'année dernière.

Corrigé du problème 1 –

Partie I – Lemme de Kaplansky (cas linéaire)

1. Notons $\mathcal{E}_{\ell,k}(n)$ l'ensemble des parties de $[\![1,n]\!]$ constitués d'éléments séparés les uns des autres par au moins ℓ autres éléments, et soit Φ l'application de $\mathcal{P}_k(n-(k-1)\ell)$ dans $\mathcal{E}_{\ell,k}(n)$ définie sur tout $E=\{x_1<\ldots<x_k\}$ par :
$$\Phi(E)=\{x_i+(i-1)\ell, i\in[\![1,k]\!]\}$$
Alors, on a bien, pour tout $i\in[\![1,k-1]\!]$,
$$x_{i+1}+i\ell-x_i-(i-1)\ell=x_{i+1}-x_i+\ell>\ell,$$
donc les éléments sont séparés d'au moins ℓ autres éléments, et de plus, on obtient bien un sous-ensemble de $[\![1,n]\!]$. Ainsi, Φ est bien à valeurs dans $\mathcal{E}_{\ell,k}(n)$.
Soit Ψ de $\mathcal{E}_{\ell,k}(n)$ dans $\mathcal{P}_k(n-(k-1)\ell)$ définie pour tout $F=\{y_1<\ldots<y_k\}$ de $\mathcal{E}_{\ell,k}(n)$ par :
$$\Psi(F)=\{x_i=y_i-(i-1)\ell, i\in[\![1,k]\!]\}$$
De même que dans la partie I, puisque les éléments y_i sont séparés les uns des autres par au moins ℓ autres points, la famille $(x_i)_{i\in[\![1,k]\!]}$ est croissante, et on vérifie facilement que $x_1\geqslant 1$ et $x_k\leqslant n-(k-1)\ell$. Ainsi, $\Psi(F)$ est bien un sous-ensemble à k éléments de $[\![1,n-(k-1)\ell]\!]$.
Les applications Φ et Ψ sont clairement réciproques l'une de l'autre, donc Φ est une bijection, puis :
$$\boxed{b_{n,k}=|\mathcal{E}_{\ell,k}(n)|=|\mathcal{P}_k(n-(k-1)\ell)|=\binom{n-(k-1)\ell}{k}}.$$

2. Soit $n\geqslant \ell+1$; b_n est donc le nombre de sous-ensembles de $[\![1,n]\!]$ constitués d'éléments séparés d'au moins ℓ autres. Notons $\mathcal{F}_\ell(n)$ l'ensemble de ces sous-ensembles, et $\mathcal{F}'_\ell(n)$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}_\ell(n)$ contitué des ensembles contenant n, et $\mathcal{F}''_\ell$ celui contitué des ensembles ne contenant pas n. Ainsi :
$$|\mathcal{F}_\ell(n)|=|\mathcal{F}'_\ell(n)|+|\mathcal{F}''_\ell(n)|.$$
   - Un élément de $\mathcal{F}'_\ell(n)$ est constitué de n, et d'autres éléments, forcément dans $[\![1,n-\ell-1]\!]$, puisqu'ils sont éloignés de l'élément n de plus de ℓ. Ces autres éléments forment alors un sous-ensemble de $[\![1,n-\ell-1]\!]$ constitué d'éléments séparés par au moins ℓ. Ainsi :
$$|\mathcal{F}'_\ell(n)|=|\mathcal{F}_\ell(n-\ell-1)|=b_{n-\ell-1}.$$
   - De façon évidente, $\mathcal{F}''_\ell(n)=\mathcal{F}_\ell(n-1)$, donc $|\mathcal{F}''_\ell(n)|=|\mathcal{F}_\ell(n-1)|=b_{n-1}$.

   Par conséquent, pour tout $n\geqslant\ell+1$, $\boxed{b_n=b_{n-1}+b_{n-\ell-1}}$.
   Trouvons les valeurs initiales. Soit $i\in[\![0,\ell]\!]$. Tous les éléments de $[\![1,i]\!]$ étant proches de moins de ℓ, un sous-ensemble de $[\![1,i]\!]$ contitué d'éléments séparés d'au moins ℓ autres ne peut pas avoir plus d'un élément : ces ensembles sont donc les singletons (qui conviennent effectivement), au nombre de i, et l'ensemble vide. Ainsi, $\boxed{b_i=i+1}$.

Partie II – Lemme de Kaplansky (cas circulaire)

1. Construisons un élément (E, x) de $B(n, k, \ell)$.
   - On choisit x quelconque sur le cercle, ce qui nous laisse n possibilité.
   - On complète x en un ensemble E en ajoutant $k-1$ points. Puisque x est séparé des autres points par au moins ℓ points, ces $k-1$ autres points ne peuvent pas être choisis parmi les ℓ points à droite de x, ni parmi les ℓ points à gauche de x ; il reste donc le choix parmi $n-2\ell-1$ éléments (éventuellement 0 si cette quantité est négative, mais cela est pris en compte par la nullité du coefficient binomiale dans ce cas). Ces $n-2\ell-1$ éléments sont des éléments consécutifs sur le cercle (n et 1 sont consécutifs sur le cercle, même s'il ne s'agit pas d'entiers consécutifs). Ainsi, il nous faut choisir $k-1$ éléments parmi $n-2\ell-1$ éléments consécutifs, les éléments choisis étant séparés les uns des autres par au moins ℓ autres points. On est ramené au cas linéaire : le nombre de choix possibles est $\binom{n-2\ell-1-(k-2)\ell}{k-1} = \binom{n-k\ell-1}{k-1}$.

   Ces deux choix étant successifs, on en déduit que :

   $$\boxed{|B(n, k, \ell)| = n\binom{n-k\ell-1}{k-1}}.$$

2. Supposons dans un premier temps $k \neq 0$.

   Soit $f : B(n, k, \ell) \longrightarrow A(n, k, \ell)$ l'application consistant à oublier le pointage. Ainsi, pour tout $(E, x) \in B(n, k, \ell)$, $f(E, x) = E$.

   Soit $E \in A(n, k, \ell)$. L'image réciproque de E par f est contitué de tous les couples (E, x) où $x \in E$; il y en a donc autant que de façons de choisir $x \in E$. Ainsi,

   $$|f^{-1}(E)| = |E| = k.$$

   Comme $k \neq 0$, on en déduit que les images réciproques ne sont jamais vides (donc f est surjectives) et ont toutes même cardinal k. Ainsi, d'après le lemme du berger,

   $$|A(n, k, \ell)| = \frac{1}{k}|B(n, k, \ell)| = \frac{n}{k}\binom{n-k\ell-1}{k-1} \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{|A(n, k, \ell)| = \frac{n}{n-k\ell}\binom{n-k\ell}{k}}.$$

   Supposons maintenant que $k = 0$. Alors $A(n, k, \ell) = \{\varnothing\}$, donc $|A(n, k, \ell)| = 1$. Or,

   $$\frac{n}{n-k\ell}\binom{n-k\ell}{k} = \frac{n}{n}\binom{n}{0} = 1,$$

   donc la formule est encore valable dans ce cas.

Partie III – Le problème des ménages de Lucas

1. Le placement des dames consiste en une permutation de $[\![1, n]\!]$, donc $\boxed{\text{il y a } n! \text{ façons de faire}}$.
2. - Un placement des messieurs correspond également à une permutation σ de $[\![1, n]\!]$, où, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\sigma(i)$ est la place occupée par le monsieur n° i.
     Or, pour tout i, le monsieur n° i ne doit pas être assis aux places voisines de celle de sa femme, donc aux places i et $i+1$. Par conséquent, pour tout i, il faut $\sigma(i) \neq i$ et $\sigma(i) \neq i+1$ (modulo n). Ainsi, pour tout $j \in [\![1, 2n]\!]$, $\sigma \notin E_i$. Il n'y a pas d'autre contrainte, donc les placements admissibles correspondent aux permutations de $\overline{E_1} \cap \cdots \cap \overline{E_{2n}}$. Ainsi, $\boxed{\text{le nombre de façons de placer les hommes est } |\overline{E_1} \cap \cdots \cap \overline{E_{2n}}|}$.
   - Montrons d'abord que si parmi les indices $i_1, \dots, i_k$, deux sont consécutifs (modulo n), alors $E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_k} = \varnothing$. Soit $(i, j) \in [\![1, 2n]\!]^2$, tel que $i < j$.
     * Supposons que $j = i+1$. Supposons qu'il existe $\sigma \in E_i \cap E_j$. Alors :
       — Si i est pair, notons $i = 2k$, alors $\sigma(k) = k+1$, et, puisque $\sigma \in E_{2k+1} = E_j$, $\sigma(k+1) = \sigma(k+1)$. Ainsi, $k+1$ admet deux images réciproques distinctes, ce qui contredit son injectivité.
       — Si i est impair, notons $i = 2k-1$, alors $\sigma(k) = k$, et puisque $\sigma \in E_{2k} = E_j$, $\sigma(k) = k+1$. Cela ne se peut pas, car k ne peut pas avoir deux images différentes.

     Ainsi, $\boxed{\text{si deux indices parmi } i_1, \dots, i_k \text{ sont consécutifs (modulo } n\text{), alors } E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_k} = \varnothing.}$

* $*$ Supposons que $i = 1$ et $j = 2n$. Alors $\sigma(1) = 1$, et $\sigma(n) = 1$, d'où encore une contradiction (il faut supposer que $n > 1$).

- Soit alors $(i_1, \dots, i_k) \in [\![1, 2n]\!]$ formé d'indices deux à deux non consécutifs sur le cercle. Alors l'appartenance de σ à $E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_k}$ impose la valeur de $\sigma\left(\left\lfloor \frac{i_j+1}{2} \right\rfloor\right)$ pour tout $j \in [\![1, k]\!]$.
  * $*$ Comme les indices sont deux à deux non consécutifs, les entiers $\left\lfloor \frac{i_j+1}{2} \right\rfloor$ sont deux à deux distincts, donc on ne définit pas deux fois l'image du même élément.
  * $*$ De plus, les différentes valeurs imposées de $\sigma\left(\left\lfloor \frac{i_j+1}{2} \right\rfloor\right)$ sont deux à deux distinctes. En effet, si deux indices i_j et i_ℓ imposent la même valeur i comme image d'un élément de $[\![1, n]\!]$ par σ, cela signifie qu'on considère les deux ensembles E_{2i-1} et E_{2i-2} (si $i > 1$), ou E_1 et E_{2n} (si $i = 1$), qui correspondent à des indices consécutifs sur le cercle. Ce cas de figure n'est donc pas possible ;

  Ainsi, un élément de $E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_k}$ est une permutation quelconque pour laquelle on a déjà k valeurs imposées (et cohérentes). Il nous reste à attribuer une image pour les $n - k$ autres, à prendre parmi les images possibles restantes : il s'agit donc de faire une permutation de $n - k$ éléments. Ainsi,

$$|E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_k}| = (n-k)!$$

- On utilise pour terminer la formule du crible de Poincaré :

$$\begin{aligned}|\overline{E_1} \cap \cdots \cap \overline{E_{2n}}| &= \left|\overline{\bigcup_{i=1}^{2n} E_i}\right| = |\mathfrak{S}_n| - \left|\bigcup_{i=1}^{2n} E_i\right| \\ &= n! - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \sum_{\substack{(i_1 < \ldots < i_k) \in [\![1,2n]\!]^k \\ \text{2 à 2 non consécutifs sur le cercle}}} |E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_k}|\end{aligned}$$

  On s'est limité aux indices 2 à 2 non consécutifs dans la somme, car, d'après 3a, si deux indices sont consécutifs, l'intersection est vide, donc le cardinal est nul.
  Or, si $k > n$, il est bien entendu impossible de choisir des indices 2 à 2 non consécutifs, et par conséquent, la somme interne est vide, donc de valeur nulle. Ainsi, on peut arrêter la sommation à $k = n$:

$$|\overline{E_1} \cap \cdots \cap \overline{E_{2n}}| = n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{\substack{(i_1 < \ldots < i_k) \in [\![1,2n]\!]^k \\ \text{2 à 2 non consécutifs sur le cercle}}} (n-k)!$$

  Ainsi, le terme général de la somme interne ne dépend pas de l'indice de sommation $(i_1, \dots, i_k)$. Pour calculer cette somme, il suffit de connaître le nombre de termes dans la somme, donc le nombre de sous-ensembles $\{i_1 < \ldots < i_k\}$ de $[\![1, 2n]\!]$ constitués d'éléments deux à deux non consécutifs sur le cercle. Cela correspond au cas circulaire du lemme de Kaplansky, pour $\ell = 1$. Ainsi, le nombre de termes dans la somme est :

$$\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}.$$

  On en déduit que le nombre de façons de placer les hommes est :

$$\boxed{|\overline{E_1} \cap \cdots \cap \overline{E_{2n}}| = n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!}$$

3. Tout d'abord, on remarque que dans la formule précédente, le $n!$ correspond au terme $k = 0$ de la somme. Ainsi, le nombre de façon de placer les hommes est

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!$$

   Si la table est numérotée, on a à faire le choix du placement des femmes, puis du placement des hommes, ainsi, le nombre de façons de faire est :

$$n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!$$

Or, à chaque placement correspond n façons de numéroter la table (souvenez-vous que les femmes occupent les places impaires, donc le début de la numérotation se fait toujours par l'une des n femmes). Ainsi, l'oubli de la numérotation est une surjection de l'ensemble des placements avec numérotation vers l'ensemble des placements sans numérotation, le cardinal de chaque image réciproque étant n. D'après le lemme du berger, le nombre de placements sur une table non numérotée est donc obtenu en divisant le résultat précédent par n. Ainsi :

$$\boxed{\mu(n) = (n-1)! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)!}$$

Corrigé du problème 2 – Chemins de Dyck

Partie I – Dénombrement par principe de symétrie

1. Soit, conformément à la question suivante, B_n l'ensemble des chemins de longueur $2n+1$ aboutissant en $(2n+1,1)$, et restant strictement au-dessus de l'axe, sauf en $(0,0)$.

   On a alors une bijection de D_n dans B_n en ajoutant un pas montant au début d'un chemin de Dyck : cela le surélève et empêche un retour à l'axe des abscisses.

   Réciproquement, un chemin de B_n commence nécessairement par un pas montant, sinon on ne peut plus traverser d'axe pour se retrouver au dessus après le dernier pas. Puisque B_n est strictement au-dessus de l'axe, en supprimant le premier pas, on obtient un chemin restant encore au-dessus de l'axe (au sens large cette fois), et aboutissant en $(2n+1,0)$, donc un chemin de Dyck.

   Ces deux constructions étant réciproques l'une de l'autre, elle définissent bien une bijection, et $\boxed{d_n = |B'_n|}$.
2. - Tout chemin aboutissant en $(2n+1,1)$ commence par un pas vers le haut ou un pas vers le bas ; ceux qui commence par un pas vers le haut peuvent recroiser ou non l'axe des abscisses. Ainsi, B_n, B'_n et B''_n énumèrent tous les cas possibles. Leur union est donc A_n
   - Ces ensembles sont clairement disjoints, et non vides (on construit facilement un élément dans chacun d'eux).

   Ainsi, $\{B_n, B'_n, B''_n\}$ est une partition de A_n.
3. Si Γ est un élément de B'_n, il recroise l'axe des abscisses. Par conséquent, la portion entre $(0,0)$ et le premier point de retour à l'axe est bien défini. Donc $\Phi(\Gamma)$ est bien défini.

   De plus, Γ commence par un pas montant, donc $\Phi(\Gamma)$ commence par un pas descendant. Les derniers pas n'étant pas modifiés, il aboutit toujours en $(2n+1,1)$. Ainsi $\Phi(\Gamma)$ est bien à valeurs dans B''_n

   On peut faire la même construction en partant de B''_n en symétrisant la portion définie par le premier retour à l'axe (cette fois-ci, on la fait remonter). On peut remarquer que cette construction est définie sur tout élément de B''_n, puisqu'on commence par un pas vers le bas, et qu'on veut aboutir au-dessus de l'axe : on croise nécessairement l'axe quelque part.

   Ces constructions ne modifiant pas l'abscisse du premier retour sur l'axe, elles sont bien réciproques l'une de l'autre.

   Ainsi, Φ est bijective de $\boxed{B_n \text{ dans } B''_n}$.
4. Or, un chemin de B''_n est la donnée d'un pas descendant, puis d'un chemin quelconque de longueur $2n$ avec $n+1$ pas montants et $n-1$ pas descendants. Ainsi

   $$|B'_n| = |B''_n| = \binom{2n}{n-1}.$$

   On en déduit que

   $$|A_n| = 2\binom{2n}{n-1} + |B_n|,$$

   c'est-à-dire, d'après la question 1 :

   $$\boxed{d_n = \binom{2n+1}{n} - 2\binom{2n}{n-1} = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n}}.$$

   La dernière égalité résulte d'une manipulation élémentaire sur les factorielles.

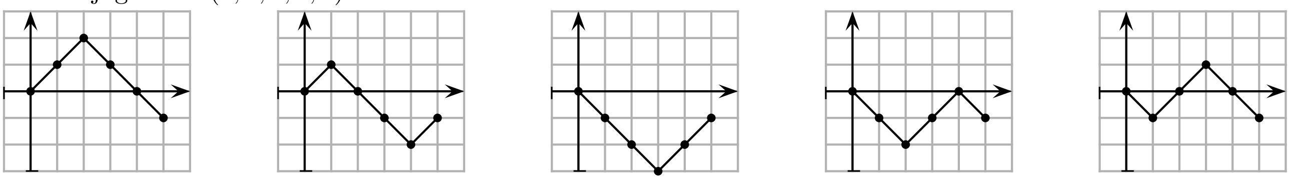
Partie II – Dénombrement par le lemme cyclique

1. Pour simplifier un peu les notations, on définit pour une permutation σ de $[\![1, N]\!]$ et $\Gamma = (a_1, \ldots, a_N)$,

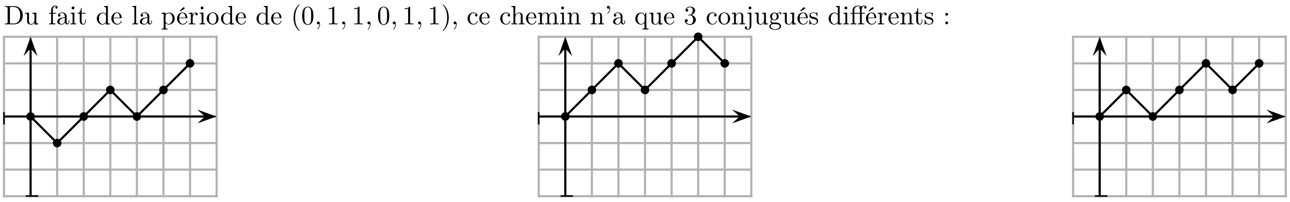
$$\Gamma^\sigma = (a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(N)}).$$

   Ainsi, en notant σ la permutation circulaire directe, du fait que $\sigma^N = \mathrm{id} = \sigma^0$, Γ_2 est un conjugué de Γ_1 si et seulement s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\Gamma_2 = \Gamma_1^{(\sigma^p)}$. On remarque que $(\Gamma^{\sigma^p})^{\sigma^q} = \gamma^{\sigma^{p+q}}$. On remarque que ceci s'étend sans problème aux exposants néghatifs (y compris la caractérisation). Ainsi, la vérification du fait que c'est une relation d'équivalence est alors immédiate :
   - réflexivité : $\Gamma = \Gamma^{(\sigma^0)}$
   - symétrie : si $\Gamma_2 = \Gamma_1^{\sigma^p}$, alors $\Gamma_1 = \Gamma_2^{\sigma^{-p}}$,
   - transitivité : si $\Gamma_2 = \Gamma_1^{\sigma^p}$ et $\Gamma_3 = \Gamma_2^{\sigma^q}$, alors $\Gamma_3 = \Gamma_1^{\sigma^{p+q}}$.

   Ainsi, la relation de conjuguaison est une relation d'équivalence.
2. Les conjugués de $(1, 1, 0, 0, 0)$ sont :



   Du fait de la période de $(0, 1, 1, 0, 1, 1)$, ce chemin n'a que 3 conjugués différents :



3. Soit $\Gamma = (a_1, \ldots, a_N)$ un chemin de longueur N. Montrons que les Γ^{σ^p} sont deux à deux distincts pour $p \in [\![1, N]\!]$ (ou de façon équivalente pour $p \in [\![0, N-1]\!]$). Pour cela, on suppose que ce n'est pas le cas, et on se donne p et q distincts dans $[\![0, N-1]\!]$ tels que $\Gamma^{\sigma^p} = \Gamma^{\sigma^q}$. On étend la définition de (a_n) aux indices dans $\mathbb{Z}$, par N-périodicité. Ainsi, l'égalité $\Gamma^{\sigma^q} = \Gamma^{\sigma^q}$ se réécrit $a_{n+p} = a_{n+q}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, (a_n) est $q-p$-périodique. Elle est aussi N-périodique. L'ensemble des périodes d'une suite indexée sur $\mathbb{Z}$ étant un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, il est de la forme $a\mathbb{Z}$. Ainsi, a divise $q - p$ et N, donc leur pgcd d, qui est aussi période, et vérifie $d \leqslant q - p < N$ et $d \mid N$. On a donc trouvé une période de (a_n) divisant strictement N, il s'agit donc aussi d'une période stricte de $(a_n)_{n \in [\![1,N]\!]}$ (la divisibilité permet de s'assurer qu'on a un nombre entier de périodes dans la séquence). Ceci est une contradiction.

   Ainsi, $\boxed{\text{si } \Gamma \text{ n'admet pas de période, son nombre de conjugués est égal à sa longueur.}}$
4. Si Γ est un chemin de Dyck, $\overline{\Gamma}$ ne peut pas présenter de périodicité. En effet, sinon, on aurait une période T répétée k fois, avec $k > 1$. Si la période T nous amène en position (a, b), alors $\overline{\Gamma}$ obtenue en mettant bout-à-bout des périodes T nous amène en $(ka, kb) = (2n + 1, -1)$. Ceci signifierait que k divise -1, ce qui est impossible.

   Ainsi, d'après la question précédente, $\boxed{\overline{\Gamma} \text{ admet } 2n+1 \text{ conjugués}}$.
5. - Soit Γ' un chemin aboutissant en $(2n + 1, -1)$. On note p l'abscisse du point en lequel Γ' atteint pour la première fois son ordonnée la plus basse. Considérons Γ'' le conjugué d'ordre p de Γ'. Le chemin Γ'' est la concaténation de Γ_2 et Γ_1 où Γ_1 est le chemin des p premiers pas de Γ' et Γ_2 la fin.
     * Puisqu'on a coupé Γ' en son point le plus bas, Γ_2 ne descend pas en dessous de l'axe des abscisses.
     * Le chemin Γ_2 termine en une hauteur de $k - 1$, où $-k$ est l'ordonnée minimale atteinte par le chemin Γ' (en effet, depuis cette ordonnée, on remonte jusqu'à l'ordonnée -1). Puisqu'on coupe au premier point minimal, le chemin Γ_1 ne fait pas descendre de plus de $k - 1$, sauf sur son dernier pas. Ainsi, en recollant Γ_1 à Γ_2 (ce qui le surélève de $k - 1$), cette portion reste au-dessus de l'axe des abscisses, sauf le dernier pas, aboutissant en -1.
     * Le chemin obtenu en enlevant le dernier pas de Γ'' est donc bien un chemin de Dyck Γ, et $\Gamma'' = \overline{\Gamma}$.

   Ainsi, il existe au moins un chemin de Dyck dans la classe d'équivalence de Γ'. Alors le conjugué d'ordre p de Γ

- Réciproquement, soit $\Gamma' = \overline{\Gamma}$, obtenu en prolongeant vers le bas un chemin de Dyck. Considérons-en un conjugué strict, obtenu en coupant Γ' en deux chemins Γ_1 et Γ_2 non vides. Le sous-chemin Γ_2 commence au-dessus de l'axe, et termine strictement en-dessous. Un chemin de Dyck ne peut donc pas commencer par le chemin Γ_2.
  Ainsi, Γ' n'admet pas d'autre conjugué que lui-même obtenu d'un chemin de Dyck.
- On en déduit que dans chaque classe d'équivalence, il existe $\boxed{\text{un et un seul chemin issu d'un chemin de Dyck}}$.

6. L'application qui à un chemin de Dyck Γ associe la classe d'équivalence de $\overline{\Gamma}$ est donc une bijection de D_n dans l'ensemble des classes d'équivalence des chemins aboutissant en $(2n+1,-1)$. Ces chemins sont en nombre $\binom{2n+1}{n}$, et toutes les classes d'équivalence ont $2n+1$ éléments. Il y a donc $\frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n}$ classes d'équivalence.
   On en déduit que :
$$d_n = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n} = \Gamma_n.$$

Partie III – Bijection de Rémy

1. Il suffit de vérifier, à l'aide de l'expression factorielle. Pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\frac{C_n}{C_{n-1}} = \frac{2n-1}{2n+1}\frac{(2n+1)!n!(n-1)!}{n!(n+1)!(2n-1)!} = \frac{(2n-1)(2n)}{n(n+1)} = \frac{2(2n-1)}{n+1}.$$
   On a bien $\boxed{(n+1)C_n = 2(2n-1)C_{n-1}}$. Par ailleurs, on vérifie facilement que $\boxed{C_0 = 1}$
   Une récurrence immédiate montre que cette relation détermine (C_n) (c'est une relation de récurrence d'ordre 1).
2. On s'assure bien que cette construction donne bien un élément de D'_{n-1}.
   On exhibe une réciproque de Ψ. Soit Γ dans F_n. On repère le pas descendant marqué d.
   - S'il est précédé d'un pas montant, on supprime la séquence $1\underline{0}$, et on marque le pas suivant, et on définit $\varepsilon = 0$
   - S'il est précédé d'un pas descendant, on repère la séquence s la plus longue précédent ces deux pas descendents, et telle que les deux points extrémaux de s aient même hauteur, et soient la hauteur minimale de s. Ainsi, la séquence s est précédée d'un pas montant (sinon elle pourrait être prolongée). On a donc une séquence $1s0\underline{0}$, où les extrémités de s ont même hauteur et les points intermédiaires ne descendent pas en dessous. On remplace cette séquence par $s0$, et on marque le premier pas de s (si s est vide, on marque le seul pas de cette séquence, à savoir 0). On pose $\varepsilon = 1$.

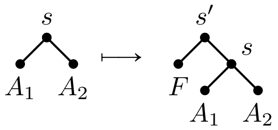
   Il apparaît assez facilement que cette construction est réciproque de Ψ, donc $\boxed{\Psi \text{ est bijective}}$.
3. Ainsi, $|S_{n-1} \times \{0,1\}| = |F_n|$. Or :
   - L'ajout d'un dernier pas descendant (et dans l'autre sens, la suppression du dernier pas, nécessairement déscendant) donne une bijection de D_n dans D'_n. Ainsi, $|D'_n| = |D_n| = d_n$.
   - un élément de S_{n-1} est déterminé par le choix d'un chemin de D'_{n-1}, et d'un pas quelconque marqué parmi les $2n-1$ pas possibles. D'après le lemme du berger et la question II
$$|S_{n-1}| = (2n-1)d_{n-1}.$$
   - De même, un élément de F_n est déterminé par le choix d'un chemin de D'_n et d'un des $n+1$ pas descendant, d'où :
$$|F_n| = nd_n.$$

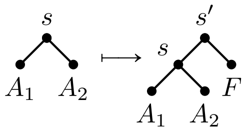
   On en déduit que $\boxed{2(2n-1)d_{n-1} = nd_n.}$ Comme de plus, $d_0 = 1$, on déduit de III-1 que $\boxed{d_n = C_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Question subsidiaire

Partant d'un arbre binaire complet, faire un parcours en profondeur, en notant 1 pour chaque noeud qu'on rencontre pour la première fois, et 0 pour chaque feuille. On ne recompte pas le 2e passage sur un noeud. Vérifiez que ceci définit une bijection de l'ensemble des arbres binaires complets à n noeuds dans D'_n. L'ensemble S_n correspond via cette

bijection aux arbres avec un sommet marqué (feuille ou noeud) et F_n aux arbres avec une feuille marquée. Tiens, la notation s'éclaire.
Vérifiez que la bijection Ψ consiste alors à dédoubler le sommet marqué s de la façon suivante :

- Si $\varepsilon = 0$: 

- Si $\varepsilon = 1$: 

Ainsi on dédouble le noeud, en un noeud s' dont l'un des fils sera s avec toute sa descendance, et l'autre sera une feuille ajoutée. La valeur de ε détermine la latéralisation de cette construction. Remarquez que si s est une feuille, cette construction a un sens aussi : dans ce cas, la feuille s est remplacée par un noeud s' auquel sont attachées deux feuilles, l'une des 2 étant marquée, suivant la valeur de ε.
C'est sous cette forme qu'a été décrite la bijection de Rémy. C'est évidemment un peu moins tiré par les cheveux que sur les chemins de Dyck.