

DM n° 6 : Réels

Corrigé du problème 1 – Un théorème de Lagrange sur les fractions continues périodiques

Partie I – Développement en fraction continue d'un rationnel

1. (a) Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ la propriété :

$$\forall (a_0, \dots, a_n) \in Z_n, \quad \forall x \in \mathbb{Q}_+, \quad [a_0, \dots, a_n](x) \in \mathbb{Q}.$$

- Initialisation. Soit $(a_0) \in Z_0$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{Q}_+$:

$$[a_0](x) = a_0 + x \in \mathbb{Q},$$

en tant que somme de deux rationnels ($a_0 \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$).

- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vérifié. On considère $(a_0, \dots, a_{n+1}) \in Z_{n+1}$. Ainsi,

$$[a_0, \dots, a_{n+1}](x) = [a_0, \dots, a_n] \left(\frac{1}{a_{n+1} + x} \right).$$

Or, $(a_0, \dots, a_n) \in Z_n$ et $\frac{1}{a_{n+1} + x} \in \mathbb{Q}_*$ (remarquez que l'hypothèse $x \geq 0$ et $a_{n+1} \geq 1$ nous assure de la bonne définition), donc, par hypothèse de récurrence,

$$[a_0, \dots, a_n] \left(\frac{1}{a_{n+1} + x} \right) \in \mathbb{Q} \quad \text{soit:} \quad [a_0, \dots, a_{n+1}](x) \in \mathbb{Q}.$$

- D'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall (a_0, \dots, a_n) \in Z_n, \quad \forall x \in \mathbb{Q}_+, \quad [a_0, \dots, a_n](x) \in \mathbb{Q}_+.$$

- (b) Une fraction continue finie s'écrit sous la forme $[a_0, \dots, a_n] = [a_0, \dots, a_n](0)$, avec $(a_0, \dots, a_n) \in Y_n \subset Z_n$ et $0 \in \mathbb{Q}_+$. Ainsi, d'après la question précédente, toute fraction continue finie est un rationnel.

2. Soit $x \in \mathbb{Q}$, et $p, q, n, (r_k)$ et (a_k) comme dans l'énoncé.

- (a) On montre, par récurrence sur $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $x = [a_0, \dots, a_k] \left(\frac{r_k}{r_{k-1}} \right)$.

- Lorsque $k = 0$, par définition de r_0 et a_0 ,

$$p = a_0 q + r_0, \quad \text{donc:} \quad x = \frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_0}{q} = a_0 + \frac{r_0}{r_{-1}} = [a_0] \left(\frac{r_0}{r_{-1}} \right).$$

- Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, et supposons que

$$x = [a_0, \dots, a_k] \left(\frac{r_k}{r_{k-1}} \right).$$

Alors,

$$r_{k-1} = r_k a_{k+1} + r_{k+1} \quad \text{donc:} \quad \frac{r_{k-1}}{r_k} = a_{k+1} + \frac{r_{k+1}}{r_k}.$$

par conséquent,

$$x = [a_0, \dots, a_k] \left(\frac{1}{a_{k+1} + \frac{r_{k+1}}{r_k}} \right) = [a_0, \dots, a_{k+1}] \left(\frac{r_{k+1}}{r_k} \right),$$

d'après la formule de récurrence définissant les fractions continues.

- D'après le principe de récurrence, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$x = [a_0, \dots, a_k] \left(\frac{r_k}{r_{k-1}} \right).$$

(b) En particulier, pour $k = n$, on obtient :

$$x = [a_0, \dots, a_n] \left(\frac{r_n}{r_{n-1}} \right) = [a_0, \dots, a_n](0) = [a_0, \dots, a_n].$$

Par ailleurs, comme $p \wedge q = 1$, $r_{n-1} = p \wedge q = 1$. Les restes formant une suite strictement décroissante à partir du rang -1 , si $n \geq 1$, $r_{n-2} > 1$, et le quotient a_n de r_{n-2} par a_{n-1} vérifie $a_n \geq 2$. Ainsi, $[a_1, \dots, a_n] \in Y_n$. C'est aussi vrai si $n = 0$, puisqu'il n'y a pas de condition de minoration à donner dans ce cas.

Ainsi, x est bien développable en fraction continue finie, et

$$\boxed{x = [a_1, \dots, a_n]}$$

Partie II – Réduction et convergence des fractions continues

1. (a) Pour tout $(a_0, \dots, a_n) \in Z_n$, on a :

$$[a_0, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{[a_1, \dots, a_n]}.$$

Cela se « voit » sur la forme développée de la fraction continue, mais peut aussi plus rigoureusement se démontrer par récurrence. On montre plus généralement que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$[a_0, \dots, a_n](x) = a_0 + \frac{1}{[a_1, \dots, a_n](x)}.$$

- Si $n = 1$, $[a_0, a_1](x) = [a_0] \left(\frac{1}{a_1+x} \right) = a_0 + \frac{1}{a_1+x} = a_0 + \frac{1}{[a_1](x)}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $(a_0, \dots, a_n)$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$[a_0, \dots, a_n](x) = a_0 + \frac{1}{[a_1, \dots, a_n](x)}.$$

Alors en particulier,

$$[a_0, \dots, a_n] \left(\frac{1}{a_{n+1}+x} \right) = a_0 + \frac{1}{[a_1, \dots, a_n] \left(\frac{1}{a_{n+1}+x} \right)},$$

c'est-à-dire

$$[a_0, \dots, a_{n+1}](x) = a_0 + \frac{1}{[a_1, \dots, a_{n+1}](x)},$$

- Ainsi, le principe de récurrence nous assure que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{[a_0, \dots, a_n](x) = a_0 + \frac{1}{[a_1, \dots, a_n](x)}}.$$

(b) On a alors

$$\begin{aligned} [a_0, \dots, a_n] &= a_0 + \frac{q(a_1, \dots, a_n)}{p(a_1, \dots, a_n)} \\ &= \frac{a_0 p(a_1, \dots, a_n) + q(a_1, \dots, a_n)}{p(a_1, \dots, a_n)}. \end{aligned}$$

Or, tout diviseur d commun de $a_0 p(a_1, \dots, a_n) + q(a_1, \dots, a_n)$ et de $p(a_1, \dots, a_n)$ divise aussi $a_0 p(a_1, \dots, a_n)$, et donc, par différence, il divise aussi $q(a_1, \dots, a_n)$. Il s'agit donc d'un diviseur commun de $p(a_1, \dots, a_n)$ et de $q(a_1, \dots, a_n)$, qui ne peut être que 1 ou -1 .

On en déduit que $\frac{a_0 p(a_1, \dots, a_n) + q(a_1, \dots, a_n)}{p(a_1, \dots, a_n)}$ est une représentation irréductible de $[a_0, \dots, a_n]$. De plus, on s'assure facilement que $[a_1, \dots, a_n]$ est positif (par récurrence sur n , en utilisant la question 1(a), qui nous ramène à la positivité de $[a_2, \dots, a_n]$ qu'on obtient par hypothèse de récurrence; on obtient même $[a_1, \dots, a_n] \geq a_1$; attention ceci est faux si on commence à a_0). Par conséquent, il s'agit de l'unique représentation irréductible à dénominateur positif. Ainsi :

$$\boxed{p(a_0, \dots, a_n) = a_0 p(a_1, \dots, a_n) + q(a_1, \dots, a_n)} \quad \text{et} \quad \boxed{q(a_0, \dots, a_n) = p(a_1, \dots, a_n)}.$$

(c) On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $(a_0, \dots, a_n) \in Z_{n+1}$,

$$\frac{p(a_0, \dots, a_{n+1})}{q(a_0, \dots, a_{n+1})} - \frac{p(a_0, \dots, a_n)}{q(a_0, \dots, a_n)} = \frac{(-1)^{n+1}}{q(a_0, \dots, a_n)q(a_0, \dots, a_{n+1})}.$$

- Pour $n = 0$, $[a_0] = a_0 = \frac{a_0}{1}$, donc $p(a_0) = a_0$ et $q(a_0) = 1$.
De plus, $[a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$. Or,

$$a_0 a_1 + 1 \wedge a_1 = 1 \wedge a_1 = a_1,$$

donc $p(a_0, a_1) = 1$ et $q(a_0, a_1) = a_1$. Par conséquent,

$$\frac{p(a_0, a_1)}{q(a_0, a_1)} - \frac{p(a_0)}{q(a_0)} = \frac{1}{a_0} = \frac{(-1)^0}{q(a_0)q(a_0, a_1)}.$$

- Supposons la propriété acquise pour les familles $(b_0, \dots, b_{n+1}) \in Z_{n+1}$, et soit $(a_0, \dots, a_{n+2}) \in Z_{n+2}$.
Ainsi, d'après la question 1(b),

$$\begin{aligned} \frac{p(a_0, \dots, a_{n+2})}{q(a_0, \dots, a_{n+2})} - \frac{p(a_0, \dots, a_{n+1})}{q(a_0, \dots, a_{n+1})} &= \frac{a_0 p(a_1, \dots, a_{n+2}) + q(a_1, \dots, a_{n+2})}{p(a_1, \dots, a_{n+2})} - \frac{a_0 p(a_1, \dots, a_{n+1}) + q(a_1, \dots, a_{n+1})}{p(a_1, \dots, a_{n+1})} \\ &= \frac{q(a_1, \dots, a_{n+2})}{p(a_1, \dots, a_{n+2})} - \frac{q(a_1, \dots, a_{n+1})}{p(a_1, \dots, a_{n+1})} \end{aligned}$$

Or, pour tous réels non nuls x et y ,

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y - x}{xy},$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{p(a_0, \dots, a_{n+2})}{q(a_0, \dots, a_{n+2})} - \frac{p(a_0, \dots, a_{n+1})}{q(a_0, \dots, a_{n+1})} &= -\frac{q(a_1, \dots, a_{n+1})q(a_1, \dots, a_{n+2})}{p(a_1, \dots, a_{n+1})p(a_1, \dots, a_{n+2})} \left(\frac{p(a_1, \dots, a_{n+2})}{q(a_1, \dots, a_{n+2})} - \frac{p(a_1, \dots, a_{n+1})}{q(a_1, \dots, a_{n+1})} \right) \\ &= -\frac{q(a_1, \dots, a_{n+1})q(a_1, \dots, a_{n+2})}{p(a_1, \dots, a_{n+1})p(a_1, \dots, a_{n+2})} \frac{(-1)^{n+1}}{q(a_1, \dots, a_{n+1})q(a_1, \dots, a_{n+2})}, \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse de récurrence. On termine à l'aide de la relation trouvée en 1(b) :

$$\begin{aligned} \frac{p(a_0, \dots, a_{n+2})}{q(a_0, \dots, a_{n+2})} - \frac{p(a_0, \dots, a_{n+1})}{q(a_0, \dots, a_{n+1})} &= \frac{(-1)^{n+2}}{p(a_1, \dots, a_{n+1})q(a_1, \dots, a_{n+2})} \\ &= \frac{(-1)^{n+2}}{q(a_0, \dots, a_{n+1})q(a_0, \dots, a_{n+2})} \end{aligned}$$

- Ainsi, d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $(a_0, \dots, a_{n+1}) \in Z_{n+1}$,

$$\boxed{\frac{p(a_0, \dots, a_{n+1})}{q(a_0, \dots, a_{n+1})} - \frac{p(a_0, \dots, a_n)}{q(a_0, \dots, a_n)} = \frac{(-1)^{n+1}}{q(a_0, \dots, a_n)q(a_0, \dots, a_{n+1})}}.$$

2. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in Z_\infty$.

- (a) Puisque $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ et $[1, a_1, \dots, a_n]$ diffèrent de l'entier $a_0 - 1$, le dénominateur de leur représentants irréductibles est le même. Donc

$$\boxed{q(a_0, \dots, a_n) = q(1, a_1, \dots, a_n)}.$$

- (b) Encore une fois, il s'agit d'une récurrence sur n , pour montrer que pour tout $n \geq 1$, et $(a_0, \dots, a_{n+1}) \in Z_{n+1}$ vérifiant de plus $a_0 > 0$,

$$p(a_0, a_1, \dots, a_n) < p(a_0, \dots, a_{n+1}) \quad \text{et} \quad q(a_0, \dots, a_n) < q(a_0, \dots, a_{n+1}),$$

(sauf au rang $n = 0$ pour cette dernière inégalité, pouvant alors être large).

- Pour $n = 0$, on obtient :

$$p(a_0) = a_0 < a_0 a_1 + 1 = p(a_0, a_1)$$

(car $a_1 \geq 1$) et

$$q(a_0) = 1 \leq a_1 = q(a_0, a_1)$$

Pour l'initialisation, on n'a que l'inégalité large ce qui est en accord avec l'énoncé.

- Supposons la propriété vraie au rang n , on a alors d'après 1(b) :

$$\begin{aligned} p(a_0, a_1, \dots, a_{n+1}) &= a_0 p(a_1, \dots, a_{n+1}) + q(a_1, \dots, a_{n+1}) \\ &< a_0 p(a_1, \dots, a_{n+2}) + q(a_1, \dots, a_{n+2}), \end{aligned}$$

les inégalités sur chacun des deux termes étant assurées par l'hypothèse de récurrence, la première étant stricte. Ainsi, encore d'après 1(b),

$$p(a_0, a_1, \dots, a_{n+1}) < p(a_0, \dots, a_{n+2}).$$

De même,

$$q(a_0, \dots, a_{n+1}) = p(a_1, \dots, a_{n+1}) < p(a_1, \dots, a_{n+2}) = q(a_0, \dots, a_{n+2}),$$

l'inégalité étant cette fois stricte et sera donc stricte à toutes les étapes de la récurrence).

- Ainsi, d'après le principe de récurrence,

$$\boxed{(p(a_0, \dots, a_n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (q(a_0, \dots, a_n))_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ sont strictement croissantes.}}$$

- (c) Cette fois, on n'a plus l'hypothèse $a_0 > 0$, mais les deux questions précédentes nous assurent tout de même la stricte croissance de $(q(a_0, \dots, a_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$. Comme il s'agit d'une suite d'entiers, elle diverge nécessairement vers $+\infty$. On déduit alors de la question 1(c) que :

- $\frac{p(a_0, \dots, a_{n+1})}{q(a_0, \dots, a_{n+1})} - \frac{p(a_0, \dots, a_n)}{q(a_0, \dots, a_n)} \rightarrow 0$,
donc en particulier $[a_0, \dots, a_{2n+1}] - [a_0, \dots, a_{2n}] \rightarrow 0$
- $([a_0, \dots, a_{2n}])$ est croissante. En effet :

$$[a_0, \dots, a_{2n+2}] - [a_0, \dots, a_{2n}] = -\frac{1}{q(a_0, \dots, a_{2n+1})q(a_0, \dots, a_{2n+2})} + \frac{1}{q(a_0, \dots, a_{2n})q(a_0, \dots, a_{2n+1})} > 0,$$

par croissance stricte de q .

- De la même façon, $([a_0, \dots, a_{2n+1}])$ est décroissante.

Le résultat admis dans le préambule nous assure alors que $([a_0, \dots, a_n])$ converge.

Ainsi $\boxed{\text{la fraction continue } [a_0, \dots, a_n, \dots] \text{ converge.}}$

3. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in Z_\infty$, et $x = [a_0, \dots, a_n, \dots]$. La représentation irréductible de $[a_0, \dots, a_n]$ est

$$[a_0, \dots, a_n] = \frac{p(a_0, \dots, a_n)}{q(a_0, \dots, a_n)}.$$

Soit alors $\frac{c}{d}$ un rationnel tel que $|d| \leq q(a_0, \dots, a_n)$. On suppose que $\frac{c}{d} \neq [a_0, \dots, a_n]$. On a donc

$$\begin{aligned} \left| [a_0, \dots, a_n] - \frac{c}{d} \right| &= \left| \frac{p(a_0, \dots, a_n)}{q(a_0, \dots, a_n)} - \frac{c}{d} \right| \\ &= \frac{|dp(a_0, \dots, a_n) - cq(a_0, \dots, a_n)|}{|d|q(a_0, \dots, a_n)} \\ &\geq \frac{1}{|d|q(a_0, \dots, a_n)}. \end{aligned}$$

En effet puisque $cd \neq [a_0, \dots, a_n] \neq 0$, $dp(a_0, \dots, a_n) - cq(a_0, \dots, a_n)$ ne peut pas être nul, et comme il s'agit d'un entier, sa valeur absolue est au moins égale à 1. Ainsi, puisque $|d| \leq q(a_0, \dots, a_n) < q(a_0, \dots, a_{n+1})$,

$$\begin{aligned} \left| [a_0, \dots, a_n] - \frac{c}{d} \right| &> \frac{1}{q(a_0, \dots, a_n)q(a_0, \dots, a_{n+1})} \\ &= |[a_0, \dots, a_n] - [a_0, \dots, a_{n+1}]| \end{aligned}$$

De même, en mettant sur le même dénominateur, on trouve directement

$$\begin{aligned} \left| [a_0, \dots, a_{n+1}] - \frac{c}{d} \right| &\geq \frac{1}{q(a_0, \dots, a_{n+1})q(a_0, \dots, a_n)} \\ &= |[a_0, \dots, a_n] - [a_0, \dots, a_{n+1}]| \\ &\geq |[a_0, \dots, a_n] - [a_0, \dots, a_{n+1}]|. \end{aligned}$$

Posons $\varepsilon_n = \frac{1}{q(a_0, \dots, a_{n+1})q(a_0, \dots, a_n)}$, et $x_n = [a_0, \dots, a_n]$ et de façon similaire pour $n+1$. Supposons pour se fixer les idées $x_n < x_{n+1}$ (l'autre cas étant similaire). Puisque $\varepsilon_n \geq |x_{n+1} - x_n|$,

$$]x_n, x_{n+1}[\subset B(x_n, \varepsilon_n) \cup B(x_{n+1}, \varepsilon_n).$$

Ainsi,

$$B(x_n, \varepsilon_n) \cup B(x_{n+1}, \varepsilon_n) =]x_n - \varepsilon_n, x_{n+1} + \varepsilon_n[.$$

par conséquent, puisque $x_n < x < x_{n+1}$,

$$x_n - \varepsilon_n < x - \varepsilon_n < x + \varepsilon_n < x_{n+1} + \varepsilon_n$$

donc $B(x, \varepsilon_n) \subset B(x_n, \varepsilon_n) \cup B(x_{n+1}, \varepsilon_n)$. Puisque $\frac{c}{d} \notin B(x_n, \varepsilon_n) \cup B(x_{n+1}, \varepsilon_n)$, on en déduit que $\frac{c}{d} \notin B(x, \varepsilon_n)$, et donc

$$\left| \frac{c}{d} - x \right| \geq \varepsilon_n \geq |x_n - x_{n+1}| > |x_n - x|,$$

la dernière inégalité provenant de l'encadrement $x_n < x < x_{n+1}$.

Ainsi, $\boxed{[a_0, \dots, a_n]}$ est une meilleure approximation de x .

Partie III – Existence et unicité du développement en fraction continue

1. Variations.

Pour tout n la fonction F_{n+1} est la fonction qui à x associe $F_n \left(\frac{1}{a_{n+1} + x} \right)$. Or, $x \mapsto \frac{1}{a_{n+1} + x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, donc F_{n+1} est obtenue en composant F_n par une fonction strictement décroissante. On en déduit que si F_n est strictement monotone, F_{n+1} aussi, de sens de variation opposé. Or $F_0 = x \mapsto a_0 + x$ est strictement croissante. Ainsi, les F_n sont toutes strictement monotones, de sens de variation alternant : toutes les fonctions F_{2n} sont de même sens de variation que F_0 et F_{2n+1} de sens de variation opposé.

Ainsi $\boxed{\text{si } n \text{ est paire, } F_n \text{ est strictement croissante, et si } n \text{ est impaire, } F_n \text{ est strictement décroissante}}.$

2. Existence.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Soit $a_0 = [x]$ et $b_0 = \{x\}$ (partie décimale de x), et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = \left\lfloor \frac{1}{b_n} \right\rfloor \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \left\{ \frac{1}{b_n} \right\}$$

(a) On montre par récurrence la propriété suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n$ sont bien définis, et $a = [a_0, \dots, a_n](b_n)$.

- Pour $n = 0$, l'énoncé définit a_0 et b_0 , et de plus

$$x = [x] + \{x\} = a_0 + b_0 = [a_0](b_0).$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vérifiée au rang n . Alors, pour commencer, $b_n \neq 0$, sinon $x = [a_0, \dots, a_n]$ serait rationnel d'après la question I-1(a). Donc a_{n+1} et b_{n+1} sont bien définis. De plus,

$$\begin{aligned} x &= [a_0, \dots, a_n](b_n) \\ &= [a_0, \dots, a_n] \left(\frac{1}{1/b_n} \right) \\ &= [a_0, \dots, a_n] \left(\frac{1}{a_{n+1} + b_{n+1}} \right) \\ &= [a_0, \dots, a_{n+1}](b_{n+1}). \end{aligned}$$

- Cela prouve bien, d'après le principe de récurrence, que les a_n et b_n sont bien définis, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{x = [a_0, \dots, a_n](b_n)}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a donc, par croissance de F_{2n} et positivité de b_{2n} :

$$[a_0, \dots, a_{2n}] = [a_0, \dots, a_{2n}](0) \leq [a_0, \dots, a_{2n}](b_{2n}) = x.$$

De façon similaire,

$$\begin{aligned} [a_0, \dots, a_{2n+1}] &= [a_0, \dots, a_{2n}] \left(\frac{1}{a_{2n+1}} \right) \\ &\geq [a_0, \dots, a_{2n}] (b_{2n}) \quad (\text{car } F_{2n} \text{ est croissante et } a_{2n+1} \leq \frac{1}{b_n}). \\ &= x. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{[a_0, \dots, a_{2n}] \leq x \leq [a_0, \dots, a_{2n+1}]}.$$

- (c) Or, on sait d'après la partie II, que $([a_0, \dots, a_n])$ converge vers $[a_0, \dots, a_n, \dots]$, donc aussi $([a_0, \dots, a_{2n}])$ et $([a_0, \dots, a_{2n+1}])$. Ainsi, en passant à la limite dans l'encadrement précédent (ce n'est pas vraiment le théorème d'encadrement ici, puisqu'il n'y a pas d'existence de limite à établir pour le terme encadré), on obtient :

$$\boxed{x = [a_0, \dots, a, \dots]}.$$

3. Unicité.

Soit (a_k) et (b_k) deux éléments appartenant chacun à l'un des Y_n ou à Z_∞ . Soit k_0 le rang de la première différence entre les deux suites (a_n) et (b_n) .

- (a) On suppose dans un premier temps k_0 impair. On a alors :

$$[a_{k_0}, \dots, a_n, \dots] = a_{k_0} + \frac{1}{[a_{k_0+1}, \dots]} > a_{k_0}.$$

De la même manière

$$[a_{k_0+1}, \dots] > a_{k_0+1} \geq 1,$$

donc

$$[a_{k_0}, \dots, a_n, \dots] = a_{k_0} + \frac{1}{[a_{k_0+1}, \dots]} < a_{k_0} + 1 \leq b_{k_0}.$$

Ainsi,

$$a_{k_0} < [a_{k_0}, \dots, a_n, \dots] < b_{k_0}.$$

On déduit de la croissance stricte de $F_{k_0-1} : x \mapsto [a_0, \dots, a_{k_0-1}](x)$, que

$$F_{k_0-1} \left(\frac{1}{a_{k_0}} \right) > F_{k_0-1} \left(\frac{1}{[a_{k_0}, \dots, a_n, \dots]} \right) > F_{k_0} \left(\frac{1}{b_{k_0}} \right),$$

c'est-à-dire, puisque F_{k_0-1} correspond aussi à $x \mapsto [b_0, \dots, b_{k_0-1}](x)$ (par définition de k_0),

$$[a_0, \dots, a_{k_0}] > [(a_n)] > [b_0, \dots, b_{k_0}],$$

La première inégalité est aussi vraie pour (b_n) , donc

$$[b_0, \dots, b_{k_0}] > [(b_n)].$$

Ainsi, on a une inégalité stricte $\boxed{[(a_n)] > [(b_n)]}$, nous assurant que ces deux quantités ne sont pas égales.

Si k_0 est pair, le raisonnement est le même en inversant tous les sens de variation, à condition toutefois que $k_0 \neq 0$. Si $k_0 = 0$, on obtient directement, du fait que comme ci-dessus $[a_1, \dots, a_n, \dots] > 1$,

$$a_0 < [a_0, \dots, a_n, \dots] < a_0 + 1 \leq b_0 < [b_0, \dots, b_n, \dots],$$

ce qui permet aussi de conclure.

- (b) Si a_{k_0} n'est pas défini alors que b_{k_0} l'est, et que les précédents sont égaux, alors certaines inégalités précédentes restent vraies, et on peut écrire dans le cas k_0 impair (s'adaptant facilement dans le cas k_0 pair) :

$$[(a_k)] = [a_0, \dots, a_{k_0-1}] = F_{k_0-1}(0) > F_{k_0-1} \left(\frac{1}{b_{k_0}} \right) = [b_0, \dots, b_{k_0}] > [(b_n)].$$

Ainsi, on aboutit à la même conclusion $[(a_n)] \neq [(b_n)]$

On peut bien sûr dans les deux questions précédentes intervertir le rôle de (a_n) et (b_n) . Ainsi, lorsque $(a_n) \neq (b_n)$ (ces suites étant finies ou infinies), les développements associés définissent des réels distincts.

Cela nous assure bien $\boxed{\text{l'unicité du développement en fraction continue d'un réel } x.}$

Partie IV – Théorème de Lagrange sur les fractions continues périodiques

- Supposons x quadratique, et soit $P = aX^2 + bX + c$ un polynôme dont il est racine, a , b et c étant entiers. Son discriminant Δ est aussi entier, et

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{\Delta}.$$

De plus, Δ n'est pas un carré parfait, sinon $\sqrt{\Delta}$ serait entier, et x serait rationnel. Ainsi, il existe bien deux rationnels $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = \pm \frac{1}{2a} \neq 0$, ainsi qu'un entier non carré parfait Δ tels que

$$\boxed{x = \alpha + \beta\sqrt{\Delta}}.$$

- Réciproquement, soit $x = a + b\sqrt{\Delta}$, où $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{Q}^*$ et Δ non carré parfait.
 - * Tout d'abord, x n'est pas rationnel, sinon on pourrait écrire

$$\sqrt{\Delta} = \frac{x - a}{b} \in \mathbb{Q},$$

ce qui contredirait le résultat admis dans le préambule du problème (et démontré en exercice).

- * Par ailleurs,

$$(x - a)^2 = b^2\Delta,$$

donc x est racine d'un polynôme du second degré à coefficients rationnels. Quitte à multiplier ce polynôme par les dénominateurs des coefficients rationnels, il est aussi racine d'un polynôme à coefficients entiers.

Ainsi

Ainsi $\boxed{x \text{ est bien quadratique}}.$

- Ceci est un exemple. On applique la méthode de la partie III :

$$a_0 = \lfloor \sqrt{2} \rfloor - 1, \quad b_0 = \{\sqrt{2}\} = \sqrt{2} - 1;$$

À l'étape suivante, on a donc :

$$a_1 = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \right\rfloor = \lfloor \sqrt{2} + 1 \rfloor = 2$$

et

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} - 2 = \sqrt{2} - 1.$$

Comme on a trouvé la même partie décimale qu'à l'étape précédente, la suite des calculs se déroulera de la même façon, et par conséquent, pour tout $n \geq 1$, $a_n = 2$. Par conséquent,

$$\boxed{\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}}.$$

On observe bien que le développement obtenu est ultimement périodique (de période 1), conformément au résultat qu'on cherche à établir dans cette partie. Nous n'aurons pas à nous servir de ce développement, il était juste là en guise d'exemple.

- Pour commencer, remarquons que puisque le développement de x est périodique, il est infini, donc x est irrationnel.
 - On utilise le lemme suivant : on montre par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$ la propriété suivante : pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$ il existe des entiers a, b, c et d tels que $c > 0$, $d \geq 0$, $ad - bc \neq 0$, et

$$[a_0, \dots, a_m] \left(\frac{1}{y} \right) = \frac{ay + b}{cy + d}.$$

- * Soit $m = 0$. Alors

$$[a_0, \dots, a_m] \left(\frac{1}{y} \right) = a_0 + \frac{1}{y} = \frac{a_0 y + 1}{1 \cdot y + 0}.$$

De plus, $a_0 \times 0 - 1 \times 1 \neq 0$.

* On suppose la propriété vérifiée à un rang m . On a alors

$$[a_0, \dots, a_{m+1}] \left(\frac{1}{y} \right) = [a_0, \dots, a_m] \left(\frac{1}{a_m + \frac{1}{y}} \right).$$

Par hypothèse de récurrence, utilisée avec $y' = a_m + \frac{1}{y} > 0$, il existe des entiers a, b, c, d vérifiant $c > 0$ et $d \geq 0$.

$$\begin{aligned} [a_0, \dots, a_{m+1}] \left(\frac{1}{y} \right) &= \frac{a \left(a_m + \frac{1}{y} \right) + b}{c \left(a_m + \frac{1}{y} \right) + d} \\ &= \frac{(aa_m + b)y + a}{(ca_m + d)y + c} \end{aligned}$$

On pose $a' = aa_m + b$, $b' = a$, $c' = ca_m + d$, $d' = c$. Comme $c > 0$, $d \geq 0$ et $a_m > 0$, on en déduit que $c' > 0$ et $d' \geq 0$. Ainsi, on a bien montré la propriété au rang $m + 1$.

- On suppose dans un premier temps que le développement de x est T périodique depuis le rang initial. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+T} = a_n$. On peut donc écrire :

$$x = [a_0, \dots, a_n, \dots] = [a_0, \dots, a_{T-1}] \left(\frac{1}{x} \right).$$

Il existe donc des entiers a, b, c et d , avec $c \neq 0$, tels que

$$x = \frac{ax + b}{cx + d} \quad \text{soit:} \quad cx^2 + (d - a)x - b = 0.$$

Ainsi, x est bien racine d'un polynôme du second degré à coefficients entiers.

On en déduit que x est quadratique.

- On montre maintenant par récurrence sur n_0 que si (a_n) est périodique à partir du rang n_0 , alors $[(a_n)]$ est quadratique. L'initialisation, pour $n_0 = 0$, vient d'être faite. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, on suppose que cette propriété est vérifiée pour toutes les suites de Z_∞ périodiques à partir du rang n_0 . Soit (a_n) une suite de Z_∞ périodique à partir du rang $n_0 + 1$. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a'_n = a_{n+1}$. Alors (a'_n) est périodique à partir du rang n_0 , et donc, par hypothèse de récurrence, $y = [(a'_n)] = [a_1, \dots, a_n, \dots]$ est quadratique. Or,

$$x = [a_0, \dots, a_n, \dots] = a_0 + \frac{1}{[a_1, \dots, a_n, \dots]} = a_0 + \frac{1}{y}.$$

Comme y est quadratique, il existe un polynôme de degré 2 à coefficients entiers A, B et C tels que

$$Ay^2 + By + C = 0,$$

avec $A \neq 0$. On a donc

$$\frac{A}{(x - a_0)^2} + \frac{B}{(x - a_0)} + C = 0.$$

En multipliant par $(x - a_0)^2$, il vient

$$A + B(x - a_0) + C(x - a_0)^2 = 0.$$

Or, $C \neq 0$. En effet, si $C = 0$, y serait racine de $Ay^2 + By = y(Ay + B)$ et serait donc rationnel, donc non quadratique. On en déduit que $C \neq 0$ et que x est racine d'un polynôme de degré 2. Comme on a déjà justifié l'irrationalité, x est quadratique.

- Ainsi, d'après le principe de récurrence :

si le développement de x est ultimement périodique, alors x est quadratique.

4. Réciproquement, soit x algébrique de degré 2 et (P_0) comme défini dans l'énoncé.

- On définit (a_n) et (b_n) comme dans la partie III, et les P_n comme définis dans l'énoncé. En vertu de la partie III, il suffit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{b_n}$ est une racine de P_{n+1} .

- On a $b_0 = x - a_0$, et x est racine de P_1 , donc

$$\begin{aligned} 0 &= E_1(a_0 + b_0)^2 - 2\varepsilon_0(a_0 + b_0) - E_0 \\ &= E_1b_0^2 + (-2\varepsilon_0 + 2a_0E_1)b_0 - (E_0 - E_1a_0^2 + 2\varepsilon_0a_0) \\ &= E_1b_0^2 + 2\varepsilon_1b_0 - E_2. \end{aligned}$$

En divisant par $-b_0^2$, il vient :

$$E_2 \cdot \frac{1}{b_0^2} - 2\varepsilon_1 \cdot \frac{1}{b_0} - E_1 = 0.$$

Ainsi, $\frac{1}{b_0}$ est une racine de P_1 .

- On suppose que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, $\frac{1}{b_{n-1}}$ est une racine de P_n . Alors, de la même façon, on exprime

$$\frac{1}{b_{n-1}} = a_n + b_n,$$

et donc

$$\begin{aligned} 0 &= E_{n+1}(a_n + b_n)^2 - 2\varepsilon_n(a_n + b_n) - E_n \\ &= E_{n+1}b_n^2 + (-2\varepsilon_n + 2a_nE_{n+1})b_n - (E_n - E_{n+1}a_n^2 + 2\varepsilon_na_n) \\ &= E_{n+1}b_n^2 + 2\varepsilon_{n+1}b_n - E_{n+2}. \end{aligned}$$

et comme avant en divisant par $-b_n^2$, $\frac{1}{b_n}$ est une racine de P_{n+1} . Remarquons que P_{n+1} se relie facilement à de P_n : le calcul ci-dessus montre que pour tout $y \neq 0$

$$-\frac{1}{y^2}P_n(a_n + y) = -\frac{1}{y^2}(E_{n+1}y^2 + 2\varepsilon_{n+1}y - E_{n+2}) = P_{n+1}\left(\frac{1}{y}\right) \quad \text{donc:} \quad \boxed{P_{n+1}(y) = -y^2P_n\left(a_n + \frac{1}{y}\right)}$$

- Ainsi, d'après le principe de récurrence, pour tout n , $\frac{1}{b_n}$ est une racine de P_{n+1} , et donc a_{n+1} étant d'après la partie III la partie entière de $\frac{1}{b_n}$, $\boxed{a_{n+1} \text{ est la partie entière d'une racine de } P_{n+1}}$. Cela reste vrai pour $a_0 = [x]$ aussi, puisque x est une racine de P_0 .
- (b) C'est une simple vérification. Par une récurrence immédiate, il suffit de prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta_{n+1} = \Delta_n$. Or,

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1} &= 4\varepsilon_{n+1}^2 + 4E_{n+1}E_{n+2} \\ &= 4(a_nE_{n+1} - \varepsilon_n)^2 + 4E_{n+1}(E_n + 2\varepsilon_na_n - E_{n+1}a_n^2) \\ &= 4\varepsilon_n^2 + 4E_nE_{n+1} \\ &= \Delta_n. \end{aligned}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\Delta_n = \Delta_0}$.

- (c) Le calcul du discriminant amène

$$\Delta' = \frac{1}{4}\Delta_n = \varepsilon_n^2 + E_nE_{n+1},$$

de quoi on tire :

$$\boxed{E_{n+1} = \frac{\Delta' + \varepsilon_n^2}{E_n}}$$

- (d) • D'après ce qui précède, $\Delta_n = \Delta > 0$, donc P_n admet toujours deux racines distinctes (initialement, on connaît l'existence d'une racine de P_0 par définition, et elle ne peut pas être double, sinon x serait rationnel).
- Notons s_n et t_n ces deux racines, en supposant $s_n < t_n$. Remarquons que nécessairement, $t_n > 1$. En effet, on sait que $\frac{1}{b_{n-1}}$ est racine de P_n . Or, $0 < b_{n-1} < 1$ (partie décimale, non nulle sinon la fraction serait finie). Donc $\frac{1}{b_{n-1}} > 1$.
 - Supposons dans un premier temps que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[s_n] = [t_n]$. Soit y la deuxième racine de P_0 (i.e. celle différente de x), $[(c_n)]$ son développement en fraction continue, et (Q_n) sa suite polynomiale associée comme en 4(a).
 - * On a en particulier $P_0 = Q_0$, et comme s_0 et t_0 ont même partie entière, $a_0 = c_0$.

- * Supposons que pour n donné, $P_n = Q_n$ et $a_n = c_n$. Alors la description de P_{n+1} ne dépendant que de P_n et de a_n , on a $P_{n+1} = Q_{n+1}$. Les deux racines de ce polynôme ont même partie entière. Ainsi, d'après 4(a), $a_{n+1} = c_{n+1}$.
- * Par conséquent, d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = c_n$, donc

$$x = [(a_n)] = [(c_n)] = y,$$

ce qui est une contradiction.

- On en déduit qu'il existe un rang n_1 tel que P_{n_1} admette deux racines $s_{n_1} < t_{n_1}$ telles que $[s_{n_1}] < [t_{n_1}]$. D'après la remarque en fin de question 4(a), on a, pour tout $y \neq 0$,

$$P_{n_1+1}(y) = -y^2 P_{n_1}(a_n + \frac{1}{y}).$$

Ainsi, y est racine de P_{n_1+1} si et seulement si $a_{n_1} + \frac{1}{y}$ est racines de P_{n_1} , donc les deux racines sont

$$\frac{1}{s_{n_1} - a_{n_1}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{t_{n_1} - a_{n_1}}.$$

- * Si $a_{n_1} = [s_{n_1}] < t_{n_1} - 1$, donc $t_{n_1} - a_{n_1} > 1$, donc $\frac{1}{t_{n_1} - a_{n_1}} < 1$.
- * Si $a_{n_1} = [t_{n_1}] > s_{n_1}$, alors $\frac{1}{s_{n_1} - a_{n_1}} < 0$;

Ainsi, dans chacun des deux cas, l'une des racines n'est pas dans $]1, +\infty[$. Comme on a déjà justifié qu'au moins une des deux racines est dans $]1, +\infty[$, on a bien trouvé un rang $n_0 = n_1 + 1$ tel que P_{n_0} ait une et une seule racine dans $]1, +\infty[$.

- (e) Alors $a_{n_0} = [t_{n_0}]$ (partie entière de la plus grande des deux racines, l'autre étant plus petite que 1). Par le même argument que ci-dessus (mais on est cette fois toujours dans le deuxième cas), la plus petite des racines de P_{n_0+1} sera négative. Ainsi, P_{n_0+1} admet une unique racine positive (et qui est en fait supérieure à 1). Cet argument peut être itéré. Autrement dit, par une récurrence basée sur le même principe, pour tout $n > n_0$, P_n admet une et une seule racine positive.

Or, le produit des racines est $\frac{-E_n}{E_{n+1}}$, donc pour tout $n > n_0$, ce produit devant être négatif, E_n et E_{n+1} sont de même signe (strictement), donc $E_n E_{n+1} > 0$.

- (f) Or, pour $n > n_0 + 1$,

$$0 \leq \varepsilon_n^2 = \Delta' - E_n E_{n+1} < \Delta', \quad \text{donc:} \quad |\varepsilon_n| < \sqrt{\Delta'}.$$

De même,

$$E_n E_{n-1} < \Delta' - \varepsilon_{n-1}^2 < \Delta',$$

donc, E_{n-1} et E_n étant de même signe,

$$|E_n| < \frac{\Delta'}{|E_{n-1}|} \quad \text{donc:} \quad |E_n| < \Delta',$$

puisque E_{n-1} est un entier non nul.

- (g) Ainsi, pour $n > n_0 + 1$, le nombre de valeurs possibles de ε_n est majoré par $2\sqrt{\Delta'}$ (car les ε_n doivent être entiers), et le nombre de valeurs possibles de E_n est majoré par $2\Delta'$ (et même par Δ' , car les E_n sont tous de même signe). Ainsi, il y a un nombre fini majoré par $4(\Delta')^{\frac{3}{2}}$ de valeurs possibles du couple (E_n, ε_n) .
- (h) D'après le principe des tiroirs, il existe donc $n_2 > n_0 + 1$ et $T > 0$ tels que $(E_{n_2+T}, \varepsilon_{n_2+T}) = (E_{n_2}, \varepsilon_{n_2})$. Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \geq n_2$,

$$(E_{n+T}, \varepsilon_{n+T}) = (E_n, \varepsilon_n).$$

L'initialisation est la définition de n_2 . Soit $n \geq n_2$, et supposons que

$$(E_{n+T}, \varepsilon_{n+T}) = (E_n, \varepsilon_n).$$

Puisque

$$E_{n+1} = \frac{\Delta - \varepsilon_n^2}{E_n},$$

le couple (E_n, ε_n) détermine entièrement E_{n+1} et donc

$$E_{n+1} = E_{n+1+T}$$

Mais alors, $P_n = P_{n+T}$, et comme ce polynôme admet une unique racine supérieure à 1, $a_n = a_{n+T}$. On déduit alors de la relation définissant ε_n que $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{n+T+1}$. Ainsi,

$$(E_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) = (E_{n+1+T}, \varepsilon_{n+1+T}).$$

D'après le principe de récurrence, la suite $((E_n, \varepsilon_n))_{n \geq n_2}$ est périodique, donc la suite $(P_n)_{n \geq n_2}$ est périodique, donc la suite $(a_n)_{n \geq n_2}$ est périodique (P_n déterminant a_n du fait de l'unicité de la racine supérieure à 1).

Par conséquent x admet un développement en fraction continue ultimement périodique.