Pour le 08/12/2023

DM n° 9 : Continuité, dérivation

Corrigé du problème 1 –

Partie I – Une limite non continue de fonctions continues

1. La fonction f_n est de $\boxed{\text{classe } \mathcal{C}^\infty}$ comme composée de fonctions qui le sont.
2. Il s'agit de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite numérique $(f_{x_0,n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Soit donc $x \in \mathbb{R}$. Alors :
   - si $x \neq x_0$, $(x-x_0)^2 > 0$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -n(x-x_0)^2 = -\infty$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} f_{x_0,n}(x) = 0$;
   - si $x = x_0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{x_0,n}(x_0) = 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_{x_0,n}(x_0) = 1$

   Ainsi, $\boxed{(f_{x_0,n}) \text{ converge simplement vers la fonction } f_{x_0} \text{ nulle sur } \mathbb{R}\backslash\{x_0\}, \text{ et telle que } f_{x_0}(x_0) = 1.}$
3. f_{x_0} n'est évidemment $\boxed{\text{pas continue en } x_0}$, puisque $\lim\limits_{x\to x_0+} f_{x_0}(x) = 0 \neq 1 = f_{x_0}(x_0)$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f_n est une somme finie de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, elle est donc de $\boxed{\text{classe } \mathcal{C}^\infty}$.
5. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après ce qui précède, chaque suite $(f_{x_i,n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, vers 0 si $x \neq x_i$, et vers 1 si $x = x_i$. Les réels x_i, $i \in [\![1, m]\!]$, étant deux à deux distincts, par linéarité de la limite (on a un nombre fini de termes), on en déduit que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 si $x \notin \{x_1, \dots, x_m\}$, et converge vers 1 si $x \in \{x_1, \dots, x_m\}$.

   Donc $\boxed{(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement vers une fonction } f}$ égale à 0 en tout point de $\mathbb{R}$, exceptés les points $x_1, \dots, x_m$, où elle vaut 1. Cette fonction n'est évidemment pas continue aux différents points x_i, les limites à droite et à gauche en ces points étant 0, alors que $f(x_i) = 1$.

Partie II – Un critère de continuité pour des séries de fonctions

1. La différence fondamentale entre convergence simple et convergence uniforme est que dans le cas de la convergence uniforme, le même entier N doit convenir pour tous les réels x (de I bien sûr) : on a uniformité de la vitesse de convergence (d'où la terminologie).

   Montrons que $(f_{x_0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas uniformément convergente, donc que :
   $$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall N > 0, \quad \exists x \in \mathbb{R}, \quad \exists n > N, \quad |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon.$$
   L'étude de la partie I (et l'énoncé des résultats qui suivent) indique que le défaut de convergence uniforme se situera probablement en x_0 Pour x proche de x_0, $(f_{x_0,n}(x))$ va rester trop longtemps proche de 1 ; et ne pas tendre assez vite vers 0, l'amplitude de ce comportement étant 1, on va prendre $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

   Soit alors N quelconque. On doit montrer qu'il existe x (qu'on choisit différent de x_0) tel qu'il existe $n \geqslant N$ tel que $|f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{2}$. Or :
   $$|f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{2} \iff \mathrm{e}^{-n(x-x_0)^2} \geqslant \frac{1}{2} \iff (x-x_0)^2 \leqslant \frac{\ln 2}{n} \iff |x - x_0| \leqslant \sqrt{\frac{\ln 2}{n}}.$$
   On peut donc choisir $n > N$ quelconque, et x tel que $x \neq x_0$ dans $\left]x_0 - \dfrac{\ln 2}{n}, x_0 + \dfrac{\ln 2}{n}\right[$.

   Cela donne bien l'existence de $x \in \mathbb{R}$, et de $n > N$ tel que $|f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon$. Par conséquent, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas uniformément convergente.
2. On a toujours :
   $$\exists N, \forall x, P(N, x) \Longrightarrow \forall x, \exists N, P(N, x),$$
   expression logique signifiant que s'il existe un N indépendant de x pour lequel une propriété est vérifiée pour tout x, alors il existe aussi un N convenable sans imposer l'indépendance en x. Qui peut le plus, peut le moins !

Or, les deux définitions de convergence simple et de convergence uniforme ne diffèrent que d'une interversion de symboles $\exists$ et $\forall$, traduisant l'indépendance imposée de N par rapport à x pour la convergence uniforme. Ainsi, d'après la remarque ci-dessus, $\boxed{\text{la convergence uniforme implique la convergence simple.}}$

3. Soit $x \in I$ et soit $\varepsilon > 0$. D'après la définition de la convergence uniforme, il existe N tel que pour tout $y \in I$ (donc aussi x) pour tout $n \geqslant N$, $|f_n(y) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Fixons une telle valeur de N, et choisissons $n \geqslant N$ quelconque. Alors,
$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{et} \qquad \forall y \in I,\ |f_n(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$$
Par ailleurs, f_n étant continue en x, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout y tel que $|y - x| < \eta$, $|f_n(x) - f_n(y)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.
Alors, pour tout y tel que $|y - x| < \eta$, on a :
$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) + f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$
Cela montre bien la continuité de f en x.
Ceci étant valide pour tout $x \in I$, $\boxed{f \text{ est continue sur } I}$.

4. Supposons que $\sum f_n$ converge normalement, et soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que dans la définition.
Montrons pour commencer que $\sum f_n$ converge simplement. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leqslant a_n$. Ces termes étant positifs, comme $\sum a_n$ converge, on déduit du théorème de comparaison des séries à termes positifs que $\sum f_n(x)$ converge absolument, donc converge.
Montrons que la convergence est uniforme. La fonction limite est $g : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$. Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la somme partielle de cette série.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $x \in I$,
$$|g_n(x) - g(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k.$$
Ce majorant a l'avantage de ne pas dépendre de x.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme la série $\sum a_n$ converge, il existe N (indépendant de x, donc) tel que pour tout $n \geqslant N$, $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k < \varepsilon$. Ainsi, pour tout $n \geqslant N$, et tout $x \in I$: $|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$.
Ce N étant indépendant de x, on a, par définition, convergence uniforme de $\sum f_n$.
Conclusion : $\boxed{\text{si } \sum f_n \text{ converge normalement, et si les } f_n \text{ sont continues, alors la fonction } \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est continue.}}$

Partie III – La fonction de Weierstrass : une fonction partout continue nulle part dérivable

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $|b^n \cos(a^n \pi x)| \leqslant b^n$.
Or, $\sum b^n$ converge, puisque $b \in]0, 1[$. Ainsi, la somme définissant f est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, donc uniformément convergente (d'après II-5), donc simplement convergente (d'après II-2). Ainsi, $\boxed{f \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}.}$
Par ailleurs, l'uniforme convergence et la continuité du cosinus assurent la $\boxed{\text{continuité de } f \text{ sur } \mathbb{R}}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$.
Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_n(x) = b^n \cos(a^n \pi x)$. Alors f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = -(ab)^n \pi \sin(a^n \pi x) \qquad \text{donc:} \qquad |f_n(x)| \leqslant (ab)^n \pi.$$
D'après l'inégalité des accroissements finis entre x et $x + h$, f_n étant dérivable sur $\mathbb{R}$:
$$|f_n(x + h) - f_n(x)| \leqslant |h|(ab)^n \pi.$$
Soit $m \in \mathbb{N}^*$. En sommant cette inégalité sur $n \in [\![0, m - 1]\!]$, on obtient :
$$\sum_{n=0}^{m-1} |f_n(x + h) - f_n(x)| \leqslant |h|\pi \sum_{n=0}^{m-1} (ab)^n = \frac{|h|\pi((ab)^m) - 1}{ab - 1} \leqslant \frac{|h|\pi(ab)^m}{ab - 1},$$
car $ab - 1 > 0$ par hypothèse. Ainsi, en utilisant l'inégalité triangulaire :
$$|S_m(h)| = \left|\sum_{n=0}^{m-1} \frac{f_n(x + h) - f_n(x)}{h}\right| \leqslant \sum_{n=0}^{m-1} \frac{|f_n(x + h) - f_n(x)|}{|h|} \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{|S_m(h)| \leqslant \frac{\pi(ab)^m}{ab - 1}.}$$

3. Par définition de la partie entière, $a^m x - \frac{1}{2} < \alpha_m \leqslant a^m x + \frac{1}{2}$. Ainsi,

$$-\frac{1}{2} \leqslant a^m x - \alpha_m < \frac{1}{2} \qquad \text{donc:} \qquad -\frac{1}{2} \leqslant \beta_m \leqslant \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, $\frac{1}{2} \leqslant 1 - \beta_m \leqslant \frac{3}{2}$, donc $|1 - \beta_m| \leqslant \frac{3}{2}$. On en déduit que $\boxed{|h_m| = \dfrac{|1-\beta_m|}{a^m} \leqslant \dfrac{3}{2a^m}}$.

4. (a)
   - Puisque a est impair $a \equiv 1$ [2], donc $a^{n-m} \equiv 1$ [2], donc $a^{n-m}(\alpha_m + 1) \equiv (\alpha_m + 1)$ [2].
   - On en déduit que $\boxed{a^{n-m}(\alpha_m + 1) \text{ est de même parité que } \alpha_m + 1.}$

   On a : $x + h_m = x + \dfrac{1 - \beta_m}{a^m} = \dfrac{a_m x - \beta_m + 1}{a^m} = \dfrac{\alpha_m + 1}{a^m}$, par définition de β_m.
   Or $\cos(\pi a^n (x + h_m)) = \cos(a^{n-m}(\alpha + 1)\pi) = (-1)^{a^{n-m}(\alpha+1)}$.
   Comme a est impair, $a \equiv 1$ [2], donc $a^{n-m} \equiv 1$ [2], donc $a^{n-m}(\alpha_m + 1) \equiv (\alpha_m + 1)$ [2], et donc

$$\boxed{\cos(\pi a^n (x + h_m)) = (-1)^{(\alpha_m + 1)}}.$$

   De la même manière, $a^{n-m}\alpha_m$ est de même parité que α_m, d'où :

$$\boxed{\cos(\pi a^{n-m}\alpha_m) = (-1)^{a^{n-m}\alpha_m} = (-1)^{\alpha_m}}, \qquad \text{et} \qquad \boxed{\sin(\pi a^{n-m}\alpha_m) = 0}.$$

   (b) On en déduit que

$$\begin{aligned}
\cos(a^n \pi x) &= \cos(\pi a^{n-m}(\alpha_m + \beta_m)) \\
&= \cos(\pi a^{n-m}\alpha_m)\cos(\pi a^{n-m}\beta_m) - \sin(\pi a^{n-m}\alpha_m)\sin(\pi a^{n-m}\beta_m) \\
&= \boxed{(-1)^{\alpha_m}\cos(\pi a^{n-m}\beta_m)}.
\end{aligned}$$

5. Il vient alors :

$$\begin{aligned}
R_m(h_m) &= \frac{1}{h_m}\sum_{n=m}^{+\infty} b^n(\cos(a^n\pi(x + h_m)) - \cos(a^n \pi x)) \\
&= \frac{1}{h_m}\sum_{n=m}^{+\infty} b^n((-1)^{\alpha_m+1} - (-1)^{\alpha_m}\cos(\pi a^{n-m}\beta_m)) \\
&= \frac{(-1)^{\alpha_m+1}}{h_m}\sum_{n=m}^{+\infty} b^n(1 + \cos(\pi a^{n-m}\beta_m)).
\end{aligned}$$

Les termes de la série ci-dessus sont positifs, car pour tout $y \in \mathbb{R}$, $1 + \cos y \geqslant 0$. Ainsi, la somme est supérieure à son premier terme, obtenu pour $n = m$. Par conséquent :

$$|R_m(h_m)| = \frac{1}{|h_m|}\sum_{n=m}^{+\infty} b^n(1 + \cos(\pi a^{n-m}\beta_m)) \geqslant \frac{1}{|h_m|} b^m(1 + \cos(\pi\beta_m)).$$

Or, $-\dfrac{1}{2} \leqslant \beta_m \leqslant \dfrac{1}{2}$, donc $\cos(\pi\beta_m) \geqslant 0$. On en déduit que $\boxed{|R_m(h_m)| \geqslant \dfrac{b^m}{|h_m|} = \dfrac{(ab)^m}{1 - \beta_m}}$.

6. On a :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x + h_m) - f(x)}{h_m}\right| &= |S_m(h_m) + R_m(h_m)| \\
&\geqslant |R_m(h_m)| - |S_m(h_m)| \\
&\geqslant \frac{(ab)^m}{1 - \beta_m} - \frac{\pi(ab)^m}{ab - 1} = (ab)^m \frac{ab - 1 - \pi(1 - \beta_m)}{(1 - \beta_m)(ab - 1)} \\
&\geqslant (ab)^m \frac{ab - 1 - \frac{3\pi}{2}}{(1 - \beta_m)(ab - 1)} \\
&\geqslant \boxed{\frac{2(ab)^m}{3} \cdot \frac{ab - \left(1 + \frac{3\pi}{2}\right)}{ab - 1}},
\end{aligned}$$

puisque $1 - \beta_m \leqslant \frac{3}{2}$ et est positif.

7. Par l'hypothèse sur ab, on a $\dfrac{ab - \left(1 + \frac{3\pi}{2}\right)}{ab - 1} > 0$; de plus, $ab > 1$, donc $\lim\limits_{m \to +\infty} (ab)^m = +\infty$. Ainsi :

$$\lim_{m \to +\infty} \left| \frac{f(x + h_m) - f(x)}{h_m} \right| = +\infty.$$

Puisque $a > 1$ (sinon on n'aurait pas $ab > 1$, puisque $b < 1$), $(h_m)_{m \in \mathbb{N}}$ tend vers 0. Ainsi, le résultat précédent contredit le critère séquentiel de la convergence du taux d'accroissement en x lorsque h tend vers 0. Ainsi f n'est pas dérivable en x.

Le réel x ayant été choisi quelconque, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ n'est dérivable en aucun point de } \mathbb{R}, \text{ alors qu'elle est continue sur } \mathbb{R}}$.

Corrigé du problème 2 – Fonctions semi-continues et lemme d'Urysohn

Question préliminaire

Soit $a \in \mathbb{R}$, et $V_1, \dots, V_n$ des voisinages de a. Par définition, il existe des réels $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ tels que $]a - \varepsilon_i, a + \varepsilon_i[\subset V_i$, soit encore $B(a, \varepsilon_i) \subset V_i$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. En considérant $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, on a alors $\varepsilon > 0$ et

$$B(a, \varepsilon) \subset \bigcap_{i=1}^{n} V_i.$$

Cela prouve bien que $\boxed{\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i \text{ est un voisinage de } a}$

C'est $\boxed{\text{faux si l'intersection est infinie}}$, comme le montre l'exemple de $V_n =]-2^{-n}, 1]$, voisinage de 0 pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors que $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} V_n = [0, 1]$, n'est pas un voisinage de 0.

On peut remarquer que la démonstration qu'on a donnée (dans le cas fini) est valable dans tout espace métrique (dans sa version boulesque, ou boulimique) et se modifie sans problème dans un espace topologique quelconque (en remplaçant les boules par des ouverts, suivant la définition des voisinages rappelée en partie IV, et en utilisant le fait qu'une intersection finie d'ouverts est un ouvert).

Partie I – Fonctions semi-continues

1. Supposons f continue. Soit $a \in E$, et $\lambda < f(a)$. L'ensemble $]\lambda, +\infty[$ est un voisinage de $f(a)$. Donc par caractérisation topologique de la limite, il existe un voisinage V' de a tel que $f(V' \cap E) \subset]\lambda, +\infty[$. Posons alors $V = V' \cap E$, encore voisinage de a (car intersection de deux voisinages de a, E étant ouvert). On a bien, pour tout $x \in V$, $f(x) > \lambda$.
   On en déduit que $\boxed{f \text{ est semi-continue inférieurement.}}$
   On aurait pu s'en sortir aussi avec la version métrique en considérant $\varepsilon = f(a) - \lambda$.
   Par ailleurs en considérant $-f$, on peut affirmer que f est aussi semi-continue supérieurement.
2. (a) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f = \mathbb{1}_U$. Soit $a \in \mathbb{R}$.
   - si $a \notin U$, $f(a) = 0$. Soit alors $\lambda < f(a) = 0$, et $V = \mathbb{R}$, voisinage (très grossier) de a. On a alors pour tout $x \in V$, $f(x) \geqslant 0 > \lambda$.
   - si $a \in U$, $f(a) = 1$. Soit $\lambda < 1$, et $V = U$, voisinage de a puisque U est ouvert. On a alors pour tout $x \in V$, $f(x) = 1 > \lambda$.

   Ainsi, $\boxed{\mathbb{1}_U \text{ est semi-continue inférieurement}}$.
   Ainsi, l'ensemble des fonctions continues est strictement inclus dans l'ensemble des fonctions semi-continues inférieurement : il existe des fonctions semi-continues inférieurement qui ne sont pas continues.

   (b) Soit X un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non ouvert. Puisque X n'est pas ouvert, il n'est pas un voisinage d'au moins un de ses points. Soit $a \in X$ tel que X ne soit pas voisinage de a. Soit $\lambda = \frac{1}{2} < \mathbb{1}_X(a) = 1$, et V un voisinage quelconque de a. Alors V n'est pas inclus dans X (sinon X serait un voisinage de a), donc il existe $x \in V$ tel que $\mathbb{1}_X(x) = 0 < \lambda$. On a montré l'existence d'un élément a de $\mathbb{R}$ et d'un réel $\lambda < f(a)$ tel que tout voisinage de a contienne un élément x vérifiant $\mathbb{1}_X(x) \leqslant \lambda$. C'est exactement affirmer que $\boxed{\mathbb{1}_X \text{ n'est pas semi-continue inférieurement.}}$
   Les deux questions précédentes montre qu'une fonction indicatrice d'un sous-ensemble X de $\mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement si et seulement si X est ouvert. C'est donc une caractérisation des ouverts.

(c) Soit $f : E \to \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Supposons f semi-continue inférieurement. Soit $\lambda < f(a) + b$. On a alors $\lambda - b < f(a)$. Ainsi, par définition de la semi-continuité de f, il existe V un voisinage de a tel que pour tout $x \in V$, $f(x) > \lambda - b$, donc $f(x) + b > \lambda$. On en déduit la semi-continuité de $f + b$.

Réciproquement, on utilise le sens direct appliqué à la fonction $f + b$ et au réel $-b$.

Ainsi, $\boxed{f \text{ est semi-continue inférieurement si et seulement si } f + b \text{ l'est.}}$

(d) Par définition $\mathbb{1}_F$ est semi-continue supérieurement ssi $-\mathbb{1}_F$ est semi-continue inférieurement, ssi $1 - \mathbb{1}_F$ est semi-continue inférieurement (question précédente), ssi $\mathbb{1}_{\mathbb{R}\backslash F}$ est semi-continue inférieurement, ssi $\mathbb{R}\backslash F$ est ouvert (questions 2(a) et 2(b)), ssi F est fermé.

Ainsi, $\boxed{\mathbb{1}_F \text{ est semi-continue supérieurement ssi } F \text{ est fermé.}}$

3. Le sens direct a déjà été établi en 1. Supposons donc que f est semi-continue inférieurement et supérieurement sur E. Par définition des domaines, elle est alors à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in E$, et $\varepsilon > 0$. Posons $\lambda_1 = f(a) - \varepsilon$ et $\lambda_2 = f(a) + \varepsilon$.
   - Par semi-continuité inférieure, il existe un voisinage V_1 de a tel que pour tout $x \in V_1$, $f(x) > \lambda_1$.
   - Par semi-continuité supérieure, il existe un voisinage V_2 de a tel que pour tout $x \in V_2$, $-f(x) > -\lambda_2$.

   Ainsi, en posant $V = V_1 \cap V_2$, voisinage de a d'après la question préliminaire, pour tout $x \in V$, on a

$$f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon,$$

   donc $f(V) \subset B(f(a), \varepsilon)$. Ainsi, par la définition de la continuité dans sa version topologique au départ et métrique à l'arrivée, on peut affirmer que $\boxed{f \text{ est continue en tout } a \text{ de } E.}$

4. - Supposons f semi-continue inférieurement. Soit $a \in f^{-1}(]\lambda, +\infty])$. On a donc $f(a) > \lambda$. Par définition de la semi-continuité, il existe donc un voisinage V de a tel que $f(V) \subset]\lambda, +\infty]$, c'est-à-dire $V \subset f^{-1}(]\lambda, +\infty])$. Ainsi, $f^{-1}(]\lambda, +\infty])$ contient un voisinage de a, c'est donc lui-même un voisinage de a.
     En tant que voisinage de tous ses points, $f^{-1}(]\lambda, +\infty])$ est ouvert.
   - Supposons que pour tout $\lambda > 0$, $f^{-1}(]\lambda, +\infty])$ est ouvert. Soit $a \in E$ et $\lambda < f(a)$. On a alors $f(a) \in]\lambda, +\infty])$, donc $a \in f^{-1}(]\lambda, +\infty])$. Cet ensemble étant ouvert, il est voisinage de a. Notons-le V. On a alors, pour tout $x \in V$, $f(x) > \lambda$. Cela prouve la $\boxed{\text{semi-continuité inférieure de } f.}$

5. (a) Soit f une fonction semi-continue inférieurement sur E et $\mu \geqslant 0$. Si $\mu = 0$, μf est nulle, donc continue, donc semi-continue inférieurement. On peut donc supposer que $\mu > 0$.

   Soit $a \in E$ et $\lambda < \mu f(a)$. Alors $\frac{\lambda}{\mu} < f(a)$. Par semi-continuité inférieure de f, il existe un voisinage V de a tel que pour tout $x \in V$, $f(x) > \frac{\lambda}{\mu}$, donc $\mu f(x) > \lambda$. Cela prouve la $\boxed{\text{semi-continuité inférieure de } \mu f.}$

   (b) Lorsque $\mu \leqslant 0$, $|\mu| f$ est semi-continue inférieurement d'après ce qui précède, donc $\boxed{\mu f = -|\mu| f \text{ est semi-continue supérieurement}}$, par définition.

6. Soit f et g deux fonctions semi-continues inférieurement. Soit $a \in E$ et $\lambda < f(a) + g(a)$. Soit $\varepsilon = f(a) - g(a) - \lambda$. On peut alors définir $\lambda_1 = f(a) - \frac{\varepsilon}{2}$ et $\lambda_2 = g(a) - \frac{\varepsilon}{2}$. On a alors $\lambda_1 < f(a)$, $\lambda_2 < g(a)$ et $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$. Par semi-continuité de f et g, il existe deux voisinages V_1 et V_2 de a tels que

$$\forall x \in V_1, \quad f(x) > \lambda_1 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in V_2, \quad g(x) > \lambda_2.$$

   Alors $V = V_1 \cap V_2$ est un voisinage de a, et

$$\forall x \in V, \quad f(x) + g(x) > \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda.$$

   Cela prouve $\boxed{\text{la semi-continuité inférieure de } f + g}$.

7. Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille de fonctions semi-continues inférieurement, et $f = \sup\limits_{i \in I}(f_i)$. Soit $a \in E$ et $\lambda < f(a)$. Par définition de la borne supérieure, il existe au moins un indice $i \in I$ tel que $f_i(a) > \lambda$. par semi-continuité inférieure de f_i, il existe alors un voisinage V de a tel que pour tout $x \in V$, $f_i(x) > \lambda$. Or, par définition, f_i minore f, donc :

$$\forall x \in V, \quad f(x) > \lambda.$$

   Ainsi, $\boxed{\sup\limits_{i \in I}(f_i) \text{ est semi-continue inférieurement.}}$

8. (a) Soit $(f_i)_{i\in I}$ des fonctions semi-continues inférieurement, I étant de cardinal fini. Soit $f = \inf_{i\in I} f_i$. Soit $a \in E$ et $\lambda < f(a)$. Soit λ' tel que $\lambda < \lambda' < f(a)$. En particulier, pour tout $i \in I$, $\lambda' < f_i(a)$. On en déduit qu'il existe un voisinage V_i de a tel que pour tout $i \in V_i$, pour tout $x \in V_i$, $f_i(x) > \lambda'$.

   Soit $V = \bigcap_{i\in I} V_i$. D'après la question préliminaire, I étant fini, V est un voisinage de a, et pour tout $i \in I$, et tout $x \in V$, $f_i(x) > \lambda'$. Ainsi, λ' est un minorant des $f_i(x)$, donc, par définition de la borne inférieure, $f(x) \geqslant \lambda'$. On perd ici l'inégalité stricte, raison de notre passage par λ'. Le choix de λ' nous assure que pour tout $x \in V$, $f(x) > \lambda$. Ainsi, $\boxed{f \text{ est semi-continue inférieurement.}}$

   (b) Soit $U_n =]-2^{-n}, 1 + 2^{-n}[$, et $f_n = \mathbb{1}_{U_n}$. Les U_n étant ouverts, les f_n sont semi-continues inférieurement (question 2a). Soit $f = \inf(f_n)$.

   - Si $x \in [0,1]$, x est dans tout U_n, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = 1$, donc $f(x) = 1$.
   - Si $x \notin [0,1]$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \notin U_n$, donc $f_n(x) = 0$. Comme les f_i sont positives, $f(x) = 0$.

   Ainsi, $f = \mathbb{1}_{[0,1]}$. Or, $[0,1]$ n'étant pas ouvert, la question 2(b) permet de conclure que f n'est pas semi-continue inférieurement.

   Ainsi une enveloppe inférieure de fonctions semi-continues inférieurement peut ne pas être semi-continue inférieurement.

Partie II – Lemme d'Urysohn et caractérisation des fonctions semi-continues inférieurement

1. (a) Soit $x \in E$. L'ensemble F_x est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Puisque F est non vide F_x l'est aussi. De plus, tous les éléments de F_x sont positifs, donc F_x est minoré. Ainsi, d'après la propriété fondamentale de $\mathbb{R}$, F_x $\boxed{\text{admet une borne inférieure } d_F(x).}$

   (b) Lorsque $x \in F$, $|x - x| \in F_x$, donc F_x est minoré par 0 et contient 0. On en déduit que $\boxed{d_F(x) = 0.}$

   (c) Soit $x \notin F$. Comme $\mathbb{R}\backslash F$ est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset \mathbb{R}\backslash F$. Ainsi, pour tout y tel que $|y - x| < \varepsilon$, $y \notin F$. En contraposant, si $y \in F$, alors $|y - x| \geqslant \varepsilon$.
   On en déduit que F_x est minoré par ε, donc $\boxed{d_F(x) \geqslant \varepsilon > 0.}$

2. Soit $(x, x') \in \mathbb{R}^2$. On a, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$d_F(x) \leqslant |y - x| \leqslant |y - x'| + |x' - x|.$$

   Ainsi, $d_F(x) - |x - x'|$ minore $|y - x'|$, donc par définition de la borne inférieure, $d_F(x) - |x - x'| \leqslant d_F(x')$, soit :

$$d_F(x) - d_F(x') \leqslant |x - x'|.$$

   En échangeant le rôle de x et x', on obtient aussi $d_F(x') - d_F(x) \leqslant |x - x'|$, donc

$$\boxed{|d_F(x) - d_F(x')| \leqslant |x - x'|}$$

   La fonction $\boxed{d_F \text{ est donc 1-lipschitzienne, donc continue}}$ (par théorème d'encadrement à x fixé en faisant $x' \to x$).

3. On définit de même $d_{U^c}(x)$ la distance de x au complémentaire U^c de U dans $\mathbb{R}$.

   (a) Soit φ la fonction définie par

$$\varphi(x) = \frac{d_{U^c}(x)}{d_F(x) + d_{U^c}(x)},$$

   Cette fonction est bien définie sur $\mathbb{R}$. En effet, si $d_F(x) + d_{U^c}(x) = 0$, on aurait $d_F(x) = 0$ et $d_{U^c}(x) = 0$. Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existerait (x_n) une suite d'éléments de F tels que $|x - x_n| \to 0$, donc $x_n \to +\infty$. Par caractérisation séquentielle des fermés, il en résulte que $x \in F$. De même, U^c étant fermé, $d_{U^c}(x) = 0$ implique $x \in U^c$. Les deux appartenances sont incompatibles, puisque $F \subset U$.
   Ainsi, le dénominateur ne s'annulant pas, $\boxed{\varphi \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}}$. Par ailleurs, en tant que somme et quotient de fonctions continues, $\boxed{\varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$
   Enfin, pour tout $x \in F$, $d_F(x) = 0$, donc $\varphi(x) = 1$, et pour tout $x \in U^c$, $d_{U^c}(x) = 0$, donc $\varphi(x) = 0$. Enfin, comme $d_F(x)$ et $d_{U^c}(x)$ sont positives, on a bien $\varphi(x) \in [0,1]$.
   On a bien trouvé φ prouvant le $\boxed{\text{lemme d'Urysohn.}}$

(b) Soit $F = [a,b]$ et $U =]c,d[$, avec $c < a < b < d$. La fonction φ associée est nulle sur $U^c =]-\infty, c] \cup [d, +\infty[$, égale à 1 sur $[a,b]$. Soit $x \in [c,a]$. On a alors :

$$d_F(x) = a - x \qquad \text{et} \qquad d_{U^c}(x) = x - c.$$

Ainsi,

$$\varphi(x) = \frac{x-c}{a-x+x-c} = \frac{x-c}{a-c}.$$

De même, si $x \in [b,d]$, $\varphi(x) = \dfrac{d-x}{d-b}$.
Ainsi, les paliers 0 et le palier 1 sont reliés par des segments affines.

4. Soit f une fonction positive, semi-continue inférieurement. Par définition de $\mathcal{C}(f)$, on a clairement $\sup\limits_{g \in \mathcal{C}(f)} g \leqslant f$.
Si l'égalité n'est pas satisfaite, il existe $a \in E$ tel que $\sup\limits_{g \in \mathcal{C}(f)} g(a) < f(a)$. Soit λ tel que $\sup\limits_{g \in \mathcal{C}(f)} g(a) < \lambda < f(a)$.
Il existe un voisinage V tel que pour tout $x \in V$, $f(x) > \lambda$ (semi-continuité de f). Soit U un ouvert tel que $a \in U \subset V$, et $F = \{a\}$. D'après le lemme d'Urysohn, il existe φ continue sur $\mathbb{R}$ (donc sur E après restriction) telle que φ soit égale à 1 sur $\{a\}$, à 0 hors de U et comprise entre 0 et 1 ailleurs. La fonction $\lambda\varphi$ est alors continue, et vérifie :
   - pour tout $x \in U^c$, $\lambda\varphi(x) = 0 \leqslant f(x)$
   - pour tout $x \in U$, $\lambda\varphi(x) \leqslant \lambda < f(x)$
   - $\lambda\varphi(a) = \lambda > \sup\limits_{g \in \mathcal{C}(f)} g(a)$

   Les deux premiers points amènent $\lambda\varphi \in \mathcal{C}(f)$, ce qui contredit de troisième point.
   Ainsi, $\boxed{\sup\limits_{g \in \mathcal{C}(f)} g = f}$.

Partie III – Lemme d'Urysohn différentiel

1. Soit ψ définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\psi(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$
La fonction ψ coïncide sur les ouverts $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ avec des fonctions continues, donc est continue sur ces intervalles. De plus
$$\lim_{x \to 0^-} \psi(x) = \psi(0) = \lim_{x \to 0^+} \psi(x) = 0,$$
donc f est continue en 0. Ainsi, $\boxed{\psi \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.

2. Pour les mêmes raisons que plus haut, ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. De plus, pour $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x < 0$, on a évidemment $\psi^{(n)}(x) = 0$, et on montre facilement par récurrence qu'il existe une fraction rationnelle F_n telle que pour tout $x > 0$, $\psi^{(n)}(x) = F_n(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$. Il est inutile d'expliciter davantage F_n.
On montre alors par recurrence que ψ est n fois dérivable en 0 et que $\psi^{(n)}(0) = 0$. L'initialisation pour $n = 0$ est triviale. Supposons que ψ est n fois dérivable en 0 et vérifie $\psi^{(n)}(0) = 0$. Formons le taux d'accroissement en 0 :
$$\forall x \neq 0, \quad \frac{\psi^{(n)}(x) - \psi^{(n)}(0)}{x} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{F_n(x)}{x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0. \end{cases}.$$
D'après les croissantes comparées (F_n étant équivalent à λx^α pour des réels λ et α), ce taux d'accroissement admet une limite nulle en 0. Ainsi, $\psi^{(n)}$ est dérivable en 0 et $\boxed{\psi^{(n+1)}(x) = 0}$.

3. La fonction $\boxed{\varphi_0 : x \mapsto \varphi(x)\varphi(1-x)}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme composée et produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. Elle est nulle hors de $[0,1]$, et strictement positive sur $]0,1[$, puisque ψ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Soit F une primitive de φ_0. Alors $F' = \varphi_0$. Donc F' est nulle sur $]-\infty, 0[$ et $]1, +\infty[$. En particulier, elle est constante sur ces intervalles. Quitte à retrancher à F la valeur constante qu'elle prend sur $]-\infty, 0]$, on peut supposer que F est nulle sur cet intervalle.
Par ailleurs, F' est strictement positive sur $]0,1[$, donc F est strictement croissante. Il en résulte que $F(1) > F(0) = 0$, et F est constante de valeur $F(1)$ sur $[1, +\infty[$. De plus F prend ses valeurs dans $[0, F(1)]$ (par croissance) et est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (sa dérivée étant de classe $\mathcal{C}^\infty$).

On pose $\boxed{\Phi_0 = \frac{F}{F(1)}, \text{ qui répond au problème.}}$

5. On pose
$$\boxed{\chi_{a,b,c,d}(x) = \Phi_0\left(\frac{x-a}{c-a}\right)\Phi_0\left(\frac{b-x}{b-d}\right)},$$
qui répond au problème, comme on s'en assure facilement. Le caractère $\mathcal{C}^\infty$ provient de la stabilité par composition et produit.

6. Soit F un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}$ et U un ouvert tel que $F \subset U$. On écrit
$$U = \bigcup_{j\in J}]a_j, b_j[,$$
J étant au plus dénombrable, et l'union étant constituée d'ensembles non vides deux à deux disjoints. Quitte à supprimer certains de ces intervalles à U (ce qui consiste à restreindre le problème à un ouvert U' plus petit, mais une fonction répondant pour U' répondra alors aussi pour U), on peut supposer que chaque $]a_j, b_j[$ rencontre F.
Ainsi, pour tout $j \in J$, $F\cap]a_j, b_j[$ est non vide et borné, donc admet une borne inférieure c_j et une borne supérieure d_j d'après la propriété fondamentale de $\mathbb{R}$. On a clairement $a_j \leqslant c_j \leqslant d_j \leqslant b_j$. Si $c_j = a_j$, on a l'existence d'une suite (x_n) d'éléments de $F\cap]a_j, b_j[$ telle que $x_n \to c_j = a_j$. Comme F est fermé, il en résulte que $a_j \in F$. Mais dans ce cas, $a_j \in U$. Comme $a_j \notin]a_j, b_j[$, il existe $k \neq j$ tel que $a_j \in]a_k, b_k[$. Mais alors, $]a_j, b_j[$ et $]a_k, b_k[$ ne sont pas disjoints, d'où une contradiction.
Ainsi, $c_j > a_j$, et de la même manière, $d_j < b_j$. Par conséquent,
$$F \cap U \subset [c_j, d_j] \subset]a_j, b_j[.$$
On considère ensuite a'_j et b'_j tels que $a_j < a'_j < c_j \leqslant d_j < b'_j < b_j$.
Définissons alors $\chi_{U,F}$ par :
$$\chi_{U,F}(x) = \begin{cases} \chi_{a'_j, c_j, d_j, b'_j}(x) & \text{si } x \in]a_j, b_j[,\ j \in J \\ 0 & \text{si } x \notin U. \end{cases}$$
Ainsi, $\chi_{U,F}$ coïncide sur les ouverts $]a_j, b_j[$ avec des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur ces ouverts, donc sur leur union U. De plus, en notant $U' = \bigcup_{j\in J}]a'_j, b'_j[$, $\chi_{U,F}$ est nulle sur le complémentaire $\overline{U'}^c$, qui est ouvert. Donc $\chi_{U,F}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'ouvert $\overline{U'}^c$. Ainsi, $\chi_{U,F}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $U \cup \overline{U'}^c$.
Montrons que cette union est égale à $\mathbb{R}$. Pour cela, il suffit de montrer que $\overline{U'} \subset U$, ce qui n'a en soi rien d'évident (méfiez-vous des fausses évidences). Soit $x \in \overline{U'}$: pour tout $\varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon)$ intersecte U'.
   - Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon)$ intersecte strictement moins de 3 des intervalles $]a'_i, b'_i[$ (donc 2 ou 1, puisque $B(x, \varepsilon)$ intersecte U'), indexés par i_1 et i_2, qu'on prendra égaux s'il n'y a qu'un intervalle en jeu. Soit $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, Puisque $x \in U'$, il existe
   $$y \in B(x, \varepsilon') \cap U' \subset B(x, \varepsilon) \cap U' \subset]a'_{i_1}, b'_{i_1}[\cup]a'_{i_2}, b'_{i_2}[.$$
   Ainsi, par définition, x appartient à l'adhérence de $]a'_{i_1}, b'_{i_1}[\cup]a'_{i_2}, b'_{i_2}[$, à savoir $[a'_{i_1}, b'_{i_1}] \cup [a'_{i_2}, b'_{i_2}]$ (c'est cette opération qui est fausse lorsqu'on a un nombre infini de termes). Or, $[a'_{i_1}, b'_{i_1}] \subset]a_i, b_i[\subset U$ et de même pour $[a'_{i_2}, b'_{i_2}]$. Ainsi, $x \in U$.
   - Supposons maintenant que pour tout $\varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon)$ intersecte au moins 3 intervalles $]a'_i, b'_i[$. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. On va montrer qu'il existe un intervalle $]a_i, b_i[$ inclus dans $B(x, \varepsilon)$. Considérons i_1, i_2 et i_3 trois indices tels que $]a'_{i_k}, b'_{i_k}[\cap B(x, \varepsilon) \neq \varnothing$. et supposons qu'on n'a pas l'inclusion, ni pour i_1, ni pour i_2. Pour commencer, $B(x, \varepsilon)$ n'est pas inclus dans $]a'_{i_1}, b'_{i_1}[$, sinon, les $]a_i, b_i[$ étant disjoints $]a'_{i_2}, b'_{i_2}[$ aurait une intersection vide avec $B(x, \varepsilon)$. De plus, $]a'_{i_1}, b'_{i_1}[$ intersecte $B(x, \varepsilon) =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$, et n'est pas inclus dans cet intervalle. On a alors 2 possibilités :
   $$a'_{i_1} < x - \varepsilon < b'_{i_1} < x + \varepsilon \qquad \text{ou} \qquad x - \varepsilon < a'_{i_1} < x + \varepsilon < b'_{i_1}.$$
   Plaçons-nous dans le premier cas, le second se traitant de façon symétrique. On a une configuration semblable pour l'intervalle $]a'_{i_2}, b'_{i_2}[$, mais ces intervalles étant disjoints (notamment ils ne contiennent pas tous deux $x - \varepsilon$, on obtient :
   $$a'_{i_1} < x - \varepsilon < b'_{i_1} \leqslant a'_{i_2} < x + \varepsilon < b'_{i_2}.$$

Or, l'intervalle $]a'_{i_3}, b'_{i_3}[$ rencontre l'intervalle $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ en un point n'appartenant à aucun des deux premiers intervalles, donc dans $[b'_{i_1}, a'_{i_2}]$. Par connexité des intervalles, et du fait que $]a'_{i_3}, b'_{i_3}[$ ne rencontre aucun des deux premiers intervalles, on a alors

$$]a'_{i_3}, b'_{i_3}[\subset [b'_{i_1}, a'_{i_2}] \subset B(x, \varepsilon).$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $i \in I$ tel que $]a'_i, b'_i[\subset B(x, \varepsilon)$. De plus, par hypothèse, et choix de a'_i et b'_i,

$$\varnothing \neq F \cap]a_i, b_i[\subset]a'_i, b'_i[.$$

On en déduit que toute boule $B(x, \varepsilon)$ intersecte F, donc x est dans l'adhérence de F. Or, F est fermé, donc $x \in F$. Puisque $F \subset U$, on a bien $x \in U$.

On a donc (un peu péniblement) montré que $\overline{U'} \subset U$, donc que $U \cup \overline{U'}^c = \mathbb{R}$.

Ainsi, $\boxed{\chi_{U,F} \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$, et répond au problème d'Urysohn.

Partie IV – Généralisation topologique du lemme d'Urysohn

1. Soit E un espace métrique, et soit F un fermé, U un ouvert de E tels que $F \subset U$. D'après le lemme d'Urysohn (partie II, cas métrique), il existe φ continue de E dans $[0, 1]$, telle que $\varphi(x) = 1$ si $x \in F$ et $\varphi(x) = 0$ si $x \notin U$. Soit alors $V = \varphi^{-1}(]-\frac{1}{2}, +\infty[)$. En tant qu'image réciproque par une fonction continue d'un ouvert, V est un ouvert et on a clairement $F \subset V \subset U$. Soit $x \in \overline{V}$. Il existe donc (x_n) une suite d'éléments de V telle que $x_n \to x$. Comme φ est continue, $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$. Or, par définition de V, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(x_n) > \frac{1}{2}$, donc en passant à la limite, $\varphi(x) \geqslant \frac{1}{2}$. On en déduit que $\varphi(x) \neq 0$, donc $x \notin U^c$, donc $x \in U$. Ainsi, $\overline{V} \subset U$, et de plus $\overline{V}$ est fermé.

   Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des fermés d'un espace métrique vérifie la propriété imposée à } \mathcal{K}.}$

2. On construit (U_r) par récurrence sur n où $r = \frac{p}{2^n}$ est la représentation irréductible de r (donc p est impair). On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des dyadiques de $]0, 1]$ de cette forme.

   On pose U_1 tel que $K \subset U_1 \subset \overline{U_1} \subset U$, avec $\overline{U_1} \in \mathcal{K}$, ce qui existe par hypothèse ur K. On a alors, pour tout $(r, r') \in \mathcal{D}_0$, $r < r' \Longrightarrow \overline{U_r} \subset U_{r'}$, par défaut, puisqu'il n'y a qu'une valeur de r dans $\mathcal{D}_0$. On a de plus (et on imposera cette condition dans la récurrence) $\overline{U_1} \in \mathcal{K}$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la construction effectuée pour tout $r \in \bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{D}_k$, et les propriétés requises vérifiées. Soit $r \in \mathcal{D}_{n+1}$, $r = \frac{2p+1}{2^{n+1}}$. On pose $r_1 = \frac{p}{2^n}$ et $r_2 = \frac{p+1}{2^n}$. Par hypothèse de récurrence, $\overline{U_{r_1}} \subset U_{r_2}$, et $\overline{U_{r_1}} \in \mathcal{K}$. On peut alors trouver U_r tel que

   $$\overline{U_{r_1}} \subset U_r \subset \overline{U_r} \subset U_{r_2},$$

   et $\overline{U_r} \in \mathcal{K}$. De plus, puisque par hypothèse de récurrence, $K \subset U_{r_1}$, on a aussi $K \subset U_r$ et puisque $\overline{U_{r_2}} \subset U$, on a aussi $\overline{U_r} \subset U$. Cette construction est valable aussi lorsque $r_1 = 0$ en remplaçant $\overline{U_0}$ (non défini) par K.

   Montrons maintenant que pour tout $r < r'$ dans $\bigcup_{k=0}^{n+1} \mathcal{D}_k$, $\overline{U_r} \subset U_{r'}$. On écrit $r = \frac{k}{2^{n+1}}$ et $r' = \frac{k'}{2^{n+1}}$.

   - Si k et k' sont pairs, l'inclusion provient de l'hypothèse de récurrence.
   - Si $k' = k+1$ et k pair, l'inclusion provient de la construction précédente, avec $r = \frac{k+1}{2^{n+1}}$ et $r_1 = \frac{k}{2^{n+1}}$.
   - De même si $k' = k+1$ et k impair, avec $r = \frac{k}{2^{n+1}}$ et $r_2 = \frac{k+1}{2^{n+1}}$.
   - Si k est pair et k' impair, non consécutifs, en posant $r'' = \frac{k-1}{2^{n+1}}$, et par hypothèse de récurrence entre r et r'' et par le point 2 ci-dessus :

     $$\overline{U_r} \subset U_{r''} \subset \overline{U_{r''}} \subset U_{r'}.$$

   - De même si k est impair et k' impair, non consécutifs, en intercalant $r'' = \frac{k+1}{2^{n+1}}$.
   - Enfin, ayant ainsi démontré tous les cas pour lesquels k et k' sont de parité opposée, on prouve le cas où k et k' sont pairs en intercalant cette fois un terme impair entre les 2.

   Cela termine l'étude de tous les cas, ce qui complète notre récurrence.

   Le principe de récurrence nous assure donc la construction des ouverts U_r. De plus, si $r < r'$ dans $\mathcal{D}$, alors il existe n dans $\mathbb{N}$ tel que r et r' soient tous deux dans $\bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{D}_k$, et la propriété vérifiée en cours de récurrence assure que $\boxed{\overline{U_r} \subset U_{r'}.}$

3. On définit f sur E par $f(x) = \sup\limits_{r \in \mathcal{D}}((1-r)\mathbb{1}_{U_r}(x))$ et g par $g(x) = \inf\limits_{r \in \mathcal{D}}(1 - (r\mathbb{1}_{U_r}(x)))$.

   Chaque $\mathbb{1}_{U_r}$ est semi-continue inférieurement d'après la partie I, puisque U_r est ouvert. Multiplier par $r > 0$ conserve cette propriété. Ainsi, f est l'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions semi-continues inférieurement. On en déduit que $\boxed{f \text{ est semi-continue inférieurement.}}$

   De même, $\overline{U_r}^c$ étant ouvert, $\mathbb{1}_{\overline{U_r}^c}$ est semi-continue inférieurement donc $1 - r\mathbb{1}_{(U_r)^c}$ est semi-continue supérieurement, (puisqu'on multiplie par une quantité négative). La fonction g est donc l'enveloppe inférieure de fonctions semi-continues supérieurement, donc
   $\boxed{g \text{ est elle-même continue supérieurement.}}$

4. Soit $x \in E$.
   - Si $x \in K$, comme pour tout $r \in \mathcal{D}$, $K \subset U_r \subset \overline{U_r}$, on a $f(x) = \sup\limits_{r \in \mathcal{D}}(1-r) = 1$.
     De même, pour tout $x \in K$, $1 - r\mathbb{1}_{(\overline{U_r})^c}(x) = 1 - 0 = 1$, donc $g(x) = 1 = f(x)$.
   - Soit maintenant $x \in U^c$. Alors pour tout $r \in \mathcal{D}$, $x \in U_r^c$ et $x \in \overline{U_r}^c$ (puisque $\overline{U_r} \subset U$). On en déduit que $(1-r)\mathbb{1}_{U_r}(x) = 0$ et $1 - r\mathbb{1}_{U_r^c}(x) = 1 - r$. Ainsi, $f(x) = 0$ et $g(x) = \inf\limits_{r \in \mathcal{D}}(1-r) = 0$.
   - Soit enfin $x \in U \backslash K$, et $a = f(x)$. Ainsi, $a = \sup\limits_{r \in \mathcal{D}}((1-r)\mathbb{1}_{U_r}(x))$.
     * Supposons dans un premier temps $a \neq 1$, donc $a \in [0, 1[$. Pour tout r tel que $1 - r > a$, $\mathbb{1}_{U_r}(x) = 0$ (sinon a n'est pas un majorant) donc $x \notin U_r$, pour tout $r < 1 - a$. Soit $r' < 1 - a$, et r tel que $r' < r < 1 - a$. On a alors $\overline{U_{r'}} \subset U_r$, donc $x \notin \overline{U_{r'}}$. Il en résulte que pour tout $r' < 1 - a$, $1 - r'\mathbb{1}_{(\overline{U_r})^c}(x) = 1 - r'$.

       $$g(x) = \inf_{r' \in \mathcal{D}}(1 - r'\mathbb{1}_{(\overline{U_r})^c}(x)) \leqslant \inf_{r' \in \mathcal{D} \cap]0, 1-a[,}(1 - r'\mathbb{1}_{(\overline{U_r})^c}(x)) = \inf_{r' \in \mathcal{D} \cap]0, 1-a[,}(1 - r') = a,$$

       par densité de $\mathcal{D}$ dans $[0, 1]$. On a donc $g(x) \leqslant f(x)$.
       Cette inégalité est aussi trivialement vérifiée lorsque $a = 1$, donc pour toute valeur de a.
     * Supposons maintenant (et momentanément) que $a \neq 0$. Par caractérisation de la borne supérieure, pour tout $\varepsilon \in]0, a[$, il existe r tel que $(1-r)\mathbb{1}_{U_r} \geqslant a - \varepsilon$. Cela impose $x \in U_r$ et $1 - r \geqslant a - \varepsilon$ donc $r \leqslant 1 - a + \varepsilon$. Pour tout $r' \geqslant r$, on a alors $U_r \subset U_{r'} \subset \overline{U_{r'}}$, donc $x \notin \overline{U_{r'}}^c$. Il en résulte que $1 - r'\mathbb{1}_{(\overline{U_r})^c}(x) = 1$. Comme il s'agit de la valeur maximale pouvant être prise par les valeurs $1 - r'\mathbb{1}_{(\overline{U_r})^c}(x)$, on en déduit que

       $$g(x) = \inf_{r' \in \mathcal{D}}(1 - r'\mathbb{1}_{(\overline{U_r})^c}(x)) = \inf_{r' \in \mathcal{D} \cap]r, 1]}(1 - r'\mathbb{1}_{(\overline{U_r})^c}(x)) \geqslant \inf_{r' \in \mathcal{D} \cap]r, 1]}(1 - r') \geqslant 1 - r' \geqslant a - \varepsilon$$

       Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, $g(x) \geqslant f(x) - \varepsilon$. On en déduit, en passant à la borne inférieure sur ε (ou par l'absurde) que $g(x) \geqslant f(x)$. La encore, l'inégalité reste trivialement vraie pour $a = 0$.
     * Les deux inégalités amènent l'égalité $g(x) = f(x)$.

   On a donc montré que pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$, donc $\boxed{f = g}$.

   La fonction f (aussi égale à g) est donc à la fois semi-continue inférieurement et semi-continue supérieurement, donc $\boxed{\text{continue}}$. De plus, on a montré en cours de démonstration que f est nulle hors de U et égale à 1 sur K. Ainsi, la fonction f répond de façon positive au $\boxed{\text{lemme d'Urysohn}}$.

5. Il n'y a pas grand chose à modifier à la preuve précédente, à part le point de départ, puisque cette fois, il n'est pas possible de supposer que les singletons sont dans $\mathcal{K}$. On ne peut même pas affirmer qu'ils sont fermés.

   Soit comme précédemment f semi-continue inférieurement, et a tel que $f(a) > 0$. Soit $\lambda < f(a)$, et V un voisinage de a tel que $f(V) \subset]\lambda, +\infty[$. Soit U un ouvert inclus dans V contenant a, et K dans $\mathcal{K}$ contenant a tel que $K \subset U$. Il existe une fonction φ continue sur E et telle que pour tout $x \in K$, $\varphi(x) = 1$, pour tout $x \notin U$, $\varphi(x) = 0$, et ailleurs, $\varphi(x) \in [0, 1]$. Ainsi, $\lambda\varphi$ vérifie bien $\lambda\varphi \leqslant f$, donc $\varphi \in \mathcal{C}(f)$. Ainsi, on a trouvé, comme en partie I, des fonctions de $\mathcal{C}(f)$ prenant des valeurs arbitrairement proches de $f(a)$ en a tel que $f(a) > 0$. On termine comme dans la partie I pour conclure que $\boxed{f = \sup_{g \in \mathcal{C}(f)} g}$.