Lycée Louis-Le-Grand, Paris
MP2I – Mathématiques
A. Troesch

Pour le 22/12/2023

DM n$^{\text{o}}$ 11 : Intégration

Suggestion de travail supplémentaire (à ne pas me rendre) : Encore le problème 1 du DS4, mais aussi le problème 2.

Corrigé du problème 1 – Autour du noyau et de l'intégrale de Poisson

Partie I – Première méthode pour le calcul de $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)\ \mathrm{d}\theta$

1. On a, pour tout $\theta in \mathbb{R}$:

$$\frac{1+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}}{1-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}} = \frac{(1+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta})(1-r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta})}{1-r(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta})+r^2} = \frac{1-r^2+r(\mathrm{e}^{\ss\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta})}{1-2r\cos(\theta)+r^2},$$

et comme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta} = 2\,\mathrm{i}\sin(\theta)$, il vient :

$$\boxed{P_r(\theta) = \mathrm{Re}\left(\frac{1+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}}{1-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}}\right) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta)+r^2}}.$$

2. Il s'agit de formules du cours. On les redémontre rapidement :

$$\frac{1-\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}{1+\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)^2} = \frac{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos(\theta),$$

d'après les formules de duplication de l'angle. On a également :

$$\frac{2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)^2} = \frac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \sin(\theta)\,.$$

Ainsi : $\boxed{\cos(\theta) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \text{ et } \sin(\theta) = \dfrac{2t}{1+t^2}}$.

3. On effectue le changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$ donné par $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, soit $\theta = 2\,\mathrm{Arctan}(t)$, d'où $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{1+t^2}$. On obtient donc :

$$\int_a^b P_r(\theta)\ \mathrm{d}\theta = \int_{\tan\left(\frac{a}{2}\right)}^{\tan\left(\frac{b}{2}\right)} \frac{1-r^2}{1-2r\frac{1-t^2}{1+t^2}+r^2}\,\frac{2\ \mathrm{d}t}{1+t^2},$$

d'où, après simplification :

$$\boxed{\int_a^b P_r(\theta)\ \mathrm{d}\theta = 2\int_{\tan\left(\frac{a}{2}\right)}^{\tan\left(\frac{b}{2}\right)} \frac{1-r^2}{(1+r)^2t^2+(1-r)^2}\ \mathrm{d}t}.$$

4. On obtient donc :

$$\int_a^b P_r(\theta)\ \mathrm{d}\theta = 2\int_{\tan\left(\frac{a}{2}\right)}^{\tan\left(\frac{b}{2}\right)} \frac{1-r^2}{(1-r)^2}\,\frac{1}{1+\left(\frac{1+r}{1-r}t\right)^2}\ \mathrm{d}t = 2\cdot\frac{1-r^2}{(1-r)^2}\cdot\frac{1-r}{1+r}\left[\mathrm{Arctan}\left(\frac{1+r}{1-r}t\right)\right]_{\tan\left(\frac{a}{2}\right)}^{\tan\left(\frac{b}{2}\right)}.$$

En faisant tendre a vers $-\pi$ et b vers π, les deux bornes de la nouvelle intégrale tendent vers $-\infty$ et $+\infty$, donc, puisque $\frac{1+r}{1-r} > 0$, les deux arctangentes convergent vers $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ respectivement. Ainsi :

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)\ \mathrm{d}\theta = 2\cdot\left(\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi}.$$

Partie II – Deuxième méthode pour le calcul de $\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)\ \mathrm{d}\theta$

1. D'après la formule de sommation des séries géométriques (valide ici car $r < 1$, ce qui prouve au passage la convergence des séries)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta n} = \frac{1}{1 - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} r^n e^{-\mathrm{i}\,\theta n} = \frac{r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}}{1 - r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}}.$$

Il vient donc :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta n} = \frac{1}{1 - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}} + \frac{r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}}{1 - r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}} = \frac{1 - r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta} + r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta} - r^2}{1 - r^2 - 2r\cos(\theta)}.$$

Ainsi, d'après la question I-1, on o bien prouvé que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta n}.$$

2. On a, d'après l'inégalité triangulaire (passer à la limite dans l'inégalité triangulaire obtenue sur des sommes partielle), et d'après la convergence de ces intégrales :

$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta n} \right| \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} r^n = \frac{r^{N+1}}{1-r}.$$

On en déduit que

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta n} \right) \mathrm{d}\theta \right| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta n} \right| \mathrm{d}\theta \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^{N+1}}{1-r}\ \mathrm{d}\theta = 2\pi \cdot \frac{r^{N+1}}{1-r}.$$

Ot, puisque $r \in]-1, 1[$, $\lim\limits_{N \to +\infty} 2\pi \cdot \dfrac{r^{N+1}}{1-r} = 0$. On déduit du théorème d'encadrement que

$$\boxed{\lim_{N \to +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta n} \right) \mathrm{d}\theta = 0}$$

3. On fait de même, pour $M < 0$:

$$\left| \sum_{n=-\infty}^{M-1} r^{|n|} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta n} \right| \leqslant \sum_{n=-\infty}^{M-1} r^{|n|} = \sum_{n=-M+1}^{+\infty} r^n \leqslant \frac{r^{-M+1}}{1-r}.$$

De la même manière que dans la question précédente, cette dernière expression tendant vers 0 lorsque M tend vers $-\infty$, on obtient :

$$\boxed{\lim_{M \to -\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{M-1} r^{|n|} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta n} \right) \mathrm{d}\theta = 0}$$

4. On obtient alors par linéarité de l'intégrale (sur une somme *finie* de 3 termes), pour $M < 0$ et $N > 0$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta n} \right) \mathrm{d}\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{M-1} r^{|n|} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta n} \right) + \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=M}^{N} r^{|n|} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta n} \right) + \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} r^{|n|} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta n} \right).$$

L'intégrale du membre de gauche est bien définie (la fonction P_r étant continue sur $[-\pi, \pi]$). Dans le terme de droite deux des termes tendent vers 0 lorsque $N \to +\infty$ et $M \to +\infty$, d'après la question précédente. Donc le troisième admet un limite, égal au premier membre. On en déduit que

$$\lim_{N \to +\infty} \lim_{M \to +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=M}^{N} r^{|n|} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta n} \right) \mathrm{d}\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta n} \right) \mathrm{d}\theta.$$

Par ailleurs, l'intégrale étant linéaire (finiment) on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=M}^{N} r^{|n|} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta n} \right) \mathrm{d}\theta = \sum_{n=M}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} r^{|n|} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta n}\ \mathrm{d}\theta.$$

L'égalité ci-dessus se réécrit donc

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta n}\right)\,\mathrm{d}\theta = \lim_{N\to+\infty}\lim_{M\to+\infty}\sum_{n=M}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} r^{|n|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta n}\,\mathrm{d}\theta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} r^{|n|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta n}\,\mathrm{d}\theta.}$$

Or, pour tout $n \neq 0$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} r^{|n|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta n}\,\mathrm{d}\theta = \frac{r^{|n|}}{\mathrm{i}\,n}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

et pour $n = 0$, on obtient

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\,\mathrm{d}\theta = 2\pi.$$

Ainsi,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} r^{|n|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta n}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2\pi}.$$

Partie III – Troisième méthode pour le calcul de $\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)\,\mathrm{d}\theta$

1. (a) Pour $z \in \mathbb{R}_+$, $|z| = z$ et $\mathrm{Arg}(z) = 0$, d'où l'égalité $\boxed{\ln_{\mathbb{C}_f}(z) = \ln(z)}$.

   (b) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Im}(z) \in]-\pi,\pi[$. On a alors, en notant (une fois n'est pas coutume) $z = a + \mathrm{i}\,b$:

   $$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,b},$$

   de quoi il résulte que $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^a$ et $\mathrm{Arg}(\mathrm{e}^z) = b$ (car $b \in]-\pi,\pi[$. Ainsi, e^z est bien dans $\mathbb{C}_f$ et

   $$\ln(\mathrm{e}^z) = \ln(\mathrm{e}^a) + \mathrm{i}\,b = a + \mathrm{i}\,b, \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{\ln(e^z) = z}.$$

   Si $\mathrm{Im}(z) \notin]-\pi,\pi[$,
   - soit $\mathrm{Im}(z) equiv \pi \mod 2\pi$, et dans ce cas, $\mathrm{e}^z \notin \mathbb{C}_f$, donc le logarithme n'est pas défini,
   - soit $\mathrm{Im}(z) \not\equiv \pi \mod 2\pi$, et il existe un unique entier k tel que $\mathrm{Im}(z) - 2k\pi \in]-\pi,\pi[$. On a alors $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z-2\,\mathrm{i}\,k\pi}$, et en appliquant le résultat précédent, il vient donc

   $$\boxed{\ln(\mathrm{e}^z) = z - 2\,\mathrm{i}\,k\pi}.$$

   (c) Soit $z \in \mathbb{C}_f$, $z' \in \mathbb{C}_f$ et supposons que $\mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(z') \in]-\pi,\pi[$. Ainsi, $\mathrm{Arg}(zz') = \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(z')$ (sinon ce ne serait vrai que modulo 2π). On a donc en particulier $zz' \in \mathbb{C}_f$, et

   $$\ln(zz') = \ln(|zz'|) + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(zz') = \ln|z| + \ln|z'| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z) + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z') = \ln(z) + \ln(z').$$

   Ainsi, sous les hypothèses données, $\boxed{\ln(zz') = \ln(z) + \ln(z')}$.

2. (a)
   - Notons $\varphi(t) = a(t) + \mathrm{i}\,b(t)$, où a et b sont réelles. Ainsi, a et b sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et ne s'annulent pas simultanément (car φ est à valeurs dans $\mathbb{C}_f$ qui ne contient pas 0). Ainsi, la racine étant dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction composée $t \mapsto \sqrt{a^2(t) + b^2(t)}$ est dérivable sur I.
     Ainsi, $\boxed{r \text{ est dérivable sur } I}$.
   - Soit $t_0 \in I$ tel que $\theta(t_0) \in]0,\pi[$. Alors $b(t_0) > 0$, et par continuité de b, il existe η tel que $|t - t_0| < \eta$ implique $b(t) > 0$, donc $\theta(t) \in]0,\pi[$. Alors, pour tout $t \in J = I \cap]t_0 - \eta, t_0 + \eta[$, on peut écrire

     $$\theta(t) = \mathrm{Arccos}\left(\frac{a(t)}{r(t)}\right),$$

     et comme φ n'est pas réelle sur J, $\frac{a(t)}{r(t)} \in]0,\pi[$. Comme Arccos est dérivable sur $]0,\pi[$, on en déduit que φ est dérivable sur $I \cap]t_0 - \eta, t_0 + \eta[$ (on peut l'affirmer pour φ et non seulement pour sa restriction, car on s'est restreint à une intersection de I avec un intervalle ouvert : on n'a pas de problème de recollement). En particulier, φ est dérivable en t_0.

- Si t_0 est tel que $\theta(t_0) \in]-\pi, 0[$, on exprime de même φ au voisinage de t_0 sous la forme :

$$\varphi(t) = -\text{Arccos}\left(\frac{a(t)}{r(t)}\right),$$

  et on parvient à la même conclusion.
- Si t_0 est tel que $\theta(t_0) = 0$, alors on peut trouver cette fois un voisinage de t_0 tel que θ reste dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, et on peut alors exprimer φ sous la forme

$$\varphi(t) = \text{Arcsin}\left(\frac{b(t)}{r(t)}\right),$$

  d'où encore la même conclusion (on aurait aussi pu utiliser l'Arctan pour cet intervalle).

Ainsi, $\boxed{r \text{ et } \theta \text{ sont dérivables sur } I.}$

(b) Comme on a

$$\ln \circ \varphi = \ln \circ r + \mathrm{i}\,\theta,$$

la fonction $\ln \circ \varphi$ est alors dérivable (on se ramène aux règles de composition, et à la dérivabilité du logarithme réek usuel). De plus, on obtient (ici aussi, on utilise les règles connues pour le logarithme réel) :

$$(\ln \circ \varphi)' = \frac{r'}{r} + \mathrm{i}\,\theta'.$$

Or,

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + \mathrm{i}\,r\theta'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}} = \frac{r'}{r} + \mathrm{i}\,\theta'$$

et on aboutit bien à $\boxed{(\ln \circ \varphi)' = \frac{\varphi'}{\varphi}}$.

3. On factorise par le demi-angle :

$$\forall \theta \in]-\pi, \pi[, \quad \frac{1 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}}{1 - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}} + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}} - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}}.$$

À peu de chose près, on reconnait une expression du type $\frac{\varphi'}{\varphi}$, avec

$$\varphi(\theta) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}} - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}.$$

Pour pouvoir utiliser le résultat précédent, il faut bien s'assurer que φ est à valeurs dans $\mathbb{C}_f$. En effet, pour tout $\theta \in]-\pi, \pi[$,

$$\text{Re}\,(\varphi(\theta)) = (1 - r)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0,$$

et $\varphi(-\pi) = (1 + r)\,\mathrm{i}$ et $\varphi(\pi) = -(1 + r)\,\mathrm{i}$, qui ne sont pas dans $\mathbb{R}_-$.

On peut donc utiliser la question précédente : $\boxed{\theta \mapsto \frac{-2}{\mathrm{i}} \ln\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}} - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}\right) \text{ est une primitive de } \theta \mapsto \frac{1 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}}{1 - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}}}$.

4. On retrouve à partir de cela la valeur de l'intégrale de P_r :

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta) = \text{Re}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}}{1 - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}}\ \mathrm{d}\theta\right) = \text{Re}\left(-\frac{2}{\mathrm{i}}\Big[\ln\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}} - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}\right)\Big]_{-\pi}^{\pi}\right) = \text{Re}\left(-\frac{2}{\mathrm{i}}\left(\ln(-\mathrm{i}(1 + r)) - \ln(\mathrm{i}(1 + r))\right)\right).$$

Comme $\text{Arg}(\mathrm{i}) + \text{Arg}(1 + r) \in]-\pi, \pi[$, et de même pour $\text{Arg}(-\mathrm{i}) + \text{Arg}(1 + r)$, on obtient alors :

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)\ \mathrm{d}\theta = \text{Re}\left(-\frac{2}{\mathrm{i}}\left(-\ln(\mathrm{i}) + \ln(1 + r) - \ln(\mathrm{i}) - \ln(1 + r)\right)\right).$$

On utilise enfin le fait que $\ln(\mathrm{i}) = \ln(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}}) = \mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}$, pour conclure que

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)\ \mathrm{d}\theta = 2\pi}.$$

Partie IV – Calcul de l'intégrale de Poisson $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \ln(r^2 - 2r\cos(\theta) + 1)\ \mathrm{d}\theta$.

1. (a) f_θ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$, et

$$\forall r \in]-1,1[,\quad f_\theta'(r) = \frac{2r - 2\cos(\theta)}{r^2 - 2r\cos(\theta) + 1} \qquad \text{et} \qquad f_r''(\theta) = \frac{-2r^2 + 4r\cos(\theta) + 2 + 4\cos^2(\theta)}{(r^2 - 2r\cos(\theta) + 1)^2}.$$

Or, $|r| < 1$ et $|\cos(\theta)| < 1$, d'où, par un petit coup d'inégalité triangulaire :

$$\boxed{|f_r''(\theta)| \leqslant \frac{12}{(r^2 - 2|r| + 1)^2} = \frac{12}{(1-|r|)^4}}.$$

.

(b) Soit $R \in]0,1[$, $r \in]-R,R[$, et h tel que $r + h \in]-R,R[$. Alors pour tout $x \in [r, r+h]$ (ou $[r+h, r]$), on a

$$|f_\theta''(x)| \leqslant \frac{12}{(1-|x|)^4} \leqslant \frac{12}{(1-R)^4}.$$

Ainsi, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$\boxed{\left|f_\theta(r+h) - f_\theta(r) - hf_\theta'(r)\right| \leqslant \frac{h^2}{2} \times \frac{12}{(1-R)^2}}$$

(c) En divisant l'inégalité précédente par $|h| > 0$, il vient

$$\left|\frac{f_\theta(r+h) - f_\theta(r)}{h} - f_\theta'(r)\right| \leqslant \frac{|h|}{2} \times \frac{12}{(1-R)^4},$$

puis, en intégrant :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{f_\theta(r+h) - f_\theta(r)}{h} - f_\theta'(r)\right|\ \mathrm{d}\theta \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|h|}{2} \times \frac{12}{(1-R)^4}\ \mathrm{d}\theta = |h| \times \frac{12\pi}{(1-R)^4},$$

et en utilisant l'inégalité triangulaire et la linéarité de l'intégrale, il vient donc :

$$\left|\frac{\psi(r+h) - \psi(r)}{h} - \int_{-\pi}^{\pi} f_\theta'(r)\ \mathrm{d}\theta\right| \leqslant |h| \times \frac{12\pi}{(1-R)^4}.$$

Le majorant tend vers 0 lorsque $|h|$ tend vers 0 donc, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{h\to 0} \left(\frac{\psi(r+h) - \psi(r)}{h} - \int_{-\pi}^{\pi} f_\theta'(r)\ \mathrm{d}\theta\right) = 0,$$

ce qui affirme l'existence de la limite de $\dfrac{\psi(r+h) - \psi(r)}{h}$, donc la dérivabilité de ψ, et donne légalité :

$$\boxed{\psi'(r) = \int_{-\pi}^{\pi} f_\theta'(r)\ \mathrm{d}\theta = 2\int_{-\pi}^{\pi} \frac{r - \cos(\theta)}{r^2 - 2r\cos(\theta) + 1}\ \mathrm{d}\theta}.$$

2. (a) Par un changement de variable $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, on obtient :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(\theta)}{r^2 - 2r\cos(\theta) + 1}\ \mathrm{d}\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2(1-t^2)}{((r-1)^2 + (r+1)^2t^2)(1+t^2)}\ \mathrm{d}t.$$

On fait une décomposition en éléments simples, en remarquant qu'on peut la faire sur la variable $T = t^2$. Il vient alors (je vous épargne les calculs intermédiaires) :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(\theta)}{r^2 - 2r\cos(\theta) + 1}\ \mathrm{d}\theta = \left(r + \frac{1}{r}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1-r)^2 + (1+r)^2t^2} - \frac{1}{r}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$$

Vous justifierez l'année prochaine qu'on peut faire ce changement de variable directement avec les bornes infinies. Sinon, commencez par le faire sur un intervalle restreint, comme dans la partie I. On obtient alors :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(\theta)}{r^2 - 2r\cos(\theta) + 1}\ \mathrm{d}\theta = \left(r + \frac{1}{r}\right) \cdot \frac{1}{(1-r)^2} \cdot \frac{1-r}{1+r}\Big[\operatorname{Arctan}\left(\frac{1+r}{1-r}t\right)\Big]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{r}\Big[\operatorname{Arctan}(t)\Big]_{-\infty}^{+\infty}.$$

En utilisant les limites de Arctan en $+\infty$ et $-\infty$, on obtient alors, après simplification :

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(\theta)}{r^2 - 2r\cos(\theta) + 1}\ \mathrm{d}\theta = \frac{2r}{1-r^2}\pi}.$$

(b) On peut aussi faire ce calcul en adaptant l'argument de la partie II. On a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(\theta)(1-r^2)}{r^2-2r\cos(\theta)+1}\ \mathrm{d}\theta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |r|^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\theta} \cos(\theta)\ \mathrm{d}\theta,$$

l'interversion de la somme et de l'intégrale se justifiant exactement de la même façon que dans la partie II. Or, d'après les formules d'Euler,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\theta} \cos(\theta)\ \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}\ \mathrm{d}\theta.$$

Toutes ces intégrales sont nulles sauf si $n-1=0$ ou $n+1=0$. On obtient donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(\theta)(1-r^2)}{r^2-2r\cos(\theta)+1}\ \mathrm{d}\theta = \pi r + \pi r = 2\pi r \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(\theta)}{r^2-2r\cos(\theta)+1}\ \mathrm{d}\theta = \frac{2\pi r}{1-r^2}}.$$

3. En utilisant le calcul de $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)\ \mathrm{d}\theta$ effectué dans les parties précédentes, il vient donc, pour tout $r \in]-1,1[$:

$$\psi'(r) = 2\left(\frac{r}{1-r^2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{r^2-2r\cos(\theta)+1} - \frac{2r\pi}{1-r^2}\right) = 0.$$

Ainsi, $\boxed{\psi' = 0 \text{ sur }]-1,1[}$, donc ψ est constante. De façon triviale, $\psi(0)=0$, donc

$$\boxed{\forall r \in]-1,1[,\quad \int_{-\pi}^{\pi} \ln(r^2-2r\cos(\theta)+1)\ \mathrm{d}\theta = 0}.$$