

DM n° 12 : Suites

Corrigé de l'exercice 1 –

1. Soit (a_n) une suite de complexes

- (a) Soit $\varepsilon > 0$. Puisque (u_n) est de limite ℓ , il existe un rang n_0 tel que pour tout $n > n_0$, $|a_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, pour tout $n > n_0$, cette inégalité est vérifiée pour tous les indices $k \in \llbracket n_0 + 1, n \rrbracket$, et en les sommant, on obtient, par inégalité triangulaire :

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=n_0+1}^n (a_k - \ell) \right| < \frac{1}{n} \sum_{k=n_0+1}^n |a_k - \ell| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=n_0+1}^n \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

- (b) Puisque n_0 est alors fixé (à ε fixé), la somme $\sum_{k=n_0+1}^n (a_k - \ell)$ est constante. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0} (a_k - \ell) = 0.$$

- (c) On en déduit l'existence d'un entier n_1 , qu'on peut choisir plus grand que n_0 , tel que pour tout $n \geq n_1$,

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0} (a_k - \ell) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Par inégalité triangulaire, en utilisant 1(a), on obtient, pour tout $n \geq n_1$:

$$\left| \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right) - \ell \right| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0} (a_k - \ell) \right| \leq \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0} (a_k - \ell) \right| + \left| \frac{1}{n} \sum_{k=n_0+1}^n (a_k - \ell) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ainsi, par définition de la limite,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = \ell}.$$

2. On suppose maintenant que (a_n) est une suite de réels tendant vers $+\infty$ (le cas $-\infty$ s'y ramène en considérant $(-a_n)$). On propose deux façons de rédiger le calcul, l'une en adaptant complètement ce qui précède, l'autre en exploitant le cas fini.

- Dans un premier temps, on adapte le raisonnement précédent. Soit $A \in \mathbb{R}$. On dispose de n_0 tel que pour tout $n > n_0$, $a_n > A + 1$. Ainsi, pour tout $n \geq n_0$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0} a_k + \frac{n - n_0}{n} (A + 1).$$

Le minorant tend vers $A + 1$. Ainsi, puisque $A < A + 1$, il existe $n_1 \geq n_0$ tel que pour tout $n \geq n_1$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0} a_k + \frac{n - n_0}{n} (A + 1) > A.$$

On en déduit que pour tout $n \geq n_1$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k > A.$$

Ainsi, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = +\infty}.$

- On peut aussi rédiger cela en se ramenant au cas fini. On pose $A \in \mathbb{R}$, et on considère la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \min(a_n, A + 1).$$

Puisque (a_n) tend vers $+\infty$, (b_n) est stationnaire de valeur $A + 1$ et tend donc vers $A + 1$. Ainsi, d'après le cas fini du théorème de Césàro,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b_k \longrightarrow A + 1 > A.$$

Il existe donc un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \gg A,$$

ce qui permet à nouveau de conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = +\infty$.

Corrigé du problème 1 – Autour du lemme de la moyenne de Césàro

Partie I – Variantes du lemme de Césàro

- (a) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergeant vers un réel ℓ .
 - Supposons dans un premier temps que $\ell = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
On a alors, pour tout $n \geq N$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{S_n} \left| \sum_{k=0}^n a_k u_k \right| &\leq \frac{1}{S_n} \sum_{k=0}^{N-1} |a_k u_k| + \frac{1}{S_n} \sum_{k=N}^n |a_k| |u_k| && \text{(inégalité triangulaire)} \\ &\leq \frac{1}{S_n} \sum_{k=0}^{N-1} |a_k u_k| + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{\sum_{k=N}^n a_k}{\sum_{k=0}^n a_k} \\ &\leq \frac{1}{S_n} \sum_{k=0}^{N-1} |a_k u_k| + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

par positivité des termes a_k . Par ailleurs, l'entier N étant alors fixé (à ε fixé), puisque $S_n \longrightarrow +\infty$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{S_n} \sum_{k=0}^{N-1} |a_k u_k| = 0,$$

donc il existe N' , qu'on peut prendre supérieur à N , tel que pour tout $n \geq N'$,

$$\frac{1}{S_n} \sum_{k=0}^{N-1} |a_k u_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On obtient donc, pour tout $n \geq N'$:

$$\frac{1}{S_n} \left| \sum_{k=0}^n a_k u_k \right| \leq \varepsilon,$$

soit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{S_n} \sum_{k=0}^n a_k u_k = 0$.

- Le cas général en découle, en appliquant le point précédent à la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - \ell$. En effet, $v_n \longrightarrow 0$, et :

$$\left(\frac{1}{S_n} \sum_{k=0}^n a_k u_k \right) - \ell = \frac{1}{S_n} \left(\sum_{k=0}^n a_k u_n - \sum_{k=0}^n a_k \ell \right) = \frac{1}{S_n} \sum_{k=0}^n a_k v_n \longrightarrow 0.$$

Donc $\frac{1}{S_n} \sum_{k=0}^n a_k u_k \longrightarrow \ell$

- (b) • On suppose maintenant que $u_n \rightarrow +\infty$. Ainsi, étant donné $A > 0$, il existe $N \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \geq 2A$. On a alors, pour tout $n \geq N$

$$\begin{aligned} \frac{1}{S_n} \sum_{k=0}^n a_k u_k &= \frac{1}{S_n} \sum_{k=0}^{N-1} a_k u_k + \frac{1}{S_n} \sum_{k=N}^n a_k u_k \\ &\geq \frac{1}{S_n} \sum_{k=0}^{N-1} a_k u_k + \frac{1}{S_n} \sum_{k=N}^n 2a_k A \\ &= \frac{1}{S_n} \left(\sum_{k=0}^{N-1} a_k u_k - 2A \sum_{k=0}^{N-1} a_k \right) + 2A. \end{aligned}$$

Or, A étant fixé, et N choisi, puisque $S_n \rightarrow +\infty$ on obtient $\frac{1}{S_n} \left(\sum_{k=0}^{N-1} a_k u_k - 2A \sum_{k=0}^{N-1} a_k \right) \rightarrow 0$, et donc, il existe N' , qu'on peut choisir supérieur à N , tel que pour tout $n \geq N'$,

$$\frac{1}{S_n} \left(\sum_{k=0}^{N-1} a_k u_k - 2A \sum_{k=0}^{N-1} a_k \right) \geq -A.$$

Ainsi, pour tout $n \geq N'$, on a :

$$\frac{1}{S_n} \sum_{k=0}^n a_k u_k \geq A.$$

On a donc montré que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{S_n} \sum_{k=0}^n a_k u_k = +\infty$.

- Le cas $u_n \rightarrow -\infty$ s'obtient en appliquant le résultat précédent à $(v_n) = (-u_n)$.
- (c) Le raisonnement fait dans la première question est tout-à-fait valable dans $\mathbb{C}$ également.
- (d) Lorsque (a_k) est constante égale à 1, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = n + 1$, donc le résultat obtenu est le suivant : si (u_n) est une suite telle que $u_n \rightarrow \ell$ (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), alors $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \rightarrow \ell$. C'est le lemme de Cesàro classique.
- (e) On applique le résultat précédent à la suite (a_n) définie par $a_n = \frac{1}{2^n}$ pour tout n . On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1.$$

D'après la première question (exprimée au rang $n - 1$), si $u_n \rightarrow \ell$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n - 1} \sum_{k=0}^{n-1} 2^k u_k = \ell.$$

Puisque $2^n - 1 \underset{+\infty}{\sim} 2^n$, on obtient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n-1} 2^k u_k = \ell$

Nous avons déjà rencontré cette variante de Cesàro dans un exercice.

2. (a) • Théorème de sommation des équivalents.

On peut déduire du théorème de Cesaro le résultat suivant (théorème de sommation des équivalents). Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites de réels strictement positifs. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{k=1}^n b_k.$$

Si $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$ et $\sum a_n$ diverge, alors $A_n \underset{+\infty}{\sim} B_n$.

Démonstration. En effet, il existe ε_n tendant vers 1 tel que $b_n = a_n \varepsilon_n$. La question 1(a), appliquée avec

$u_n = \varepsilon_n$, nous assure alors que $\sum_{k=1}^n a_k \varepsilon_k \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^n a_k$, soit $A_n \underset{+\infty}{\sim} B_n$.

• **Cas** $\alpha \neq 0$

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$T_n = \sum_{k=1}^n u_k, \quad S_n = \sum_{k=1}^n k u_k \quad \text{et} \quad U_n = \sum_{k=1}^n T_k.$$

Puisque $\alpha \neq 0$, l'hypothèse se traduit par l'équivalence $T_n \sim_{+\infty} \alpha n u_n$. Par ailleurs, (T_n) est strictement positive, donc (U_n) est strictement croissante, et converge donc dans $\overline{\mathbb{R}}$. Si (U_n) converge dans $\mathbb{R}$, vers un réel ℓ alors

$$T_n = U_n - U_{n-1} \longrightarrow \ell - \ell = 0.$$

Or, les (u_k) étant strictement positifs, (T_n) est elle-même strictement positive et (strictement) croissante, donc ne peut pas converger vers 0. On en déduit que $U_n \longrightarrow +\infty$.

Plus généralement, cet argument montre que si (u_n) ne tend pas vers 0, $\sum u_n$ ne peut pas converger. On dit dans ce cas que $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

Nous sommes donc dans les conditions d'application du théorème de sommation des équivalents, qui nous assure que

$$\alpha S_n = \alpha \sum_{k=1}^n k a_k \sim_{+\infty} \sum_{k=1}^n T_k = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^k u_\ell = \sum_{\ell=1}^n \sum_{k=\ell}^n u_\ell = \sum_{\ell=1}^n (n - \ell + 1) u_\ell$$

Or,

$$\sum_{\ell=1}^n (n - \ell + 1) u_\ell = (n + 1) T_n - \sum_{\ell=1}^n \ell u_\ell = (n + 1) T_n - S_n$$

On a donc $\alpha S_n \sim_{+\infty} (n + 1) T_n - S_n$, et pour pouvoir passer des termes de part et d'autre, on revient aux o :

$$\alpha S_n = (n + 1) T_n - S_n + o(S_n) \quad \text{donc:} \quad (\alpha + 1) S_n = (n + 1) T_n + o(S_n).$$

Comme $\alpha + 1 \neq 0$, on en déduit que

$$S_n \sim_{+\infty} \frac{n T_n}{\alpha + 1} \quad \text{puis:} \quad \frac{1}{n^2 u_n} S_n \sim_{+\infty} \frac{1}{(\alpha + 1) n u_n} T_n \sim_{+\infty} \frac{\alpha}{\alpha + 1}.$$

On a donc bien obtenu que

$$\boxed{\frac{S_n}{n^2 u_n} \rightarrow \frac{\alpha}{\alpha + 1}}$$

• **Cas** $\alpha = 0$

De même, en prenant cette fois $u_n = \varepsilon_n \rightarrow 0$ dans la question 1a, on montre que si $a_n = o(b_n)$ et $\sum b_n$ diverge (les séries étant à termes positifs), alors les sommes partielles vérifient $A_n = o(B_n)$.

Or, on a cette fois $T_n = o(n u_n)$. De plus, pour la même raison que plus haut, $\sum T_n$ diverge, donc aussi $\sum n u_n$. En effet, à partir d'un certain rang, on a $n u_n \geq T_n$, ce qui permet d'utiliser le TCSTP.

Ainsi, on obtient $\sum_{k=1}^n T_k = o(S_n)$, donc par le même calcul que ci-dessus, $(n + 1) T_n - S_n = o(S_n)$, puis $S_n \sim_{+\infty} n T_n$. On conclut comme précédemment que

$$\frac{S_n}{n^2 u_n} \sim_{+\infty} \frac{T_n}{n u_n} \rightarrow 0 = \frac{0}{0 + 1}.$$

Ainsi, dans les deux cas, on obtient $\boxed{\frac{S_n}{n^2 u_n} \rightarrow \frac{\alpha}{\alpha + 1}}$

- (b) • Montrons dans un premier temps qu'avec les hypothèses données, (u_n) est de signe constant à partir d'un certain rang. Soit, dans la définition de la limite, $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$. On dispose alors d'un entier N_1 tel que pour tout $n \geq N_1$,

$$\frac{\alpha}{2} \leq \frac{1}{n u_n} \sum_{k=1}^n u_k \leq \frac{3\alpha}{2}.$$

Soit $N_2 = \lfloor \frac{2}{\alpha} \rfloor$ (vous comprendrez plus loin pourquoi), et $N = \max(N_1, N_2)$.

* Soit $n \geq N$. Supposons que $u_n > 0$ et $u_{n+1} < 0$. Alors

$$\frac{\alpha}{2} n u_n \leq \sum_{k=1}^n u_k \leq \frac{3\alpha}{2} n u_n \quad \text{et} \quad -\frac{\alpha}{2} (n + 1) u_{n+1} \leq -\sum_{k=1}^{n+1} u_k \leq -\frac{3\alpha}{2} (n + 1) u_{n+1},$$

d'où, en sommant :

$$\frac{\alpha}{2}(nu_n - (n+1)u_{n+1}) \leq -u_{n+1} \leq \frac{3\alpha}{2}(nu_n - (n+1)u_{n+1})$$

Ainsi :

$$\left((n+1)\frac{\alpha}{2} - 1\right)u_{n+1} \geq n\frac{\alpha}{2}u_n > 0.$$

D'après le choix de N_2 (vous comprenez maintenant pourquoi), $(n+1)\frac{\alpha}{2} - 1 > 0$, donc $u_{n+1} > 0$ d'où une contradiction.

* De même, en supposant, pour $n \geq N$, $u_n < 0$ et $u_{n+1} > 0$, on obtient cette fois :

$$-\frac{\alpha}{2}nu_n \leq -\sum_{k=1}^n u_k \leq -\frac{3\alpha}{2}nu_n \quad \text{et} \quad \frac{\alpha}{2}(n+1)u_{n+1} \leq \sum_{k=1}^{n+1} u_k \leq \frac{3\alpha}{2}(n+1)u_{n+1},$$

d'où, en sommant :

$$\frac{\alpha}{2}((n+1)u_{n+1} - nu_n) \leq u_{n+1} \leq \frac{3\alpha}{2}((n+1)u_{n+1} - nu_n)$$

Ainsi :

$$\left((n+1)\frac{\alpha}{2} - 1\right)u_{n+1} \leq n\frac{\alpha}{2}u_n < 0.$$

et comme $(n+1)\frac{\alpha}{2} - 1 > 0$ par choix de N , cela contredit le fait que $u_{n+1} > 0$.

- * On en déduit qu'à partir du rang N , u_n est de signe constant. Quitte à remplacer (u_n) par $(-u_n)$ (ce qui ne modifie pas les valeurs des sommes étudiées), on peut supposer que (u_n) est positif à partir d'un certain rang.
- On peut montrer que le théorème de sommation des équivalents reste vrai si les suites ne sont strictement positives qu'à partir d'un certain rang. Pour commencer, remarquons que la divergence de $\sum a_k$ se fait encore vers $+\infty$, puisqu'elle est à termes positifs à partir d'un certain rang (donc sa somme partielle est croissante à partir d'un certain rang).

Notons n_0 un rang tel que pour tout $n > n_0$, a_k et b_k soient strictement positifs, et notons σ_k le signe de a_k (i.e. égal à 1 si $a_k > 0$ et -1 si $a_k < 0$), et de même τ_k le signe de b_k . On a alors, pour $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sigma_k a_k &= \sum_{k=1}^{n_0} \sigma_k a_k + \sum_{k=n_0+1}^n a_k \\ &= \sum_{k=1}^{n_0} (\sigma_k - 1)a_k + \sum_{k=1}^n a_k \\ &= A_n + o(A_n) \underset{+\infty}{\sim} A_n, \end{aligned}$$

puisque $A_n \rightarrow +\infty$. Le TCSTP assure que $\sum_{n \geq n_0} b_k$ diverge aussi (et nécessairement vers $+\infty$, la somme partielle étant croissante). Ainsi, on obtient de la même façon :

$$\sum_{k=1}^n \tau_k b_k \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^n b_k$$

De plus, puisque pour n assez grand $\sigma_n a_n = a_n$ et $\tau_n b_n = b_n$, on a aussi $\sigma_n a_n \underset{+\infty}{\sim} \tau_n b_n$. Le théorème de sommation des équivalents amène alors :

$$A_n \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^n \sigma_k a_k \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^n \tau_k b_k \underset{+\infty}{\sim} B_n.$$

- La démonstration précédente s'adapte alors parfaitement, à condition de vérifier qu'avec nos nouvelles hypothèses, on a toujours $\sum T_k \rightarrow +\infty$. Cela provient du fait qu'à partir d'un certain rang, T_n est strictement positive (équivalente à une suite ultimement strictement positive), et strictement croissante (somme partielle d'une série à termes ultimement strictement positifs), donc de limite non nulle. Donc la somme partielle (U_n) de $\sum T_k$ est ultimement strictement croissante, et diverge ($T_{n+1} = U_{n+1} - U_n$ ne tendant pas vers 0). Ainsi, $U_n \rightarrow +\infty$.

En adaptant alors le calcul précédent, on obtient bien

$$\boxed{\frac{1}{n^2 u_n} \sum_{k=1}^n k u_k \longrightarrow \frac{\alpha}{1+\alpha}}$$

(c) En appliquant alors le résultat de la question 2(b) à la suite (nu_n) , il vient

$$\frac{1}{n^3 u_n} \sum_{k=1}^n n^2 u_k \longrightarrow \frac{\frac{\alpha}{1+\alpha}}{1 + \frac{\alpha}{1+\alpha}} = \frac{\alpha}{1+2\alpha},$$

puis, en appliquant à nouveau 2(b) à la suite $(n^2 u_n)$:

$$\frac{1}{n^4 u_n} \sum_{k=1}^n n^3 u_k \longrightarrow \frac{\frac{\alpha}{1+2\alpha}}{1 + \frac{\alpha}{1+2\alpha}} = \frac{\alpha}{1+3\alpha}.$$

On conjecture alors que pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\frac{1}{n^{p+1} u_p} \sum_{k=1}^n k^p u_k \longrightarrow \frac{\alpha}{1+p\alpha}},$$

ce qu'on démontre sans peine par récurrence, l'hérédité se faisant à l'aide de la question 2(b).

La cas de la suite (u_n) constante de valeur 1 est un classique. Qu'obtient-on dans ce cas ? Vérifiez-le pour les petites valeurs de p , et démontrez le cas général par une méthode plus directe !

Partie II – Une application classique du lemme de Cesàro

1. (a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g'(x) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(x) + \cos(x)).$$

Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\operatorname{ch}(x) > 1$ et $\cos(x) \geq -1$, on obtient $g'(x) > 0$, donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (donc aussi sur $\mathbb{R}_+$). De plus, g est continue sur cet intervalle, et $g(0) = 0$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

Ainsi, d'après le théorème de la bijection, $\boxed{g \text{ induit une bijection de } \mathbb{R}_+ \text{ dans } \mathbb{R}_+}$.

(b) Soit $x \in [-1, 1]$. La fonction $h_1 = \sin$ est de classe $\mathcal{C}^6$ sur cet intervalle, et $|h_1^{(6)}| \leq 1$ sur $[-1, 1]$. Ainsi, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$\left| \sin(x) - h_1(0) - x h_1'(0) - \frac{x^2}{2!} h_1''(0) - \frac{x^3}{3!} h_1^{(3)}(0) - \frac{x^4}{4!} h_1^{(4)}(0) - \frac{x^5}{5!} h_1^{(5)}(0) \right| \leq \frac{x^6}{6!},$$

et donc

$$\left| \sin(x) - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} \right| \leq \frac{x^6}{6!},$$

En particulier, si v_n est une suite de limite nulle il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $v_n \in [-1, 1]$. On a alors, pour tout $n \geq N$:

$$\left| \sin(v_n) - v_n + \frac{v_n^3}{3!} - \frac{v_n^5}{5!} \right| \leq v_n^5 \varepsilon_n,$$

où $\varepsilon_n = \frac{v_n}{6!} \longrightarrow 0$. Ainsi,

$$\sin(v_n) - v_n + \frac{v_n^3}{3!} - \frac{v_n^5}{5!} = o(v_n^5) \quad \text{soit:} \quad \sin(v_n) = v_n - \frac{v_n^3}{3!} + \frac{v_n^5}{5!} + o(v_n^5).$$

On démontre de même, avec la fonction $h_2 = \operatorname{sh}$, vérifiant $|h_2^{(6)}| \leq \operatorname{sh}(1)$ sur $[-1, 1]$, que pour toute suite (v_n) de limite nulle :

$$\operatorname{sh}(v_n) = v_n + \frac{v_n^3}{3!} + \frac{v_n^5}{5!} + o(v_n^5).$$

On vient tout simplement de retrouver les développements limités à l'ordre 5 de $\sin$ et sh , que bientôt vous devrez connaître (ce qui vous dispensera de cet argument). En additionnant les deux développements limités, il vient, pour (v_n) de limite nulle :

$$\boxed{g(v_n) = v_n + \frac{1}{5!} v_n^5 + o(v_n^5)}.$$

- (c) Soit (v_n) une suite de limite nulle. Puisque $g(0) = 0$, on a aussi $f(0) = 0$, et f étant continue en 0, $f(v_n)$ est de limite nulle. Ainsi, d'après la question précédente,

$$v_n = g(f(v_n)) = f(v_n) + \frac{1}{5!}f(v_n)^5 + o(f(v_n)^5), \quad \text{soit:} \quad f(v_n) = v_n - \frac{1}{5!}f(v_n)^5 + o(f(v_n)^5).$$

Mais pour toute suite (u_n) de limite nulle, $u_n^5 = o(u_n)$, donc on obtient en particulier

$$f(v_n) = v_n + o(f(v_n)) \quad \text{donc:} \quad \boxed{f(v_n) \underset{+\infty}{\sim} v_n}, \quad \text{donc:} \quad f(v_n)^5 \underset{+\infty}{\sim} v_n^5.$$

En particulier :

$$f(v_n) - v_n = -\frac{1}{5!}f(v_n)^5 + o(f(v_n)^5) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{5!}f(v_n)^5 \quad \text{donc:} \quad \boxed{f(v_n) - v_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{5!}v_n^5}.$$

On exprime ce résultat de façon plus souple sous la forme : et donc

$$\boxed{f(v_n) = v_n - \frac{1}{5!}v_n^5 + o(v_n^5)}$$

2. (a) L'intervalle $\mathbb{R}_+$ étant stable par f , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}_+$. Par ailleurs, soit $h : x \mapsto f(x) - x$. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, car f l'est (en tant que réciproque d'une fonction dérivable, de dérivée non nulle sur $\mathbb{R}_+$). Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad h'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} - 1.$$

Or, pour tout $x \geq 0$:

$$g''(x) = \frac{1}{2}(\text{sh}(x) - \sin(x)) \quad \text{et} \quad g^{(3)}(x) = \frac{1}{2}(\text{ch}(x) - \cos(x)) \geq 0$$

car $\text{ch} \geq 1$. L'inégalité est même stricte sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, g'' est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $g''(0) = 0$, donc g' est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et $g'(0) = 1$. Donc pour tout $x > 0$, $g'(x) > 1$. Comme f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(f(x)) > 1, \quad \text{puis:} \quad h'(x) < 0.$$

Ainsi, h est strictement décroissante, et $h(0) = 0$, donc h est négative sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(u_n) \leq 0$, donc $u_{n+1} \leq u_n$. Ainsi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, et minorée par 0, donc $\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est convergente.}}$

Puisque h est strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$, 0 est le seul point fixe de f . Comme f est continue sur son domaine $[0, +\infty[$, et que la convergence ne peut pas se faire vers $+\infty$, on en déduit que $\boxed{\lim u_n = 0.}$

- (b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\frac{1}{f(u_n)^\alpha} - \frac{1}{u_n^\alpha} = \frac{1 - \left(\frac{f(u_n)}{u_n}\right)^\alpha}{f(u_n)^\alpha}.$$

Or, puisque $f(u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$, $\frac{f(u_n)}{u_n} - 1 \longrightarrow 0$, et nos équivalents classiques nous soufflent dans l'oreille que :

$$\frac{1}{f(u_n)^\alpha} - \frac{1}{u_n^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-\alpha \left(\frac{f(u_n)}{u_n} - 1\right)}{f(u_n)^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-\alpha(f(u_n) - u_n)}{u_n^{\alpha+1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\alpha u_n^5}{5! u_n^{\alpha+1}} = \frac{\alpha}{5!} u_n^{4-\alpha}.$$

Ainsi, (u_n) étant de limite nulle, cette expression admet une limite finie non nulle si et seulement si $\boxed{\alpha = 4}$.

- (c) Pour $\alpha = 4$, on obtient alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_{n+1}^4} - \frac{1}{u_n^4} \right) = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}.$$

D'après le lemme de Cesàro, il vient alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}^4} - \frac{1}{u_k^4} \right) = \frac{1}{30} \quad \text{soit:} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n u_n^4} - \frac{1}{n u_0^4} \right) = \frac{1}{30},$$

et donc

$$u_n^4 \underset{+\infty}{\sim} \frac{30}{n} \quad \text{soit:} \quad \boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt[4]{\frac{30}{n}}}.$$

Partie III – Une généralisation de la partie I

1. (a) Supposons que $u_n \longrightarrow \ell$. Soit $\varepsilon > 0$. On peut alors trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
On a alors, pour tout $n \geq N$, du fait de la formule du binôme :

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k \right) - \ell \right| &= \left| \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (u_k - \ell) \right| \\ &\leq \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |u_k - \ell| \\ &\leq \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{N-1} \binom{n}{k} |u_k - \ell| + \frac{1}{2^n} \sum_{k=N}^n \binom{n}{k} \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{N-1} \binom{n}{k} |u_k - \ell| + \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{N-1} \binom{n}{k} |u_k - \ell| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Or, pour tout $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = O(n^k),$$

donc

$$\sum_{k=0}^{N-1} \binom{n}{k} |u_k - \ell| = O(n^k),$$

le nombre de termes dans la somme étant fixe. Comme $n^k = o(2^n)$, on en déduit que

$$\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{N-1} \binom{n}{k} |u_k - \ell| \longrightarrow 0.$$

Ainsi, il existe N' qu'on peut choisir supérieur à N tel que pour tout $n \geq N'$,

$$\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{N-1} \binom{n}{k} |u_k - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

et par conséquent, pour tout $n \geq N'$:

$$\left| \left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k \right) - \ell \right| \leq \varepsilon.$$

Cela prouve bien que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k \right) = \ell$.

- (b) Ce résultat n'est pas un cas particulier de la partie I, à cause de la dépendance en n du coefficient binomial.
2. (a) • Supposons T régulière.
- * En prenant (u_n) constante de valeur 1, $(v_n) = (A_n)$ et $v_n \longrightarrow 1$, donc $A_n \longrightarrow 1$.
 - * Soit $k \in \mathbb{N}$. En définissant $u_k = 1$, et $u_n = 0$ si $n \neq k$, on a $u_n \longrightarrow 0$, donc $v_n \longrightarrow 0$. Or, $(v_n) = (a_{n,k})$, donc $a_{n,k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.
- Supposons que $A_n \longrightarrow 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{n,k} \longrightarrow 0$. Soit (u_n) une suite de limite ℓ . Considérons $\varepsilon > 0$, et N tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On a alors

$$\begin{aligned} |v_n - \ell| &= \left| \left(\sum_{k=0}^n a_{n,k} u_k \right) - \ell \right| \\ &= \left| \left(\sum_{k=0}^n a_{n,k} (u_k - \ell) \right) + (A_n - 1)\ell \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{N-1} a_{n,k} |u_k - \ell| + \sum_{k=N}^n a_{n,k} |u_k - \ell| + |(A_n - 1)\ell| \\ &\leq \sum_{k=0}^{N-1} a_{n,k} |u_k - \ell| + \sum_{k=N}^n a_{n,k} \frac{\varepsilon}{2} + |(A_n - 1)\ell| \\ &\leq \sum_{k=0}^{N-1} a_{n,k} |u_k - \ell| + \frac{A_n \varepsilon}{2} + |(A_n - 1)\ell|. \end{aligned}$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, d'après les hypothèses faites sur (A_n) et les $(a_{n,k})$, et du fait que le nombre de termes dans la première somme est fixe, le majorant trouvé tend vers $\frac{\varepsilon}{2}$. Il existe donc $N' \geq N$ tel que pour tout $n \geq N'$,

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_{n,k} |u_k - \ell| + \frac{A_n \varepsilon}{2} + |(A_n - 1)\ell| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $n \geq N'$, $|v_n - \ell| \leq \varepsilon$, et donc $v_n \rightarrow \ell$. Cela montre que T est régulière.

Ainsi $\boxed{T \text{ est régulière si et seulement si } \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = 1 \text{ et pour tout } k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n,k} = 0.}$

- (b) • I-1 est obtenu en posant pour tout (n, k) tel que $0 \leq k \leq n$, $a_{n,k} = \frac{a_k}{S_n}$, qui tend vers 0 à k fixé, puisque $S_n \rightarrow 0$. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $A_n = 1 \rightarrow 1$. Le résultat I-1 est donc un cas particulier de III-2.
- II-1 est obtenu en posant pour tout (n, k) tel que $0 \leq k \leq n$, $a_{n,k} = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$. On a bien $A_n = 1 \rightarrow 1$. De plus,

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}.$$

Ainsi,

$$\frac{\binom{n}{k}}{2^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^k}{2^n k!} \rightarrow 0,$$

d'après les croissances comparées. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n,k} = 0$. Par conséquent, II-1 est un cas particulier de III-2.

Partie IV – Adaptation du lemme de Cesàro pour des valeurs d'adhérence.

1. Intuitivement, à l'infini, les termes de la suite (u_n) oscilleront entre les différentes valeurs d'adhérence, une proportion p_i des termes de la suite étant « infiniment » proches de la valeur d'adhérence a_i .

Remarque : la deuxième hypothèse découle en fait de la première. Plus précisément, l'existence de $p_i(\varepsilon)$ et sa définition suffisent à justifier l'existence de la limite en 0^+ . En effet, p_i est croissante par rapport à ε , donc réglée.

2. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \frac{1}{2} \min_{1 \leq i < j \leq p} |a_i - a_j|$, de sorte que les boules $B(a_i, \varepsilon)$ soient deux à deux disjointes.

L'ensemble des entiers n tels que $n \notin \bigcup_{i=1}^p A_{n,i}(\varepsilon)$ est fini, sinon la suite (u_n) admettrait une valeur d'adhérence

(finie ou infinie) dans $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{i=1}^p B(a_i, \varepsilon)$, ce qui n'est pas le cas. Ainsi, en notant $n_0(\varepsilon)$ le nombre de ces entiers, et $n_1(\varepsilon)$ la valeur maximale, on a (du fait que les boules $B(a_i, \varepsilon)$ sont deux à deux disjointes) :

$$\forall n \geq n_1(\varepsilon) + 1, \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p b_{n,i}(\varepsilon) = \frac{n - n_0}{n} \rightarrow 1,$$

donc $\sum_{i=1}^p p_i(\varepsilon) = 1$. En passant à la limite dans cette égalité lorsque ε tend vers 0, il vient :

$$\boxed{\sum_{i=1}^p p_i = 1.}$$

3. Soit $\varepsilon > 0$, et soit $\delta > 0$ (qu'on fixera ensuite plus précisément). On suppose comme précédemment que $\delta < \frac{1}{2} \min_{1 \leq i < j \leq p} |a_i - a_j|$ de sorte que les $A_{n,i}(\delta)$ sont deux à deux disjointes

En notant, $C(\delta) = \mathbb{N} \setminus \bigcup_{i=1}^n A_{n,i}(\delta) \subset \llbracket 0, n_1(\delta) \rrbracket$ (avec les notations précédentes), on a, pour tout $n \geq n_1(\delta) + 1$:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n u_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p \sum_{k \in A_{n,i}(\delta)} u_i + \frac{1}{n} \sum_{k \in C(\delta)} u_k.$$

Or, pour tout $k \in A_{n,i}(\delta)$, on a, par définition :

$$a_i - \delta < u_k < a_i + \delta \quad \text{donc:} \quad b_{n,i}(\delta)(a_i - \delta) < \sum_{k \in A_{n,i}(\delta)} u_k < b_{n,i}(\delta)(a_i + \delta).$$

On en déduit donc que

$$\alpha_n(\delta) + \mu_n - \eta_n(\delta) < \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n u_k < \alpha_n(\delta) + \mu_n + \eta_n(\delta),$$

où :

$$\alpha_n = \sum_{i=1}^p \frac{b_{n,i}(\delta)}{n} a_i, \quad \mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k \in C(\delta)} u_k \quad \text{et} \quad \eta_n(\delta) = \delta \sum_{i=1}^p \frac{b_{n,i}(\delta)}{n}.$$

On a donc :

$$\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^p p_i(\delta) a_i, \quad \mu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad \eta_n = \delta \sum_{i=1}^p \frac{b_{n,i}(\delta)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \delta \sum_{i=1}^p p_i(\delta) = \delta.$$

Ainsi,

$$\alpha_n(\delta) + \mu_n - \eta_n(\delta) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^p p_i(\delta) a_i - \delta \quad \text{et} \quad \alpha_n(\delta) + \mu_n - \eta_n(\delta) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^p p_i(\delta) a_i + \delta.$$

Il existe donc un rang $N(\delta)$ tel que pour tout $n \geq N(\delta)$, on ait :

$$\sum_{i=1}^p p_i(\delta) a_i - 2\delta < \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n u_k < \sum_{i=1}^p p_i(\delta) a_i + 2\delta.$$

Or,

$$\sum_{i=1}^p p_i(\delta) a_i - 2\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^p p_i a_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^p p_i(\delta) a_i + 2\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^p p_i a_i.$$

Il existe donc δ_0 tel que

$$\sum_{i=1}^p p_i a_i - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^p p_i(\delta_0) a_i - 2\delta_0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^p p_i(\delta_0) a_i + 2\delta_0 \leq \sum_{i=1}^p p_i a_i + \varepsilon.$$

On a alors, pour tout $n \geq N(\delta_0)$:

$$\sum_{i=1}^p p_i a_i - \varepsilon < \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n u_k < \sum_{i=1}^p p_i a_i + \varepsilon.$$

On en déduit que $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{i=1}^p p_i a_i.}$

4. Le lemme de Cesàro est le cas où $p = 1$. Il y a donc une unique valeur d'adhérence a_1 , et pour tout $\varepsilon > 0$, tous les termes u_n étant dans $B(a, \varepsilon)$ à partir d'un certain rang, on a $p_1(\varepsilon) = 1$, puis $p_1 = 1$. On retrouve alors le lemme de Cesàro classique.
5. Il suffit de prendre une suite (u_n) ayant deux valeurs d'adhérence autour desquels les termes de (u_n) se répartissent avec une certaine régularité. La suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$ convient :

$$\forall n \in 2\mathbb{N} + 1, \quad \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n u_k = 0 \longrightarrow 0 \quad \forall n \in 2\mathbb{N}, \quad \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n u_k = \frac{(-1)^n}{n} \longrightarrow 0.$$

6. Il s'agit cette fois de trouver une suite ayant par exemple deux valeurs d'adhérence, mais avec une irrégularité dans la répartition des termes autour des valeurs d'adhérence. On peut définir par exemple (u_n) par :

$$u_0 = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \llbracket 2^k, 2^{k+1} - 1 \rrbracket, u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

La suite (v_n) admet exactement 2 valeurs d'adhérence : 0 et 1. Un calcul direct montre alors que si (v_n) désigne la moyenne de Cesàro,

$$v_{2^{2n}-1} \longrightarrow \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad v_{2^{2n+1}-1} \longrightarrow \frac{1}{3},$$

ce qui empêche la convergence de (v_n) .

7. On pose pour tout n , $v_n = r_n u_n$. La valeur de r_n est égale à un entier de $\llbracket 0, 5 \rrbracket$. En considérant les suites extraites $(v_{6n+k})_{n \in \mathbb{N}}$, $k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$, dont les domaines couvrent tout n , l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est l'union des ensembles des valeurs d'adhérence de ces suites extraites, qui convergent chacune vers le paramètre $k^2 \bmod 6$, c'est-à-dire respectivement $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$, $a_5 = 1$. Ainsi, (u_n) admet exactement 4 valeurs d'adhérence : $a_0 = 0$, $a_1 = a_5 = 1$, $a_2 = a_4 = 3$ et $a_3 = 4$.

Soit $\frac{1}{2} > \varepsilon > 0$. Pour tout $i \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$, il existe N_i tel que pour tout $n \geq N_i$, $u_{6n+i} \in B(a_i, \varepsilon)$. Ces boules ne s'intersectant pas lorsque $a_i \neq a_j$, et n'ayant aucune information sur les N premiers termes, en posant $N = \max(N_i)$, pour tout $n \geq 6N$, on obtient, pour tout $i \in \llbracket 0, 1, 2, 3 \rrbracket$:

$$\beta_i \left\lfloor \frac{n - N + 1}{6} \right\rfloor \leq |A_{n,i}(\varepsilon)| \leq N + \beta_i \left\lceil \frac{n - N + 1}{6} \right\rceil,$$

où β_i est le nombre d'occurrences de la valeur d'adhérence dans la liste $(a_0, \dots, a_5)$ (à savoir $\beta_0 = \beta_3 = 1$, $\beta_1 = \beta_2 = 2$). On obtient alors facilement d'après le théorème d'encadrement $p_0(\varepsilon) = p_3(\varepsilon) = \frac{1}{6}$, et $p_1(\varepsilon) = p_2(\varepsilon) = \frac{1}{3}$. On en déduit que $p_0 = p_3 = \frac{1}{6}$, et $p_1 = p_2 = \frac{1}{3}$. On est donc dans les conditions d'application du résultat précédent, et la moyenne de Cesaro (m_n) converge vers

$$\frac{1}{6} \times 0 + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 4 + \frac{1}{6} \times 3, \quad \text{soit:} \quad \boxed{m_n \longrightarrow \frac{13}{6}}.$$