Lycée Louis-Le-Grand, Paris
MP2I – Mathématiques
A. Troesch

Pour le 18/01/2024 et le 23/01/2024

DM nº 13 : Suites, asymptotique

Suggestion de travail supplémentaire (à ne pas me rendre) : Encore le DS5 de l'année dernière.

Consignes de remise des copies :

- Les problèmes 1 et 2 sont à me rendre au plus tard le jeudi 18/01, en version numérisée en format pdf, si possible en un seul fichier. Le nom du fichier doit être `dm13-votre_nom.pdf` (par exemple `dm13-troesch.pdf` si j'avais une copie à rendre) et doit être envoyé à l'adresse `alain.troesch.pro+dm@gmail.com` (ou transmis par clé usb).
- Le problème 3 doit être rendu en format papier mardi 23/01.

Corrigé du problème 1 – Formule de Stirling Partie I – Intégrales de Wallis.

1. Soit $n \geqslant 1$. Intégrons I_{n+1} par parties, en dérivant $\sin^n$ et en intégrant un facteur sin. Les fonctions considérées étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, l'intégration par partie est licite, et donc :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(x)\ \mathrm{d}x = \Big[-\cos x \sin^n x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-1} x\ \mathrm{d}x \\ &= n\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^{n-1} x\ \mathrm{d}x = n(I_{n-1} - I_{n+1}). \end{aligned}$$

En isolant I_{n+1} dans cette équation, on trouve $\boxed{I_{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot I_{n-1}}$.

2. On a : $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\ \mathrm{d}x = \boxed{\frac{\pi}{2} = I_0}$; $\quad I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\ \mathrm{d}x = \Big[-\cos x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{1 = I_1}$.
On a alors, pour tout $p \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} I_{2p} &= \frac{2p-1}{2p} I_{2p-1} = \frac{2p-1}{2p}\cdot\frac{2p-3}{2p-2} I_{2p-3} = \cdots = \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}{(2p)(2p-2)\cdots 2} I_0 \\ & \frac{(2p)!}{(2p(2p-1)\cdots 2)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\cdot\frac{\pi}{2} = I_{2p}}. \end{aligned}$$

On a de même, pour tout $p \geqslant 1$.

$$\begin{aligned} I_{2p+1} &= \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1} = \frac{2p}{2p-1}\cdot\frac{2p-2}{2p-3} I_{2p-3} = \cdots = \frac{2p(2p-2)\cdots 2}{(2p+1)(2p-1)\cdots 1} I_1 \\ & \frac{(2p(2p-2)\cdots 2)^2}{(2p+1)!} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p)!} = \boxed{\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} = I_{2p+1}}. \end{aligned}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$, donc $0 \leqslant \sin^{n+1} x \leqslant \sin^n x$. Ainsi,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x\ \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\ \mathrm{d}x \qquad \text{soit :} \qquad I_{n+1} \leqslant I_n.$$

Ainsi, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$, et de plus, puisque $I_{n-1} \geqslant I_n$, $\frac{I_{n+1}}{I_n} \geqslant \frac{I_{n+1}}{I_{n-1}}$. On obtient donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement :

$$\boxed{1 \geqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \geqslant \frac{I_{n+1}}{I_{n-1}} = \frac{n}{n+1}}.$$

4. L'encadrement trouvé dans la question précédente nous assure, d'après le théorème des gendarmes, que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1.$$

Pour trouver la formule de Wallis, on exprime $\frac{I_{2p}}{I_{2p-1}}$:

$$\frac{I_{2p}}{I_{2p-1}} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2p-1)!}{2^{2(p-1)}((p-1)!)^2} = \left(\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\right)^2\cdot\frac{2p^2}{2p}\cdot\pi = \left(\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\right)^2\cdot p\pi.$$

Cette expression tend vers 1 lorsque p tend vers $+\infty$ d'après ce qui précède. Ainsi, en passant à la racine carrée, on obtient

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty}\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\sqrt{p} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.}$$

Partie II – Formule de Stirling.

Soit, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n = \ln\dfrac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}$.

1. On obtient, à l'aide du développement limité de ln donné dans l'énoncé :

$$\begin{aligned}
S_n - S_{n-1} &= \ln\frac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}} - \ln\frac{(n-1)!\mathrm{e}^{n-1}}{(n-1)^{n-1}\sqrt{(n-1)}} = \ln\left(\frac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}\cdot\frac{(n-1)^{n-1}\sqrt{n-1}}{(n-1)!\mathrm{e}^{n-1}}\right)\\
&= \ln\left(\mathrm{e}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}}\right) = 1+\left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\\
&= 1+\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&= 1-1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n^2}-\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

On a donc $\boxed{S_n - S_{n-1} \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{12n^2}}$.

2. Par un argument classique de comparaison avec une intégrale, du fait de la décroissance de la fonction $t\mapsto\frac{1}{t^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on a, pour tout $n\geqslant 2$:

$$\frac{1}{n^2}\leqslant\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}t}{t^2},$$

d'où, d'après la relation de Chasles :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}\leqslant 1+\int_1^n\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = 1+1-\frac{1}{n}\leqslant 2.$$

Ainsi, la somme partielle $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée, et elle est clairement croissante. Ainsi, elle est convergente. On en déduit la convergence de la série $\sum\frac{1}{n^2}$.
Il s'agit en fait d'une série de Riemann, dont la convergence sera un résultat du cours.

3. Puisque $S_{n-1}-S_n \underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{12n^2}$, par propriété de conservation du signe, $S_{n-1}-S_n$ est positif à partir d'un certain rang. Si on connaît le théorème de comparaison par équivalents des séries à termes positifs, on peut conclure tout de suite à la convergence de $\sum(S_{n-1}-S_n)$, donc aussi de $\sum(S_n-S_{n-1})$. Sinon, on se ramène au TCSTP classique, en remarquant que l'équivalence ci-dessus implique l'existe d'un rang n_0 tel que pour tout $n\geqslant n_0$,

$$0\leqslant S_{n-1}-S_n\leqslant\frac{1}{12n^2}.$$

Ainsi, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum(S_{n-1}-S_n)$ converge.

Or, la somme partielle de cette série est $\sum\limits_{k=1}^{n} S_k - S_{k+1} = S_1 - S_{n+1}$. Ainsi, la convergence de la série est équivalente à la $\boxed{\text{convergence de la suite } (S_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ vers un réel fini } S.}$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\sigma_n = \mathrm{e}^{S_n}$, donc, puisque la fonction exponentielle est continue, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = \mathrm{e}^S$.

   Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sigma_n^2}{\sigma_{2n}} = \dfrac{(\mathrm{e}^S)^2}{\mathrm{e}^S} = \mathrm{e}^S$.

   De plus : $\dfrac{\sigma_n^2}{\sigma_{2n}} = \left(\dfrac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}\right)^2 \dfrac{(2n)^{2n}\sqrt{2n}}{(2n)!\mathrm{e}^{2n}} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2\sqrt{2}}{(2n)!\sqrt{n}}$.

   D'après la question (1e), la limite de cette suite est $\sqrt{2\pi}$. Ainsi, $\mathrm{e}^S = \sqrt{2\pi}$, soit : $\boxed{S = \ln\sqrt{2\pi}}$.

5. La limite de $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est $\sqrt{2\pi}$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}, \quad \text{soit :} \quad \frac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}(1+o(1)), \quad \text{soit :} \quad \boxed{n! = n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}(1+o(1))}.$$

Corrigé du problème 2 –

Partie I – Étude d'une suite définie par une récurrence linéaire.

1. Soit P le polynôme défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $P(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$.
   - $P(-2) = -7$, et $P(-1) = 1$, et P est continue sur $[-2,-1]$, donc P admet une racine x_1 dans $]-2,-1[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires (pour l'instant, je ne sais pas si elle est unique ; on peut obtenir l'unicité en faisant une étude plus précise des variations de P, et en utilisant le théorème de la bijection, mais c'est inutile, comme vous allez le constater)
   - $P(0) = 1$ et $P(1) = -1$, et P est continue sur $[0,1]$, donc P admet une racine x_2 dans $]0,1[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires.
   - $P(1) = -1$ et $P(2) = 1$, et P est continue sur $[1,2]$, donc P admet une racine x_3 dans $]1,2[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

   Ainsi, on a trouvé trois racines distinctes. Comme P est un polynôme de degré 3, il admet au plus 3 racines distinctes. Ainsi, x_1, x_2 et x_3 sont les seules racines de P.

   D'où l'existence et l'unicité de $\boxed{\text{racines de } P,\ x_1,\ x_2 \text{ et } x_3 \text{ vérifiant } -2 < x_1 < -1 < 0 < x_2 < 1 < x_3 < 2}$.

2. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1 = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = x^3 - (x_1+x_2+x_3)x^2 + (x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x - x_1x_2x_3.$$

   Par identification des coefficients du polynôme, on obtient $\boxed{x_1 + x_2 + x_3 = 1}$.

   Vu les intervalles contenant les racines x_1, x_2 et x_3, on a bien $|x_2| < |x_1|$. De plus $x_3 = 1 - x_1 - x_2 > -x_1$ car $x_2 < 1$, et comme $x_1 < 0$ et $x_3 > 0$, cela implique $|x_3| > |x_1|$. Ainsi, on a bien $\boxed{|x_2| < |x_3| < |x_1|}$.

3. Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $a_0 \leqslant \cdots \leqslant a_{n-1} \leqslant a_n$.

   D'après les conditions initiales, $a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2$, donc $\mathcal{P}(2)$ est vérifié.

   Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{1,2\}$ tel que $\mathcal{P}(n)$. Alors Alors, en particulier, puisque $a_0 = 0$, on a $a_k \geqslant 0$ pour tout $k \in \{1,\ldots,n\}$. De plus, d'après la relation de récurrence vérifiée par (a_n),

$$a_{n+1} - a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} = a_{n-1} + (a_{n-1} - a_{n-2}).$$

   Or, $a_{n-1} \geqslant 0$ d'après ce qui précède, et $a_{n-1} - a_{n-2} \geqslant 0$ d'après l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$. Ainsi, $a_{n+1} \geqslant a_n$, puis $a_0 \leqslant \cdots \leqslant a_{n+1}$, c'est-à-dire $\mathcal{P}(n+1)$.

   Par conséquent, $\mathcal{P}(2)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.

   Ainsi, $\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante, et strictement positive à partir du rang 2, puisque } a_2 = 1}$.

4. Les suites $(x_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_3^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient la relation de récurrence (vérification immédiate), donc aussi $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \lambda_3 x_3^n$, pour un certain choix de réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Ainsi, si on trouve des réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit égale aux rangs 0, 1 et 2 à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on aura deux suites définies par la même relation de récurrence et les mêmes conditions initiales : elles seront donc égales. Il suffit donc de trouver $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{lcl} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 & = & 0 \\ \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 & = & 1. \end{array}\right.$$

   Alors $\lambda_3 = -(\lambda_2 - \lambda_1)$, d'où, en remplaçant dans les deux dernières équations,

$$\left\{\begin{array}{lcl} \lambda_1(x_1 - x_3) + \lambda_2(x_2 - x_3) & = & 0 \\ \lambda_1(x_1^2 - x_3^2) + \lambda_2(x_2^2 - x_3^2) & = & 1. \end{array}\right.$$

De plus $x_2^2 - x_3^2 = (x_2 - x_3)(x_2 + x_3)$, d'où, en multipliant la première équation par $(x_2 + x_3)$ et en retranchant la seconde, on trouve :
$$\lambda_1((x_1 - x_3)(x_2 + x_3) - (x_1 - x_3)(x_1 + x_3)) = -1$$
et par conséquent,
$$\boxed{\lambda_1 = \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}}.$$
De même, on trouve
$$\boxed{\lambda_2 = \frac{1}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}} \quad \text{et} \quad \boxed{\lambda_3 = \frac{1}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}}.$$
Pour ce choix des réels λ_1, λ_2 et λ_3, on a donc $v_0 = a_0$, $v_1 = a_1$ et $v_2 = a_2$. De plus $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivent la même récurrence d'ordre 3, donc l'égalité des trois premiers termes amène l'égalité des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

5. Soit r et s tels que $|r| < |s|$. Alors
$$\left|\frac{r^n}{s^n}\right| = \left(\frac{|r|}{|s|}\right)^n,$$
il s'agit d'une suite géométrique de raison comprise dans $[0, 1[$, donc elle converge vers 0. Ainsi, par définition, $\boxed{r^n = o(s^n)}$.
Puisque $|x_3| > |x_2|$, $x_2^n = o(x_3^n)$. De même, $x_1^n = o(x_3^n)$. Par conséquent,
$$a_n = \lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \lambda_3 x_3^n \underset{+\infty}{\sim} \boxed{\lambda_3 x_3^n \underset{+\infty}{\sim} a_n}.$$
Remarquez que je ne mets pas de quantificateur, puisque n est une variable muette dans l'équivalent.

6. De l'équivalent de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on déduit l'équivalent suivant de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
$$b_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda_3 x_3^{n+1}}{\lambda_3 x_3^n} = x_3.$$
Ainsi, $\boxed{(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tend vers } x_3}$.

Partie II – Étude et amélioration de la vitesse de convergence de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Soit (u_n) et (v_n) tels que $u_n = o(v_n)$. Alors, puisque (v_n) ne s'annule pas, $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers 0, donc est bornée. Ainsi, $\boxed{u_n = O(v_n)}$.

2. Calculons $b_n - x_3$, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\quad \varepsilon_n = b_n - x_3 &= \frac{\lambda_1 x_1^{n+1} + \lambda_2 x_2^{n+1} + \lambda_3 x_3^{n+1}}{\lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \lambda_3 x_3^n} - x_3 \\ &= \frac{\lambda_1 x_1^n (x_1 - x_3) + \lambda_2 x_2^n (x_2 - x_3)}{\lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \lambda_3 x_3^n}\end{aligned}$$
Or, puisque $|x_1| > |x_2|$, le numérateur est équivalent à $\lambda_1 x_1^n (x_1 - x_3)$, et le dénominateur, égal à u_n est équivalent à $\lambda_3 x_3^n$. En faisant le quotient de ces deux équivalents, on obtient bien
$$\boxed{\varepsilon_n \underset{+\infty}{\sim} (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n}.$$

3. C'est quasiment la définition des O. Plus précisément, puisque
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\varepsilon_n}{(x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n} = 1,$$
il existe un rang N tel que pour tout $n > N$, $\dfrac{\varepsilon_n}{(x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n} \leqslant 2$.
On en déduit que pour $n \geqslant N$, $|b_n - x_3| \leqslant 2\left|(x_1 - x_3)\dfrac{\lambda_1}{\lambda_3}\right|\left(\left|\dfrac{x_1}{x_3}\right|\right)^n$.
Cela correspond bien à la définition des O, avec $M = 2\left|(x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right|$. Ainsi, $\boxed{|b_n - x_3| = O\left(\left|\dfrac{x_1}{x_3}\right|^n\right)}$

4. Soit $\beta > 0$, et soit $E(\beta)$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n = O(\beta^n)$.
   (a) Si $\beta < 1$, alors $(\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Or si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E(\beta)$, il existe M tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M\beta^n.$$

   La suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc majorée par une suite convergeant vers 0. D'après le théorème d'encadrement, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite et $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

   (b) Soit q tel que $|q| < \beta$. Alors une suite géométrique de raison q s'écrit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \frac{u_n}{\beta^n} = u_0 \frac{q^n}{\beta^n} = u_0 \left(\frac{q}{\beta}\right)^n.$$

   Comme $\left|\frac{q}{\beta}\right| < 1$, cette suite tend vers 0. Donc $u_n = o(\beta^n)$ et donc $\boxed{u_n = O(\beta^n)}$.

   (c) Soit $\ell \neq 0$ la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En appliquant la définition de la convergence de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ avec $\varepsilon = \frac{|\ell|}{2}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant N, \frac{|\ell|}{2} < |v_n| < \frac{3|\ell|}{2}.$$

   De plus, puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E(\beta)$, il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad |u_n| \leqslant M\beta^n.$$

   Donnons-nous un tel N et un tel M. Alors :

   - $\forall n \geqslant N,\quad \frac{u_n}{v_n} \leqslant \frac{2M}{\ell}\beta^n$, donc $\boxed{\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in E(\beta)}$;
   - $\forall n \geqslant N, |u_n v_n| < \frac{3|\ell|M}{2}\beta^n$, et par conséquent $\boxed{(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E(\beta)}$.

5. Puisque $|x_2| < |x_1| < |x_3|$, on a : $\left|\frac{x_2}{x_1}\right| < 1$, $\left|\frac{x_2}{x_3}\right| < 1$, et $\left|\frac{x_1}{x_3}\right| < 1$, et par conséquent :

$$\left|\frac{x_2}{x_3}\right| = \left|\frac{x_2}{x_1}\cdot\frac{x_1}{x_3}\right| < \left|\frac{x_1}{x_3}\right|, \qquad \left|\frac{x_2 x_1}{x_3^2}\right| = \left|\frac{x_2}{x_3}\cdot\frac{x_1}{x_3}\right| < \left|\frac{x_1}{x_3}\right| \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{x_1^2}{x_3^2}\right| = \left|\frac{x_1}{x_3}\cdot\frac{x_1}{x_3}\right| < \left|\frac{x_1}{x_3}\right|.$$

Ainsi, $\beta < \left|\frac{x_1}{x_3}\right|$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
b_n - x_3 - (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n &= \frac{\lambda_1 x_1^n(x_1 - x_3) + \lambda_2 x_2^n (x_2 - x_3)}{\lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \lambda_3 x_3^n} - (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n \\
&= \frac{\lambda_1 x_1^n(x_1 - x_3) + \lambda_2 x_2^n(x_2 - x_3) - (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1^2}{\lambda_3}\left(\frac{x_1^2}{x_3}\right)^n - (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_3}\left(\frac{x_1 x_2}{x_3}\right)^n - (x_1 - x_3)\lambda_1 x_1^n}{\lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \lambda_3 x_3^n} \\
&= \frac{\lambda_2 x_2^n(x_2 - x_3) - (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1^2}{\lambda_3}\left(\frac{x_1^2}{x_3}\right)^n - (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_3}\left(\frac{x_1 x_2}{x_3}\right)^n}{\lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \lambda_3 x_3^n},
\end{aligned}$$

donc, d'après l'équivalent de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trouvé dans la question I-5,

$$\begin{aligned}
b_n - x_3 - (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n &\underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda_2 x_2^n(x_2 - x_3) - (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1^2}{\lambda_3}\left(\frac{x_1^2}{x_3}\right)^n - (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_3}\left(\frac{x_1 x_2}{x_3}\right)^n}{\lambda_3 x_3^n} \\
&\underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda_2}{\lambda_3}(x_2 - x_3)\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n - (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1^2}{\lambda_3^2}\left(\frac{x_1^2}{x_3^2}\right)^n - (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_3^2}\left(\frac{x_1 x_2}{x_3^2}\right)^n.
\end{aligned}$$

Par définition de β, $\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n = O(\beta^n)$, $\left(\frac{x_1^2}{x_3^2}\right)^n = O(\beta^n)$ et $\left(\frac{x_1 x_2}{x_3^2}\right)^n = O(\beta^n)$. Par conséquent, en multipliant ces expressions en $O(\beta^n)$ par des constantes, et en les additionnant, on trouve :

$$\boxed{b_n - x_3 - (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n = O(\beta^n)}.$$

6. D'après la question précédente,

$$b_n = x_3 + (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n + O(\beta^n) \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = x_3 + (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n+1} + O(\beta^{n+1}).$$

Or, $\beta^{n+1} = \beta \cdot \beta^n$, donc $O(\beta^{n+1}) = O(\beta^n)$ (simplification par une constante non nulle dans un O). Par conséquent :

$$\forall n \geqslant 3,\ \ c_n = \frac{b_{n+1} - b_n}{b_n - b_{n-1}}, \qquad \text{donc:}$$

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{x_3 + (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n+1} - x_3 - (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n} + O(\beta^n)}{x_3 + (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n} - x_3 - (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n-1} + O(\beta^n)} \\
&= \frac{\left(\frac{x_1}{x_3} - 1\right)(x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n} + O(\beta^n)}{\left(\frac{x_1}{x_3} - 1\right)(x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n-1} + O(\beta^n)} \\
&= \frac{\frac{x_1}{x_3} + O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right)}{1 + O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right)}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$c_n - \frac{x_1}{x_3} = \frac{\frac{x_1}{x_3} + O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right)}{1 + O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right)} - \frac{x_1}{x_3} = \frac{\frac{x_1}{x_3} + O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right) - \frac{x_1}{x_3} + \frac{x_1}{x_3}O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right)}{1 + O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right)} = \frac{O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right)}{1 + O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right)}.$$

Or, d'après la question 4, $\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n$ est une suite géométrique dont la raison est de valeur absolue strictement inférieure à 1, donc elle converge vers 0. Par conséquent, $1 + O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right)$ est de limite égale à 1. En appliquant la question (3c) avec $\beta' = \frac{\beta x_3}{x_1}$, on en déduit que

$$\frac{O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right)}{1 + O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right)} = O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right).$$

Ainsi : $c_n - \dfrac{x_1}{x_3} = O\left(\left(\dfrac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right)$, soit : $\boxed{c_n = \dfrac{x_1}{x_3} + O\left(\left(\dfrac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right)}$.

7. En remplaçant b_{n+1}, b_n, et c_n par les expressions en O obtenues dans les questions 4 et 5, on obtient :

$$\begin{aligned}
&b_{n+1} - c_n b_n - (1 - c_n)x_3 \\
&= x_3 + (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n+1} + O(\beta^n) - \left((x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n + O(\beta^n)\right)\left(\frac{x_1}{x_3} + O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right)\right) - x_3 \\
&= O(\beta^n) + (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right) + O(\beta^n)O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right).
\end{aligned}$$

Remarquons maintenant que

$$\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right) = O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n\right) = O(\beta^n),$$

et que

$$O(\beta^n)O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right) = O\left(\left(\beta \cdot \frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right) = O(\beta^n),$$

car $\beta < \left|\frac{x_1}{x_3}\right|$. Ainsi, $b_{n+1} - c_n b_n - (1 - c_n)x_3 = O(\beta^n)$, et ainsi, en divisant par $1 - c_n$ de limite $1 - \frac{x_1}{x_3} \neq 0$, on obtient, d'après la question (3c), $\boxed{d_n - x_3 = O(\beta^n)}$.

On peut dire qu'on a accéléré la convergence puisqu'on a construit une suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers x_3, plus vite que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puisque $\beta < \left|\frac{x_1}{x_3}\right|$.

Corrigé du problème 3 – Convergence en un point fixe attractif d'une suite définie par une récurrence

Partie I – Convergence vers un point fixe attractif

1. Soit $k \in]|f'(r)|, 1[$. Par hypothèse, f' est continue en r, donc, par définition de la continuité avec $= k - |f'(r)| > 0$.
$$\exists \delta_1 > 0, \quad \forall x \in B(r, \delta_1) \cap I, \quad |f'(x) - f'(r)| < k - |f'(r)|.$$
L'inégalité triangulaire amène alors :
$$|f'(x)| < k.$$
Or, comme I est ouvert, il existe $\delta_2 > 0$ tel que $B(r, \delta_2) \subset I$. En prenant alors $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, on a $\boxed{B(r, \delta) \subset I}$, et pour tout $x \in B(r, \delta)$, $\boxed{|f'(x)| < k}$.
2. L'inégalité des accroissements finis (inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 0) montre alors que pour tout $x \in B(r, \delta)$,
$$|f(x) - r| = |f(x) - f(r)| \leqslant k|x - r| \leqslant k\delta \leqslant \delta.$$
Ainsi, $B(x, \delta)$ est stable par f. Par conséquent, si $x_N \in B(r, \delta)$, alors pour tout $n \geqslant N$, $x_n \in B(r, \delta)$. Soit $n \geqslant N$. En appliquant l'inégalité ci-dessus pour $x = x_n \in B(r, \delta)$, sachant que $f(x_n) = x_{n+1}$, on obtient :
$$|x_{n+1} - r| \leqslant k|x_n - r|,$$
et une récurrence immédiate amène :
$$\forall n \geqslant N, \quad \boxed{|x_n - r| \leqslant k^{n-N}|x_N - r|}.$$
3. • Supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_N \in B(r, \delta)$. Alors, d'après I-2, pour tout $n \geqslant N$,
$$|x_n - r| \leqslant k^{n-N}|x_N - r|.$$
Le second memebre est une suite géométrique de raison $k \in [0, 1[$, donc converge vers 0. Le théorème d'encadrement permet de conclure que $|x_n - r| \to 0$, donc $\boxed{x_n \to r.}$
   • Réciproquement, supposons que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers r. Alors, par définition, avec $\varepsilon = \delta > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $|x_n - r| \leqslant \delta$. En particulier, cette inégalité est vraie pour $n = N$, ainsi, $\boxed{x_N \in B(r, \delta)}$.

Partie II – Estimation de la vitesse de convergence en un point attractif

1. Soit $k > |f'(r)|$, et $k' \in]|f'(r)|, \min(1, k)[$. Soit δ comme en I-1 associé à k'. D'après II-2, et II-3, puisque $x_n \to r$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$,
$$|x_n - r| \leqslant \frac{|x_N - r|}{(k')^N}(k')^n.$$
Ainsi, $|x_n - r| = O(k'^n)$, et comme $0 \leqslant k' < k$, on en déduit que $\boxed{|x_n - r| = o(k^n)}$.
2. Il s'agit d'un cas particulier de la formule de Taylor-Young. Si la fomrule n'a pas encore été vue au moment de faire le problème, en voici une preuve. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc δ tel que pour tout $x \in B(r, \delta)$, $|f''(x) - f''(r)| \leqslant \varepsilon$. On considère alors la formule de Taylor avec reste intégral, entre r et x, pour $x \in B(r, \delta)$:
$$f(x) = f(r) + (x - r)f'(x) + \int_r^x (x - t)f''(t)\ \mathrm{d}t.$$
Or,
$$\int_r^x (x - t)(f''(r) - \varepsilon)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_r^x (x - t)f''(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_r^x (x - t)(f''(r) + \varepsilon)\ \mathrm{d}t,$$
soit :
$$\frac{(x - r)^2}{2}(f''(r) - \varepsilon) \leqslant \int_r^x (x - t)f''(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \frac{(x - r)^2}{2}(f''(r) + \varepsilon).$$
Si $u_n \to r$, il existe N tel que si $n \geqslant N$, $u_n \in B(r, \delta)$, et pour un tel n :
$$\frac{(u_n - r)^2}{2}(f''(r) - \varepsilon) \leqslant \int_r^{u_n} (u_n - t)f''(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \frac{(u_n - r)^2}{2}(f''(r) + \varepsilon).$$

Par définition de la négligeabilité, on a bien :

$$\int_r^{u_n} (u_n - t)f''(t)\ \mathrm{d}t = \frac{(u_n - r)^2}{2} f''(r) + o((u_n - r)^2).$$

En remplaçant dans l'égalité précédente, il vient bien :

$$\boxed{f(u_n) = f(r) + (u_n - r)f'(r) + \frac{1}{2}(u_n - r)^2 f''(r) + o((u_n - r)^2).}$$

3. (a) Par hypothèse, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers r. Donc, d'après la formule de Taylor-Young ci-dessus, il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle, telle que :

$$\forall j \in \mathbb{N},\quad f(x_j) = r + f'(r)(x_j - r) + \frac{f''(r)}{2}(x_j - r)^2 + (x_j - r)^2\varepsilon_j.$$

Ainsi,

$$\forall j \in \mathbb{N},\quad \boxed{x_{j+1} - r = f'(r)(x_j - r)(1 + R_j)},$$

où :

$$\forall j \in \mathbb{N},\quad R_j = \left(\frac{f''(r)}{2f'(r)} + \frac{1}{f'(r)}\right)(x_j - r)\varepsilon_j,$$

Comme $(x_j - r) = O(k^j)$ d'après III-1, on en déduit que $\boxed{R_j = O(k^j)}$.

(b) C'est une récurrence triviale laissée au soin du lecteur.

(c)
- On a pour tout $j \in \mathbb{N}$, $|1 + R_j| \geqslant 0$. De plus, si $|1 + R_j| = 0$, alors $R_j = -1$, et en remplaçant dans l'expression de la question III-3(a), on obtient $x_{j+1} = r$, et donc, comme r est point fixe de f, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire de valeur r. Ce cas est exclu par hypothèse.
  Ainsi, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $|1 + R_j| > 0$, donc $\ln(|1 + R_j|)$ est défini.
- On a $R_j = O(k^n)$ pour tout $k > |f'(r)|$. Comme on peut en particulier remplacer k par $k' < 1$, cela assure que R_j converge vers 0. Donc il existe N tel que pour $j \geqslant N$, $|R_j| < 1$. Par conséquent, on peut enlever la valeur absolue pour j grand, et la convergence vers 0 de R_j permet alors d'affirmer que, pour j tendant vers $+\infty$,

$$\ln(|1 + R_j|) = \ln(1 + R_j) \underset{+\infty}{\sim} R_j.$$

  Or, $R_j = O(k^n)$, donc $\ln(1 + R_j) = O(k^n)$, donc il existe M tel que

$$\forall j \in \mathbb{N},\quad |\ln(|1 + R_j|)| \leqslant Mk^j$$

(d) On peut choisir $k \in [0, 1[$, puisque $|f'(r)| < 1$. Ainsi, $\sum k^j$ converge. On déduit alors du TCSTP la convergence de $\sum |\ln(|1 + R_j|)|$, donc la convergence (absolue) de $\sum \ln(|1 + R_j|)$. Notons

$$S = \sum_{j=0}^{+\infty} \ln(|1 + R_j|).$$

On a alors l'existence de la limite suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\prod_{j=0}^{n}(1 + R_j)\right| = \mathrm{e}^S.$$

Par ailleurs, R_j convergeant vers 0, tous les termes du produit sont positifs à partir d'un certain rang, donc le produit ne change plus de signe à partir d'un certain rang. Cela assure la convergence de $\prod_{j=0}^{n}(1 + R_j)$, soit vers e^S soit vers $-\mathrm{e}^S$, non nul et non infini. Notons ℓ celle limite réelle non nulle. La question 3(b) permet alors d'établir que

$$x_n - r \underset{+\infty}{\sim} (x_0 - r)\ell(f'(r))^n, \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{x_n - r \underset{+\infty}{\sim} \lambda(f'(r))^n},$$

où $\lambda = (x_0 - r)\ell$.

4. (a) On utilise à nouveau la formule de Taylor-Young, donnant l'existence d'une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0, et telle que :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad x_{j+1} = f(x_j) = r + \frac{f''(r)}{2}(x_j - r)^2 + (x_j - r)^2 \varepsilon_j,$$

puisque $f'(r) = 0$. Comme $f''(r) \neq 0$, on peut écrire

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \boxed{x_{j+1} - r = \frac{f''(r)}{2}(x_j - r)^2(1 + S_j)},$$

où on a posé : $\forall j \in \mathbb{N}, \quad S_j = \dfrac{2\varepsilon_j}{f''(r)}$. Comme $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est de limite nulle, la suite $(S_j)_{j\in\mathbb{N}}$ également.

(b) Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$:

$$x_n - r = \frac{2}{f''(r)} \left(\frac{f''(r)}{2}(x_0 - r) \prod_{j=0}^{n-2} |1 + S_j|^{2^{-j-1}} \right)^{2^n} (1 + S_{n-1}).$$

.

En appliquant deux fois la relation de la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} x_2 - r &= \frac{f''(r)}{2}(x_1 - r)^2(1 + S_1) = \frac{f''(r)}{2} \left(\frac{f''(r)}{2} \right)^2 (x_0 - r)^4 (1 + S_0)^2 (1 + S_1) \\ &= \left(\frac{f''(r)}{2} \right)^3 (x_0 - r)^4 (1 + S_0)^2 (1 + S_1), \end{aligned}$$

d'où $\mathcal{P}(2)$.
Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ tel que $\mathcal{P}(n)$. Alors, d'après la relation de la question précédente, suivie de l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} x_{n+1} - r &= \frac{f''(r)}{2}(x_n - r)^2(1 + S_n) \\ &= \frac{f''(r)}{2} \left[\frac{2}{f''(r)} \left(\frac{f''(r)}{2}(x_0 - r) \prod_{j=0}^{n-2} |1 + S_j|^{2^{-j-1}} \right)^{2^n} (1 + S_{n-1}) \right]^2 (1 + S_n) \\ &= \frac{2}{f''(r)} \left(\frac{f''(r)}{2}(x_0 - r) \prod_{j=0}^{n-2} |1 + S_j|^{2^{-j-1}} \right)^{2^{n+1}} (|1 + S_{n-1}|^{2^{-n+1-1}})^{2^{n+1}} (1 + S_n) \end{aligned}$$

Le passage aux valeurs absolues pour $(1 + S_{n-1})$ est justifié par le fait que l'exposant est pair (l'expression est élevée au carré). On obtient donc :

$$x_{n+1} - r = \frac{2}{f''(r)} \left(\frac{f''(r)}{2}(x_0 - r) \prod_{j=0}^{n-1} |1 + S_j|^{2^{-j-1}} \right)^{2^{n+1}} (1 + S_n).$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai.

Par conséquent, $\mathcal{P}(2)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.

(c) Par continuité de l'exponentielle, la convergence de la suite $\left(\prod_{j=0}^{n-2} |1 + S_j|^{2^{-j-1}} \right)_{n\geqslant 2}$ vers une limite non nulle est équivalente à la convergence de la suite $\left(\ln \left(\prod_{j=0}^{n-2} |1 + S_j|^{2^{-j-1}} \right) \right)_{n\geqslant 2}$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire à la convergence de la suite $\left(\sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{2^{j+1}} \ln |1 + S_j| \right)_{n\geqslant 2}$. Il suffit donc de montrer la convergence absolue de cette série, c'est-à-dire la convergence de $\sum \frac{1}{2^{j+1}} |\ln |1 + S_j||$.
Or, comme précédemment, puisque S_j est de limite nulle, on obtient $|\ln(1 + S_j)| \to 0$. Ainsi,

$$\frac{1}{2^{j+1}} |\ln(|1 + S_j|)| = O\left(\frac{1}{2^{j+1}} \right)$$

(c'est même un o). Ainsi, le TCSTP nous assure la convergence de $\sum \frac{1}{2^{j+1}} |\ln(|1+S_j|)|$, donc la convergence (absolue) de $\sum \frac{1}{2^{j+1}} \ln(|1+S_j|)$.

Comme précédemment, on en déduit $\boxed{\text{l'existence de la limite de } \left(\prod_{j=0}^{n-2} |1+S_j|^{2^{-j-1}}\right)_{n\geqslant 2}}$, cette limite étant non nulle.

(d) La question ne mérite pas tellement son étoile, il faut juste penser à utiliser des ε. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$, $\ln|1+S_j| < \varepsilon$. On a alors, pour tout $n \geqslant N+1$, et tout $m \geqslant n$

$$\left\|\sum_{j=n-1}^{m} \frac{1}{2^{j+1}} \ln(|1+S_j|)\right| \leqslant \sum_{j=n-1}^{m} \frac{1}{2^{j+1}} |\ln(|1+S_j|)| \leqslant \sum_{j=n-1}^{m} \frac{1}{2^{j+1}}\varepsilon \leqslant \varepsilon \sum_{j=n-1}^{+\infty} \frac{1}{2^{j+1}} = \frac{\varepsilon}{2^{n-1}}.$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant N$,

$$0 \leqslant 2^n \ln(\pi_n) \leqslant 2\varepsilon.$$

On en déduit que $\boxed{2^n \ln(\pi_n) \to 0}$.

(e) Soit λ la limite de $\left(\left|\frac{f''(r)}{2}(x_0 - r)\prod_{j=0}^{n-2} |1+S_j|^{2^{-j-1}}\right|\right)_{n\geqslant 2}$ (on sait qu'elle existe d'après la question 4(c), et qu'elle est non nulle, d'après les hypothèses, sinon (x_n) serait stationnaire, la limite du produit étant non nulle). Donc $\lambda > 0$. De plus, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\lambda = \left|\frac{f''(r)}{2}(x_0 - r)\prod_{j=0}^{n-2} |1+S_j|^{2^{-j-1}} \cdot \pi_n\right|$$

et par conséquent, l'exposant 2^n étant pair :

$$\frac{\left(\frac{f''(r)}{2}(x_0 - r)\prod_{j=0}^{n-2} |1+S_j|^{2^{-j-1}}\right)^{2^n}}{\lambda^{2^n}} = \frac{\left|\frac{f''(r)}{2}(x_0 - r)\prod_{j=0}^{n-2} |1+S_j|^{2^{-j-1}}\right|^{2^n}}{\lambda^{2^n}} = |\pi_n^{2^n}|.$$

Or, d'après la question précédente, $\ln(\pi_n^{2^n})$ tend vers 0, donc $\pi_n^{2^n}$ tend vers $\mathrm{e}^0 = 1$. On en déduit que

$$\left(\frac{f''(r)}{2}(x_0 - r)\prod_{j=0}^{n-2} |1+S_j|^{2^{-j-1}}\right)^{2^n} \underset{+\infty}{\sim} \lambda^{2^n}.$$

Ainsi, d'après la question 4(b) :

$$\boxed{x_n - r \underset{+\infty}{\sim} \frac{2\lambda^{2^n}}{f''(r)}}.$$

Partie III – Un exemple : les suites de Héron

1. (a) f_p est de classe $Ccal^2$, car il s'agit d'une fraction rationnelle.
Déterminons les points fixes de f_p : soit $r \in I$. On a :

$$f_p(r) = r \iff (p-1)r + \frac{a}{r^{p-1}} = pr \iff r^p = a \iff r = \sqrt[p]{a} = a^{\frac{1}{p}}.$$

En effet, r est positif, et a admet une unique racine p-ième positive.
Ainsi $\Omega = \{\sqrt[p]{a}\}$.
La dérivée de f_p est :

$$\forall x \in I,\ f_p'(x) = \frac{1}{p}\left(p - 1 - \frac{(p-1)a}{x^p}\right),$$

d'où le tableau de variations :

x	0		$\sqrt[p]{a}$		$+\infty$
${f_p}'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_p(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt[p]{a}$	$\nearrow$	$+\infty$

Il en résulte dans un premier temps que $f(I) \subset I$, ce qui assure que pour toute valeur de $x_0 \in I$, la suite (x_n) associée à f existe.
Par ailleurs, les variations montrent que $[\sqrt[p]{a}, +\infty[$ est un intervalle stable, et que $f]0, \sqrt[p]{a}] \subset [\sqrt[p]{a}, +\infty[$. Donc, pour toute valeur $x_0 \in I$, on a $x_1 \in [\sqrt[p]{a}, +\infty[$, puis par stabilité :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \boxed{x_n \geqslant \sqrt[p]{a}}.$$

.
De plus, pour tout $n \geqslant 1$,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{p}\left((p-1)x_n + \frac{a}{x_n^{p-1}}\right) - x_n = \frac{x_n}{p}\left(\frac{a}{x_n^p} - 1\right).$$

Comme $x_n \geqslant \sqrt[p]{a}$, on obtient $x_{n+1} - x_n \leqslant 0$. Ainsi, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, au moins à partir du rang 1, et minorée par $\sqrt[p]{a}$. Donc (x_n) converge, vers le seul point fixe dans les parages : $\boxed{x_n \to \sqrt[p]{a}}$.

(b) L'expression trouvée pour f_p' montre que $f_p'(\sqrt[p]{a}) = 0$. Par ailleurs, on calcule sans difficulté

$$f''(\sqrt[p]{a}) = \frac{p-1}{\sqrt[p]{a}} \neq 0.$$

Ainsi, on est dans les hypothèses de II-4.

2. (a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = x_0$, $v_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n^2 + av_n^2 \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = 2u_nv_n.$$

Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $u_n > 0$, $v_n > 0$ et $x_n = \frac{u_n}{v_n}$.
On a $u_0 = x_0 > 0$, $v_0 = 1 > 0$ et $x_0 = \frac{u_0}{v_0}$, d'où $\mathcal{P}(0)$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vrai. Alors

$$u_{n+1} = u_n^2 + v_n^2 > 0 \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = 2u_nv_n > 0.$$

On peut donc considérer le quotient $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}$:

$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{u_n^2 + av_n^2}{2u_nv_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n}{v_n} + \frac{av_n}{u_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n}{v_n} + \frac{av_n}{u_n}\right) = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = x_{n+1}.$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{x_n = \dfrac{u_n}{v_n}}$

Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} + \sqrt{a} \cdot v_{n+1} = u_n^2 + av_n^2 + 2\sqrt{a}u_nv_n \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{u_{n+1} + \sqrt{a} \cdot v_{n+1} = (u_n + \sqrt{a} \cdot v_n)^2}.$$

(c) Ainsi, une récurrence triviale amène :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{u_n + \sqrt{a}v_n = (u_0 + \sqrt{a}v_0)^{2^n} = (x_0 + \sqrt{a})^{2^n}}.$$

Le même raisonnement donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{u_n - \sqrt{a}v_n = (x_0 - \sqrt{a})^{2^n}}.$$

On trouve (u_n) et (v_n) en soustrayant et additionnant ces deux expressions ; il en résulte que

$$\boxed{x_n = \frac{u_n}{v_n} = \sqrt{a}\frac{(x_0 + \sqrt{a})^{2^n} + (x_0 - \sqrt{a})^{2^n}}{(x_0 + \sqrt{a})^{2^n} - (x_0 - \sqrt{a})^{2^n}}}.$$

(d) En additionnant les deux égalités précédentes,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2u_n = (x_0 + \sqrt{a})^{2^n} + (x_0 - \sqrt{a})^{2^n},$$

et de même, en les soustrayant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2\sqrt{a}v_n = (x_0 + \sqrt{a})^{2^n} - (x_0 - \sqrt{a})^{2^n}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n - r = \frac{u_n}{v_n} - \sqrt{a} = 2\sqrt{a} \cdot \frac{(x_0 - \sqrt{a})^{2^n}}{(x_0 + \sqrt{a})^{2^n} - (x_0 - \sqrt{a})^{2^n}}.$$

Or, comme $x_0 > 0$, on a $|x_0 - \sqrt{a}| < |x_0 + \sqrt{a}|$, donc $(x_0 - \sqrt{a})^{2^n} = o((x_0 + \sqrt{a})^{2^n})$, et donc :

$$x_n - r \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{a} \cdot \left(\frac{(x_0 - \sqrt{a})}{(x_0 + \sqrt{a})}\right)^{2^n} = 2\sqrt{a} \cdot \left(\frac{|x_0 - \sqrt{a}|}{(x_0 + \sqrt{a})}\right)^{2^n}.$$

Ainsi, $\boxed{\lambda_2(x_0) = \frac{|x_0 - \sqrt{a}|}{x_0 + \sqrt{a}}}$.

3. (a) Pour tout $x > 0$, $g_p(x) > 0$, donc $I =]0, +\infty[$ est stable par g_p. D'après la partie I, tout choix de $y_0 > 0$ définit donc une suite récurrente $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à g_q.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$y_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\left(y_n^q + \frac{r^{2q}}{y_n^q}\right)\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \text{soit:} \qquad y_{n+1}^q = \frac{1}{2}\left(y_n^q + \frac{r^{2q}}{y_n^q}\right).$$

Ainsi, la suite $(y_n^q)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente associée à f_2, de valeur initiale y_0^q, avec $a = r^{2q}$. D'après III-2(c), on a donc, en exprimant d'abord, y_n^q puis en passant à la racine q-ième :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{y_n = r \cdot \left(\frac{(y_0^q + r^q)^{2^n} + (y_0^q - r^q)^{2^n}}{(y_0^q + r^q)^{2^n} - (y_0^q - r^q)^{2^n}}\right)^{\frac{1}{p}}}$$

(c) On a alors :

$$y_n - r = r\left(\left(1 + \frac{2(y_0^q - r^q)^{2^n}}{(y_0^q + r^q)^{2^n} - (y_0^q - r^q)^{2^n}}\right)^{\frac{1}{p}} - 1\right).$$

Le second terme à l'intérieur de la parenthèse tend vers 0 (car $y_0^q \to r^q$ d'après la question 1), donc d'après les équivalents classiques,

$$y_n - r \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{p} \frac{(y_0^q - r^q)^{2^n}}{(y_0^q + r^q)^{2^n} - (y_0^q - r^q)^{2^n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{p} \frac{(y_0^q - r^q)^{2^n}}{(y_0^q + r^q)^{2^n}}.$$

on obtient donc $\boxed{y_n - r \underset{+\infty}{\sim} C(\mu_q)^{2^n}}$, avec

$$\boxed{C = \frac{2}{p}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\mu = \frac{|y_0^q - r^q|}{y_0^q + r^q}}.$$

(d) On a, pour tout $p \geqslant 2$:

$$v_p = \frac{u_{p+1}}{u_p} = \left(\frac{p}{p+1}\right)^p \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1} = \frac{p^{2p-1}(p-1)}{(p^2-1)^p} = \frac{p-1}{p} \cdot \left(\frac{p^2}{1-p^2}\right)^p.$$

Ainsi, pour tout $p \geqslant 2$,

$$\ln v_n = \ln\left(1 - \frac{1}{p}\right) - p\ln\left(1 - \frac{1}{p^2}\right).$$

On étudie alors les variations de la fonction h de classe $\mathcal{C}^\infty$, définie sur $[0, \frac{1}{2}]$, par :

$$h(x) = \ln(1-x) - \frac{1}{x}\ln(1-x^2)$$

Sa dérivée s'exprime :

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad h'(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2}{1+x} + \ln(1-x^2)\right)$$

Pour étudier son signe, on étudie la fonction auxiliaire k de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie sur $[0, \frac{1}{2}]$ par :

$$k(x) = \frac{x^2}{1+x} + \ln(1-x^2).$$

Un calcul sans difficulté amène

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad k'(x) = -x^2 \cdot \frac{x+3}{(1-x)^2(1+x)}$$

Ainsi, pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $k'(x) \leqslant 0$, donc k est décroissante. De plus, $k(0) = 0$, donc, pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $k(x) \leqslant 0$.

Par conséquent, h' est négative, donc h est décroissante.

En composant par $p \mapsto \frac{1}{p}$ décroissante de $\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ dans $[0, \frac{1}{2}]$, $(\ln(v_p))_{p\geqslant 2}$ est croissante.

Donc $\boxed{(v_p)_{p\geqslant 2} \text{ est croissante}}$.

Par ailleurs,

$$u_p = \mathrm{e}^{(p-1)\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)}.$$

L'exposant étant équivalent à $-\frac{p-1}{p}$, de limite -1, la continuité de l'exponentielle montre que $u_p \to \frac{1}{\mathrm{e}}$, donc aussi u_{p+1}. Ainsi, $\boxed{v_p \to 1}$.

(e) Ainsi, pour tout $p \geqslant 2$, $v_p \leqslant 1$, et donc $u_{p+1} \leqslant u_p$. Ainsi, pour tout $p \geqslant 2$, $\boxed{u_p \leqslant u_2 = \frac{1}{2}}$.

L'énoncé est maladroit. La décroissance de (u_n)peut s'obtenir beaucoup plus rapidement.

(f) En élevant à la puissance $p-1$, en multipliant par p^{p-1} et en simplifiant par x^{p-1}, l'inégalité à montrer est, avec $u = \frac{a}{x^p}$:

$$((p-1)+u)^{p-1} \leqslant \frac{p^{p-1}}{2}\left(1 + u^{\frac{2(p-1)}{p}}\right)$$

ou encore, en posant $t = u^{\frac{2(p-1)}{p}}$:

$$\left((p-1) + t^{\frac{p}{2(p-1)}}\right)^{p-1} \leqslant \frac{p^{p-1}}{2}(1+t).$$

L'inégalité initiale devant être montrée pour $x > a^{\frac{1}{p}}$, on doit montrer cette dernière inégalité pout $t \in [0,1]$. Or, la fonction de gauche est concave sur $[0,1]$. En effet, elle est de la forme $g(t) = (b+t^\alpha)^\beta$, et un calcul sans difficulté amène, pour tout $t \in [0,1]$:

- $g'(t) = \alpha\beta t^{\alpha-1}(b+t^\alpha)^{\beta-1}$
- $g''(t) = (b+t^\alpha)^{\beta-2}t^{\alpha-2}\alpha\beta\left((\alpha(\beta-1)+(\alpha-1))\,t^\alpha + b(\alpha-1)\right).$

Or, avec les valeurs de b, α et β de l'énoncé, on a

$$\alpha(\beta-1) + (\alpha-1) = \frac{p-2}{2} = -b(\alpha-1).$$

Ainsi, puisque $t \in [0,1]$, on obtient $g'' \leqslant 0$ sur $[0,1]$.

La fonction g étant concave sur $[0,1]$, sa courbe est située au-dessous de sa tangente en 1. Or l'équation de cette tangente est :

$$y = g'(1)(x-1) + g(1) = \frac{p^{p-1}}{2}(x-1) + p^{p-1} = \frac{p^{p-1}}{2}(1+x).$$

On obtient bien l'inégalité

$$\forall t \in [0,1], \quad \left((p-1) + t^{\frac{p}{2(p-1)}}\right)^{p-1} \leqslant \frac{p^{p-1}}{2}(1+t) \qquad \text{donc:} \qquad \forall x > a^{\frac{1}{p}}, \quad \boxed{f_p(x) \leqslant g_{p-1}(x)}.$$

(g) Les suites associées aux f_p et initialisées par des valeurs supérieures à r sont décroissantes. Donc (x_n) et (y_n^{p-1}) sont décroissantes, donc aussi (y_n). Comme ces deux suites convergent vers $r = \sqrt[p]{a}$, tous leurs termes sont dans $[r, +\infty[$.

La croissance de la fonction f_p sur $[r, +\infty[$, et l'inégalité de la question précédente permet de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leqslant y_n$. En effet, l'initialisation est aquise, et si $x_n \leqslant y_n$, alors

$$x_{n+1} = f_p(x_n) \leqslant f_p(y_n) \leqslant g_{p-1}(y_n) = y_{n+1}.$$

On a alors aussi $0 \leqslant x_n - r \leqslant y_n - r$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, si $\mu_{p-1} < \lambda_p(x_0)$, on a $y_n - r = o(x_n - r)$, ce qui contredit l'inégalité ci-dessus à partir d'un certain rang. Donc $\boxed{\lambda_p(x_0) \leqslant \mu_{p-1}}$.