Lycée Louis-Le-Grand, Paris — Pour le 17/05/2024
MP2I – Mathématiques
A. Troesch

DM n° 24 : Algèbre linéaire

Corrigé du problème 1 – Réduction de Jordan

Partie I – Réduction du problème

1. On a $u \circ (u-\lambda_i \mathrm{id})^{\alpha_i} = (u-\lambda_i)^{\alpha_i} \circ u$, donc, pour tout $x \in \mathrm{Ker}((u-\lambda_i \mathrm{id})^{\alpha_i})$,
$$(u-\lambda_i \mathrm{id})^{\alpha_i}(u(x)) = u\left((u-\lambda_i \mathrm{id})^{\alpha_i}(x)\right) = u(0) = 0.$$
Ainsi, $u(x) \in \mathrm{Ker}(u-\lambda_i \mathrm{id})^{\alpha_i}$. On en déduit que $\boxed{\mathrm{Ker}((u-\lambda_i \mathrm{id})^{\alpha_i}) \text{ est stable par } u}$.
Plus généralement, le même raisonnement prouverait que pour tous polynômes P et Q, $\mathrm{Ker}(P(u))$ est stable par $Q(u)$. En particulier, $\boxed{\mathrm{Ker}((u-\lambda_i \mathrm{id})^{\alpha_i}) \text{ est aussi stable par } u-\lambda_i \mathrm{id}.}$

2. Soit A la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$, et $A = (A_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant k}$ le découpage de A par blocs correspondant à la décomposition de E en somme des E_i. En notant p_i la projection sur E_i parallèlement à $\bigoplus\limits_{j \neq i} E_j$, le bloc $A_{i,j}$ représente alors
$$A_{i,j} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_j,\mathcal{B}_i} p_i \circ u_{|E_j}.$$
Or, si $i \neq j$, par stabilité des E_j par u, $\mathrm{Im}(u_{|E_j}) \subset E_j$, donc $p_i \circ u_{|E_j} = 0$. Ainsi, tous les blocs $A_{i,j}$ situés ailleurs que sur la diagonale sont nuls. Les blocs diagonaux, quant à eux, représentent $p_i \circ u_{|E_i}$ (c'est-à-dire u_i) relativement à la base $\mathcal{B}_i$; on a la représentation par blocs :
$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u_1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u_2)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_k}(u_k)} \end{pmatrix}}$$

3. Puisque $E_i = \mathrm{Ker}((u-\lambda_i \mathrm{id})^{\alpha_i})$, pour tout $x \in E_i$, $v_i^{\alpha_i}(x) = 0$. Ainsi, l'endomophisme $v_i^{\alpha_i}$ de E_i est nul. On en déduit que $\boxed{v_i \text{ est nilpotent.}}$

4. Si tout endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie admet une décomposition de Jordan, alors les v_i admettent une décomposition de Jordan. Ainsi, il existe une base $\mathcal{B}_i$ relativement à laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}(v_i)$ est diagonale par blocs, chaque bloc diagonal étant une matrice de Jordan de diagonale nulle $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Ainsi, dans cette base, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}(u_i)$ est également diagonale par blocs, chaque bloc étant une matrice de Jordan de diagonale λ_i : $\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$.
La question 2 nous assure alors que dans la base obtenue par concaténation des $\mathcal{B}_i$, la matrice de u est diagonale par blocs, chaque bloc étant une matrice de Jordan ; il peut y avoir plusieurs blocs de même diagonale λ_i (et de taille éventuellement différentes), correspondant aux différents blocs de la décomposition de u_i.

Ainsi, si le résultat est acquis pour les endomorphismes nilpotents,
$\boxed{\text{tout endomorphisme d'un } \mathbb{C}\text{-ev de dimension finie admet une réduction de Jordan}}$.

Partie II – Réduction de Jordan d'un endomorphisme nilpotent

1. Argument classique. Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}$ tels que
$$\lambda_0 x + \cdots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0.$$
Supposons les λ_i non tous nuls. Soit i le plus petit indice tel que $\lambda_i \neq 0$. En composant par u^{p-1-i}, il vient alors :
$$\lambda_i u^{p-1} + \lambda_{i+1} u^p + \cdots + \lambda_{p-1} u^{2p-2-i}(x) = 0$$
Comme $u^p = 0$ et $u^{p-1}(x) \neq 0$, il vient
$$\lambda_i u^{p-1}(x) = 0 \qquad \text{puis:} \qquad \lambda_i = 0,$$
d'où une contradiction. Ainsi, les λ_i sont tous nuls, ce qui signifie que :
$\boxed{\text{la famille } (u^{p-1}(x), u^{p-2}(x), \dots, u(x), x) \text{ est libre.}}$
On note F le sous-espace engendré par cette famille.
2. Il suffit de montrer que l'image par u des éléments de la base $(u^{p-1}(x), \dots, u(x), x)$ de F est dans F. Or, pour tout $i \in [\![0, p-1]\!]$, $u(u^i(x)) = u^{i+1}(x) \in F$, puisqu'il s'agit d'un autre élément de la base si $i \neq p-1$, et de $0 \in F$ si $i = p-1$. Ainsi, $\boxed{F \text{ est stable par } u.}$
3. Soit $k \in [\![1, p]\!]$.
   - La somme est directe car $u^{p-k}(x) \notin \mathrm{Ker}(u^{k-1})$, puisque $u^{p-1}(x) \neq 0$.
   - Clairement et classiquement, $\mathrm{Ker}(u^{k-1}) \subset \mathrm{Ker}(u^k)$, et $u^k(u^{p-k}(x)) = u^p(x) = 0$, donc $\mathrm{Vect}(u^{p-k}(x)) \subset \mathrm{Ker}(u^k)$.

   Ainsi : $\boxed{\mathrm{Ker}(u^{k-1}) \oplus \mathrm{Vect}(u^{p-k}(x)) \subset \mathrm{Ker}(u^k)}$
4. Soit S_p un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u^{p-1}) \oplus \mathrm{Vect}(x)$ dans $\mathrm{Ker}(u^p)$. On a alors :
$$\mathrm{Ker}(u^{p-2}) \oplus \mathrm{Vect}(u(x)) \oplus u(S_p) \subset \mathrm{Ker}(u^{p-1}).$$
En effet :
   - La première somme est directe d'après la question précédente.
   - Soit $y \in (\mathrm{Ker}(u^{p-2}) \oplus \mathrm{Vect}(u(x))) \cap u(S_p)$. Il existe donc $x_1 \in \mathrm{Ker}(u^{p-2})$, $\lambda \in \mathbb{C}$, et $x_2 \in S_p$ tels que
   $$y = x_1 + \lambda u(x) \qquad \text{et} \qquad y = u(x_2), \qquad \text{donc:} \qquad u(x_2) = x_1 + \lambda u(x).$$
   En appliquant u^{p-2}, il vient donc :
   $$u^{p-1}(x_2) = \lambda u^{p-1}(x).$$
   Or, u^{p-1} est injective sur $S_p \oplus \mathrm{Vect}(x)$, supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u^{p-1})$ dans $\mathrm{Ker}(u^p) = E$, et x_2 et x sont dans $S_p \oplus \mathrm{Vect}(x)$. Ainsi, $x_2 = \lambda x$. Comme $S_p \cap \mathrm{Vect}(x) = \{0\}$, on en déduit que $x_2 = 0$, puis $y = 0$.
   Ainsi, la somme $\mathrm{Ker}(u^{p-2}) \oplus \mathrm{Vect}(u(x)) \oplus u(S_p)$ est directe.
   - On a $\mathrm{Ker}(u^{p-2}) \oplus \mathrm{Vect}(u(x)) \subset \mathrm{Ker}(u^{p-1})$ d'après la question précédente, et $u(S_p) \subset \mathrm{Ker}(u^{p-1})$ (car $u^p = 0$). Donc
   $$\mathrm{Ker}(u^{p-2}) \oplus \mathrm{Vect}(u(x)) \oplus u(S_p) \subset \mathrm{Ker}(u^{p-1}).$$
   Soit T_{p-1} un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u^{p-2}) \oplus \mathrm{Vect}(u(x)) \oplus u(S_p)$ dans $\mathrm{Ker}(u^{p-1})$. On a donc
   $$\mathrm{Ker}(u^{p-2}) \oplus \mathrm{Vect}(u(x)) \oplus u(S_p) \oplus T_{p-1} = \mathrm{Ker}(u^{p-1}),$$
   donc, $\boxed{S_{p-1} = T_{p-1} \oplus u(S_p) \text{ est un supplémentaire de } \mathrm{Ker}(u^{p-2}) \oplus \mathrm{Vect}(u(x)) \text{ dans } \mathrm{Ker}(u^{p-1}) \text{ contenant } u(S_p).}$
5. Le raisonnement est le même. Supposons $S_p, \dots, S_{k+1}$ construits.
   - On a $\mathrm{Ker}(u^{k-1}) \oplus \mathrm{Vect}(u^{p-k}) \subset \mathrm{Ker}(u^k)$ d'après la question 3.

- Soit $y \in (\mathrm{Ker}(u^{k-1}) \oplus \mathrm{Vect}(u^{p-k})) \cap u(S_{k+1})$. Il existe $x_1 \in \mathrm{Ker}(u^{k-1})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x_2 \in S_{k+1}$ tels que
$$y = u(x_2) = x_1 + \lambda u^{p-k}(x).$$
En appliquant u^{k-1} à cette égalité, il vient
$$u^k(x_2) = u^k(\lambda u^{p-k-1}(x)).$$
Or, u^k est injective sur $S_{k+1} \oplus \mathrm{Vect}(u^{p-k-1})$ (car cet espace est en somme directe avec $\mathrm{Ker}(u^{k+1})$, d'après la construction de S_{k+1}). Ainsi, $x_2 = \lambda u^{p-k-1}(x)$. Comme $S_{k+1} \cap \mathrm{Vect}(u^{p-k-1}(x)) = \{0\}$, il vient $x_2 = 0$, puis $y = 0$.
Ainsi, la somme $\mathrm{Ker}(u^{k-1}) \oplus \mathrm{Vect}(u^{p-k}) \oplus u(S_{k+1})$ est directe.
- Comme $S_{k+1} \subset \mathrm{Ker}(u^{k+1})$, on a $u(S_{k+1}) \subset \mathrm{Ker}(u^k)$. Les autres inclusions ayant déjà été montrées, il vient donc :
$$\mathrm{Ker}(u^{k-1}) \oplus \mathrm{Vect}(u^{p-k}) \oplus u(S_{k+1}) \subset \mathrm{Ker}(u^k).$$
Soit T_k un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u^{k-1}) \oplus \mathrm{Vect}(u^{p-k}) \oplus u(S_{k+1})$ dans $\mathrm{Ker}(u^k)$ et $S_k = T_k \oplus u(S_{k+1})$.
Alors $\boxed{S_k \text{ est un supplémentaire de } \mathrm{Ker}(u^{k-1}) \oplus \mathrm{Vect}(u^{p-k}) \text{ dans } \mathrm{Ker}(u^k), \text{ contenant } u(S_{k+1}).}$

6. Soit $T = S_1 + \cdots + S_p$.
   - Par définition de S_1, on a $\mathrm{Vect}(u^{p-1}(x)) \oplus S_1 = \mathrm{Ker}(u)$.
   - On a ensuite $\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Vect}(u^{p-2}(x)) \oplus S_2 = \mathrm{Ker}(u^2)$, donc d'aprè le point précéent :
   $$\mathrm{Vect}(u^{p-1}(x), u^{p-2}(x)) \oplus S_1 \oplus S_2 = \mathrm{Ker}(u^2).$$
   - Plus généralement, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$,
   $$\mathrm{Vect}(u^{p-1}(x), \ldots, u^{p-k}(x)) \oplus S_1 \oplus \cdots \oplus S_k = \mathrm{Ker}(u^k).$$
   En effet, si le résultat est aquis pour $k - 1 \geqslant 1$, il vient :
   $$\begin{aligned}&\mathrm{Vect}(u^{p-1}(x), \ldots, u^{p-k}(x)) \oplus S_1 \oplus \cdots \oplus S_k\\ &\qquad= \mathrm{Vect}(u^{p-1}(x), \ldots, u^{p-k+1}(x)) \oplus S_1 \oplus \cdots \oplus S_{k-1} \oplus \mathrm{Vect}(u^{p-k}(x)) \oplus S_k\\ &\qquad= \mathrm{Ker}(u^{k-1}) \oplus \mathrm{Vect}(u^{p-k}(x)) \oplus S_k = \mathrm{Ker}(u^k).\end{aligned}$$
   - En particulier, pour $k = p$, on trouve que $\boxed{T \text{ est un supplémentaire de } F \text{ dans } E = \mathrm{Ker}(u^p).}$
   - Par ailleurs,
   $$u(T) \subset u(S_1) + \cdots + u(S_p) \subset \{0\} + S_1 + \cdots + S_{p-1} \subset T.$$
   Ainsi, $\boxed{T \text{ est stable par } u.}$
7. On montre alors le résultat par récurrence forte sur la dimension n de l'espace E.
Lorsque $\dim E = 0$, il n'y a rien à montrer.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que tout endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{C}$-ev de dimension $k < n$ admet une décomposition de Jordan. Soit u un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{C}$-ev E de dimension n, d'indice de nilpotentce p. Soit $x \notin \mathrm{Ker}(u^{p-1})$, et F et T construits comme ci-dessus. Alors F et T sont des sous-espaces stables par u. Soient u_1 et u_2 les endomorphismes de F et T induits par u.
   - Comme $\dim(F) > 0$, on a $\dim(T) < n$, et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à T : il existe une base $\mathcal{B}_2$ de T relativement à laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u_2)$ est diagonale par bloc, chaque bloc étant une matrice de Jordan de diagonale nulle.
   - On ne peut pas appliquer l'hypothèse de récurrence à F (car rien n'assure que $\dim(F) < n$: T peut être nul). En revanche, il est facile de trouver une base relativement à laquelle la matrice de u_1 est une matrice de Jordan : $\mathcal{B}_1 = (u^{k-p}(x), \ldots, u(x), x)$.
   - Soit $\mathcal{B}$ la juxtaposition des bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Alors la matrice de u relativement à la base $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs :
   $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u_1) & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u_2)\end{array}\right).$$
   D'après les deux points précédents, cette matrice est constituée de blocs diagonaux égaux à des matrices de Jordan, ce qui achève la preuve.

Ainsi, $\boxed{\text{toute matrice nilpotente admet une réduction de Jordan.}}$

Corrigé du problème 2 – Théorème de Gerstenhaber (d'après Mines-Ponts MP 2020, largement remanié)

Partie I – Trigonalisation des endomorphismes nilpotents

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$, et u un endomorphisme nilpotent de E.

1. Soit p tel que $u^p = 0$. Puisque $u^p = 0$, $\operatorname{Ker}(u^p) \neq \{0\}$ (puisque $\dim(E) > 0$), donc u n'est pas injective non plus. Ainsi, $\boxed{\operatorname{Ker}(u) \neq \{0\}}$.
2. On se donne x un vecteur non nul de $\operatorname{Ker}(u)$, et H un supplémentaire de $\operatorname{Vect}(x)$ dans E. On note $\pi \in \mathcal{L}(E)$ le projecteur sur H parallèlement à $\operatorname{Vect}(x)$, et $\overline{u} \in \mathcal{L}(H)$ définie par :
$$\forall z \in H, \quad \overline{u}(z) = \pi(u(z)).$$
   (a) Pour commencer, $\operatorname{Im}(\pi) = H$, donc $\operatorname{Im}(\pi \circ u) \subset H$. Ainsi, $\overline{u}$ est bien à valeurs dans H, et correspond à l'endomorphisme induit sur H (c'est-à-dire la restriction-corestriction) par l'endomorphisme $\pi \circ u$ (qui est bien un endomorphisme en tant que composée de deux endomorphismes).
   Ainsi, $\boxed{\overline{u} \text{ est un endomorphisme de } H}$.

   (b) On montre par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $z \in H$, $\overline{u}^k(z) = \pi(u^k(z))$.
   - Pour tout $z \in H$, $\overline{u}^0(z) = \operatorname{id}_H(z) = z = \pi(z) = \pi(\operatorname{id}(z)) = \pi(u^0(z))$.
   - Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $z \in H$, $\overline{u}^k(z) = \pi(u^k(z))$. Alors, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que
   $$\overline{u}^k(z) = u^k(z) - \lambda x \in H,$$
   par définition de la projection π. On en déduit que
   $$\overline{u}^{k+1}(z) = \pi(u(u^k(z) - \lambda x)) = \pi(u^{k+1}(z) - \lambda u(x)) = \pi(u^{k+1}(z)).$$
   - Ainsi, d'après le principe de récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, et tout $z \in H$, $\boxed{\overline{u}^k(z) = \pi(u^k(z))}$.

   On en déduit que si p est tel que $u^p = 0$, alors pour tout $z \in H$,
   $$\overline{u}^p(z) = \pi(u^p(z)) = \pi(0) = 0, \qquad \text{donc:} \qquad \overline{u}^p = 0.$$
   Ainsi, $\boxed{\overline{u} \text{ est nilpotent}}$.

   (c)
   - Soit $y \in E = \operatorname{Vect}(x) \oplus H$. Il existe donc $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et $z \in H$ tels que
   $$y = \lambda_1 x + z.$$
   Comme $(b_2, \ldots, b_n)$ est une base de H, il existe $\lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ tels que
   $$z = \sum_{k=2}^{n} \lambda_k b_k.$$
   Ainsi,
   $$y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k,$$
   et la famille $(b_1, \ldots, b_n)$ est une famille génératrice de E. Comme son cardinal est égal à la dimension de E, on peut conclure que $\boxed{(b_1, \ldots, b_n) \text{ est une base de } E}$.
   - La première colonne de $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est la décomposition de $u(b_1) = u(x) = 0$ dans la base $\mathcal{B}$; c'est donc la colonne nulle.
   Soit $k \geqslant 2$. La colonne k de $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est constituée des coordonnées de $u(b_k)$ dans la base $\mathcal{B}$. Or, π projetant sur $\operatorname{Vect}(b_2, \ldots, b_n)$ parallèlement à b_1,
   $$[u(b_k)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \bullet \\ [\pi(u(b_k))]_{\mathcal{B}'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet \\ [\overline{u}(b_k)]_{\mathcal{B}'} \end{pmatrix}.$$
   Autrement dit, il s'agit des coordonnées de $\overline{u}(b_k)$ dans la base $\mathcal{B}'$, précédées d'une composante sur b_1. Ainsi,
   $$\boxed{\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\overline{u}) & \\ 0 & & & \end{array}\right)}$$

3. Montrons par récurrence sur $n = \dim E > 0$ que pour tout endomorphisme nilpotent u de E, il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit triangulaire.
   - Soit $n = 1$, et E un espace de dimension 1. Soit u un endomorphisme nilpotent de E. Comme on l'a justifié plus haut, $\mathrm{Ker}(u) \neq \{0\}$, et donc, par dimensions, $\mathrm{Ker}(u) = E$. On en déduit que $u = 0$, et donc que la matrice de u est nulle, donc strictement triangulaire supérieure, quelle que soit la base choisie.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$. On suppose que la propriété est acquise pour les endomorphismes nilpotents d'un espace de dimension $n-1$. On définit x, H et $\overline{u}$, comme dans les questions précédentes. Comme $\dim(H)$ est de dimension $n-1$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme nilpotent $\overline{u}$ de H. Il existe une base $\mathcal{B}'$ de H telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\overline{u})$ soit triangulaire supérieure stricte . On définit $\mathcal{B}$ à partir de $\mathcal{B}'$ comme dans la question 2(c). Alors, d'après la représentation obtenue en 2(c), $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure stricte.
   - Par conséquent, d'après le principe de récurrence, pour tout $\mathbb{R}$- espace vectoriel E de dimension $n > 0$ et tout endomorphisme nilpotent u de E, il existe une base de E dans laquelle $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in T_n^{++}(\mathbb{R})}$.

4. Soit $u \in \mathcal{N}(E)$. Alors $u^k \in \mathcal{N}(E)$. Il existe donc une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^k)$ soit triangulaire supérieure stricte. On a alors :
$$\boxed{\mathrm{tr}(u^k) = \mathrm{tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^k)) = 0}.$$

Partie II – Généralités sur les endomorphismes nilpotents

On considère toujours un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie $n > 0$.

1. - Pour commencer, le cours nous assure que $\varphi = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}$ est un isomophisme de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}$. De plus, $T_n^{++}(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$ (engendré par les $E_{i,j}$, $i < j$). Ainsi, puisque $\mathcal{N}_{\mathcal{B}} = \varphi^{-1}(T_n^{++}(\mathbb{R}))$, on en déduit que $\mathcal{N}_{\mathcal{B}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, de même dimension que $T_n^{++}(\mathbb{R})$.
   - De plus, les matrices de $T_n^{++}(\mathbb{R})$ sont nilpotentes, de nilindice au plus n. Ainsi
   $$\forall u \in \mathcal{N}_{\mathcal{B}}, \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^n) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)^n = 0.$$
   On en déduit que $u^n = 0$. Par conséquent, les endomorphismes de $\mathcal{N}_{\mathcal{B}}$ sont tous nilpotents.
   - On en déduit que $\mathcal{N}_{\mathcal{B}}$ est un $\boxed{\text{sous-espace vectoriel nilpotent}}$ de $\mathcal{L}(E)$, et que sa dimension vaut $\boxed{\dfrac{n(n-1)}{2}}$.

2. Soit $x \in E$, et $p \geqslant 1$ tel que $u^p(x) = 0$ et $u^{p-1}(x) \neq 0$. On suppose par l'absurde que $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est liée. Il existe donc des coefficients non tous nuls $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}$ tels que
$$\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = 0.$$
Soit k_0 l'indice minimal tel que $\lambda_k \neq 0$. Il vient donc
$$\sum_{k=k_0}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = 0,$$
puis, en appliquant u_{p-1-k_0}, du fait que $u^\ell = 0$ si $\ell \geqslant p$,
$$\lambda_{k_0} u^{p-1}(x) = 0.$$
Cela contredit le fait $\lambda_{k_0} \neq 0$ et $u^{p-1}(x) \neq 0$.
Ainsi, $\boxed{(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)) \text{ est libre}}$.

3. Comme le cardinal d'une famille libre ne peut pas excéder la dimension de l'espace, on déduit de la question précédente que si u est nilpotente, $\boxed{\nu(u) \leqslant n}$.

4. Soit x et y et $p \geqslant q$ tels que $u^p(x) = u^q(x) = 0$ et tels que $(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y))$ soit libre. Supposons que $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x), y, u(y), \dots, u^{q-1}(y))$ soit liée, et considérons des scalaires non tous nuls tels que
$$\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x) + \sum_{k=0}^{q-1} \mu_k u^k(y) = 0.$$

- Si tous les λ_k sont nuls, l'égalité précédente contredit la liberté de la famille $(u^k(y))_{k\in[\![0,q-1]\!]}$, provenant de la question 2.
- De même, les μ_k ne peuvent pas être tous nuls.
- Soit donc k_1 l'indicie minimal tel que $\lambda_{k_1} \neq 0$, et k_2 l'indice minimal tel que $\mu_{k_2} \neq 0$.
- Si $k_2 + p - 1 - k_1 > q - 1$, donc si $k_2 > k_1 + q - p$, alors, en appliquant u^{p-1-k_1} à la relation, presque tous les termes s'annulent et on obtient :
$$\lambda_{k_1} u^{p-1}(x) = 0,$$
ce qui contredit $\lambda_{k_1} \neq 0$ et $u^{p-1}(x) \neq 0$.
- De même si $k_2 < k_1 + q - p$ i.e. si $k_1 + q - 1 - k_2 > p - 1$. La symétrie des rôles de x et y amène une contradiction sur μ_{k_2} (l'inégalité entre p et q ne sert à rien dans ce raisonnement, elle a été posée en vue de simplifier un éventuel raisonnement itératif, que je trouve plus délicat à rédiger, personnellement).
- Si $k_2 = k_1 + q - p$, alors en appliquant u^{p-1-k_1}, on obtient cette fois une relation non triviale
$$\lambda_{k_1} u^{p-1}(x) + \mu_{k_2} u^{q-1}(y) = 0,$$
qui contredit la liberté de $(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y))$.

Ainsi, $\boxed{\text{la famille } (x, u(x), \dots, u^{p-1}(x), y, u(y), \dots, u^{q-1}(y)) \text{ est libre}}$.

5. Soit u est nilpotente de nilindice $p \geqslant \max(2, n-1)$:
   (a) Supposons par l'absurde que $\dim(\operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Ker}(u)) \neq 1$.
   Il existe $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$. Puisque $u^p = 0$, on en déduit que $u^{p-1}(x) \in \operatorname{Ker}(u)$. Puisque $p - 1 \geqslant 1$, $u^{p-1}(x) \in \operatorname{Im}(u)$. On a donc $u^{p-1}(x) \in \operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Ker}(u)$ et est non nul. Ainsi, $\operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Ker}(u)) \neq \{0\}$. Par hypothèse, cet espace est alors de dimension au moins 2, et il contient un vecteur z tel que $(u^{p-1}(x), z)$ soit libre. Puisque $z \in \operatorname{Im}(u)$, on dispose de y tel que $u(y) = z$, et comme $z \in \operatorname{Ker}(u)$, $u^2(y) = 0$. En appliquant la quesiton 4 aux vecteurs x et y, on obtient une famille libre de cardinal $p + 1 > n$ ce qui est impossible.
   Ainsi, $\boxed{\dim(\operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Ker}(u)) = 1}$.
   (b) Puisque $p \geqslant 2$, $\operatorname{Im}(u^{p-1}) \subset \operatorname{Im}(u)$ et puisque $u^p = 0$, $\operatorname{Im}(u^{p-1}) \subset \operatorname{Ker}(u)$. De plus, puisque $u^{p-1} \neq 0$, $\dim(\operatorname{Im}(u^{p-1})) \geqslant 1$. D'après la question précédente, on en déduit donc que :
$$\boxed{\operatorname{Im}(u^{p-1}) = \operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Ker}(u)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\operatorname{rg}(u^{p-1}) = 1}.$$

Partie III – Endomorphismes de rang 1

1. - On remarque que par définition même du produit scalaire, par linéarité de $z \mapsto [z]_{\mathcal{B}}$ et par linéarité de la somme, le produit scalaire est bilinéaire, c'est-à-dire linéaire par rapport à chacune de ses variables (comme on le verra bientôt, c'est une des conditions exigées pour définir un produit scalaire).
   Soit alors $(a, x) \in (E \backslash \{0\})$. On a, pour tous $z, z' \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:
$$(a \otimes x)(z + \lambda z') = \langle a, z + \lambda z' \rangle x = \left(\langle a, z\rangle + \lambda \langle a, z' \rangle\right) x = \langle a, z\rangle x + \lambda \langle a, z' \rangle x = (a \otimes z)(x) + \lambda (a \otimes z')(x).$$
   Ainsi, $(a \otimes z)$ est bien linéaire. De plus elle est bien à valeurs dans E. On a donc bien $\boxed{a \otimes z \in \mathcal{L}(E)}$.
   - Clairement, $\operatorname{Im}(a \otimes x) \subset \operatorname{Vect}(x)$, donc $\operatorname{rg}(a \otimes x) \leqslant 1$.
   De plus,
$$(a \otimes x)(a) = \langle a, a \rangle x \neq 0.$$
   En effet, si on note $(a_1, \dots, a_k)$ les coordonnées de a dans la base $\mathcal{B}$,
$$\langle a, a \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 > 0,$$
   puisque $a \neq 0$ (là encore, c'est une propriété imposée par la définition d'un produit scalaire). Donc $\operatorname{rg}(a \otimes x) >$ 0
   Ainsi, $\boxed{\operatorname{rg}(a \otimes x) = 1}$.
2. On fixe $x \in E \backslash \{0\}$. Soit
$$\mathcal{F} = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \operatorname{Im}(u) \subset \operatorname{Vect}(x).\}.$$

Il n'est pas dur de vérifier à la main que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

On peut aussi voir $\mathcal{F}$ comme l'image d'un morphisme, ce qui facilitera ensuite le calcul de sa dimension. Soit φ le morphisme défini de $\mathcal{L}(E, \mathrm{Vect}(x))$ dans $\mathcal{L}(E)$ par coextension de l'espace d'arrivée (i.e. $\varphi(u) = i \circ u$, où i est l'application linéaire d'inclusion de $\mathrm{Vect}(x) \subset E$). L'application φ est linéaire, par bilinéarité de la composition d'applications linéaires, et injective, car i est injective. De plus, φ est à valeurs dans $\mathcal{F}$. Réciproquement, toute application v de $\mathcal{F}$ peut se corestreindre à $\mathrm{Vect}(x)$, ce qui définit un antécédent par φ de v.

Ainsi, $\mathcal{F} = \mathrm{Im}(\varphi)$, ce qui assure que $\boxed{\mathcal{F} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{L}(E)}$.

De plus, l'injectivité de φ nous assure alors que φ de corestreint en un isomorphisme de $\mathcal{L}(E, \mathrm{Vect}(x))$ sur son image $\mathcal{F}$. Par conséquent,

$$\dim \mathcal{F} = \dim \mathcal{L}(E, \mathrm{Vect}(x)) = \dim(E) \times \dim(\mathrm{Vect}(x)) \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{\dim \mathcal{F} = n}.$$

3. - L'application $\Phi : a \mapsto a \otimes x$ est définie de E sur $\mathcal{F}$.
   - Φ est linéaire. En effet, pour tout $a, a' \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $z \in E$,

   $$\Phi(a + \lambda a')(z) = \big\langle a + \lambda a', z \big\rangle x = \langle a, z \rangle x + \lambda \big\langle a', z \big\rangle x = \Phi(a)(z) + \lambda \Phi(a')(z).$$

   - Φ est injective. En effet, si $a \in \mathrm{Ker}(\Phi)$, alors pour tout $z \in E$,

   $$\langle a, z \rangle x = 0.$$

   En particulier, pour $z = a$, puisque $x \neq 0$, on obtient $\langle a, a \rangle = 0$, donc, avec les notations introduites plus haut,

   $$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 0,$$

   ce qui implique que les a_k sont tous nuls, donc que $a = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{0\}$, puis Φ est injective.
   - Comme $\dim(E) = \dim \mathcal{F} < +\infty$, on en déduit que $\boxed{\Phi \text{ est un isomorphisme}}$.
4. - Puisque $\mathrm{Im}(a \otimes x) \subset \mathrm{Vect}(x) = \mathrm{Vect}(b_1)$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $[(a \otimes x)(b_k)]_{\mathcal{B}}$ n'a que sa première coordonnée éventuellement non nulle.
   - De plus,

   $$(a \otimes x)(b_1) = \langle a, x \rangle \cdot x = \langle a, x \rangle \cdot b_1,$$

   donc

   $$[(a \otimes x)(b_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \langle a, x \rangle \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   - On en déduit que la matrice de $a \otimes x$ dans la base $\mathcal{B}$ a la forme suivante :

   $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a \otimes x) = \begin{pmatrix} \langle a, x \rangle & \bullet & \cdots & \bullet \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

   Ainsi,

   $$\boxed{\mathrm{tr}(a \otimes x) = \mathrm{tr}\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a \otimes x) = \langle a, x \rangle}.$$

5. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $z \in E$,

$$v \circ (a \otimes x)(z) = v(\langle a, z \rangle \cdot x) = \langle a, z \rangle \cdot v(x) = (a \otimes v(x))(z).$$

Ainsi, $\boxed{v \circ (a \otimes x) = a \otimes v(x)}$.

On a alors d'après la quesiton précédente : $\boxed{\mathrm{tr}(v \circ (a \otimes x)) = \langle a, v(x) \rangle}$.

Partie IV – Deux lemmes sur les sous-espaces nilpotents

L'objectif de cette partie est d'établir les deux lemmes suivants :

- **Lemme A.** Soit u et v dans $\mathcal{V}$. Alors $\mathrm{tr}(u^k v) = 0$ pour tout entier naturel k.

- **Lemme B.** Soit $x \in \mathcal{V}^{\bullet}\backslash\{0\}$. Si $K(\mathcal{V}) \subset \mathrm{Vect}(x) + \mathcal{V}x$, alors $v(x) = 0$ pour tout $v \in \mathcal{V}$.

1. Un lemme polynomial.
   (a) Soit $\mathcal{B}$ une base de F. En notant $[x]_j$ la coordonnée de x sur le j-ième vecteur de cette base, il vient donc, pour tout $j \in [\![1, \dim(F)]\!]$, et pour une infinité de valeurs de t :
   $$\sum_{i=0}^{k} t^i [x_i]_j = 0.$$
   Par propriété de rigidité des polynômes il en résulte que pour tout $j \in [\![1, \dim(F)]\!]$ et tout $i \in [\![0, k]\!]$, $[x_i]_j = 0$. Ainsi, pour tout $i \in [\![0, k]\!]$, $\boxed{x_i = 0}$.
   (b) Soit S un supplémentaire de F' dans F et π la projection sur S parallèlement à F'. On a alors, pour une infinité de valeurs de t :
   $$0 = \pi\left(\sum_{i=0}^{k} t^i x_i\right) = \sum_{i=0}^{k} t^i \pi(x_i).$$
   D'après la question précédente, pour tout $i \in [\![0, k]\!]$, $\pi(x_i) = 0$, donc $\boxed{x_i \in F'}$

   Vous verrez l'année prochaine qu'avec une condition supplémentaire (l'égalité valide sur un intervalle d'intérieur non vide), ces deux propriétés peuvent aussi s'obtenir par dérivation d'une fonction à valeurs dans un espace vectoriel normé.
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $u, v \in \mathcal{V}$.
   (a) Attention à ne pas utiliser la formule du binôme ici, les endomorphismes ne commutent pas nécessairement !
   - L'unicité (sous réserve d'existence) provient de la question 1(a). En effet, si pour tout $t \in \mathbb{R}$,
     $$\sum_{i=0}^{k} t^i f_i^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} t^i g_i^{(k)},$$
     alors en particulier, pour tout $z \in E$,
     $$\sum_{i=0}^{k} t^i f_i^{(k)}(z) = \sum_{i=0}^{k} t^i g_i^{(k)}(z),$$
     et la question 1(a) amène :
     $$\forall z \in E,\ \forall i \in [\![0, k]\!],\quad f_i^{(k)}(z) = g_i^{(k)}(z).$$
   - On montre l'existence par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$.
     * Pour $k = 1$, il suffit de poser $f_0^{(1)} = u$ et $f_1^{(1)} = v$.
     * Supposons la propriété satisfaite à un rang $k \in \mathbb{N}^*$ donné. Soit $(f_0^{(k)}, \ldots, f_k^{(k)}$ fournis par hypothèse de récurrence, vérifiant :
       $$(u + tv)^k = \sum_{i=0}^{k} t^i f_i^{(k)}.$$
       Alors
       $$\begin{aligned}(u+tv)^k &= (u+tv) \circ \sum_{i=0}^{k} t^i f_i^{(k)} \\ &= \sum_{i=0}^{k} t^i u \circ f_i^{(k)} + \sum_{i=0}^{k} t^{i+1} v \circ f_i^{(k)} \\ &= u \circ f_0^{(k)} + \sum_{i=1}^{k} t^i (u \circ f_i^{(k)} + v \circ f_{i-1}^{(k)}) + t^{k+1} v \circ f_k^{(k)}.\end{aligned}$$
       Il suffit donc de poser
       $$\boxed{f_0^{(k+1)} = u \circ f_0^{(k)}}, \qquad \boxed{f_{k+1}^{(k+1)} = v \circ f_k^{(k)}}, \qquad \forall i \in [\![1, k]\!],\ \boxed{f_i^{(k+1)} = u \circ f_i^{(k)} + v \circ f_{i-1}^{(k)}},$$
       qui sont bien des endomorphismes de E.
     * Le principe de récurrence permet de conclure à l'existence d'une telle famille.

(b) • La question précédente montre que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $f_0^{(k+1)} = u \circ f_0^{(k)}$, et $f_0^{(1)} = u$. Ainsi, par récurrence triviale, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{f_0^{(k)} = u^k}$.

• On montre par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que

$$f_1^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-1-i}.$$

* L'initialisation provient du fait, observé dans la question précédente, que $f_1^{(1)} = v$.
* Soit k tel que la relation soit vérifiée pour $f_1^{(k)}$. Alors, d'après la relation trouvée dans la question précédente,

$$\begin{aligned} f_1^{(k+1)} &= u \circ f_1^{(k)} + v \circ f_0^{(k)} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} u^{i+1} v u^{k-1-i} + v u^k \\ &= \sum_{i=1}^{k} u^i v u^{k-i} + v u^k \\ &= \sum_{i=0}^{k} u^i v u^{k-i} \end{aligned}$$

* D'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{f_1^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-1-i}}$$

3. Soit $k \in \mathbb{N}$
   - Puisque $\mathcal{V}$ est un espace vectoriel, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u + tv \in \mathcal{V}$. Ainsi, d'après la question I-4, $\operatorname{tr}((u+tv)^{k+1}) = 0$.
   - Ainsi, par linéarité de la trace pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$0 = \sum_{i=0}^{k+1} t^i \operatorname{tr}(f_i^{(k+1)}) = 0.$$

   Par rigidité polynomiale, on en déduit que pour tout $i \in [\![0, k+1]\!]$, $\operatorname{tr}(f_i^{(k+1)}) = 0$.
   - En particulier,

$$0 = \operatorname{tr}(f_1^{(k+1)}) = \sum_{i=0}^{k} \operatorname{tr}(u^i v u^{k-i}).$$

   par propriété de commutation interne de la trace, on en déduit que

$$0 = \sum_{i=0}^{k} \operatorname{tr}(u^k v) = (k+1) \operatorname{tr}(u^k v).$$

   Ainsi, $\boxed{\operatorname{tr}(u^k v) = 0}$.

4. • Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(u + tv)^{p-1}(y) \in K(\mathcal{V})$, par définition de cet espace (puisque $u + tv \in \mathcal{V}$). Ainsi, d'après la question 1(b), $\boxed{f_1^{(p-1)}(y) \in K(\mathcal{V})}$
   • De plus, $\mathcal{V}$ étant de nilindice générique p, $(u + tv)^p = 0$ et donc $f_1^{(p)} = 0$.
   Ainsi, d'après la relation obtenue dans la question 2(a),

$$0 = u \circ f_1^{(p-1)} + v \circ f_0^{(p-1)}.$$

   On en déduit que

$$u(f_1^{(p-1)}(y)) + v(u^{p-1}(y)) = 0.$$

   Soit alors $x \in \operatorname{Im}(u^{p-1})$ et y tel que $x = u^{p-1}(y)$. Alors

$$v(x) = v(u^{p-1}(y)) = -u(f_1^{(p-1)}(y)).$$

   D'après le premier point, il vient donc $\boxed{v(x) \in u(K(\mathcal{V}))}$.

5. Soit $x \in \mathcal{V}^\bullet \backslash \{0\}$ tel que $K(\mathcal{V}) \subset \mathrm{Vect}(x) + \mathcal{V}x$. On choisit $u \in \mathcal{V}$ tel que $x \in \mathrm{Im}(u^{p-1})$.
   (a) Soit $y \in K(\mathcal{V})$. On montre par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ qu'il existe $\lambda_k \in \mathbb{R}$ et $y_k \in K(\mathcal{V})$ tels que $y = \lambda_k x + u^k(y_k)$.
   - Pour $k = 0$, il suffit de prendre $\lambda_k = 0$ et $y_k = y$.
   - Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose qu'on dispose de $\lambda_k \in \mathbb{R}$ et de $y_k \in K(\mathcal{V})$ tels que
   $$y = \lambda_k x + u^k(y_k).$$
   Par hypothèse, on a donc $y_k \in \mathrm{Vect}(x) + \mathcal{V}x$. Il existe donc $v \in \mathcal{V}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que
   $$y = \lambda_k x + u^k(\lambda x + v(x)).$$
   Or, puisque $x \in \mathrm{Im}(u^{p-1})$, $u(x) = 0$, donc $u^k(x) = \delta_{k,0} x$. Par conséquent,
   $$y = (\lambda_k + \delta_{k,0}\lambda)x + u^k(v(x)).$$
   D'après la question 4, $v(x) \in u(K(\mathcal{V}))$, et on en déduit que $u^k(v(x)) \in u^{k+1}(K(\mathcal{V}))$. On dispose donc de $y_{k+1} \in K(\mathcal{V})$ tel que $u^k(v(x)) = u^{k+1}(y_{k+1})$. En posant $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \delta_{k,0}\lambda$, il vient donc :
   $$\boxed{y = \lambda_{k+1} x + u^{k+1}(y_{k+1})}, \quad y_{k+1} \in K(\mathcal{V}).$$
   - D'après le principe de récurrence, on en déduit le résultat voulu.

   En particulier, pour $k \geqslant p$, on obtient $y = \lambda_k x$, et donc $y \in \mathrm{Vect}(x)$.

   Puisque y a été choisi arbitrairement dans $K(\mathcal{V})$ on en déduit que $\boxed{K(\mathcal{V}) \subset \mathrm{Vect}(x)}$.

   (b) Soit $v \in \mathcal{V}$ tel que $v^{p-1} \neq 0$. Ainsi, il existe z tel que $v^{p-1}(z) \neq 0$. D'après la question précédente, $v^{p-1}(z) \in \mathrm{Vect}(x) \backslash \{0\}$. Soit donc $\lambda \neq 0$ tel que
   $$v^{p-1}(z) = \lambda x.$$
   Comme $v^p = 0$, il en résulte que $\lambda v(x) = 0$, et puisque $\lambda \neq 0$, $\boxed{v(x) = 0}$.

   (c) Soit $y \in E$ tel que $u^{p-1}(y) = x$. Alors, avec les notations de 2(a), $f_0^{(p-1)}(z) \neq 0$, donc d'après 1(a), l'égalité
   $$\sum_{i=0}^{k} t^i f_i^{(k)}(z) = 0$$
   ne peut être vérifiée que pour un nombre fini de valeurs de t. Il en résulte qu'il existe $t \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ tel que $(u + tv)^{p-1}(z) \neq 0$. Soit un tel réel t. L'application $u + tv$ est donc dans $\mathcal{V}$ et est de $\boxed{\text{nilindice } p}$.

   D'après la question 5(b), on en déduit que $u(x) + tv(x) = 0$, donc que $tv(x) = 0$, et puisque $t \neq 0$, $\boxed{v(x) = 0}$.
   C'est bien ce qu'il fallait montrer pour obtenir le lemme B.

Partie V – Démonstration du théorème de Gerstenhaber

1. On introduit deux applications :
   - $\Phi : \mathcal{V} \to E$, définie par $\Phi(v) = v(x)$;
   - $\Psi : \mathcal{W} \to \mathcal{L}(H)$, définie par $\Psi(u) = \pi \circ u$.

   La linéarité de Φ est évidente, et $\mathcal{W} = \mathrm{Ker}(\Phi)$, et $\mathcal{V}x = \mathrm{Im}(\Phi)$. Ce sont donc des sous-espaces vectoriels respectifs de $\mathcal{V}$ et de E

   En particulier, $\mathcal{W}$ étant un espace vectoriel, cela permet de justifier que Ψ est une application linéaire (linéarité évidente). De plus, $\mathcal{Z} = \mathrm{Ker}(\Psi)$ et $\overline{\mathcal{V}} = \mathrm{Im}(\Psi)$. Ce sont donc des sous-espaces vectoriels respectifs de $\mathcal{W}$ et de $\mathcal{L}(H)$.

   Par ailleurs, en appliquant le théorème du rang à Φ et à Ψ, il vient alors :
   $$\boxed{\dim \mathcal{V} = \dim(\mathcal{V}x) + \dim(\mathcal{W}) = \dim(\mathcal{V}x) + \dim \mathcal{Z} + \dim \overline{\mathcal{V}}}$$

2. - Pour tout $u \in \mathcal{Z}$, $\pi \circ u = 0$, donc $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Vect}(x)$. On en déduit que $\mathcal{Z} \subset \mathcal{F}$, où $\mathcal{F}$ est l'espace introduit dans la partie III.
   Or, $\varphi_x : a \mapsto a \otimes x$ est un isomorphisme de E sur F d'après III-3. Soit $L = \varphi_x^{-1}(\mathcal{Z})$. On a donc
   $$\boxed{\mathcal{Z} = \{a \otimes x \mid a \in L\}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\dim L = \dim \mathcal{Z}},$$
   puisque φ_x est un isomophisme.

- Puisque $(a \times x) \in \mathcal{W}$, en particulier, c'est un élément nilpotent. On déduit de III-5 et I-4 que

$$\langle a, x\rangle = \operatorname{tr}(a \times x) = 0.$$

Ceci étant vrai pour tout $a \in L$, $\boxed{x \in L^{\perp}}$.

3. Soit $u \in \mathcal{V}$ et $a \in L$.
   - Puisque $(a \otimes x) \in \mathcal{V}$, il découle du lemme A que

$$\operatorname{tr}(u(a \otimes x)) = 0.$$

   La question III-5 permet alors d'affirmer que $\langle a, u(x)\rangle = 0$. Ainsi, $u(x) \in L^{\perp}$. Ceci étant vrai pour tout $u \in \mathcal{V}$, $\boxed{\mathcal{V}x \subset L^{\perp}}$.
   - Plus généralement, pour $k \geqslant 1$, $\operatorname{tr}(u^k(a \otimes x)) = 0$ d'après le lemme B, donc on obtient de même avec III-5 que $\boxed{u^k(x) \in L^{\perp}}$. Cela reste vrai pour $k = 0$ d'après la question 2.
4. - L'application $\varphi_\ell : x \mapsto \langle x, \ell\rangle$ est une application linéaire. Ainsi, son noyau est un sous-espace vectoriel de E. Or, on peut décrire $L^{\perp}$ par :

$$L^{\perp} = \bigcap_{\ell \in L} \operatorname{Ker}(\varphi_\ell).$$

   Par conséquent, $\boxed{L^{\perp} \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$, en tant qu'intersection de sous-espaces vectoriels.
   - Soit $\ell \in L \cap L^{\perp}$. On a donc

$$0 = \langle \ell, \ell\rangle$$

   et donc $\ell = 0$. Ainsi, $L \cap L^{\perp} = \{0\}$ et $\boxed{\text{la somme } L \oplus L^{\perp} \text{ est directe}}$.
5. - Soit $y \in \operatorname{Vect}(x) \cap \mathcal{V}x$. Il existe donc $v \in \mathcal{V}$ tel que $v(x) = y$, et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda x$. Ainsi,

$$v(x) = \lambda x, \qquad \text{puis:} \qquad v^p(x) = \lambda^p x.$$

   Comme $v^p(x) = 0$ et $x \neq 0$, cela impose $\lambda^p = 0$, puis $\lambda = 0$. Ainsi, $y = 0$.
   Par conséquent, $\boxed{\text{la somme } \operatorname{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x \text{ est directe}}$.
   - Puisque $L^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E, et puisque $\operatorname{Vect}(x)$ et $\mathcal{V}x$ sont inclus dans $L^{\perp}$, on a

$$\boxed{\operatorname{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x \subset L^{\perp}}$$

   - On a donc

$$\dim(L^{\perp}) \geqslant \dim(\operatorname{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x) = \dim(\operatorname{Vect}(x)) + \dim(\mathcal{V}x) = 1 + \dim \mathcal{V}x.$$

   De plus, puisque la somme $L \oplus L^{\perp}$ est directe et incluse dans E, on a également

$$\dim L + \dim L^{\perp} \leqslant n$$

   (on a même l'égalité en fait, ce qu'on prouvera dans le cours d'algèbre bilinéaire). Par conséquent, en combinant les deux inégalités, $\boxed{\dim \mathcal{V}x + \dim L \leqslant n - 1}$
6. $\overline{\mathcal{V}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(H)$ et d'après I-2(b), ses éléments sont nilpotents.
   C'est donc un $\boxed{\text{sous-espace nilpotent de } \mathcal{L}(H)}$.
7. Par hypothèse de récurrence, $\dim(\overline{\mathcal{V}}) \leqslant \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$. Ainsi d'après les questions V-1, V-2 et V-5 :

$$\boxed{\dim(\mathcal{V}) \leqslant \frac{(n-1)(n-2)}{2} + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}}.$$

Dans toute la suite du problème, on suppose que $\dim \mathcal{V} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

8. Les inégalités de la question précédente doivent donc être des égalités, ainsi :

$$\boxed{\dim \overline{\mathcal{V}} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}}, \qquad \text{et} \qquad \dim(\mathcal{V}x) + \dim \mathcal{Z} = n - 1.$$

   Cette dernière égalité implique

$$\dim(\operatorname{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x) + \dim L = n$$

   Comme de plus, $\operatorname{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x \subset L^{\perp}$ et $\dim L^{\perp} \leqslant n - \dim L = \dim(\operatorname{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x)$, on déduit que

$$\boxed{\operatorname{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x = L^{\perp}}$$

9. - Par hypothèse de récurrence, $\overline{\mathcal{V}}$ est isomorphe à un espace de matrices triangulaires supérieures strictes d'ordre $n-1$, contenant notamment la matrice de Jordan de nilindice $n-1$. Ainsi, le nilindice générique de $\overline{\mathcal{V}}$ est égal à $n-1$ et minore le nilindice générique de $\mathcal{V}$. On en déduit que le nilindice générique de $\mathcal{V}$ est $\boxed{\text{supérieur ou égal à } n-1}$.
   - Supposons que $\mathcal{V}x = \{0\}$. Soit $\mathcal{B}' = (b_2, \ldots, b_n)$ une base de H dans laquelle les éléments de $\overline{\mathcal{V}}$ sont représentés par une matrice triangulaire stricte (possible par HR). On pose $b_1 = x$ et $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$. Puisque $v(b_1) = 0$ pour tout $v \in \mathcal{V}$ (du fait de notre supposition sur $\mathcal{V}x$), la construction faite en I-2 et I-3 est valide, et la représentation de tout $v \in \mathcal{V}$ dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure stricte.

Compte tenu du résultat de la question précédente, il ne nous reste plus qu'à établir que l'on peut choisir le vecteur x tel que $\mathcal{V}x = \{0\}$.
On choisit x dans $\mathcal{V}^\bullet \backslash \{0\}$. On note p le nilindice générique de $\mathcal{V}$, et on fixe $u \in \mathcal{V}$ tel que $x \in \mathrm{Im}(u^{p-1})$. On rappelle que $p \geqslant n-1$ d'après la question 9.

10. - Puisque $v(x) \neq 0$, $\nu(v) \geqslant 2$, donc $p \geqslant 2$.
    - Si $\mathrm{Im}(v^{p-1}) = \{0\}$ le résultat est trivial.
    - On peut donc supposer que $\mathrm{Im}(v^{p-1}) \neq \{0\}$. Ainsi, v est de nilindice égal à $p \geqslant \max(2, n-1)$. D'après la question II-5, $\mathrm{rg}(v^{p-1}) = 1$. Puisque v est de nilindice $p-1$, il existe $y \in E$ tel que $v^{p-1}(y) \neq 0$, et $y \notin \mathrm{Vect}(x)$. Soit aussi q tel que $v^{q-1}(x) \neq 0$ et $v^q(x) = 0$. Par hypothèse, $q \geqslant 2$. Si $(v^{p-1}(y), v^{q-1}(x))$ est libre, la question II-4 donne une famille libre de cardinal strictement plus grand que n. Ainsi, la famille est liée, donc, les vecteurs étant par définition non nuls,

    $$\mathrm{Vect}(v^{q-1}(x)) = \mathrm{Vect}(v^{p-1}(y)) = \mathrm{Im}(v^{p-1}),$$

      la dernière égalité venant du fait que cette image est de dimension 1.
    - Or, d'après V-3, $v^{q-1}(x) \in L^\perp$ et donc, d'après V-8 :

    $$\boxed{\mathrm{Im}(v^{p-1}) \subset L^\perp = \mathrm{Vect}(x) + \mathcal{V}x.}$$

11. Supposons qu'il existe $v_0 \in \mathcal{V}$ tel que $v_0(x) \neq 0$. Soit $v \in \mathcal{V}$. Alors $v(x) + tv_0(x)$ ne peut être nul que pour au plus une valeur de t. Or $v + tv_0 \in \mathcal{V}$. Ainsi, pour toutes les valeurs réelles de t sauf au plus une, $\mathrm{Im}((v + tv_0)^{p-1}) \subset \mathrm{Vect}(x) + \mathcal{V}x$. D'après IV-1(b) (en évaluant en chaque $z \in E$) et en regardant le coefficient de t^0 du développement (correspondant à $f_0^{(k)}$ de IV-2(a), après avoir renommé les fonctions), on en déduit que

    $$\boxed{\forall v \in \mathcal{V}, \quad \mathrm{Im}(v^{p-1}) \subset \mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x}$$

12. Le lemme B de la partie IV nous permet alors de conclure que $v(x) = 0$ pour tout $v \in \mathcal{V}$, donc $\mathcal{V}x = 0$. La question V-9 permet de conclure à la validité de la récurrence, prouvant ainsi le théorème de Gerstenhaber.