

DM n° 25 : Fonctions dérivables sur un intervalle

Corrigé du problème 1 – Exposant de Hölder ponctuel (adapté de Polytechnique MP 2013)

Partie I – Résultats préliminaires

1. La fonction $|f|$ est continue sur le compact $[0, 1]$, donc est bornée et atteint ses bornes. D'où l'existence de $\sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ dans \mathbb{R} (et c'est même un maximum).

2. Soit f et g deux éléments de \mathcal{C}_0 , et λ et μ . La fonction $\lambda f + \mu g$ est alors continue en tant que combinaison linéaire de fonctions continues, et s'annule en 0 et en 1. Par conséquent, $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}_0$.

Comme \mathcal{C}_0 est non vide, cela signifie, dans un langage que vous verrez bientôt, que \mathcal{C}_0 est un sous-espace vectoriel de \mathcal{C}^0 .

3. Posons $x_0 = a$ et $x_{n+1} = b$. D'après l'inégalité des accroissements finis sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$, f étant continue sur $[x_i, x_{i+1}]$, dérivable sur $]x_i, x_{i+1}[$ et $|f'| \leq M$, on a

$$|f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq M|x_{i+1} - x_i| = M(x_{i+1} - x_i),$$

et d'après l'inégalité triangulaire,

$$|f(b) - f(a)| \leq \sum_{i=1}^n |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq M \sum_{i=1}^{n+1} (x_{i+1} - x_i),$$

et par télescopage

$$|f(b) - f(a)| \leq M(b - a).$$

4. C'est une inégalité de convexité : la fonction $x \mapsto x^s$ est concave, donc par comparaison avec la corde :

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^s \geq \frac{a^s + b^s}{2}.$$

Cela fournit bien l'inégalité voulue.

On peut aussi le faire par étude de fonction, si on ne voit pas l'argument de convexité, en transformant au préalable l'inégalité sous la forme :

$$\left(1 + \frac{b}{a}\right)^s - 2^{1-s} \left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^s\right) \geq 0.$$

Il suffit alors d'étudier la fonction $x \mapsto (1+x)^s - 2^{1-s}(1+x^s)$.

Partie II – Définition de l'exposant de Hölder ponctuel

5. Soit $f \in \mathcal{C}^0$. La fonction f est dans $\Gamma^0(x_0)$ si et seulement si $|f(x) - f(x_0)|$ est bornée. Comme

$$|f(x)| - |f(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| \leq |f(x)| + |f(x_0)|,$$

c'est le cas si et seulement si f est bornée. Comme f est continue sur le compact $[0, 1]$, cette hypothèse est toujours satisfaite. Ainsi, $\Gamma^0(x_0) = \mathcal{C}$.

6. (a) Soit $0 \leq s_1 \leq s_2 < 1$, et $f \in \Gamma^{s_2}(x_0)$. On a alors

$$\frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^{s_1}} = \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^{s_2}} |x - x_0|^{s_2 - s_1}.$$

Cette quantité reste bornée sur $[0, 1]$, comme produit de fonctions bornées (puisque $s_2 - s_1 \geq 0$). On en déduit que $f \in \Gamma^{s_1}(x_0)$, d'où l'inclusion $\Gamma^{s_2}(x_0) \subset \Gamma^{s_1}(x_0)$.

(b) Soit f dérivable en x_0 . La fonction $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite en x_0 et est continue sur $[0, 1] \setminus \{x_0\}$, donc est bornée (prolongeable par continuité en une fonction continue sur un compact). Par le même argument que dans la question précédente, $f \in \Gamma^s(x_0)$, pour tout $s \in [0, 1[$.

(c) Soit $x_0 \in]0, 1[$, et $f : x \mapsto (x - x_0) \ln(|x - x_0|)$, prolongé par continuité par 0 en x_0 . Pour tout $s \in [0, 1[$,

$$x \mapsto \frac{|f(x)|}{|x - x_0|^s} = (x - x_0)^{1-s} \ln(|x - x_0|)$$

admet une limite en x_0 et est continue ailleurs, donc est bornée. Ainsi, pour tout $s \in [0, 1[$, $f \in \Gamma^s(x_0)$.

Par ailleurs, f n'est pas dérivable en x_0 , ce qu'on montre facilement en formant le taux d'accroissement.

7. On a, pour tout $x \in [0, 1]$, $p(x) = \sqrt{|1 - 4x^2|} = \sqrt{(1 - 2x)(1 + 2x)}$. Soit $s \in [0, 1[$. Pour $x \in [0, 1]$,

$$\frac{|p(x) - p(\frac{1}{2})|}{|x - \frac{1}{2}|^s} = 2^s |1 - 2x|^{\frac{1}{2}-s} |1 + 2x|^{\frac{1}{2}}.$$

Cette expression admet une limite finie en $\frac{1}{2}$ si $s \leq \frac{1}{2}$, et une limite infinie sinon. Comme elle est continue sur le reste de l'intervalle compact $[0, 1]$ on en déduit qu'elle est bornée si et seulement si $s \in [0, \frac{1}{2}]$. Ainsi,

$$\alpha_f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}.$$

8. (a) Soit $h_1 < h_2$ dans $[0, 1]$. On a clairement l'inclusion :

$$\{|f(y) - f(x)| \mid x, y \in [0, 1] \text{ et } |x - y| \leq h_1\} \subset \{|f(y) - f(x)| \mid x, y \in [0, 1] \text{ et } |x - y| \leq h_2\},$$

d'où l'inégalité sur les sup :

$$\sup\{|f(y) - f(x)| \mid x, y \in [0, 1] \text{ et } |x - y| \leq h_1\} \subset \sup\{|f(y) - f(x)| \mid x, y \in [0, 1] \text{ et } |x - y| \leq h_2\},$$

c'est-à-dire $\omega_f(h_1) \leq \omega_f(h_2)$. Ainsi, ω_f est croissante.

Remarquons dans un premier temps que $\omega_f(0) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f est uniformément continue sur $[0, 1]$ d'après le théorème de Heine, donc il existe η tel que pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$, si $|x - y| \leq \eta$, alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Soit alors $0 < h < \eta$. L'ensemble $\sup\{|f(y) - f(x)| \mid x, y \in [0, 1] \text{ et } |x - y| \leq h\}$ est donc majoré par ε , donc $\omega_f(h) \leq \varepsilon$.

Cela prouve bien la continuité de ω_f en 0.

(b) Par ailleurs, étant donné $h \leq h'$, pour tout (x, y) tels que $|x - y| \leq h'$, on peut sans perte de généralité supposer $x \leq y$. Les deux boules $B(x, h)$ et $B(y, h' - h)$ ne sont pas disjointes, et leur intersection intersecte l'intervalle $]x, y[$. On peut donc trouver z dans $B(x, h) \cap B(y, h' - h) \cap]x, y[$. On a alors $z \in]x, y[\subset [0, 1]$. Ainsi, $|x - z| \leq h$ et $|y - z| \leq h' - h$. On obtient alors :

$$|f(x) - f(z)| \leq \omega_f(h) \quad \text{et} \quad |f(z) - f(y)| \leq \omega_f(h' - h).$$

Ainsi,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)| \leq \omega_f(h) + \omega_f(h' - h).$$

Ainsi, cette inégalité étant valide pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$ tels que $|x - y| \leq h'$, on en déduit que

$$\omega_f(h') \leq \omega_f(h) + \omega_f(h' - h).$$

(c) Sous les hypothèses de la question précédente, du fait de la croissance de ω_f , on a alors,

$$0 \leq \omega_f(h') - \omega_f(h) \leq \omega_f(h' - h)$$

Or, $\omega_f(h' - h) \rightarrow 0$ lorsque $h' \rightarrow h$ à h fixé (par continuité en 0), donc, par théorème d'encadrement, $\omega_f(h') \rightarrow \omega_f(h)$ lorsque $h' \rightarrow h$. C'est bien dire que ω_f est continue en h . Ceci étant vrai pour tout $h \in [0, 1]$, on en déduit que ω_f est continue sur $[0, 1]$.

9. (a) Soit M un majorant de $\left| \frac{\omega_f(h)}{h^s} \right|$. Soit alors $x_0 \in [0, 1]$ et $x \in [0, 1]$. Par définition de ω_f ,

$$\frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^s} \leq \frac{\omega_f(|x - x_0|)}{|x - x_0|^s} \leq M.$$

Ainsi, par définition, $f \in \Gamma^s(x_0)$.

(b) La fonction q est dérivable sur $]0, 1[$, donc pour tout $x_0 \in]0, 1[$, $\alpha_q(x_0) = 1$.

Pour tout $s < 1$, $x^{-s}q(x) = x^{1-s} \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. Ainsi, cette fonction se prolonge par continuité en une fonction continue sur l'intervalle compact $[0, 1]$, donc bornée. Par conséquent, $q \in \Gamma^s(0)$, et ceci pour tout $s \in [0, 1[$. On en déduit que $\alpha_f(0) = 1$.

Soit $x_n = \frac{1}{2n}$ et $y_n = \frac{1}{2n+1}$. On a alors

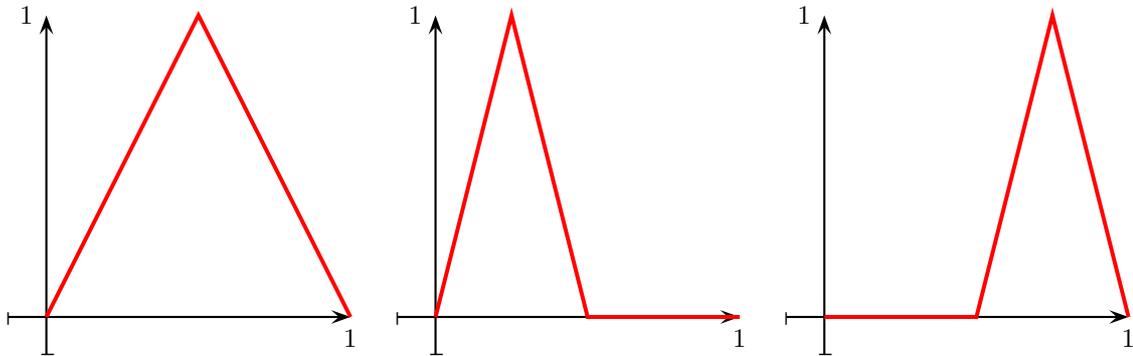
$$|f(x_n) - f(y_n)| = \left| \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} \right| = \frac{4n+1}{2n(2n+1)}.$$

Posons $h_n = |x_n - y_n| = \frac{1}{2n(2n+1)}$. On a alors $|f(x_n) - f(y_n)| \leq \omega_f(h_n)$, et $|f(x_n) - f(y_n)| \sim_{+\infty} 2\sqrt{h_n}$. Ainsi, si $\frac{\omega_f(h_n)}{\sqrt{h_n}}$ admet une limite lorsque $n \rightarrow +\infty$, cette limite est supérieure à 2.

On en déduit que $\frac{\omega_f(h)}{\sqrt{h}}$ ne tend pas vers 0 lorsque h tend vers 0.

Partie III – Le système de Schauder

10. (a) On obtient des fonctions tente, respectivement dans l'ordre : $\theta_{0,0}$, $\theta_{1,0}$ et $\theta_{1,1}$:



(b) Le graphe de $\theta_{j,k}$ sera de la même façon plus généralement constitué d'un pic affine sur l'intervalle $[k2^{j-1}, (k+1)2^{j-1}]$. Ainsi, plus j est grand, plus ce pic est resserré.

11. (a) L'inclusion

$$[k2^{-j-1}, (k+1)2^{-j-1}] \subset [k'2^{-j}, (k'+1)2^{-j}]$$

est vérifiée si et seulement si

$$k'2^{-j} \leq k2^{-j-1} \leq (k+1)2^{-j-1} \leq (k'+1)2^{-j}, \quad \text{soit:} \quad k' \leq \frac{k}{2} < \frac{k+1}{2} \leq (k'+1).$$

On doit avoir $k' \leq \frac{k}{2} < k'+1$, donc, par définition $k' = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$, d'où l'unicité. Réciproquement, cette valeur convient, d'où l'existence.

(b) Par définition, et conformément à la représentation graphique suggérée, la valeur de $\theta_{j,k}$ sur les points de la subdivision régulière de pas 2^{-j-1} est toujours nulle, sauf au sommet du pic :

$$\theta_{j,k}(\ell 2^{-j-1}) = \delta_{\ell, 2k+1}$$

- (c)
- On vérifie aisément la continuité de $\theta_{j,k}$, par recollement aux points $k2^{-\ell}$ et $(k+1)2^{-\ell}$ (c'est-à-dire en considérant les limites à gauche et à droite en ces points, toutes nulles), la fonction étant continue à l'intérieur des intervalles délimités par ces points (par continuité de la racine et de la valeur absolue).
 - Par définition, $\theta_{j,k}$ est nulle sur chaque intervalle $[\ell 2^{-j-1}, (\ell+1)2^{-j-1}]$ lorsque $\ell \neq 2k$ et $\ell \neq 2k+1$, donc affine. Elle est aussi affine sur l'intervalle $[2k2^{-j-1}, (2k+1)2^{-j-1}]$, égale à $x \mapsto 2^{j+1}x - 2k$ (portion ascendante du pic) et sur l'intervalle $[(2k+1)2^{-j-1}, (2k+2)2^{-j-1}]$, égale à $x \mapsto (2k+2) - 2^{j+1}x$.
 - Pour $n > j$, d'après la question 11(a) (itérée), pour tout $\ell \in \mathcal{T}_n$, il existe $\ell' \in \mathcal{T}_{j+1}$ tel que $[\ell 2^{-n}, (\ell+1)2^{-n}] \subset [\ell' 2^{-j-1}, (\ell'+1)2^{-j-1}]$. Ainsi, $\theta_{j,k}$ est affine sur cet intervalle aussi.

- (d) La fonction $\theta_{j,k}$ est affine par morceaux, avec une pente maximale égale à 2^{j+1} , en valeurs absolues. Ainsi, elle est dérivable sauf en un nombre fini de points, de dérivée majorée en valeur absolue par 2^{j+1} . On déduit de la question 3 que pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$, on a :

$$\boxed{|\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(y)| \leq 2^{j+1}|x - y|}.$$

12. Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f étant continue sur le compact $[0, 1]$, elle est uniformément continue. Il existe donc $\eta > 0$ tel que pour tous x, y tels que $|x - y| \leq \eta$, $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Soit J tel que $2^{-(J+1)} \leq \eta$, et $j \geq J$. On a alors

$$\begin{aligned} f\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)2^{-j}\right) - \frac{f(k2^{-j}) + f((k+1)2^{-j})}{2} \\ = \frac{1}{2}\left(f\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)2^{-j}\right) - f(k2^{-j})\right) + \frac{1}{2}\left(f\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)2^{-j}\right) - f((k+1)2^{-j})\right) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $k \in \mathcal{T}_j$,

$$\max_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| \leq \varepsilon.$$

Ayant obtenu cette inégalité pour tout $j \geq J$, cela prouve bien que $\boxed{\lim_{j \rightarrow +\infty} \max_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| = 0}$.

On peut aussi rédiger cette question en se servant de la fonction ω_f introduite plus haut. En effet, pour tout $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathcal{T}_j$,

$$\left| f\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)2^{-j}\right) - \frac{f(k2^{-j}) + f((k+1)2^{-j})}{2} \right| \leq \frac{1}{2}(\omega_f(2^{-j-1}) + \omega_f(2^{-j-1})) = \omega_f(2^{-j-1}).$$

Le majorant étant indépendant de k , on en déduit que

$$0 \leq \max_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| \leq \omega_f(2^{-j-1})$$

On conclut par le théorème d'encadrement, du fait que ω_f est continue en 0 de valeur nulle.

Il s'agit évidemment du même argument, réexprimé différemment, puisque ω_f n'est autre qu'une mesure de l'uniforme continuité de f .

13. (a) C'est une évidence.

(b) Soit $(j, k) \in \mathcal{I}$, $(i, \ell) \in \mathcal{I}$.

- Si $\theta_{i,\ell}$ est affine sur $[k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$, alors $c_{j,k}(\theta_{i,\ell}) = 0$ (cela revient à dire que la valeur au milieu est la moyenne des valeurs). C'est le cas dès lors que $j > i$.
- Si $j < i$, la fonction $\theta_{i,\ell}$ est nulle en tout point $k2^{-j-1}$, donc $c_{j,k}(\theta_{i,\ell}) = 0$.
- Si $j = i$, la fonction $\theta_{i,\ell}$ est nulle en tout point $k'2^{-j-1}$, sauf lorsque $k' = 2\ell + 1$ (sommet du pic). Ainsi, $c_{j,k}(\theta_{i,\ell}) = 0$ sauf lorsque $k = \ell$.

On en déduit que $c_{j,k}(\theta_{i,\ell}) = 0$ sauf lorsque $(j, k) = (i, \ell)$. Cela peut se réécrire :

$$\boxed{c_{j,k}(\theta_{i,\ell}) = \delta_{j,i} \delta_{k,\ell}}.$$

(c) Par conséquent, l'après les deux questions précédentes

$$c_{j,k}(S_n f) = \sum_{j'=0}^n \sum_{k' \in \mathcal{T}_{j'}} c_{j',k'}(f) c_{j,k}(\theta_{j',k'}) = \boxed{c_{j,k}(f)},$$

tous les autres termes de la somme s'annulant d'après la question précédente.

14. (a) Les fonctions $\theta_{j,k}$ intervenant dans la définition de $S_n(f)$ sont toutes affines sur $[\ell 2^{-n-1}, (\ell+1)2^{-n-1}]$, donc

$$\boxed{S_n(f) \text{ est affine sur } [\ell 2^{-n-1}, (\ell+1)2^{-n-1}]}$$

(b) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\ell \in \mathcal{T}_{n+1}$, $(S_n f)(\ell 2^{-n-1}) = f(\ell 2^{-n-1})$.

- Pour $n = 0$,

$$S_0(f) = c_{0,0}(f)\theta_{0,0} = \left(f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}(f(0) + f(1))\right)\theta_{0,0} = f\left(\frac{1}{2}\right)\theta_{0,0}.$$

Comme θ_0 s'annule en 0 et en 1 et prend la valeur 1 en $\frac{1}{2}$, on a bien :

$$S_0(f)(0) = f(0), \quad S_0(f)\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad S_0(f)(1) = f(1).$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons la propriété vérifiée pour S_{n-1} . On a alors :

$$S_n(f) = S_{n-1}(f) + \sum_{k \in \mathcal{T}_n} c_{n,k}(f) \theta_{n,k}.$$

Puisque $\theta_{n,k}$ est nulle en tout $\ell 2^{-n}$, on a, pour tout ℓ' pair de \mathcal{T}_{n+1} ($\ell' = 2\ell$) :

$$S_n(f)(\ell' 2^{-n-1}) = S_{n-1}(f)(\ell 2^{-n}) = f(\ell 2^{-n}),$$

par hypothèse de récurrence. Si ℓ' est impair, $\ell' = 2\ell + 1$, alors $\theta_{n,k}(\ell' 2^{-n-1})$ est nulle sauf si $\ell' = 2k + 1$, donc $\ell = k$. On a alors

$$S_n(f)(\ell' 2^{-n-1}) = S_{n-1}(f)\left(\left(\ell + \frac{1}{2}\right) 2^{-n}\right) + c_{n,\ell}(f).$$

Comme S_{n-1} est affine sur l'intervalle $[\ell 2^{-n}, (\ell + 1) 2^{-n}]$ dont $\ell + \frac{1}{2}$ est le milieu, il vient :

$$S_n(f)(\ell' 2^{-n-1}) = \frac{1}{2}(S_{n-1}(f)(\ell 2^{-n}) + S_{n-1}(f)((\ell + 1) 2^{-n})) + c_{n,\ell}(f).$$

Par hypothèse de récurrence, puis par définition de $c_{n,\ell}$, on a alors :

$$S_n(f)(\ell' 2^{-n-1}) = \frac{1}{2}(f(\ell 2^{-n}) + f((\ell + 1) 2^{-n})) + c_{n,\ell}(f) = f\left(\left(\ell + \frac{1}{2}\right) 2^{-n}\right) = f(\ell' 2^{-n-1}).$$

- Ainsi, d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $\ell \in \mathcal{T}_{n+1}$, $\boxed{S_n(f)(\ell 2^{-n}) = f(\ell 2^{-n})}$.

(c) La fonction $S_n(f)$ est l'unique fonction continue, affine par morceaux associée à la subdivision régulière de pas 2^{-n-1} , et coïncidant avec la fonction f aux points de cette subdivision. C'est par exemple l'approximation utilisée dans la méthode des trapèzes à pas réguliers pour le calcul des intégrales (à un décalage près de 1 sur l'indice n).

15. (a) Il s'agit encore une fois de l'utilisation de la continuité uniforme de f sur $[0, 1]$, puisqu'on contrôle bien f par rapport à $S_n(f)$ sur des points régulièrement répartis. La continuité uniforme va nous permettre d'étendre ce contrôle entre les points de la subdivision, sachant que $S_n(f)$ est aussi bien contrôlée entre ces points (il s'agit d'une fonction affine sur chaque intervalle de la subdivision).

On pourrait rédiger avec des ε , mais comme plus haut, on va plutôt se servir de la fonction ω_f .

Soit $x \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, et avec les notations de la partie IV, $\tilde{k}_{n+1}(x)$ la partie entière de $2^{n+1}x$. Autrement dit, $x \in [\tilde{k}_{n+1}(x) 2^{-n-1}, (\tilde{k}_{n+1}(x) + 1) 2^{-n-1}[$.

On a alors la majoration suivante :

$$\begin{aligned} |f(x) - S_n(x)| &\leq \left| f(x) - f\left(\tilde{k}_{n+1}(x) 2^{-n-1}\right) \right| + \left| f\left(\tilde{k}_{n+1}(x) 2^{-n-1}\right) - S_n f\left(\tilde{k}_{n+1}(x) 2^{-n-1}\right) \right| \\ &\quad + \left| S_n f\left(\tilde{k}_{n+1}(x) 2^{-n-1}\right) - S_n f(x) \right|. \end{aligned}$$

Or :

- par définition et croissance de ω_f ,

$$\left| f(x) - f\left(\tilde{k}_{n+1}(x) 2^{-n-1}\right) \right| \leq \omega_f(x - \tilde{k}_{n+1}(x) 2^{-n-1}) \leq \omega_f(2^{-n-1});$$

- $f\left(\tilde{k}_{n+1}(x) 2^{-n-1}\right) = S_n f\left(\tilde{k}_{n+1}(x) 2^{-n-1}\right)$,
- de plus, $S_n f$ est affine sur $[\tilde{k}_{n+1}(x) 2^{-n-1}, (\tilde{k}_{n+1}(x) + 1) 2^{-n-1}]$, donc

$$\begin{aligned} \left| S_n f\left(\tilde{k}_{n+1}(x) 2^{-n-1}\right) - S_n f(x) \right| &\leq \left| S_n f\left(\tilde{k}_{n+1}(x) 2^{-n-1}\right) - S_n f\left((\tilde{k}_{n+1}(x) + 1) 2^{-n-1}\right) \right| \\ &= \left| f\left(\tilde{k}_{n+1}(x) 2^{-n-1}\right) - f\left((\tilde{k}_{n+1}(x) + 1) 2^{-n-1}\right) \right| \\ &\leq \omega_f(2^{-n-1}). \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $x \in [0, 1]$,

$$|f(x) - S_n f(x)| \leq 2\omega(2^{-n-1}).$$

Cette majoration étant valable pour tout x de $[0, 1]$,

$$\|f - S_n f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - S_n f(x)| \leq 2\omega_f(2^{-n-1}).$$

On termine par le théorème d'encadrement, puisque ω_f admet une limite nulle en 0. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - S_n f\|_\infty = 0}.$$

- (b) Soit $f \in \mathcal{C}_0$, supposée de classe \mathcal{C}^1 . On peut revenir à la définition de f sous forme d'une somme, et majorer chaque coefficient $c_{j,k}(f)$ avec l'inégalité des accroissements finis (IAF) (notant M_1 un majorant de $|f'|$, on obtient $|c_{j,k}(f)| \leq M_1 2^{-n-1}$). L'argument complet sera mis en place pour le cas f de classe \mathcal{C}^2 (vous l'adapterez facilement). On peut aussi court-circuiter cet argument et utiliser la majoration obtenue dans la question précédente, en majorant $\omega_f(2^{-n-1})$ à l'aide de l'IAF.

En effet, f' étant continue sur le compact $[0, 1]$, elle est bornée. Soit M_1 un majorant de $|f'|$. La fonction f étant continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$, l'IAF nous permet d'affirmer que pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$ tel que $|x - y| \leq h$,

$$|f(x) - f(y)| \leq M_1 |x - y| \leq M_1 h,$$

donc $\omega_f(h) \leq M_1 h$. La majoration obtenue dans la question précédente amène alors :

$$\|f - S_n f\|_\infty \leq 2\omega_f(2^{-n-1}) \leq 2M_1 2^{-n-1} = M_1 2^{-n}.$$

- (c) Cette fois, on majore les coefficients $c_{j,k}(f)$ un peu plus finement, à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange (ITL) à l'ordre 1, en exploitant la symétrie de l'expression de ce coefficient pour faire partir les termes d'ordre 1.

Pour tout $x \in]0, 1[$, et y tel que $x + y$ et $x - y$ soient dans $[0, 1]$, on a, en notant M_2 un majorant de $|f''|$ sur $[0, 1]$ (existe par théorème de compacité, f'' étant continue par hypothèse) :

$$|f(x + y) - f(x) - yf'(x)| \leq M_2 \frac{y^2}{2}.$$

De même

$$|f(x - y) - f(x) + yf'(y)| \leq M_2 \frac{y^2}{2}.$$

Ainsi, en sommant ces deux inégalités et en utilisant l'inégalité triangulaire,

$$|f(x + y) + f(x - y) - 2f(x)| \leq M_2 y^2.$$

On utilise cela pour $x = (k + \frac{1}{2}) 2^{-j}$ et $y = 2^{-j-1}$. Il vient :

$$|c_{j,k}(f)| \leq M_2 4^{-j-1}.$$

La question 15(a) établit la convergence de la série définissant $S_n f$ vers f . Il nous faut un peu plus : la convergence absolue, nous permettant d'utiliser l'inégalité triangulaire sur la série (ou son reste). Pour cela, on majore la valeur absolue du terme général : pour tout $j \in \mathbb{N}$, et tout $x \in [0, 1]$,

$$\left| \sum_{k \in \mathcal{T}_j} c_{j,k}(f) \theta_{j,k}(x) \right| \leq \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| |\theta_{j,k}(x)| \leq \sum_{k \in \mathcal{T}_j} M_2 4^{-j-1} \theta_{j,k}(x).$$

Or, par définition des $\theta_{j,k}$, il existe au plus une valeur de $k \in \mathcal{T}_j$ pour laquelle $\theta_{j,k}(x) \neq 0$, et pour cette valeur de k , $\theta_{j,k}(x) \in [0, 1]$. On en déduit que

$$\left| \sum_{k \in \mathcal{T}_j} c_{j,k}(f) \theta_{j,k}(x) \right| \leq M_2 4^{-j-1}.$$

Comme la série de terme générale 4^{-j-1} est convergente, on déduit du TCSTP que la série dont $S_n f$ est la somme partielle est absolument convergente. On peut donc lui appliquer l'inégalité triangulaire, puis utiliser

la majoration ci-dessus pour chacun des termes. Puisque la somme partielle $S_n(f)$ converge de f , $f - S_n(f)$ est le reste de cette série. Ainsi :

$$\begin{aligned} |f(x) - S_n f(x)| &= \left| \sum_{j=n+1}^{+\infty} \sum_{k \in \mathcal{T}_{j+1}} c_{j,k}(f) \theta_{j,k}(x) \right| \\ &\leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} \left| \sum_{k \in \mathcal{T}_{j+1}} c_{j,k}(f) \theta_{j,k}(x) \right| \leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} M_2 4^{-j-1} \\ &= M_2 4^{-n-2} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} M_2 4^{-n-2} = \frac{1}{12} M_2 4^{-n}. \end{aligned}$$

Cette majoration ne dépendant pas de x , en posant $M'_2 = \frac{M_2}{12}$ (on peut même garder M_2), on a bien

$$\boxed{\|f - S_n f\|_\infty \leq M'_2 4^{-n}.}$$

Remarquez que cette démonstration est très proche de celle donnée dans le cours pour la convergence de la méthode du point milieu. Ce n'est pas très étonnant, vu les liens étroits entre méthode du point milieu et méthode des trapèzes, et vu l'interprétation géométrique de $S_n f$.

16. Soit $s \in [0, 1[$, $f \in \Gamma^s(x_0) \cap \mathcal{C}_0$.

On peut majorer $|c_{j,k}|$ en remplaçant l'IAF par l'inégalité fournie par l'appartenance à $\Gamma^s(x_0)$, ce qui nécessite l'introduction du point x_0 .

$$|c_{j,k}(f)| \leq \left| f\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)2^{-j}\right) - f(x_0) \right| + \frac{1}{2} |f(k2^{-j}) - f(x_0)| + \frac{1}{2} |f((k+1)2^{-j}) - f(x_0)|$$

Or, en notant M un majorant de $\frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^s}$,

$$\begin{aligned} \left| f\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)2^{-j}\right) - f(x_0) \right| &\leq M \left| \left(k + \frac{1}{2}\right)2^{-j} - x_0 \right|^s \\ &\leq M (|k2^{-j} - x_0| + 2^{-j-1})^s \\ &\leq M (|k2^{-j} - x_0| + 2^{-j})^s. \end{aligned}$$

Cette majoration s'adapte bien aux deux autres termes, et fournit finalement :

$$\boxed{|c_{j,k}(f)| \leq 2M (|k2^{-j} - x_0| + 2^{-j})^s.}$$

Il suffit de poser $c_1 = 2M$ pour conclure.

$$|c_{j,k}(f)| \leq c_1 (2^{-j} + |k2^{-j} - x_0|)^s.$$

Partie IV – Minoration de l'exposant de Hölder ponctuel

17. La suite (2^{-n}) étant strictement décroissante de limite nulle, les intervalles $]2^{-n-1}, 2^{-n}]$ sont deux à deux disjoints, et forment une partition de $]0, 1]$:

$$]0, 1] = \bigsqcup_{n=0}^{+\infty}]2^{-n-1}, 2^{-n}]$$

Comme x et x_0 sont deux éléments distincts de $[0, 1]$, $|x - x_0| \in]0, 1]$, donc d'après la description ci-dessus, il appartient à un et un seul des intervalles $]2^{-n-1}, 2^{-n}]$, donc il existe un unique $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\boxed{2^{-n_0-1} < |x - x_0| \leq 2^{-n_0}}$

De façon plus élémentaire, on peut considérer n_0 le plus grand des entiers tels que $2^{-n_0} \geq |x - x_0|$, qui existe puisqu'à partir d'un certain rang, toutes les valeurs de n vérifie $2^{-n} < |x - x_0|$ (convergence vers 0). Par maximalité, l'entier n_0 répond à la question, et on montre facilement que c'est le seul, en utilisant la stricte décroissance de la suite (2^{-n}) .

18. Pour tout $k \in \mathcal{T}_j$, la fonction $\theta_{j,k}$ est affine par morceaux, de pente maximale égale à 2^{j+1} , donc

$$|\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(x_0)| \leq 2^{j+1}|x - x_0|$$

d'après la question 3. Mais dans la plupart des cas, on a même mieux, puisque $\theta_{j,k}(x)$ n'est non nul que si $x \in [k2^{-j}, (k+1)2^{-j-1}[$, donc si $k = \tilde{k}_j(x)$. Ainsi, $|\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(x_0)|$ est nulle dès lors que k est différent de $\tilde{k}_j(x)$ et de $\tilde{k}_j(x_0)$.

Supposons dans un premier temps que $\tilde{k}_j(x) \neq \tilde{k}_j(x_0)$. En supprimant tous les termes nuls de la somme définissant W_j , et en utilisant la majoration ci-dessus pour les deux seuls termes restants, il vient :

$$|W_j| \leq \left(|c_{j, \tilde{k}_j(x)}(f)| + |c_{j, \tilde{k}_j(x_0)}(f)| \right) 2^{j+1}|x - x_0|.$$

Lorsque $\tilde{k}_j(x) = \tilde{k}_j(x_0)$, il ne reste qu'un terme dans la somme, et on obtient une majoration deux fois meilleure (avec l'un seul des coefficients c). Mais qui peut le mieux peut le pire, donc la majoration ci-dessus est aussi valide dans ce cas-là.

19. (a) L'hypothèse (\mathcal{P}_1) amène alors :

$$W_j \leq \left(c_1(2^{-j} + |\tilde{k}_j(x)2^{-j} - x_0|)^s + (c_1(2^{-j} + |\tilde{k}_j(x_0)2^{-j} - x_0|)^s \right) 2^{j+1}|x - x_0|.$$

On utilise la question 4 pour obtenir :

$$\begin{aligned} W_j &\leq c_1 2^{1-s} \left(2^{-j} + |\tilde{k}_j(x)2^{-j} - x_0| + 2^{-j} + |\tilde{k}_j(x_0)2^{-j} - x_0| \right)^s 2^{j+1}|x - x_0| \\ &= c_1 2^{(1-s)j} 2^{1-j} 2^{s(j-1)} \left(2^{-j} + |\tilde{k}_j(x)2^{-j} - x_0| + 2^{-j} + |\tilde{k}_j(x_0)2^{-j} - x_0| \right)^s 2^{j+1}|x - x_0| \\ &= 4c_1 2^{(1-s)j} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2^{j-1}|\tilde{k}_j(x)2^{-j} - x_0| + 2^{j-1}|\tilde{k}_j(x_0)2^{-j} - x_0| \right) |x - x_0| \end{aligned}$$

Or, par définition $|\tilde{k}_j(x_0)2^{-j} - x_0| \leq 2^{-j}$, et pour tout $j \leq n_0$, $|x - x_0| \leq 2^{-j}$, donc

$$|\tilde{k}_j(x) - x_0| \leq |\tilde{k}_j(x) - x| + |x - x_0| \leq 2^{-j} + 2^{-j} = 2^{-j+1}.$$

Il vient alors :

$$W_j \leq 4c_1 2^{(1-s)j} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 \right)^s |x - x_0| \quad \text{donc:} \quad W_j \leq 4c_1 2^{(1-s)j} 3^s |x - x_0|.$$

(b) On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n_0} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| \cdot |\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(x_0)| &= \sum_{j=0}^{n_0} W_j \\ &\leq \sum_{j=0}^{n_0} 4c_1 2^{(1-s)j} 3^s |x - x_0| \\ &\leq 4c_1 3^s |x - x_0| \frac{2^{(1-s)(n_0+1)} - 1}{2^{1-s} - 1} \\ &\leq 4c_1 3^s |x - x_0| \frac{2^{(1-s)(n_0+1)}}{2^{1-s} - 1} \\ &= c_2 (2^{-n_0})^{s-1} |x - x_0|. \end{aligned}$$

Puisque, par définition de n_0 , $2^{-n_0} \geq |x - x_0|$, et puisque l'exposant $s - 1$ est négatif, on obtient finalement la majoration :

$$\sum_{j=0}^{n_0} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| \cdot |\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(x_0)| \leq c_2 (|x - x_0|)^{s-1} |x - x_0| \leq c_2 |x - x_0|^s.$$

20. Pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |c_{j, \tilde{k}_j(x_0)}(f)| &\leq c_1 (2^{-k} + |\tilde{k}_j(x_0)2^{-j} - x_0|)^s \\ &\leq c_1 (2^{-j} + 2^{-j})^2 = \boxed{c_1 2^{(1-j)s}} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=n_0+1}^{+\infty} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| |\theta_{j,k}(x_0)| &= \sum_{j=n_0+1}^{+\infty} |c_{j,\tilde{k}(x_0)}(f)| |\theta_{j,\tilde{k}(x_0)}(x_0)| \\
&\leq \sum_{j=n_0+1}^{+\infty} c_1 2^{(1-j)s} \\
&\leq 2^s c_1 \frac{2^{-(n_0+1)s}}{1-2^{-s}} \\
&\leq \boxed{c_3 |x - x_0|^s},
\end{aligned}$$

puisque par définition $2^{-n_0-1} \leq |x - x_0|$.

Dans la suite du problème, on suppose que $\|f\|_\infty = 1$ et on rappelle que la fonction ω_f a été définie à la question 8.

21. L'hypothèse $\|f\|_\infty = 1$ amène $\omega_f(1) \geq 1$ (car $f(0) = 0$, et il existe un élément d'image dont la valeur absolue est supérieure ou égale à 1). De plus, $\omega_f(2^{-n})$ est décroissante, de limite nulle. On peut alors raisonner comme plus haut, en considérant n_1 minimal est que $\omega_f(2^{-n_1-1}) < 2^{-n_0s}$ (ce qui finit bien par arriver par décroissance), ou en considérant une partition de $]0, \omega_f(1)]$ par les intervalles $[\omega_f(2^{-n_1-1}), \omega_f(2^{-n})]$. Comme $2^{-n_0s} \in]0, 1] \subset]0, \omega_f(1)]$, cela fournit, comme plus haut, l'existence et l'unicité de n_1 tel que

$$\boxed{\omega_f(2^{-n_1-1}) < 2^{-n_0s} \leq \omega_f(2^{-n_1})}.$$

22. Pour tout $k \in \mathcal{T}_{n+1}$, f et $S_n f$ coïncident en $k2^{-n-1}$. On contrôle ensuite ce qui se passe entre ces points par convergence uniforme, contrôlée par ω_f . Pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned}
|f(x) - S_n f(x)| &\leq |f(x) - f(\tilde{k}_{n+1}(x)2^{-n-1})| + |f(\tilde{k}_{n+1}(x)2^{-n-1}) - S_n f(\tilde{k}_{n+1}(x)2^{-n-1})| + \\
&\quad + |S_n f(\tilde{k}_{n+1}(x)2^{-n-1}) - S_n f(x)| \\
&\leq \omega_f(2^{-n-1}) + 0 + |S_n f(\tilde{k}_{n+1}(x)2^{-n-1}) - S_n f(\tilde{k}_{n+1}(x) + 1)2^{-n-1})|,
\end{aligned}$$

du fait que $S_n(f)$ est affine sur l'intervalle $[\tilde{k}_{n+1}(x)2^{-n-1}, (\tilde{k}_{n+1}(x) + 1)2^{-n-1}]$. Puisque $S_n f$ et f coïncident sur les points de la subdivision régulière de pas 2^{-n-1} , il vient :

$$|f(x) - S_n f(x)| \leq \omega_f(2^{-n-1}) + |f(\tilde{k}_{n+1}(x)2^{-n-1}) - f(\tilde{k}_{n+1}(x) + 1)2^{-n-1})| \leq \omega_f(2^{-n-1}) + \omega_f(2^{-n-1}).$$

Puisque ω est croissante, et par définition de n_1 , pour tout $n \geq n_1$, et tout $x \in [0, 1]$:

$$|f(x) - S_n f(x)| \leq 2\omega_f(2^{-n_1-1}) \leq 2 \cdot 2^{-n_0s},$$

et enfin, par définition de n_0 , et en passant à la borne supérieure pour $x \in [0, 1]$:

$$\boxed{\|f - S_n f\|_\infty \leq 2^{s+1} |x - x_0|^s}.$$

23. (a) Supposons $n_0 < n_1$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=n_0+1}^{n_1} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| \cdot |\theta_{j,k}(x)| &= \sum_{j=n_0+1}^{n_1} |c_{j,\tilde{k}_j(x)}(f)| \cdot |\theta_{j,\tilde{k}_j(x)}(x)| \\
&\leq \sum_{j=n_0+1}^{n_1} c_1 \left(2^{-j} + |\tilde{k}_j(x)2^{-j} - x_0| \right)^s \\
&\leq \sum_{j=n_0+1}^{n_1} c_1 \left(2^{-j} + |\tilde{k}_j(x)2^{-j} - x| + |x - x_0| \right)^s \\
&\leq \sum_{j=n_0+1}^{n_1} c_1 (2^{-j} + 2^{-j} + |x - x_0|)^s \\
&\leq \sum_{j=n_0+1}^{n_1} c_1 (2 \times 2^{-n_0-1} + |x - x_0|)^s \\
&\leq \sum_{j=n_0+1}^{n_1} c_1 (3|x - x_0|)^s = \boxed{(n_1 - n_0)c_1 3^s |x - x_0|^s},
\end{aligned}$$

par définition de n_0 .

Attention, on ne peut pas utiliser directement ce résultat pour montrer que $f \in \Gamma^s(x_0)$, car n_0 et n_1 dépendent de x . Il faut d'abord contrôler leur évolution en fonction de x , ce qui fait l'objet de la question suivante.

(b) L'inégalité $n_1 - n_0 \leq n_1 + 1$ est évidente. Par ailleurs,

$$\omega_f(2^{-n_1}) \leq c_4(N) (1 + |\log_2(2^{-n_1})|)^{-N} = c_4(N)(1n_1)^{-N}.$$

On en déduit que

$$1 + n_1 \leq \left(\frac{c_4(N)}{\omega_f(2^{-n_1})} \right)^{\frac{1}{N}}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| \cdot |\theta_{j,k}(x)| &\leq c_1 3^s \left(\frac{c_4(N)}{\omega_f(2^{-n_1})} \right)^{\frac{1}{N}} |x - x_0|^s \\ &= c_5(N) (\omega_f(2^{-n_1}))^{-\frac{1}{N}} |x - x_0|^s. \end{aligned}$$

Orn par définition de n_1 , et de n_0 :

$$\omega_f(2^{-n_1}) \geq 2^{-n_0 s} \geq |x - x_0|^s,$$

d'où

$$\sum_{j=n_0+1}^{n_1} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| \cdot |\theta_{j,k}(x)| \leq c_5(N) |x - x_0|^{-\frac{s}{N}} |x - x_0|^s = \boxed{c_5(N) |x - x_0|^{(1 - \frac{1}{N})s}}.$$

24. Pour tout $n \geq n_1$, et tout $x \in [0, 1]$ (dans un premier temps différent de x_0 , mais c'est trivialement vrai pour $x = x_0$ également) :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - S_n f(x)| + |S_n f(x) - S_n f(x_0)| + |S_n f(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq 2\|f - S_n f\|_\infty + |S_n f(x) - S_n f(x_0)| \\ &\leq 2^{s+2} |x - x_0|^s + |S_n f(x) - S_n f(x_0)|. \end{aligned}$$

- Si $n_0 \geq n_1$, on peut directement utiliser l'inégalité précédente avec $n = n_0$. L'inégalité triangulaire, et l'utilisation de la question 19 amènent alors

$$|f(x) - f(x_0)| \leq (2^{s+2} + c_2) |x - x_0|^s.$$

Ceci est encore donné à x fixé (n_0 et n_1 dépendant de x).

- Si $n_0 < n_1$, on considère $n = n_1$, et on combine la majoration précédente avec la question 23. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} |S_{n_1} f(x) - S_{n_1} f(x_0)| &\leq |S_{n_0} f(x) - S_{n_0} f(x_0)| + \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| \cdot |\theta_{j,k}(x)| + \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| \cdot |\theta_{j,k}(x_0)| \\ &\leq c_2 |x - x_0|^s + 2c_5(N) |x - x_0|^{(1 - \frac{1}{N})s}. \end{aligned}$$

Puisque $|x - x_0| \leq 1$, on a de plus $|x - x_0|^s \leq |x - x_0|^{(1 - \frac{1}{N})s}$. On obtient donc finalement :

$$|f(x) - f(x_0)| \leq (2^{s+2} + c_2 + 2c_5(N)) |x - x_0|^{(1 - \frac{1}{N})s}.$$

Ainsi, quelle que soit la valeur de $x \in [0, 1]$, on a trouvé une constante $c_6(N) = \max(2^{s+2} + c_2, 2^{s+2} + c_2 + 2c_5(N)) = 2^{s+2} + c_2$ telle que pour tout $x \in [0, 1]$,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq c_6(N) |x - x_0|^{(1 - \frac{1}{N})s}.$$

Il en résulte que $f \in \Gamma^{(1 - \frac{1}{N})s}(x_0)$ et donc que $\alpha_f(x_0) \geq s(1 - \frac{1}{N})$.

Ceci étant vrai pour tout $N \geq 1$, en passant à la limite lorsque $N \rightarrow +\infty$, il vient $\boxed{\alpha_f(x_0) \geq s}$.