DM n° 26 : Séries numériques

Corrigé du problème 1 – (Séries et caractères, Mines MP 2007, épreuve de 3h)

Préliminaires

1. On a, pour tout n, m tels que $2 \leqslant n < m$:

$$\sum_{k=n}^{m} \alpha_k u_k = \sum_{k=n}^{m} (A_k - A_{k-1}) u_k = \sum_{k=n}^{m} A_k u_n - \sum_{k=n-1}^{m-1} A_k u_{k+1},$$

ce qui nous donne bien :

$$\boxed{\sum_{k=n}^{m} \alpha_k u_k = -u_n A_{n-1} + \sum_{k=n}^{m-1} A_k (u_k - u_{k+1}) + u_m A_m}.$$

2. Posons, pour $n \geqslant 0$, et $x \in [-1, 1]$:

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}.$$

La fonction f_n est polynomiale, donc dérivable, et pour tout $x \in [-1, 1[$, on a :

$$f_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

Puisque $f(0) = 0$, on a alors, pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$f_n(x) = \int_0^x f_n'(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\ \mathrm{d}t = \mathrm{Arctan}(x) + (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\ \mathrm{d}t.$$

Or,

$$\left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\ \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_0^1 t^{2n+2}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2n+3} \longrightarrow 0,$$

donc $f_n(x) \longrightarrow \mathrm{Arctan}(x)$. Ainsi :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = \mathrm{Arctan}(x)}.$$

Vous remarquerez que l'identité prouvée est aussi valable pour $x = 1$ et $x = -1$, ce dont on se servira plus tard, mais pas pour $x = 1$.

Partie I – Étude de cas particuliers

3. La fonction χ étant non nulle, il existe a tel que $\chi(a) \neq 0$. On a alors

$$\chi(a) = \chi(1a) = \chi(1)\chi(a),$$

et $\chi(a)$ étant non nul, $\boxed{\chi(1) = 1}$.

4. Lorsque $N = 2$, les valeurs trouvées de $\chi(1)$ et $\chi(0)$, et la 2-périodicité, amènent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{\chi(n) = \frac{1}{2}(1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}}$$

5. On a $\chi(3)^2 = \chi(3^2) = \chi(9) = \chi(1) = 1$ (par périodicité). Ainsi, $\boxed{\chi(3) \in \{-1, 1\}}$.
6. On suppose maintenant que $\chi(3) = -1$. Par périodicité et par le point (ii), il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \chi(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ (-1)^p & \text{si } n \text{ est impair, } n = 2p+1 \end{cases}$$

On a alors, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{\chi(n)}{n} = \sum_{n=1}^{2N+2} \frac{\chi(n)}{n} = \sum_{p=0}^{N} \frac{(-1)^p}{2p+1}.$$

La question 2 (étendue comme nous l'avons démontré au cas $x = 1$) nous donne alors la convergence de cette série et sa somme :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(n)}{n} = \mathrm{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}}.$$

On pouvait aussi étudier la convergence à l'aide du critère spécial de convergence des séries alternées.

Partie II – Convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\chi(n)}{n}$

7. Puisque a est premier avec N, $\overline{a}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. On en déduit que $\varphi : \overline{k} \mapsto \overline{a}\overline{k} = \overline{r_k}$ est un isomorphisme du groupe $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

   Ainsi, $\boxed{\text{les } \overline{r_k}, \text{ pour } k \text{ parcourant } 1, \cdots, N-1, \text{ sont deux à deux distincts, donc aussi les } r_k.}$
8. L'application φ définie dans la question précédente se restreint en une injection de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ (ensemble des classes des éléments de P) dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Or, le produit de deux éléments inversibles est encore inversible, donc $\varphi_{\overline{P}}$ est à valeurs dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. Par cardinalité et injectivité, c'est une bijection de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ dans $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$. On en déduit que dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, on a :

$$\overline{a}^{|P|} \prod_{k \in P} \overline{k} = \prod_{k \in P} \overline{a}\overline{k} = \prod_{k' \in P} \overline{k'},$$

et ce produit étant inversible dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ (comme produit d'éléments inversibles), il vient

$$\overline{a}^{\varphi(N)} = 1 \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{a^{\varphi(N)} - 1 \equiv 0 \ [N]}.$$

Ce résultat peut aussi être vu comme conséquence du théorème de Lagrange, appliqué au groupe $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$: l'ordre de a divise le cardinal $\varphi(N)$ de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$.

D'ailleurs, la démonstration ci-dessus est une adaptation d'une démonstration classique du théorème de Lagrange pour les groupes abéliens.
9. La périodicité de χ amène alors $\chi(a^{\varphi(N)}) = \chi(1) = 1$, donc $\chi(a)^{\varphi(N)} = 1$, d'où $\boxed{|\chi(a)| = 1}$.
10. Par définition de χ, $\chi(ak) = \chi(r_k)$, donc

$$\sum_{k=1}^{N-1} \chi(ak) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(r_k).$$

Or, pour $k \in [\![1, N-1]\!]$, les r_k sont deux à deux distincts, et dans $[\![1, N-1]\!]$ (car N ne divise pas ak, sinon il diviserait k, d'après le lemme de Gauss). Ainsi, les r_k parcourent très précisément $[\![1, N-1]\!]$ et

$$\sum_{k=1}^{N-1} \chi(r_k) = \sum_{\ell=1}^{N-1} \chi(\ell).$$

On a bien obtenu l'identité :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N-1} \chi(ak) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k)}.$$

On suppose dorénavant qu'il existe a premier avec N tel que $\chi(a) \neq 1$.

11. Soit un tel a. On a alors $\chi(a) = -1$ d'après (9). La multiplicativité de χ et l'identité de la question 10 amènent alors :
$$\sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) = \chi(a) \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) = -\sum_{k=1}^{N-1} \chi(k),$$
d'où puisque $\chi(0) = 0$, $\boxed{\sum_{k=0}^{N-1} \chi(k) = 0}$
Or, étant donné $n \in \mathbb{Z}$:
$$\sum_{k=n}^{n+N-1} \chi(k) = \sum_{k=0}^{n+N-1} \chi(k) - \sum_{k=0}^{n-1} \chi(k) = \sum_{k=0}^{N-1} \chi(k) + \sum_{k=0}^{n-1} \chi(k+N) - \chi(k).$$
La périodicité de χ permet alors de conclure : $\boxed{\sum_{k=n}^{n+N-1} \chi(k) = \sum_{k=0}^{N-1} \chi(k) = 0.}$

12. Soit $m > 0$, et $m = qN + r$, avec $r \in [\![0, N-1]\!]$. On a alors
$$\sum_{k=1}^{m} \chi(k) = \sum_{k=0}^{m} \chi(k) = \sum_{\ell=0}^{q-1} \sum_{k=\ell N}^{\ell N+N-1} \chi(k) + \sum_{k=Nq}^{m} \chi(k) = \sum_{k=Nq}^{m} \chi(k) = \sum_{k=0}^{r} \chi(k),$$
d'après la question précédente et la périodicité. Ainsi,
$$\left|\sum_{k=1}^{m} \chi(k)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{r} |\chi(k)| \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} |\chi(k)| = \sum_{k \in P} |\chi(k)|,$$
puisque χ est nulle sur tout entier non premier avec N. La question (9) et l'identité $|P| = \varphi(N)$ amènent donc :
$$\boxed{\left|\sum_{k=1}^{m} \chi(k)\right| \leqslant \varphi(N)}.$$

13. Il s'agit d'utiliser le lemme d'Abel : la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ est décroissante, et la somme partielle $\sum_{k=1}^{m} \chi(k)$ est bornée d'après la questino précédente. Le lemme d'Abel n'étant pas au programme, d'après la note en début de sujet, on doit refaire sa démonstration. En notant, pour $n \geqslant 2$, $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{\chi(n)}{n}$, et $A_n = \sum_{k=0}^{n} \chi(k)$, on a : on a, d'après la question (1) :
$$S_n = \sum_{n=2}^{n} \frac{\chi(n)}{n} = -\frac{\chi(1)}{2} + \sum_{k=2}^{n-1} A_k\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{A_n}{n}.$$
Or,
$$\left|A_k\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right| \leqslant M\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$
et la série de terme général $M\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ est convergente (somme télescopique, de terme tendant vers 0), donc $\sum_{k=2}^{n-1} A_k\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$. Il en est de même des autres termes de l'expression obtenue pour S_n. Ainsi (S_n) admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui équivaut à la $\boxed{\text{convergence de la série de terme général } \frac{\chi(n)}{n}.}$

Partie III – Comportement asymptotique

14. Puisque m et n sont premiers entre eux,
$$\{d \in \mathbb{N},\ d \mid mn\} = \{d_1 d_2,\quad d_1 \mid n, d_2 \mid m\}.$$

En effet, en notant $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ la décomposition de n en facteurs premiers, et $m = p_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \cdots p_\ell^{\alpha_\ell}$ celle de m, les p_i sont deux à deux distincts, puisque m et n sont premiers entre eux, et

$$mn = p_1^{\alpha_1} \cdots p_\ell^{\alpha_\ell}.$$

Un diviseur d de mn s'écrit alors

$$d = p_1^{\beta_1} \cdots p_\ell^{\beta_\ell},$$

où pour tout $i \in [\![1, \ell]\!]$, $\beta_i \leqslant \alpha_i$. On a alors

$$d = d_1 d_2, \text{ où } d_1 = p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k} \text{ et } d_2 = p_{k+1}^{\beta_{k+1}} \cdots p_\ell^{\beta_\ell}.$$

On a alors clairement $d_1 \mid n$ et $d_2 \mid m$.

Réciproquement, si $d_1 \mid n$ et $d_2 \mid m$, $d = d_1 d_2 \mid nm$.

De plus, si $d = d_1 d_2 = d_1' d_2'$, avec $d_1, d_1' \mid n$ et $d_2, d_2' \mid m$, on a $d_1 \wedge d_2' = 1$, donc d'après le lemme de Gauss, d_1 divise d_1'. Par symétrique d_1' divise d_1, donc $d_1 = d_1'$ et $d_2 = d_2'$. On a donc unicité de la décomposition.

Par conséquent, $(d_1, d_2) \mapsto d_1 d_2$ est une bijection de l'ensemble des couples de divieurs de n et m vers l'ensemble des diviseurs de nm. Ainsi,

$$f_n f_m = \sum_{d_1 \mid n} \sum_{d_2 \mid m} \chi(d_1)\chi(d_2) = \sum_{d_1 \mid n} \sum_{d_2 \mid n} \chi(d_1 d_2) = \sum_{d \mid mn} \chi(d),$$

soit $\boxed{f_n f_m = f_{nm}}$.

15. Les diviseurs de p^α sont les p^β, pour $\beta \in [\![0, \alpha]\!]$. Ainsi

$$f_{p^\alpha} = \sum_{\beta=0}^{\alpha} \chi(p^\beta) = \sum_{\beta=0}^{\alpha} \chi(p)^\beta.$$

Ainsi :

- Si $\chi(p) = 1$, $f_{p^\alpha} = \alpha + 1$
- Si $\chi(p) = -1$, $f_{p^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \text{ impair} \\ 1 & \text{si } \alpha \text{ pair} \end{cases}$
- Si $\chi(p) = 0$ (c'est le cas notamment si $p \mid N$), $f_{p^\alpha} = 1$.

16. On commence par montrer le résultat lorsque $n = p^\alpha$. L'encadement $0 \leqslant f_n \leqslant n$ est évident dans les deux derniers cas ci-dessus. Il reste à la vérifier dans le premier cas. Elle résulte du fait que pour tout $\alpha > 0$,

$$p^\alpha \geqslant 2^\alpha \geqslant \alpha + 1,$$

la dernière inégalité étant trivialement vérifiée pour $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$, et trivialement héréditaire, puisque multiplier une puissance de 2 par deux augmente au moins le résultat de 1 !

Soit alors $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque, et $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ sa décomposition en facteurs premiers. Il vient alors de (14) :

$$f_n = \prod_{i=1}^{k} f_{p_i}^{\alpha_i} \leqslant \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i} = n.$$

La positivité est évidente par le produit ci-dessus. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{0 \leqslant f_n \leqslant n}.$$

17. Soit $n \geqslant 1$. Les expressions obtenues dans la question 15 montrent que pour tout α pair, on a $f_{p^\alpha} \geqslant 1$. Or, tous les facteurs premiers de la décomposition de n^2 apparaissent avec une multplicité paire. La mutliplicativité de (f_n) amène alors $\boxed{f_{n^2} \geqslant 1}$.

18. Soit $x \in \mathbb{R}$:
    - si $|x| < 1$, $|f_n x^n| \leqslant n|x|^n = o((|x| + \varepsilon)^n)$, pour tout $\varepsilon > 0$. On peut choisir ε tel que $0 < |x| + \varepsilon < 1$. La série de terme général $(|x| + \varepsilon)^n$ est alors convergente, d'où la convergence absolue, puis la convergence de la série de terme général $f_n x^n$, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs.

- si $|x| \geqslant 1$, on a $|f_{n^2} x^{n^2}| \geqslant 1$, donc $(f_n x^n)$ ne tend pas vers 0, et la série est grossièrement divergente.

Ainsi, $\boxed{\sum f_n x^n \text{ converge ssi } |x| < 1, \text{ et la convergence est absolue}}$.

De plus, $\boxed{\text{la divergence (pour } |x| \geqslant 1) \text{ est toujours grossière.}}$

19. Soit $x \in [\frac{1}{2}, 1[$. On a, en ne gardant que les termes n^2 dans la somme, et en utilisant une comparaison avec une intégrale, valide du fait que $t \mapsto x^{(t^2)}$ est décroissante :

$$f(x) \geqslant \sum_{k=1}^{+\infty} f_{n^2} x^{n^2} \geqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \geqslant \int_1^{+\infty} x^{(t^2)} \, \mathrm{d}t.$$

Cette inégalité a un sens du fait de la convergence de cette intégrale (par comparaison à l'intégrale $\int \frac{1}{t^2} \, \mathrm{d}t$ par exemple). Or,

$$\int_2^{+\infty} x^{(t^2)} \, \mathrm{d}t = \int_2^{+\infty} \mathrm{e}^{t^2 \ln(x)} \, \mathrm{d}t = \int_{\sqrt{-\ln(x)}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2} \sqrt{-\ln(x)} \, \mathrm{d}u,$$

en posant le changement de variables affine $u = \sqrt{-\ln(x)}x$. On a fait ici le changement de variable directement sur l'intégrale impropre. Vous pouvez le faire dans un premier sur un intervalle compact, mais vous verrez qu'à condition d'avoir la bijectivité du changement de variables, on peut le faire sur l'intégrale impropre directement. En particulier, le changement de variable préserve les propriétés de convergence.

Pour terminer, $x \geqslant 12$, donc $\ln(x) \geqslant -\ln(2)$ donc $\sqrt{-\ln(x)} \leqslant \sqrt{\ln(2)}$. Ceci permet d'obtenir la dernière inégalité :

$$\int_{\sqrt{-\ln(x)}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2} \sqrt{-\ln(x)} \, \mathrm{d}u \geqslant \int_{\sqrt{-\ln(2)}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2} \sqrt{-\ln(x)} \, \mathrm{d}u,$$

par positivité de l'intégrande. Ainsi,

$$\boxed{f(x) \geqslant \frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}} \int_{\sqrt{\ln(2)}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2} \, \mathrm{d}u}.$$