Lycée Louis-Le-Grand, Paris
MP2I – Mathématiques
A. Troesch

Sine die

DM n° 26 : Séries numériques

Ce DM n'est pas destiné à m'être rendu. Je vous le donne pour vous occuper jusqu'à la fin de l'année.
Suggestion de travail supplémentaire (à ne pas me rendre) : Vous pouvez aussi regarder le DS 10 de l'année dernière, ainsi que les problèmes 21, 22, 23, 24 de la sélection.

Corrigé du problème 1 – (Résultant de deux polynômes)

Partie I – Définition du résultant et propriété fondamentale

1. $S(Q,P)$ se déduit de $S(P,Q)$ en appliquant m fois la permutation circulaire $\sigma = (1\ 2\ \dots\ m+n)$, de signature $(-1)^{m+n-1}$. Or,
$$\varepsilon(\sigma^m) = \varepsilon(\sigma)^m = (-1)^{(m+n-1)m} = (-1)^{mn+m(m-1)}.$$
Comme $m(m-1)$ est pair, il en résulte que $\varepsilon(\sigma^m) = (-1)^{mn}$. Le déterminant étant une forme anti-symétrique, il vient alors :
$$\boxed{R(Q,P) = (-1)^{mn}R(P,Q)}.$$

2. Un calcul immédiat amène :
$${}^tC_\alpha S(P,Q) = \begin{pmatrix}\alpha^{m-1}P(\alpha) & \alpha^{m-2}P(\alpha) & \cdots & \alpha^0P(\alpha) & \alpha^{n-1}Q(\alpha) & \alpha^{n-2}Q(\alpha) & \cdots & \alpha^0Q(\alpha)\end{pmatrix} = (0\ 0\ \cdots\ 0),$$
puisque α est racine de P et de Q. Ainsi, ${}^tS(P,Q)C_\alpha = 0$, donc $\boxed{C_\alpha \in \mathrm{Ker}(S(P,Q))}$.
La matrice $S(P,Q)$ est donc non inversible, donc son déterminant est nul : $\boxed{R(P,Q) = 0}$.

3. Supposons P et Q premiers entre eux, et soit $U \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ et $V \in \mathbb{C}_{m-1}[X]$ tels que $UP + VQ = 0$, soit $UP = -VQ$. D'après le lemme de Gauss, puisque P divise VQ et P premier avec Q, il vient que P divise V. Or, $\deg(V) < \deg(P)$, donc $\boxed{V = 0}$. De même, $\boxed{U = 0}$.

4. Soient $C_1, \dots, C_{n+m}$ les colonnes de $S(P,Q)$, et soient $\lambda_0, \dots \lambda_{n-1}, \mu_0, \dots, \mu_{n-1}$ des scalaires tels que
$$\lambda_0C_1 + \cdots + \lambda_{n-1}C_n + \mu_0C_{n+1} + \cdots + \mu_{m-1}C_{n+m} = 0$$
En appliquant à cette égalité l'isomorphisme de $\mathbb{C}^{m+n}$ dans $\mathbb{C}_{m+n-1}[X]$ envoyant la base canonique de $\mathbb{C}^{m+n}$ sur la base $(X^{n+m-1}, \dots, X, 1)$ de $\mathbb{C}_{m+n-1}[X]$, on obtient la relation suivante :
$$\lambda_0X^{n-1}P(X) + \lambda_1X^{n-2}P(X) + \cdots + \lambda_{n-1}X^0P(X) + \mu_0X^{m-1}Q(X) + \mu_1X^{m-2}Q(X) + \cdots + \mu_{m-1}X^0Q(X) = 0,$$
soit $U(X)P(X) + V(X)Q(X) = 0$, où on a posé :
$$U(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_kX^{n-1-k} \in \mathbb{C}_{n-1}[X] \qquad \text{et} \qquad V(X) = \sum_{k=0} m-1\mu_kX^{m-1-k} \in \mathbb{C}_{m-1}[X].$$
Il résulte alors de la question précédente que U et V sont nuls, donc que les λ_i et les μ_j sont tous nuls. Ainsi, les colonnes de $S(P,Q)$ forment une famille libre, d'où on tire que $S(P,Q)$ est inversible, donc son déterminant est non nul : $\boxed{R(P,Q) \neq 0}$.

5. (a) D'après la caractérisation de la multiplicité par les dérivées, P admet une racine multiple si et seulement si P et P' admettent une racine commune. D'après les questions 2 et 4, ceci équivaut à la nullité de $R(P,P')$:
$\boxed{P \text{ admet au moins une racine multiple si et seulement si son discriminant } \Delta(P) = 0.}$

(b) Soit $P = X^3 + pX + q$, $P' = 3X^2 + p$. Nous avons donc à calculer le déterminant

$$R(P,P') = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ p & 0 & p & 0 & 3 \\ q & p & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2p & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3q & -2p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3q & p \end{vmatrix},$$

par les opérations $L_3 \leftarrow C_3 - pL_1$, $L_4 \leftarrow L_4 - qL_1 - pL_2$ et $L_5 \leftarrow L_5 - qL_2$. On obtient donc une matrice triangulaire par blocs, d'où

$$R(P,P') = \begin{vmatrix} -2p & 0 & 3 \\ -3q & -2p & 0 \\ 0 & -3q & p \end{vmatrix} = -2p \begin{vmatrix} -2p & 0 \\ -3q & p \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -3q & -2p \\ 0 & -3q \end{vmatrix}$$

(développement suivant la première ligne), et enfin :

$$\boxed{R(P,P') = 27q^2 + 4p^3}.$$

Partie II – Expression du résultant à l'aide des racines

1. Un calcul du même accabit de celui de la question I-2 amène :

$$M \times S(P,Q) = \begin{pmatrix} \beta_1^{n-1}P(\beta_1) & \beta_1^{n-2}P(\beta_1) & \cdots & \beta_1^1 P(\beta_1) & \beta_1^{m-1}Q(\beta_1) & \cdots & \beta_1^0 Q(\beta_1) \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_n^{n-1}P(\beta_n) & \beta_n^{n-2}P(\beta_n) & \cdots & \beta_n^0 P(\beta_n) & \beta_n^{m-1}Q(\beta_n) & \cdots & \beta_n^0 Q(\beta_n) \\ \alpha_1^{n-1}P(\alpha_1) & \alpha_1^{n-2}P(\alpha_1) & \cdots & \alpha_1^0 P(\alpha_1) & \alpha_1^{m-1}Q(\alpha_1) & \cdots & \alpha_1^0 Q(\alpha_1) \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_m^{n-1}P(\alpha_m) & \alpha_m^{n-2}P(\alpha_m) & \cdots & \alpha_m^0 P(\alpha_m) & \alpha_m^{m-1}Q(\alpha_m) & \cdots & \alpha_m^0 Q(\alpha_m) \end{pmatrix}$$

Comme les α_i sont racines de P ete les β_i sont racines de Q, il vient alors :

$$M \times S(P,Q) = \begin{pmatrix} \beta_1^{n-1}P(\beta_1) & \cdots & \beta_1^0 P(\beta_1) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_n^{n-1}P(\beta_n) & \cdots & \beta_n^0 P(\beta_n) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_1^{m-1}Q(\alpha_1) & \cdots & \alpha_1^0 Q(\alpha_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_m^{m-1}Q(\alpha_m) & \cdots & \alpha_m^0 Q(\alpha_m) \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\det(M)\det(S(P,Q)) = \begin{vmatrix} \beta_1^{n-1}P(\beta_1) & \cdots & \beta_1^0 P(\beta_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_n^{n-1}P(\beta_n) & \cdots & \beta_n^0 P(\beta_n) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1^{m-1}Q(\alpha_1) & \cdots & \alpha_1^0 Q(\alpha_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_m^{m-1}Q(\alpha_m) & \cdots & \alpha_m^0 Q(\alpha_m) \end{vmatrix}.$$

Les déterminants qui interviennent sont des déterminants de Vandermonde, à un retournement près (symétrie nécessitant $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ échanges de colonne, N étant l'ordre de la matrice), ce qui induit un signe. On obtient donc :

$$(-1)^{\lfloor \frac{m+n}{2} \rfloor} V(\beta_1, \ldots, \beta_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) R(P,Q) = (-1)^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \prod_{i=1}^{n} P(\beta_i) \prod_{j=1}^{m} Q(\alpha_j) V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) V(\beta_1, \ldots, \beta_m).$$

Or, une vérification aisée montre que $\lfloor \frac{m+n}{2} \rfloor$ et $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ sont égaux, sauf lorsque m et n sont tous deux impairs, cas dans lequel ils diffèrent de 1. Comme mn est impair si et seulement si m et n le sont, on obtient alors :

$$V(\beta_1, \ldots, \beta_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) R(P,Q) = (-1)^{mn} \prod_{i=1}^{n} P(\beta_i) \prod_{j=1}^{m} Q(\alpha_j) V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) V(\beta_1, \ldots, \beta_m).$$

En supposant dans un premier temps que les α_i et les β_j sont deux à deux distincts, on peut simplifier les $\alpha_i - \alpha_j$ et $\beta_j - \beta_i$ provenant des déterminants Vandermonde de droite avec ceux de gauche. Il reste alors :

$$\prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n}(\alpha_j - \beta_i)R(P,Q) = (-1)^{mn}\prod_{i=1}^{n}P(\beta_i)\prod_{j=1}^{m}Q(\alpha_j).$$

Or, $q(X) = b_0\prod_{i=1}^{n}(X-\beta_i)$, donc l'expression ci-dessus amène :

$$\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{b_0}Q(\alpha_j)R(P,Q) = (-1)^{mn}\prod_{i=1}^{n}P(\beta_i)\prod_{j=1}^{m}Q(\alpha_j).$$

Puisqu'on a supposé les α_i et β_j distincts, en particulier, les β_j ne sont pas racines de P, et on peut simplifier les termes $P(\beta_j)$ de cette égalité. Il vient donc

$$\boxed{R(P,Q) = (-1)^{mn}b_0^m\prod_{i=1}^{n}P(\beta_j)}.$$

On peut échanger le rôle de P et Q grâce à la question I-1 d'où

$$\boxed{R(P,Q) = (-1)^{mn}R(Q,P) = a_0^n\prod_{j=1}^{m}Q(\alpha_j)}.$$

On prolonge sans problème ces égalités dans le cas où les α_i et β_j ne sont pas deux à deux distincts, par continuité du résultat par rapport à chacune des variables a_i et b_j, le déterminant étant polynômial par rapport à chacune de ses coordonnées.

2. **Matrices circulantes**

(a) On a :

$$R(P,Q) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & a_1 & & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & a_0 & & & a_{n-1} \\ -1 & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \end{vmatrix}$$

Les opérations $L_{n+i} \leftarrow L_{n+i} + L_i$ pour $i \in [\![1,n]\!]$ amènent alors

$$R(P,Q) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & a_1 & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & \ddots & 0 & a_{n-1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix}$$

Ainsi, d'après les règles de calcul des déterminants de matrices triangulaires par blocs,

$$\boxed{R(P,Q) = \det(C(a_0,\ldots,a_{n-1}))}.$$

(b) Les racines de P étant les racines n-ième de l'unité, donc les éléments de $\mathbb{U}_n$, la question II-1 amène :

$$\boxed{\det(C(a_0,\ldots,a_{n-1})) = \prod_{\zeta\in\mathbb{U}_n}Q(\zeta)}.$$

Corrigé du problème 2 – Algorithme de Lewis Carroll (d'après Mines PSI 2010)

Partie I – Formule de condensation de Desnanot-Jacobi

Dans cette partie, on montre la formule suivante (formule de condensation de Desnanot-Jacobi), pour tout $n \geqslant 3$, permettant de ramener le calcul d'un déterminant d'ordre n à des calculs de déterminants d'ordre $n-1$ et $n-2$:

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \det(M)\det([M]_{1,n}^{1,n}) = \det([M]_1^1)\det([M]_n^n) - \det([M]_n^1)\det([M]_1^n). \tag{1}$$

1. On commence par un développement du déterminant de M^* suivant la première ligne :

$$\det(M^*) = \det([M]_1^1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & (-1)^{n+2}\det([M]_n^2) \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & -\det([M]_{n,n-1}) \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \det([M]_{n,n}) \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{n+1}(-1)^{n+1}\det([M]_n^1)\begin{vmatrix} -\det([M]_1^2) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \det([M]_1^3) & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ (-1)^{n+1}\det([M]_1^n) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

Le premier déterminant est diagonal, donc se calcule facilement. Le deuxième peut être redéveloppé suivant sa dernière ligne :

$$\det(M^*) = \det([M]_1^1)\det([M]_{n,n}) + (-1)^{n-1+1}(-1)^{n+1}\det([M]_n^1)\det([M]_1^n)\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

d'où finalement

$$\boxed{\det(M^*) = \det([M]_1^1)\det([M]_{n,n}) - \det([M]_n^1)\det([M]_1^n)}.$$

2. On rappelle que $M \cdot {}^t\mathrm{Com}(M) = \det(M)I_n$ (formule de Cayley). On remarque ensuite que le produit peut se faire colonne par colonne. En effet, en notant $C_k(M)$ la k-ième colonne d'une matrice M, on a :

$$C_k(M \cdot M^*) = M \cdot C_k(M^*).$$

Ainsi :
- $C_1(M \cdots M^*) = M \cdot C_1(M^*) = M \cdot C_1({}^t\mathrm{Com}(M)) = C_1(M \cdot {}^t\mathrm{Com}(M)) = C_1(\det(M)I_n)$;
- $C_n(M \cdots M^*) = M \cdot C_n(M^*) = M \cdot C_n({}^t\mathrm{Com}(M)) = C_n(M \cdot {}^t\mathrm{Com}(M)) = C_n(\det(M)I_n)$;
- Pour tout $k \in [\![2, n-1]\!]$, $C_k(M \cdot M^*) = M \cdot C_k(M^*) = M \cdot C_k(I_n) = C_k(M \cdot I_n) = C_k(M)$.

On en déduit la description du produit $M \cdot M^*$:

$$\boxed{M \cdot M^* = \begin{pmatrix} \det(M) & M_{1,2} & \dots & M_{1,n-1} & 0 \\ 0 & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & 0 \\ 0 & M_{n,2} & \cdots & M_{n,n-1} & \det(M) \end{pmatrix}}.$$

3. On développe la matrice précédente suivant la première colonne (ce qui revient à calculer le déterminant d'une

matrice triangulaire par blocs), puis suivant la dernière colonne (même remarque) :

$$\det(M{\cdot}M^*) = \det(M)\begin{vmatrix} M_{2,2} & \cdots & M_{2,n-1} & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ M_{n,2} & \cdots & M_{n,n-1} & \det(M) \end{vmatrix} = \det(M)^2 \begin{vmatrix} M_{2,2} & \cdots & M_{2,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{n-1,2} & \cdots & M_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = \det(M)^2 \det([M]_{1,n}^{1,n}).$$

Or, $\det(M \cdot M^*) = \det(M)\det(M^*)$, donc, en supposant M inversible, on peut simplifier par $\det(M) \neq 0$, d'où :

$$\det(M^*) = \det(M)\det([M]_{1,n}^{1,n}).$$

En associant cela au résultat de la question 1, il vient :

$$\boxed{\det(M)\det([M]_{1,n}^{1,n}) = \det([M]_1^1)\det([M]_n^n) - \det([M]_n^1)\det([M]_1^n).}$$

4. Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, non nécessairement inversible. Si on est sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on peut utiliser un argument de densité. Comme on n'a pas cette hypothèse, on utilise la deuxième technique qu'on avait vue, en se plaçant sur le corps $\mathbb{K}(X)$. Le déterminant de $M - XI_n$ est de degré n (polynôme caractéristique, au signe près), c'est donc un polynôme non nul. Ainsi, $\det(M - XI_n)$ est non nul dans $\mathbb{K}(X)$. On en déduit que $M - XI_n$ est inversible dans $\mathbb{K}(X)$. La question précédente amène donc l'égalité formelle dans $\mathcal{M}(\mathbb{K}(X))$:

$$\det(M - XI_n)\det([M - XI_n]_{1,n}^{1,n}) = \det([M - XI_n]_1^1)\det([M - XI_n]_n^n) - \det([M - XI_n]_n^1)\det([M - XI_n]_1^n).$$

Ces déterminants sont tous polynomiaux, et l'égalité est vraie formellement, donc elle est vraie pour toute évaluation, en particulier en 0. On retrouve alors

$$\boxed{\det(M)\det([M]_{1,n}^{1,n}) = \det([M]_1^1)\det([M]_n^n) - \det([M]_n^1)\det([M]_1^n)}.$$

Partie II – Algorithme de Dodgson (Lewis Carroll)

Nous présentons et justifions dans cette partie un algorithme mis au point par le Révérend Charles L. Dodgson, plus connu sous son nom de plume, Lewis Carroll. Et oui ! Le papa d'Alice était aussi mathématicien ! Cet algorithme, basé sur la formule de condensation démontrée dans la partie précédente, permet de ramener le calcul de certains déterminants à des calculs de plusieurs déterminants de taille 2.
L'algorithme fonctionne comme suit :

- *Donnée initiale : une matrice M de taille $n \times n$.*
- *On construit itérativement des couples $(A^{(k)}, B^{(k)}) \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n-k-1}(\mathbb{K})$, pour $k \in [\![0, n-2]\!]$, dont on note les coefficients $A_{i,j}^{(k)}$ et $B_{i,j}^{(k)}$:*
  - *$A^{(0)} = M$ et $B^{(0)}$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont des 1*
  - *Si pour $k \leqslant n-3$, $A^{(k)}$ et $B^{(k)}$ sont construits, on définit, si c'est possible, $A^{(k+1)}$ par :*

$$\forall (i,j) \in [\![1, n-k-1]\!]^2, \quad A_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{B_i^{(k)}, j} \times \begin{vmatrix} A_{i,j}^{(k)} & A_{i,j+1}^{(k)} \\ A_{i+1,j}^{(k)} & A_{i+1,j+1}^{(k)} \end{vmatrix}$$

  et $B^{(k+1)}$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n-k-2]\!], \quad B_{i,j}^{(k+1)} = A_{i+1,j+1}^{(k)}.$$

- *Si $(A^{(n-2)}, B^{(n-2)}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ a pu être défini, et si $B_{1,1}^{(n-2)}$ est non nul, l'algorithme s'arrête en retournant la valeur :*

$$A_{1,1}^{(n-1)} = \frac{\det(A^{(n-2)})}{B_{1,1}^{(n-2)}}.$$

- *Si au cours de l'algorithme, l'un des coefficients $B_{i,j}^{(k)}$ est nul, on décrète l'échec de l'algorithme LC. Sinon, l'algorithme peut être mené à don terme, et on dit que M est LC-déterminable.*
- *Remarquez qu'à chaque étape, la matrice $B^{(k)}$ est un peu plus petite que $A^{(k)}$.*

1. (a) On obtient successivement :

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{4}{1} & \frac{4}{-1} \\ \frac{-8}{-2} & \frac{-2}{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad B^{(2)} = (-1)$$

$$A^{(3)} = \left(\frac{8}{-1}\right) = \big(-8\big)$$

Les coefficients des matrices $B^{(k)}$ ne s'annulent jamais, ce qui prouve que $\boxed{M \text{ est LC-déterminable}}$, et la valeur retournée par l'algorithme de Lewis Carroll est $\boxed{\text{-8}}$.

(b) On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{pmatrix}$$

$$= 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix} L_3 \leftarrow -\frac{1}{4}L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \end{pmatrix}$$

$$= 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{pmatrix}$$

$$= 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \qquad \big(L_4 \leftarrow L_4 + L_3\big)$$

Et donc $\boxed{\det(M) = -8}$. On retrouve bien la valeur trouvée dans la question précédente.

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose dans cette question que la matrice M est LC-déterminable. On notera, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, et tout $(r, s) \in [\![1, n-k+1]\!]$, $M^{(r,s,k)}$ la matrice d'ordre k extraite de M en ne conservant que les lignes r à $r+k-1$ et les colonnes s à $s+k-1$.

(a) Soit $(r, s) \in [\![1, n-2]\!]$. On a, par définition :

$$A^{(2)}_{r,s} = \frac{1}{B^{(1)}_{r,s}} \begin{pmatrix} A^{(1)}_{r,s} & A^{(1)}_{r,s+1} \\ A^{(1)}_{r+1,s} & A^{(1)}_{r+1,s+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{A^{(0)}_{r+1,s+1}} (A^{(1)}_{r,s} A^{(1)}_{r+1,s+1} - A^{(1)}_{r+1,s} A^{(1)}_{r,s+1}).$$

Or, on constate que par définition :

$$A^{(1)}_{r,s} = \det([M^{(r,s,3)}]^3_3), \qquad A^{(1)}_{r+1,s+1} = \det([M^{(r,s,3)}]^1_1),$$

$$A^{(1)}_{r+1,s} = \det([M^{(r,s,3)}]^3_1), \qquad A^{(1)}_{r,s+1} = \det([M^{(r,s,3)}]^1_3), \qquad A^{(0)}_{r+1,s+1} = \det([M^{(r,s,3)}]^{1,3}_{1,3})$$

Ainsi, d'après la formule de condensation de Desnanot-Jacobi,

$$\boxed{A^{(2)}_{r,s} = \det(M^{r,s,3})}.$$

(b) On montre par récurrence d'ordre 2 sur $k \in [\![0, n-1]\!]$ la propriété $\mathcal{P}(k)$: pour tout $(r, s) \in [\![1, n-k]\!]^2$,

$$A^{(k)}_{r,s} = \det(M^{(r,s,k+1)}).$$

L'initialisation est évidente pour $k = 0$ et 1, et on vient aussi de le vérifier pour $k = 2$.
Soit $k \in [\![1, n-2]\!]$ tel que les propriétés $\mathcal{P}(k)$ et $\mathcal{P}(k-1)$ soient vérifiées. Soit alors $(r,s) \in [\![1, n-k-1]\!]^2$:

$$A_{r,s}^{(k+1)} = \frac{1}{B_{r,s}^{(k)}} \times \begin{vmatrix} A_{r,s}^{(k)} & A_{r,s+1}^{(k)} \\ A_{r+1,s}^{(k)} & A_{r+1,s+1}^{(k)} \end{vmatrix} = \frac{1}{A_{r+1,s+1}^{(k-1)}}(A_{r,s}^{(k)}A_{r+1,s+1}^{(k)} - A_{r+1,s}^{(k)}A_{r,s+1}^{(k)}).$$

L'expression de B en fonctin de A est possible du fait que $k > 0$. Par hypothèse de récurrence, on a alors

$$\begin{aligned} A_{r,s}^{(k+1)} &= \frac{1}{\det(M^{(r+1,s+1,k)})}(\det(M^{(r,s,k+1)})\det(M^{(r+1,s+1,k+1)}) - \det(M^{(r+1,s,k+1)})\det(M^{(r,s+1,k+1)}) \\ &= \frac{1}{\det([M^{(r,s,k+2)}]_{1,k+2}^{1,k+2})}(\det([M^{(r,s,k+2)}]_{k+2}^{k+2})\det([M^{(r,s,k+2)}]_1^2) - \det([M^{(r,s,k+2)}]_1^{k+2})\det([M^{(r,s,k+2)}]_{k+2}^1) \\ &= \det(M^{(r,s,k+2)}), \end{aligned}$$

d'après la formule de condensation de Desnanot-Jacobi.
D'après le principe de récurrence, on en déduit donc que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ et tout $(r,s) \in [\![1, n-k]\!]^2$

$$\boxed{A_{r,s}^{(k)} = \det(M^{(r,s,k+1)})}.$$

En particulier, pour $k = n-1$,

$$\boxed{A_{1,1}^{(n-1)} = \det(M^{(1,1,n)}) = \det(M)}.$$

3. Le nombre de déterminants 2×2 calculés pour passer de $A^{(k-1)}$ à $A^{(k)}$ est égal au nombre de coefficients de $A^{(k)}$, à savoir $(n-k)^2$ Ainsi, le nombre total de déterminants 2×2 calculés est

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2 = \sum_{\ell=1}^{n-1}\ell^2 = \boxed{\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}}.$$

4. Le calcul d'un déterminant $n \times n$ se ramène au calcul (indépendant) de n déterminants $n-1 \times n-1$. Ainsi, $u_n = nu_{n-1}$, et $u_2 = 1$. Par conséquent,

$$u_n = 1 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n = \frac{n!}{2}.$$

D'après les croissances comparées, $\boxed{v_n = o(u_n)}$ (et très largement !)
On peut se rendre compte aussi que la complexité de cet algorithme de calcul est comparable à celui du pivot de Gauss.

Partie III – Le λ-déterminant

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On introduit la notion de λ-déterminant d'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ convenable (dans un sens qu'on précisera), de la manière suivante :

- *Soit $(a) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, $\det_\lambda(a) = a$*
- *Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, $\det_\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad + \lambda bc$.*
- *On impose de plus pour tout matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la formule suivante, généralisant (1) :*

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \det_\lambda(M)\det_\lambda([M]_{1,n}^{1,n}) = \det_\lambda([M]_1^1)\det_\lambda([M]_n^n) + \lambda\det_\lambda([M]_n^1)\det_\lambda([M]_1^n). \tag{2}$$

Cette formule permet donc de calculer $\det_\lambda(M)$ par récurrence sur l'ordre de M, à condition que $\det_\lambda([M]_{1,n}^{1,n})$ soit non nul, et que les déterminants d'ordre plus petit aient pu être calculés (ce qui donne d'autres conditions de non nullité). Si le λ-déterminant de M peut être défini de la sorte, on dira que M est λ-déterminable.

1. On pose $A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a donc

$$\det_\lambda(AB) = 1 \qquad \text{et} \qquad \det_\lambda(A)\det_\lambda(B) = \lambda^2.$$

Dès lors que $|\lambda| \neq 1$, on a donc $\boxed{\det_\lambda(AB) \neq \det_\lambda(A)\det_\lambda(B)}$.

2. On montre par récurrence d'ordre 2 sur n la propriété $\mathcal{P}(n)$ suivante : Pour tout matrice λ-déterminable $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et tout $t \in \mathbb{K}^*$, si M' est une matrice obtenue de M en multipliant toute une colonne de M par t, alors M' est aussi λ-déterminable, et $\det_\lambda(M') = t\det_\lambda(M)$.
   - Pour $n = 1$ c'est évident
   - Pour $n = 2$ on vérifie que
   $$\det_\lambda \begin{pmatrix} ta & b \\ tc & d \end{pmatrix} = tad + \lambda tcc = t(ad + \lambda bc) = t \cdot \det_\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$
   De même :
   $$\det_\lambda \begin{pmatrix} a & tb \\ c & td \end{pmatrix} = atd + \lambda ctc = t(ad + \lambda bc) = t \cdot \det_\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$
   - Soit $n \geqslant 2$, et supposons que $\mathcal{P}(n-1)$ et $\mathcal{P}(n-2)$ soit vérifiées. Soit M une matrice d'ordre n, et $t \in \mathbb{K}^*$. On considère M' la matrice obtenue de M en multipliant la colonne j par t ($j \in [\![1, n]\!]$). On distingue 3 cas :
     * Si $j \in [\![2, n]\!]$, alors la colonne j intervient encore (partiellement) dans toutes les matrices $[M']^{1,n}_{1,n}$, $[M']^1_1$, $[M']^n_1$, $[M']^1_n$, $[M']^n_n$. Toutes ces matrices sont donc obtenue des matrices similaires définies par M en multipliant une de ses colonnes par t. Elles sont par ailleurs d'ordre $n-1$ ou $n-2$. On peut donc utiliser l'hypothèse de récurrence, qui amène l'existence de leur λ-déterminant et l'égalité ci-dessous :
     $$\begin{aligned} \det_\lambda(M')\det_\lambda([M']^{1,n}_{1,n}) &= \det_\lambda([M']^1_1)\det_\lambda([M']^n_n) + \lambda\det_\lambda([M']^1_n)\det_\lambda([M']^n_1) \\ &= t^2\det_\lambda([M]^1_1)\det_\lambda([M]^n_n) + \lambda\det_\lambda([M]^1_n)\det_\lambda([M]^n_1) \end{aligned}$$
     Par ailleurs, on a aussi $\det_\lambda([M']^{1,n}_{1,n}) = t \cdot \det_\lambda([M]^{1,n}_{1,n})$, et puisque M est λ-déterminable, et $t \neq 0$, on peut diviser par ce coefficient. Ceci nous assure que M' est λ-déterminable, et que
     $$\begin{aligned} \det_\lambda(M') &= \frac{t}{\det_\lambda([M]^{1,n}_{1,n})}\left(\det_\lambda([M]^1_1)\det_\lambda([M]^n_n) + \lambda\det_\lambda([M]^1_n)\right) \\ &= t \cdot \det_\lambda(M). \end{aligned}$$
     * Si $j = 1$, on raisonne de même, mais dans ce cas, la colonne C_1 intervient encore seulement dans $[M']^n_1$ et dans $[M']^n_n$, qui sont donc des matrices obtenues des matrices similaires définies par M en multipliant une colonne par t (la première). En revanche,
     $$[M']^{1,n}_{1,n} = [M]^{1,n}_{1,n}, \qquad [M']^1_1 = [M]^1_1 \qquad \text{et} \qquad [M']^1_n = [M]^1_n.$$
     Ainsi, comme précédemment, toutes ces matrices sont λ-déterminables par HR, et on obtient
     $$\begin{aligned} \det_\lambda(M')\det_\lambda([M]^{1,n}_{1,n}) &= \det_\lambda(M')\det_\lambda([M']^{1,n}_{1,n}) \\ &= \det_\lambda([M']^1_1)\det_\lambda([M']^n_n) + \lambda\det_\lambda([M']^1_n)\det_\lambda([M']^n_1) \\ &= t\det_\lambda([M]^1_1)\det_\lambda([M]^n_n) + \lambda\det_\lambda([M]^1_n)\det_\lambda([M]^n_1) \end{aligned}$$
     Puisque $\det_\lambda([M]^{1,n}_{1,n}) \neq 0$ (car M est λ-déterminable), on en déduit comme avant en divisant que
     $$\det_\lambda(M') = t \cdot \det_\lambda(M).$$
     * Le dernier cas $j = n$ est complètement similaire au cas $j = 1$.

     Ainsi, dans tous les cas, on a montré que $\det_\lambda(M') = t \cdot \det_\lambda(M)$, ce qui prouve bien $\mathcal{P}(n)$.
   - On déduit donc du principe de récurrence, que pour tout matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et toute matrice M' obtenue en multipliant une colonne de M par $t \in \mathbb{K}^*$,
   $$\boxed{\det_\lambda(M') = t \cdot \det_\lambda(M)}.$$

3. - Pour $n = 1$:
   $$V_\lambda(x_1) = \det_\lambda(1) = 1.$$
   - Pour $n = 2$:
   $$V_\lambda(x_1, x_2) = \det_\lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} = x_2 + \lambda x_1.$$

- Pour $n = 3$, d'après la formule (2), et d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
V_\lambda(x_1, x_2, x_3) &= \det_\lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{x_2}\left(\det_\lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} \det_\lambda \begin{pmatrix} x_2 & x_3 \\ x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix} + \lambda \det_\lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix} \det_\lambda \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1^2 & x_2^2 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{x_2}\left(V_\lambda(x_1, x_2) x_2 x_3 V_\lambda(x_2, x_3) + \lambda V_\lambda(x_2, x_3) x_1 x_2 V_\lambda(x_1, x_2)\right) \\
&= \frac{1}{x_2} V_\lambda(x_1, x_2) V_\lambda(x_2, x_3)(x_2 x_3 + \lambda x_1 x_2) \\
&= V_\lambda(x_1, x_2) V_\lambda(x_2, x_3)(x_3 + \lambda x_1),
\end{aligned}$$

  puisque x_2 est supposé non nul. On a donc

$$V_\lambda(x_1, x_2, x_3) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant 3} (x_j + \lambda x_i),$$

  ce qui correspond bien à la formule connue, lorsque $\lambda = -1$.
- On montre donc par récurrence d'ordre 2 sur n, qu'avec les conditions de l'énoncé,

$$V_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j + \lambda x_i).$$

  L'initialisation vient d'être faite. On suppose la propriété vérifiée pour $n - 1$ et $n - 2$ variables, et on considère $V(x_1, \ldots, x_n)$. De même qu'avant, on se rend compte qu'en supprimant la dernière ligne et l'une des colonnes, on se retrouve encore avec une matrice de Vandermonde, et en supprimant la première ligne et une colonne, il suffit de factoriser chaque colonne par le x_i correspondant pour se ramener à une matrice de Vandermonde. La propriété de la question 2 amène alors

$$V_\lambda(x_1, \ldots, x_n) x_2 \ldots x_{n-1} V_\lambda(x_2, \ldots, x_{n-1}) = V_\lambda(x_1, \ldots, x_{n-1}) V_\lambda(x_2, \ldots, x_n)(x_2 \ldots x_n + \lambda x_1 \ldots x_{n-1})$$

  Par les hypothèses de non nullité de l'énoncé, et du fait de l'expression de $V_\lambda(x_2, \ldots, x_{n-1})$ obtenue par HR, on peut diviser, et il vient :

$$V_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} (x_j + \lambda x_i) \prod_{2 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j + \lambda x_i)}{\displaystyle\prod_{2 \leqslant i < j \leqslant n-1} (x_j + \lambda x_i)} (x_n + \lambda x_1).$$

  Le produit du dénominateur permet de supprimer les redondances (les couples (i, j) qui sont dans les deux produits du numérateur). Ainsi, tout couple (i, j) tel que $1 \leqslant i < j \leqslant n$ contribue à 1 et 1 seul terme $(x_j + \lambda x_i)$, y compris le couple $(1, n)$, qui est le facteur qu'on a à côté de la fraction. Par conséquent,

$$\boxed{V_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j + \lambda x_i)}.$$

- Cela prouve la propriété pour des matrices d'ordre n, et donc, d'après le principe de récurrence, la formule est vraie pour toute matrice de Vandermonde vérifiant les hypothèses précisées dans l'énoncé.

Corrigé du problème 3 – (d'après ESCP 2007)

Partie I –

1. (a) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On a $X_i(\Omega) = \{0, 1\}$. Ainsi, X_i suit une loi de Bernoulli dont le paramètre est $P(X_i = 1)$. Calculons $P(X_i = 1)$. Soit Y_i le nombre de boules dans l'urne i à l'issue de l'expérience. Il s'agit du nombre de succès lors d'une répétition de m expériences de Bernoulli indépendantes, consistant à mettre ou non une boule donnée dans l'urne i. La probabilité de succès est de $\frac{1}{n}$. Ainsi, Y_i suit une loi binomiale de paramètres $(m, \frac{1}{n})$, et

$$P(X_i = 1) = P(Y_i = 0) = \binom{m}{0} \left(\frac{1}{n}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m.$$

Ainsi, $P(X_i = 1) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^m$, et par conséquent,

$$\boxed{X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^m\right)}.$$

(b) Soit i et j distincts dans $[\![1, n]\!]$. L'événement $[X_i = 1] \cap [X_j = 1]$ est réalisé si et seulement si chaque boule est placée dans l'une des $n - 2$ autres boules. En raisonnant comme plus haut, et en notant $Z_{i,j}$ la variable aléatoire égale au nombre totale de boules dans les urnes i et j, $Z_{i,j}$ compte le nombre de succès dans une répétition de m expériences de Bernoulli indépendante, un succès (mettre la boule dans l'urne i ou dans l'urne j se produisant avec une probabilité de $\frac{2}{N}$. Ainsi, $Z_{i,j} \hookrightarrow \mathcal{B}\left(m, \frac{2}{n}\right)$, et

$$P([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = P(Z_{i,j} = 0) = \binom{m}{0}\left(\frac{2}{n}\right)^0\left(1 - \frac{2}{n}\right)^m,$$

donc :

$$\boxed{P([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m}.$$

Les variables X_i et X_j admettent des variances en tant que variables de Bernoulli, donc le couple (X_i, X_j) admet une covariance.

La variable aléatoire X_iX_j, produit de deux variables de Bernoulli, prend ses valeurs dans $\{0, 1\}$, donc suit aussi une loi de Bernoulli, dont le paramètre est $P(X_iX_j = 1)$. Or, X_i et X_j étant égaux à 0 ou à 1, leur produit vaut 1 si et seulement si chacune est égale à 1. Ainsi

$$P(X_iX_j = 1) = P([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m.$$

Ainsi, $X_iX_j \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^m\right)$, donc $E(X_iX_j) = \left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^m$.

On a donc

$$\boxed{\operatorname{cov}(X_i, X_j) = E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m}}.$$

On a

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m} = \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2\right)^m = \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^m.$$

Or, puisque $n \geqslant 3$,

$$0 < 1 - \frac{2}{n} < 1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2},$$

et donc, puisque $m \geqslant 4 > 0$,

$$0 < \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m < \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^m = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m}.$$

On en déduit que $\operatorname{cov}(X_i, X_j) < 0$, donc en particulier $\operatorname{cov}(X_i, X_j) \neq 0$. Il en résulte que les variables aléatoires $\boxed{X_i \text{ et } X_j \text{ ne sont pas indépendantes}}$.

2. (a) Par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(W_n) = \sum_{k=1}^{n} E(W_k) = \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^m.$$

Ainsi, $\boxed{E(W_n) = n\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^m}$

(b) On a :

$$\begin{aligned}
V(W_n) &= \sum_{k=1}^{n} V(X_k) + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \operatorname{cov}(X_i, X_j) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)^m\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)^m + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \left(\left(1-\frac{2}{n}\right)^m - \left(1-\frac{1}{n}\right)^{2m}\right) \\
&= n\left(1-\frac{1}{n}\right)^m - n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2m} + n(n-1)\left(1-\frac{2}{n}\right)^m - n(n-1)\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2m},
\end{aligned}$$

puisque le nombre de couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]$ tel que $i<j$ est égal au nombre de sous-ensemble à 2 élements de $[\![1,n]\!]$, à savoir $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Ainsi,

$$\boxed{V(W_n) = n\left(1-\frac{1}{n}\right)^m + n(n-1)\left(1-\frac{2}{n}\right)^m - n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2m}}$$

(c) Des résultats précédents on obtient

$$E(W_n) - V(W_n) = n\left(1-\frac{1}{n}\right)^m - n\left(1-\frac{1}{n}\right)^m - n(n-1)\left(1-\frac{2}{n}\right)^m + n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2m},$$

donc

$$\boxed{E(W_n) - V(W_n) = n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2m} - n(n-1)\left(1-\frac{2}{n}\right)^m.}$$

En utilisant l'inégalité obtenue lorsque nous avons déterminé le signe de $\operatorname{cov}(X_i, X_j)$, nous obtenons :

$$E(W_n) - V(W_n) > n^2\left(1-\frac{2}{n}\right)^m - n(n-1)\left(1-\frac{2}{n}\right)^m = n\left(1-\frac{2}{n}\right)^m > 0.$$

Ainsi $\boxed{E(W_n) - V(W_n) \geqslant 0}$ (l'inégalité est même stricte)

3. (a) On a ici, pour tout $n \geqslant 3$,

$$E(W_n) = n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\lfloor n\ln n + \theta n\rfloor} = \exp\left(\ln n + \lfloor n\ln n + \theta n\rfloor \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right).$$

Il existe une suite (u_n) bornée (à valeurs dans $[-1,0]$)

$$\lfloor n\ln n + \theta n\rfloor = n\ln n + \theta n + u_n.$$

Un développement limité donne alors :

$$\begin{aligned}
\ln n + \lfloor n\ln n + \theta n\rfloor \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) &= \ln n + (n\ln n + \theta n + u_n)\left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= \ln n - \ln n + \frac{\ln n}{2n} - \theta + \frac{\theta}{2n} - \frac{u_n}{n} + \frac{u_n}{2n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right) = -\theta + o(1),
\end{aligned}$$

tous les autres termes étant de limite nulle.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln n + \lfloor n\ln n + \theta n\rfloor \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = -\theta$, d'où, par continuité de l'exponentielle,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} E(W_n) = \mathrm{e}^{-\theta}}.$$

(b) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2m} = E(W_n)^2, \qquad \text{donc:} \qquad \lim_{n\to+\infty} n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2m} = \mathrm{e}^{-2\theta}.$$

Par ailleurs, en adaptant un peu le calcul précédent,

$$\ln\left(n^2\left(1-\frac{2}{n}\right)^m\right) = 2\ln n + (n\ln n + \theta n + u_n)\left(-\frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

et de même que plus haut,

$$\ln\left(n^2\left(1-\frac{2}{n}\right)^m\right) = -2\theta + o(1).$$

Par continuité de l'exponentielle, et du fait de l'équivalence $n^2 \sim n(n-1)$, il vient :

$$\lim_{n\to+\infty} n(n-1)\left(1-\frac{2}{n}\right)^m = \mathrm{e}^{-2\theta}.$$

On déduit alors de l'expression trouvée pour $E(V_n) - W(V_n)$, que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(E(W_n) - V(W_n)) = 0.}$$

(c) **On admet** que pour tout k de $\mathbb{N}$, on a :

$$|P(W_n = k) - P(T_n = k)| \leqslant \min\left(1, \frac{1}{\mu_n}\right) \times (\mu_n - V(W_n)).$$

Alors, puisque $\min\left(1, \frac{1}{\mu_n}\right)$ est majoré et que $(\mu_n - V(W_n))$ tend vers 0 d'après la question précédente, on obtient l'existence et la valeur des limites suivantes, d'après le théorème d'encadrement :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim |P(W_n = k) - P(T_n = k)| = 0.$$

Par ailleurs, étant donné $k \in \mathbb{N}$,

$$P(T_n = k) = \mathrm{e}^{-\mu_n}\frac{\mu_n^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\mu}\frac{\mu^k}{k!} = P(T = k)$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} |P(T_n = k) - P(T = k)| = 0.$$

Puisque par ailleurs, d'après l'inégalité triangulaire,

$$|P(W_n = k) - P(T = k)| \leqslant |P(W_n = k) - P(T_n = k)| + |P(T_n = k) - P(T = k)|,$$

une nouvelle application du théorème d'encadrement nous donne

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} P(W_n = k) = P(T = k)}.$$

Ainsi, la suite (W_n) converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\mathrm{e}^{-\theta}$.

Partie II –

1. (a)
   - Soit $A = \varnothing$. Alors par convention $[M \in A] = \varnothing$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $[M \in A] \cap [M \leqslant k] = \varnothing$. On a donc
   $$P([M \in A]) = 0 \qquad \text{et} \qquad P([M \in A] \cap [M \leqslant k]) = 0$$
   Ainsi, pour tout k de $\mathbb{N}$, $\boxed{f_\varnothing(k+1) = 0}$.
   - Soit $A = \mathbb{N}$. Alors $[M \in A] = \Omega$, donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
   $$f_\mathbb{N}(k+1) = \frac{k!}{\lambda^{k+1}}\mathrm{e}^\lambda\left(P(\Omega \cap [M \leqslant k]) - P(\Omega)P([M \leqslant k])\right) = \frac{k!}{\lambda^{k+1}}\mathrm{e}^\lambda\left(P([M \leqslant k]) - 1 \cdot P([M \leqslant k])\right),$$
   et finalement, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\boxed{f_\mathbb{N}(k+1) = 0.}$

   (b)
   - Soit $A \subset \mathbb{N}$ tel que $0 \in A$. Alors si $[M \leqslant 0]$ est réalisé, $[M \in A]$ est réalisé. On a donc une inclusion $[M \leqslant 0] \subset [M \in A]$. Par conséquent
   $$P([M \in A] \cap [M \leqslant 0]) = P(M \in A).$$
   On en déduit que
   $$f_A(1) = \frac{0!}{\lambda^1}\mathrm{e}^\lambda\left(P(M \leqslant 0) - P(M \leqslant 0)P(M \in A)\right) = \frac{\mathrm{e}^\lambda}{\lambda}P(M \leqslant 0)(1 - P(M \in A)).$$

Puisque M est à valeurs dans $\mathbb{N}$,

$$P(M \leqslant 0) = P(M = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda},$$

donc

$$\boxed{f_A(1) = \frac{1}{\lambda}(1 - P(M \in A)) = \frac{1}{\lambda}P(M \in \overline{A})}.$$

- Soit $A \subset \mathbb{N}$ tel que $0 \notin A$, c'est-à-dire $0 \in \overline{A}$. Alors, si $[M \leqslant 0]$ est réalisé, $[M \in A]$ ne peut pas être réalisé, donc $[M \in A] \cap [M \leqslant 0] = \varnothing$. On en déduit cette fois que

$$f_A(1) = \frac{\mathrm{e}^{\lambda}}{\lambda}(0 - P(M \in A)\mathrm{e}^{-\lambda}),$$

et donc

$$\boxed{f_A(1) = -\frac{1}{\lambda}P(M \in A)}.$$

- Soit $A \subset \mathbb{N}$ tel que $\{0, 1\} \subset \mathbb{N}$. Alors, de même que ci-dessus, $[M \leqslant 1] \subset [M \in A]$. Par conséquent,

$$f_A(2) = \frac{\mathrm{e}^{\lambda}}{\lambda^2}\left(P(M \leqslant 2) - P(M \in A)P(M \leqslant 2)\right) = P(M \leqslant 2)\frac{\mathrm{e}^{\lambda}}{\lambda^2}P(M \in \overline{A}).$$

Ainsi,

$$\boxed{f_A(2) = \frac{1+\lambda}{\lambda^2}P(M \in \overline{A})}.$$

2. Soit A et B deux parties de $\mathbb{N}$ disjointes.

(a) On a :

$$[M \in A \cup B] = [M \in A] \cup [M \in B].$$

On a aussi :

$$[M \in A \cup B] \cap [M \leqslant k] = ([M \in A] \cup [M \in B]) \cap [M \leqslant k] = ([M \in A] \cap [M \leqslant k]) \cup ([M \in B] \cap [M \leqslant k]).$$

Comme A et B son disjoints, les événements $[M \in A]$ et $[M \in B]$ sont incompatibles, sont aussi les événements $[M \in A] \cap [M \in k]$ et $[M \in B] \cap [M \leqslant k]$. Il vient alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
f_{A\cup B}(k+1) &= \frac{k!}{\lambda^{k+1}}\mathrm{e}^{-\lambda}(P(([M \in A] \cap [M \leqslant k]) \cup ([M \in B] \cap [M \leqslant k]) \\
&\qquad - P([M \in A] \cup [M \in B])P(M \leqslant k)) \\
&= \frac{k!}{\lambda^{k+1}}\mathrm{e}^{-\lambda}(P([M \in A] \cap [M \leqslant k]) + P([M \in B] \cap [M \leqslant k]) \\
&\qquad - (P(M \in A) + P(M \in B))P(M \leqslant k)) \\
&= \frac{k!}{\lambda^{k+1}}\mathrm{e}^{-\lambda}(P([M \in A] \cap [M \leqslant k]) - P(M \in A)(M \leqslant k)) \\
&\qquad + \frac{k!}{\lambda^{k+1}}\mathrm{e}^{-\lambda}(P([M \in B] \cap [M \leqslant k]) - P(M \in B)(M \leqslant k)) \\
&= f_A(k+1) + f_B(k+1).
\end{aligned}$$

On a bien obtenu, lorsque A et B sont disjoints, $\boxed{f_{A\cup B} = f_A + f_B}$ (l'égalité $f_{A\cup B}(0) = f_A(0) + f_B(0)$ étant également trivialement vraie)

(b) En particulier, A et $\overline{A}$ étant disjoints, et vérifiant l'égalité $A \cup \overline{A} = \mathbb{N}$, on obtient :

$$f_A + f_{\overline{A}} = f_{A\cup\overline{A}} = f_{\mathbb{N}} = 0 \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{f_{\overline{A}} = -f_A}.$$

3. (a) Soit $A \subset \mathbb{N}$, et soit $k \in \mathbb{N}$

- Supposons que $k \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned}
\lambda f_A(k+1) - kf_A(k) &= \frac{k!\mathrm{e}^{\lambda}}{\lambda^k}(P([M \in A] \cap [M \leqslant k]) - P(M \in A)P(M \leqslant k) \\
&\qquad - P([M \in A] \cap [M \leqslant k-1]) + P(M \in A)P(M \leqslant k-1)) \\
&= \frac{k!\mathrm{e}^{\lambda}}{\lambda^k}(P([M \in A] \cap [M = k]) - P(M \in A)P(M = k)),
\end{aligned}$$

car $[M \leqslant k-1] \subset [M \leqslant k]$, et $[M \leqslant k] \backslash [M \leqslant k-1] = [M = k]$, et de même avec l'intersection avec $[M \in A]$.

* Supposons que $k \in A$, alors $[M = k] \subset [M \in A]$, donc

$$\lambda f_A(k+1) - k f_A(k) = \frac{k!\mathrm{e}^\lambda}{\lambda^k} P(M = k)(1 - P(M \in A)) = \frac{k!\mathrm{e}^\lambda}{\lambda^k} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} P(M \in \overline{A}),$$

puisque M suit une loi de Poisson. Ainsi

$$\lambda f_A(k+1) - k f_A(k) = P(M \in \overline{A}).$$

* Supposons que $k \in \overline{A}$. On applique le résultat qu'on vient d'établir à $f_{\overline{A}}$:

$$\lambda f_{\overline{A}}(k+1) - k f_{\overline{A}}(k) = P(M \in \overline{\overline{A}}) = P(M \in A).$$

Ainsi, puisque $f_{\overline{A}} = -f_A$, on obtient bien :

$$\lambda f_A(k+1) - k f_A(k) = -P(M \in A).$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{\lambda f_A(k+1) - k f_A(k) = \begin{cases} P([M \in \overline{A}]) & \text{si } k \in A \\ -P([M \in A]) & \text{si } k \in \overline{A}. \end{cases}}$$

- Il reste donc à voir la propriété pour $k = 0$, ce qui découle de manière immédiate de la question II-1(b).

(b) Si A est non vide et distinct de $\mathbb{N}$, les probabilités $P([M \in A])$ et $P([M \in \overline{A}])$ ne sont pas nulles (sommes non vides de termes strictement positifs). Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\lambda f_A(k+1) - k f_A(k) \neq 0,$$

ce qui ne serait pas possible si f_A était identiquement nulle. Donc $\boxed{f \text{ n'est pas identiquement nulle}}$.

4. (a) - Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\boxed{k \geqslant j}$. Alors

$$[M \in \{j\}] \subset [M \leqslant k] \qquad \text{donc:} \qquad [M \in \{j\}] \cap [M \leqslant k] = [M \in \{j\}] = [M = j].$$

On obtient donc :

$$f_j(k+1) = \frac{k!}{\lambda^{k+1}}\mathrm{e}^\lambda (P(M = j) - P(M = j)(M \leqslant k)) = \frac{k!}{\lambda^{k+1}}\mathrm{e}^\lambda P(M = j)(1 - P(M \leqslant k)).$$

Ainsi, puisque $P(M = j) = \dfrac{\lambda^j}{j!}\mathrm{e}^{-l}$, et d'après la formule du complémentaire,

$$\boxed{f_j(k+1) = \frac{k!}{j!\lambda^{k-j+1}} P(M \geqslant k+1)},$$

puisque $\overline{[M \leqslant k]} = [M > k] = [M \geqslant k+1]$.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\boxed{k < j}$. Alors l'événement $[M \in \{j\}] \cap [M \leqslant k]$ est impossible, donc

$$f_j(k+1) = \frac{k!}{\lambda^{k+1}}\mathrm{e}^\lambda (0 - P(M = j)(M \leqslant k)) \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{f_j(k+1) = -\frac{k!}{j!\lambda^{k-j+1}} P(M \leqslant k)}$$

(b) On a alors

$$f_j(j+1) - f_j(j) = \frac{j!}{j!\lambda} P(M \geqslant j+1) + \frac{(j-1)!}{j!} P(M \leqslant j-1) = \boxed{\frac{1}{\lambda} P(M \geqslant j+1) + \frac{1}{j} P(M \leqslant j-1) > 0}$$

(c) - Soit $k \in [\![1, j-1]\!]$. Alors

$$\begin{aligned} f_j(k+1) - f_j(k) &= -\frac{k!}{j!\lambda^{k-j+1}} P(M \leqslant k) + \frac{(k-1)!}{j!\lambda^{k-1-j+1}} P(M \leqslant k-1) \\ &= \frac{k!}{j!\lambda^{k-j+1}} \left(\frac{\lambda}{k} P(M \leqslant k-1) - P(M \leqslant k) \right) \end{aligned}$$

Or,

$$\frac{\lambda}{k}P(M \leqslant k-1) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda}{k}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} = \sum_{i=0}^{k-1} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{i+1}}{ki!}.$$

Or, pour toute les valeurs possibles de l'indice i, on a $k \geqslant i+1$, et tous les termes sont positifs. Ainsi :

$$\frac{\lambda}{k}P(M \leqslant k-1) \leqslant \sum_{i=0}^{k-1} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{i+1}}{(i+1)!} = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{i}}{i!} < \sum_{i=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{i}}{i!} = P(M \leqslant k).$$

On obtient donc :

$$\boxed{f_j(k+1) - f_j(k) = \frac{k!}{j!\lambda^{k-j+1}}\left(\frac{\lambda}{k}P(M \leqslant k-1) - P(M \leqslant k)\right) < 0.}$$

- Soit $k \geqslant j+1$. On a alors :

$$\begin{aligned} f_j(k+1) - f_j(k) &= \frac{k!}{j!\lambda^{k-j+1}}P(M \geqslant k+1) - \frac{(k-1)!}{j!\lambda^{k-1-j+1}}P(M \geqslant k) \\ &= \frac{k!}{j!\lambda^{k-j+1}}\left(P(M \geqslant k+1) - \frac{\lambda}{k}P(M \geqslant k)\right). \end{aligned}$$

Or,

$$\frac{\lambda}{k}P(M \geqslant k) = \sum_{i=k}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda \cdot \lambda^i}{k \cdot i!} > \sum_{i=k}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{i+1}}{(i+1)\cdot i!} = \sum_{\ell=k+1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{\ell}}{\ell!} = P(M \geqslant k+1).$$

Ainsi, on obtient : $\boxed{f_j(k+1) - f_j(k) = \frac{k!}{j!\lambda^{k-j+1}}\left(P(M \geqslant k+1) - \frac{\lambda}{k}P(M \geqslant k)\right) < 0}$.

Ainsi, la seule valeur de k pour laquelle $f_j(k+1) - f_j(k)$ est positive est celle trouvée dans la question précédente, à savoir $k = j$.

(d) On a alors :

$$\begin{aligned} f_j(j+1) - f_j(j) &= \frac{1}{\lambda}P(M \geqslant j+1) + \frac{1}{j}P(M \leqslant j-1) \\ &= \frac{1}{\lambda}(1 - P(M \leqslant j)) + \frac{1}{j}P(M \leqslant j-1) \\ &= \frac{1}{\lambda}\left(1 - \sum_{i=0}^{j} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}\right) + \frac{1}{j}\sum_{i=0}^{j-1} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} \\ &= \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} - \sum_{i=1}^{j} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{i-1}}{i!} + \frac{1}{j}\sum_{i=0}^{j-1} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} \\ &= \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} - \sum_{i=0}^{j-1} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{i}}{(i+1)!} + \frac{1}{j}\sum_{i=0}^{j-1} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} \\ &= \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} - \sum_{i=0}^{j-1} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}\left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{j}\right). \end{aligned}$$

Or, pour tous les termes i considérés, on a $i+1 \leqslant j$, donc $\frac{1}{i+1} - \frac{1}{j} \geqslant 0$. Ainsi,

$$\boxed{f_j(j+1) - f_j(j) \leqslant \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}.}$$

Par ailleurs, l'exponentielle étant toujours positive, on a toujours $\frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} \leqslant \frac{1}{\lambda}$. Par ailleurs,

$$\frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} - 1 = \frac{1-\lambda-\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda},$$

et la fonction $\lambda \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda}$ étant convexe, sa courbe est située au dessus de sa tangente en 0, d'équation $y = 1-x$. Ainsi, pour tout λ, $\mathrm{e}^{-\lambda} \geqslant 1-\lambda$. On en déduit que

$$\frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} - 1 \leqslant 0 \qquad \text{donc:} \qquad \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} \leqslant 1.$$

Des deux inégalités obtenues, on déduit :

$$\boxed{\frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} \leqslant \min\left(1, \frac{1}{\lambda}\right)}$$

5. On a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$f_0(k+1) = \frac{k!}{\lambda^{k+1}} P(M=0)(1-P(M \leqslant k)) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda} k!}{\lambda^{k+1}} P(M \geqslant k+1).$$

Ainsi

$$f_0(k+1) - f_0(k) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda} k!}{\lambda^{k+1}} \left(P(M \geqslant k+1) - \frac{\lambda}{k} P(M \geqslant k) \right).$$

D'après le calcul fait en II-4(c),

$$\boxed{f_0(k+1) - f_0(k) \leqslant 0}$$

On complète ce résultat en remarquant que d'après 1(b),

$$f_0(1) - f_0(0) = f_0(1) - 0 = \frac{1}{\lambda} P(M > 0) > 0.$$

Ainsi, on a une propriété similaire à celle trouvée précédemment : $f_0(k+1) - f_0(k)$ est positif si et seulement si $k = 0$.

Ce résultat nous sera utile dans la question suivante.

6. (a) On a $A = \bigcup_{j \in A} \{j\}$, ces unions étant 2 à 2 disjointes. Ainsi, d'après la question II-2(a), on obtient :

$$f_A = \sum_{j \in A} f_j.$$

Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$f_A(k+1) - f_A(k) = \sum_{j \in A} f_j(k+1) - f_j(k).$$

- Soit $\boxed{k \in A}$. Alors, pour tout $j \in A \backslash \{k\}$, $f_j(k+1) - f_j(k) \leqslant 0$ d'après les questions 4(c) et 5. Ainsi, le seul terme positif dans la somme est celui correspondant à l'indice $j = k$, donc

$$\boxed{f_A(k+1) - f_A(k) \leqslant f_k(k+1) - f_k(k).}$$

- Soit $\boxed{k \in \overline{A}}$. Alors, tous les termes de la somme précédente sont négatifs, donc

$$\boxed{f_A(k+1) - f_A(k) \leqslant 0 \leqslant f_k(k+1) - f_k(k)}$$

(inégalité également valable pour $k = 0$ d'après le complément apporté à la question précédente).

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$f_k(k+1) - f_k(k) \leqslant \min\left(1, \frac{1}{\lambda}\right),$$

et cette inégalité est encore valable pour $k = 0$, puisque, d'après le calcul fait en fin de question 5,

$$f_0(1) - f_0(0) = \frac{1}{\lambda} P(M > 0) = \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} \leqslant \min\left(1, \frac{1}{\lambda}\right),$$

la dernière inégalité provenant de 4(d).

Ainsi, d'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$f_A(k+1) - f_A(k) \leqslant \min\left(1, \frac{1}{\lambda}\right).$$

Ces inégalités étant valables pour tout A, on obtient, en l'appliquant avec $\overline{A}$:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f_{\overline{A}}(k+1) - f_{\overline{A}}(k) \leqslant \min\left(1, \frac{1}{\lambda}\right),$$

et donc, d'après 2(b), pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$-f_A(k+1) + f_A(k) \leqslant \min\left(1, \frac{1}{\lambda}\right).$$

On obtient donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$-\min\left(1, \frac{1}{\lambda}\right) \leqslant f_A(k+1) - f_A(k) \leqslant \min\left(1, \frac{1}{\lambda}\right) \qquad \text{soit:} \qquad |f_A(k+1) - f_A(k)| \leqslant \min\left(1, \frac{1}{\lambda}\right).$$

L'inégalité étant vérifiée pour tout $k \in \mathbb{N}$, il en découle :

$$\boxed{\sup_{k \geqslant 0} |f_A(k+1) - f_A(k)| \leqslant \min\left(1, \frac{1}{\lambda}\right).}$$

Partie III –

1. (a) La variable aléatoire X_i prend les seules valeurs 0 et 1. Soit $\omega \in \Omega$.
   - Si $X_i(\omega) = 0$, alors $X_i f(W_n)(\omega) = X_i f(1 + R_i)(\omega) = 0$
   - Si $X_i(\omega) = 1$, alors $1 + R_i(\omega) = X_i(\omega) + R_i(\omega) = W_n(\omega)$, donc $f(W_n)(\omega) = f(1 + R_i)(\omega)$, donc $X_i f(W_n)(\omega) = X_i f(1 + R_i)(\omega)$.

   On obtient l'égalité dans les deux cas possibles, donc $\boxed{X_i f(W_n) = X_i f(1 + R_i)}$.

   (b) Ainsi,
   $$E(X_i f(W_n)) = E(X_i f(1 + R_i)).$$
   Or, R_i est la somme des variables X_j, pour $j \neq i$, et est donc indépendante de X_i (les variables $X_1, \ldots, X_n$ étant mutuellement indépendantes). Donc $1 + R_i$ et X_i sont indépendantes, donc aussi $f(1 + R_i)$ et X_i. Par conséquent :
   $$E(X_i f(1 + R_i)) = E(X_i)E(f(1 + R_i)) = p_i E(f(1 + R_i)).$$
   En mettant bout-à-bout les égalités trouvées, cela donne bien : $\boxed{E(X_i f(W_n)) = p_i E(f(1 + R_i))}$.

2. On a :
$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} p_i E(Y_i) &= E\left(\sum_{i=1}^{n} (p_i f(1 + W_n) - p_i f(1 + R_i))\right) \\
&= E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right) f(1 + W_n)\right) - \sum_{i=1}^{n} p_i E(f(1 + R_i)) \\
&= E(\lambda_n f(1 + W_n)) - \sum_{i=1}^{n} E(X_i f(W_n)) \\
&= E\left(\lambda_n f(1 + W_n) - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) f(W_n)\right) \\
&= E\left(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n)\right).
\end{aligned}$$

   On obtient bien la relation : $\boxed{E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n)) = \sum_{i=1}^{n} p_i E(Y_i).}$

3. (a) Soit ω tel que $X_i(\omega) = 1$. Alors $W_n(\omega) = R_i(\omega) + 1$, donc
   $$Y_i(\omega) = f(1 + W_n)(\omega) - f(1 + R_i)(\omega) = f(2 + R_i)(\omega) - f(1 + R_i)(\omega).$$
   Ainsi, sachant que $X_i = 1$ est réalisé, les variables Y_i et $f(2 + R_i) - f(1 + R_i)$ sont égales. Ainsi
   $$E(Y_i \mid X_i = 1) = E(f(2 + R_i) - f(1 + R_i) \mid X_i = 1),$$
   et puisque R_i et X_i sont indépendantes,
   $$\boxed{E(Y_i \mid X_i = 1) = E(f(2 + R_i) - f(1 + R_i))}$$

(b) De la même façon, si $[X_i = 0]$ est réalisé, $W_n = R_i$, donc, de même qui ci-dessus :

$$\boxed{E(Y_i \mid X_i = 0) = E(f(1 + R_i) - f(1 + R_i)) = 0.}$$

(c) On en déduit, d'après la formule de l'espérance totale (il n'y a pas de problème de convergence, toutes les variables étant finies) :

$$E(Y_i) = P(X_i = 0)E(Y_i \mid X_i = 0) + P(X_i = 1)E(Y_i \mid X_i = 1) = p_i E(f(2 + R_i) - f(1 + R_i)).$$

On obtient alors, d'après l'égalité de la question 2,

$$\boxed{E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n)) = \sum_{i=1}^{n} p_i^2 E(f(2 + R_i) - f(1 + R_i))}.$$

4. D'après la partie II, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$|f(2 + R_i) - f(1 + R_i)| \leqslant \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right).$$

Ainsi, d'après l'inégalité triangulaire, et la croissance de l'espérance,

$$|E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n))| \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i^2 E(|f(2 + R_i) - f(1 + R_i)|) \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i^2 \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right).$$

On obtient bien :

$$\boxed{|E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n))| \leqslant \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) \times \sum_{i=1}^{n} p_i^2}.$$

5. D'après la question II-3(a), si l'événement $[W_n \in A]$ est réalisé, $\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n)$ prend la valeur constante $P(M \in \overline{A}$. Ainsi,

$$E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n) \mid W_n \in A) = P(M \in \overline{A}).$$

De la même façon,

$$E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n) \mid W_n \in \overline{A}) = -P(M \in A).$$

Ainsi, d'après la formule de l'espérance totale sur le système complet $([W_n \in A], [W_n \in \overline{A}])$, on obtient :

$$\begin{aligned} E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n)) &= P(M \in \overline{A})P(W_n \in A) - P(M \in A)P(W_n \in \overline{A}) \\ &= (1 - P(M \in A))P(W_n \in A) - P(M \in A)(1 - P(W_n \in A)). \end{aligned}$$

Après simplication, on trouve bien :

$$\boxed{E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n)) = P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])}.$$

Le résultat de la question 4 permet alors de conclure que :

$$\boxed{|P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])| \leqslant \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) \times \sum_{i=1}^{n} p_i^2}.$$

6. (a) On a :

$$\lambda_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n + i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{i}{n}}.$$

D'après le théorème des sommes de Riemann,

$$\lim_{n \to +\infty} \lambda_n = \int_0^1 \frac{1}{1 + x} = \Big[\ln(1 + x)\Big]_0^1$$

et donc $\boxed{\lambda = \lim_{n \to +\infty} \lambda_n = \ln 2.}$

Par ailleurs, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $p_i^2 = \dfrac{1}{(n+i)^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$, donc :

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

Par conséquent, on obtient l'existence et la valeur de la limite suivante, d'après le théorème d'encadrement :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} p_i^2 = 0}.$$

Attention à ne pas écrire $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} p_i^2$ pour désigner cette limite, car les p_i dépendent chacun aussi de n, l'indice supérieur de la somme.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$. On a

$$\lim_{n \to +\infty} P(M_n = k) = \lim_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_n} \frac{\lambda_n^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\ln 2} \frac{(\ln 2)^k}{k!}.$$

Ainsi, $\boxed{M_n \text{ converge en loi vers une loi de Poisson de paramètre } \ln 2.}$

(c) Soit $k \in \mathbb{N}$. Notons M une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda = \ln 2$. On a alors, en prenant $A = \{k\}$ dans l'inégalité de la question 5, et d'après l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}
|P(W_n = k) - P(M = k)| &\leqslant |P(W_n = k) - P(M_n = k)| + |P(M_n = k) - P(M = k)| \\
&\leqslant \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) \sum_{i=1}^{n} p_i^2 + |P(M_n = k) - P(M = k)| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i^2 + |P(M_n = k) - P(M = k)|.
\end{aligned}$$

Par les questions 6(a) et 6(b), on en déduit, d'après le théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \to +\infty} |P(W_n = k) - P(M = k)| = 0.$$

Ainsi, $\boxed{(W_n) \text{ converge en loi vers une variable de Poisson de paramètre } \ln 2}$

Partie IV –

1. (a) Lorsque $[X_i = 1]$ est réalisé, W_n est égal à $R_i + 1$, donc $X_i f(W_n)$ est égal à $f(1 + R_i)$. Lorsque $[X_i = 0]$ est réalisé, $X_i f(W_n)$ prend la valeur 0. Ainsi,

$$E(X_i f(W_n) \mid X_i = 0) = 0 \qquad \text{et} \qquad E(X_i f(W_n) \mid X_i = 1) = E(f(1 + R_i) \mid X_i = 1).$$

Ainsi, d'après le théorème de l'espérance total sur le système complet $([X_i = 0], [X_i = 1])$,

$$\boxed{E(X_i f(W_n)) = E(f(1 + R_i) \mid X_i = 1) P(X_i = 1) = p_i E(f(1 + R_i) \mid [X_i = 1]).}$$

(b) On adapte le raisonnement de la question III-2 :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} p_i \Big[E(f(1 + W_n)) - E(f(1 + R_i) \mid [X_i = 1])\Big] &= \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right) E(f(1 + W_n)) - \sum_{i=1}^{n} E(f(1 + R_i) \mid X_i = 1) \\
&= \lambda_n E(f(1 + W_n)) - \sum_{i=1}^{n} E(X_i f(W_n)) \\
&= E\left(\lambda_n f(1 + W_n) - f(W_n) \sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&= E\left(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n)\right)
\end{aligned}$$

La première égalité de la question III-5 est valable sans hypothèse d'indépendance. Par conséquent, on trouve :

$$\boxed{P([W_n \in A]) - P([M_n \in A]) = \sum_{i=1}^{n} p_i \Big[E(f(1 + W_n)) - E(f(1 + R_i) \mid [X_i = 1])\Big]}$$

2. On suppose que pour tout i de $[\![1,n]\!]$, il existe une variable aléatoire Z_i définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que la loi de Z_i soit identique à la loi conditionnelle de R_i sachant $[X_i = 1]$

   (a) Soit $(\ell, j) \in \mathbb{N}^2$. On peut supposer $\ell > j$, l'inégalité inverse en découlant facilement, et la cas d'égalité étant trivial. Soit donc $\ell > j$. On a

$$|f(\ell) - f(j)| = \left| \sum_{k=j}^{\ell-1} f(k+1) - f(k) \right| \leqslant \sum_{k=j}^{\ell-1} |f(k+1) - f(k)|,$$

   d'après l'inégalité triangulaire. On déduit alors de la question II-6(b) que

$$|f(\ell) - f(j)| \leqslant \sum_{k=j}^{\ell-1} \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) = (\ell - j) \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) = |\ell - j| \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right).$$

   Ainsi, d'après la remarque faite en début de question, pour tout couple (ℓ, j) d'entiers naturels,

$$\boxed{|f(\ell) - f(j)| \leqslant |l - j| \times \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right)}$$

   La loi de Z_i étant égale à la loi conditionnelle de R_i sachant $X_i = 1$, on a :

$$E(f(1 + R_i) \mid X_i = 1) = E(f(1 + Z_i)).$$

   Par conséquent,

$$\begin{aligned} |P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])| &= \left| \sum_{i=1}^{n} p_i \left(E(f(1 + W_n) - E(f(1 + Z_i))\right) \right| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i \left|E\left(f(1 + W_n) - f(1 + Z_i)\right)\right| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i E(|f(1 + W_n) - f(1 + Z_i)|). \end{aligned}$$

   En utilisant la majoration trouvée en début de question et l croissance de l'espérance, il vient alors :

$$|P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])| \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i E\left(|W_n - Z_i| \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right)\right),$$

   et donc enfin :

$$\boxed{|P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])| \leqslant \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) \times \sum_{i=1}^{n} p_i E(|W_n - Z_i|)}.$$

   (b) On suppose de plus que pour tout ω de Ω, pour tout i de $[\![1,n]\!]$, on a $W_n(\omega) \geqslant Z_i(\omega)$. On a alors pour tout i, $W_n - Z_i \geqslant 0$, d'où :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} p_i E(|W_n - Z_i|) &= \sum_{i=1}^{n} p_i (E(W_n) - E(R_i \mid X_i = 1) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)E(W_n) - \sum_{i=1}^{n} p_i E(R_i \mid X_i = 1) \\ &= E(W_n)E(W_n) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{n-1} kp(X_i = 1)P(R_i \mid X_i = 1) \\ &= E(W_n)^2 - \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{n-1} k \cdot 1 \cdot P(R_i = k, X_i = 1) \\ &= E(W_n)^2 - \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{1} k \cdot \ell \cdot P(R_i = k, X_i = \ell) \\ &= E(W_n)^2 - \sum_{i=1}^{n} E(X_i R_i), \end{aligned}$$

d'après le théorème de transfert. On en déduit alors :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} p_i E(|W_n - Z_i|) &= E(W_n)^2 - E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \left(\sum_{j=1}^{n} X_j - X_i\right)\right)\\ &= E(W_n)^2 - E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{j=1}^{n} X_j - \sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)\\ &= E(W_n)^2 - E(W_n^2) + \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2).\end{aligned}$$

Or, le moment d'ordre 2 d'une variable suivant une loi de Bernoulli de paramètre p est p, donc

$$\sum_{i=1}^{n} p_i E(|W_n - Z_i|) = -V(W_n) + \sum_{i=1}^{n} p_i,$$

et donc finalement :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} p_i E(|W_n - Z_i|) = \lambda_n - V(W_n)}.$$

On déduit alors directement de cette égalité et de l'inégalité trouvée dans la question 2(a) que :

$$\boxed{|P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])| \leqslant \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) \times (\lambda_n - V(W_n))}.$$

Corrigé du problème 4 –

Partie I – Un lemme de finitude

1. Soit $\omega \in \Omega$. La suite des sommes partielles de la série à termes positifs $\sum Y_n(\omega)$ est croissante. Celle-ci tend vers $+\infty$ lorsqu'elle n'est pas majorée. Ainsi :

$$\omega \in A \Longleftrightarrow \Big(\sum_{k=1}^{n} Y_k(\omega)\Big)_{n\geqslant 1} \text{ n'est pas majorée} \Longleftrightarrow \forall M \geqslant 1,\ \exists N \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{N} Y_k(\omega) \geqslant M.$$

On a bien démontré $A = \bigcap_{M\geqslant 1} \bigcup_{N\geqslant 1} \left(\sum_{k=1}^{N} Y_k \geqslant M\right)$, soit $\boxed{A = \bigcap_{M\geqslant 1} \bigcup_{N\geqslant 1} A_{N,M}.}$

2. Soit $N, M \geqslant 1$. La variable $Y_1 + \cdots + Y_N$ est positive et possède une espérance comme somme de telles variables. Si cette espérance est nulle, $Y_1 + \cdots + Y_N$ est nulle presque sûrement (car positive), donc $A_{N,M}$ est quasi-impossible. L'inégalité est dans ce cas triviale. Sinon, par l'inégalité de Markov, on obtient :

$$\mathbb{P}(A_{N,M}) \leqslant \frac{\mathbb{E}(Y_1 + \cdots + Y_N)}{M} = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}(Y_k) \leqslant \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}(Y_k),$$

par linéarité de l'espérance, et par positivité des espérances.

On a bien $\boxed{\mathbb{P}(A_{N,M}) \leqslant \frac{E}{M}}$.

3. (a) Soit $M_1 \leqslant M_2$ et $N \geqslant 1$. En notant S_N la somme partielle des Y_k, si $S_N \geqslant M_2$, on a aussi $S_N \geqslant M_1$, donc $A_{N,M_2} \subset A_{N,M_1}$. Ainsi, cette inclusion etant vérifiée terme à terme, elle l'est aussi sur l'union : $\boxed{\Big(\bigcup_{N\geqslant 1} A_{N,M}\Big)_{M\geqslant 1} \text{ est décroissante.}}$

   (b) D'après de théorème de continuité monotone, on en déduit que

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{M\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{N\geqslant 1} A_{N,M}\Big).$$

D'autre part, pour $M \geqslant 1$ fixé, la suite $(A_{N,M})_{N\geqslant 1}$ est croissante (car (S_N) est croissante), de sorte que :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{N\geqslant 1} A_{N,M}\Big) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}(A_{N,M}).$$

Ceci permet d'obtenir :

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{M\to+\infty} \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}(A_{N,M}).$$

Remarquons que le théorème de limite monotone assure au passage l'existence de ces limites.
Or, puisque pour tous $N, M \geqslant 1$, $\mathbb{P}(A_{N,M}) \leqslant \frac{E}{M}$, en passant à la limite lorsque $N \to +\infty$, on obtient :

$$0 \leqslant \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}(A_{N,M}) \leqslant \frac{E}{M}.$$

Par théorème d'encadrement, pour $M \to +\infty$, on obtient donc $\boxed{\mathbb{P}(A) = 0.}$
Ainsi, le complémentaire de A vérifie $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1$. Or, par définition de A, pour tout $\omega \in \overline{A}$ $\sum Y_n$ converge. Par définition d'une propriété presque sûre, on en déduit que $\boxed{\sum Y_n \text{ converge presque sûrement.}}$

Partie II – Loi forte des grands nombres dans le cas $\mathcal{L}^4$

1. Si le résultat est vérifié lorsque $m = 0$, on s'y ramène en utilisant la suite de variables $\boxed{(X_n - m)_{n\geqslant 1}}$ qui sont encore indépendantes, de même loi, possèdant toujours un moment d'ordre 4 et centrées. On peut donc supposer que $\boxed{m = 0}$.
2. (a) On applique la formule du multinôme et on utilise la linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}((X_1 + \cdots + X_n)^4) = \sum_{i_1+\cdots+i_n=4} \frac{n!}{i_1!\cdots i_n!}\mathbb{E}(X_1^{i_1}\cdots X_n^{i_n})$$

Par ailleurs, les X_i étant mutuellement indépendantes, on a $\mathbb{E}(X_1^{i_1}\cdots X_n^{i_n}) = \mathbb{E}(X_1^{i_1})\cdots\mathbb{E}(X_n^{i_n})$. On a donc bien :

$$\mathbb{E}((X_1 + \cdots + X_n)^4) = \sum_{i_1+\cdots+i_n=4} \frac{n!}{i_1!\cdots i_n!}\mathbb{E}(X_1^{i_1})\cdots\mathbb{E}(X_n^{i_n}).$$

(b) Les X_i suivant toutes la même loi, $\mathbb{E}(X_j^{i_j}) = m_{i_j}$, le moment d'ordre i_j. Un facteur $\mathbb{E}(X_1^{i_1})\cdots\mathbb{E}(X_n^{i_n})$ est donc égal à $m_{i_1}\cdots m_{i_n}$, où $m_0 = 1$, et $m_1 = 0$ (car les variables sont centrées).
Or, les n-uplets $(i_1, \ldots, i_n)$ d'entiers naturels tels que $i_1 + \cdots + i_n = 4$ se rangent en cinq catégories. On trouve, à permutation des coordonnées près (le nombre de permutations possibles donnant le nombre de termes de ce type dans la somme) :
- $(4, 0, \ldots, 0)$, ce qui en fait n de ce type ;
- $(3, 1, 0, \ldots, 0)$, ce qui en fait $n(n-1)$;
- $(2, 2, 0, \ldots, 0)$, ce qui en fait $\frac{n(n-1)}{2}$;
- $(2, 1, 1, 0, \ldots, 0)$, ce qui en fait $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$;
- $(1, 1, 1, 1, 0, \ldots, 0)$, ce qui en fait $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$.

Par ailleurs, comme $m_1 = 0$, les termes correspondant à une séquence d'indices contenant un 1 sont nuls. Il ne reste dans la somme que des termes indexés par des suites du premier et du troisième type. et comme $X_1, \ldots, X_n$ sont toutes centrées par hypothèse, si l'un des exposants vaut 1, l'espérance précédente est nulle. Ainsi, puisque les moments m_i sont ceux de X_1,

$$\mathbb{E}\big((X_1 + \cdots + X_n)^4\big) = n\mathbb{E}(X_1^4) + 6 \cdot \frac{n(n-1)}{2}\mathbb{E}(X_1^2)^2,$$

soit :

$$\boxed{\mathbb{E}\big((X_1 + \cdots + X_n)^4\big) = n\mathbb{E}(X_1^4) + 3n(n-1)\mathbb{E}(X_1^2)^2}.$$

3. Par linéarité de l'espérance et la question précédente, il vient :

$$\mathbb{E}(Y_n^4) = \frac{1}{n^4}\mathbb{E}\big((X_1 + \cdots + X_n)^4\big) = \frac{\mathbb{E}(X_1^4)}{n^3} + \frac{3(n-1)\mathbb{E}(X_1^2)^2}{n^3} = O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

ce qui, par comparaison de séries à termes positifs, montre que $\boxed{\text{la série } \sum \mathbb{E}(Y_n^4) \text{ converge,}}$ la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ étant une série de Riemann convergente (de paramètre $2 > 1$).
4. La première partie assure alors que, presque sûrement, la série $\sum Y_n^4$ converge. En particulier, presque sûrement, $Y_n^4 \to 0$, donc $Y_n \to 0$. Cela démontre très précisément la $\boxed{\text{loi forte des grands nombres.}}$

Partie III – Inégalité de Kolmogorov

1. (a) L'événement A est réalisé si et seulement s'il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $|S_k| \geqslant \alpha$. Soit $\omega \in A$. En considérant k minimal vérifiant $|S_k(\omega)| \geqslant \alpha$, on a alors $\omega \in A_k$. Ainsi, $A \subset A_1 \cup \cdots \cup A_n$. La réciproque est évidente. Ainsi

$$\boxed{A = A_1 \cup \cdots \cup A_n}.$$

(b) Par définition, les A_k sont deux à deux incompatibles, donc :

$$\mathbb{1}_{A_1} + \cdots + \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_A.$$

Puisque $\mathbb{1}_A$ est à valeurs dans $\{0, 1\}$, on en déduit

$$\boxed{\mathbb{1}_{A_1} + \cdots + \mathbb{1}_{A_n} \leqslant 1}.$$

2. (a) Comme $X_1, \ldots, X_n$ sont centrées, par linéarité, on obtient :

$$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(X_1) + \cdots + \mathbb{E}(X_n) = 0.$$

Ainsi $\mathbb{V}(S_n) = \mathbb{E}(S_n^2)$. Par ce qui précède, on a $S_n^2 \geqslant S_n^2(\mathbb{1}_{A_1} + \cdots + \mathbb{1}_{A_n})$, ce qui, par linéarité et croissance de l'espérance, donne :

$$\boxed{\mathbb{V}(S_n) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(S_n^2 \mathbb{1}_{A_k}).}.$$

(b) On a, pour $k \in [\![1, n]\!]$,

$$S_n^2 = (S_k + (S_n - S_k))^2 = S_k^2 + 2S_k(S_n - S_k) + (S_n - S_k)^2 \geqslant S_k^2 + 2S_k(S_n - S_k).$$

Ainsi, par croissance et linéarité de l'espérance et la question précédente, on obtient :

$$\boxed{\mathbb{V}(S_n) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(S_k^2 \mathbb{1}_{A_k}) + 2 \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big(S_k \mathbb{1}_{A_k}(S_n - S_k)\big).}$$

Fixons $k \in [\![1, n]\!]$. La variable $S_k \mathbb{1}_{A_k}$ est une fonction de $X_1, \ldots, X_k$ uniquement, tandis que $S_n - S_k$ est une fonction de $X_{k+1}, \ldots, X_n$. Les variables X_i étant indépendantes, on en déduit que

$$\mathbb{E}\big(S_k \mathbb{1}_{A_k}(S_n - S_k)\big) = \mathbb{E}(S_k \mathbb{1}_{A_k})\mathbb{E}(S_n - S_k) = 0,$$

puisque $S_n - S_k$ est centrée comme somme de variables centrées. On obtient bien :

$$\boxed{\mathbb{V}(S_n) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(S_k^2 \mathbb{1}_{A_k})}.$$

3. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a, par définition de A_k, $S_k^2 \mathbb{1}_{A_k} \geqslant \alpha^2 \mathbb{1}_{A_k}$ (car lorsque A_k est réalisé, $S_k^2 \leqslant \alpha^2$). Par croissance de l'espérance, il vient :

$$\mathbb{V}(S_n) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\alpha^2 \mathbb{1}_{A_k}) = \alpha^2 \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_1} + \cdots + \mathbb{1}_{A_n}) = \alpha^2 \mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \alpha^2 \mathbb{P}(A),$$

ce qui donne bien :

$$\boxed{\mathbb{P}(A) \leqslant \frac{\mathbb{V}(S_n)}{\alpha^2}.}$$

Partie IV – Un résultat de convergence

1. Une suite réelle $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est de Cauchy si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^*,\ \forall n, p \geqslant N,\ |u_n - u_p| \leqslant \varepsilon,$$

ce qui équivaut à :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ \exists N \in \mathbb{N}^*,\ \forall n, p \geqslant N,\ |u_n - u_p| \leqslant \frac{1}{2^i}.$$

En effet, dans le sens direct, c'est évident, dans le sens réciproque, cela provient du fait que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $i \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{2^i} \leqslant \varepsilon$.

Ainsi, la suite (S_n) est de Cauchy si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$, $C_{i,N}$ est réalisé, ou encore, si pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\bigcup_{N \geqslant 1} C_{i,N}$ est réalisé, c'est à dire $\bigcap_{i \geqslant 1} \bigcup_{N \geqslant 1} C_{i,N}$ est réalisé. Ainsi,

$$\boxed{C = \bigcap_{i \geqslant 1} \bigcup_{N \geqslant 1} C_{i,N}}.$$

2. Si C est de probabilité 1, $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy presque sûrement, donc convergente presque sûrement, donc la série $\sum X_n$ converge presque sûrement. Il suffit donc de montrer que $\mathbb{P}(C) = 1$. Or, pour N fixé, la suite $(C_{i,N})_{i \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante, donc l'union sur N également. Ainsi, d'après le théorème de limite monotone,

$$\mathbb{P}(C) = \lim_{i \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{N \geqslant 1} C_{i,N}\right) = \lim_{i \to +\infty} \mathbb{P}(C_i)$$

Il suffit donc de montrer que $\lim_{i \to +\infty} \mathbb{P}(C_i) = 1$, et pour cela, $\boxed{\text{il suffit de montrer que pour tout } i \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(C_i) = 1.}$

C'est d'ailleurs aussi une condition nécessaire, puisque $(\mathbb{P}(C_i))_{i \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et doit converger vers 1.

3. Par définition de la borne supérieure, si B_N est réalisé, il existe $n \geqslant N$ tel que $|S_n - S_N| > 2^{-(i+1)}$ et alors $B_{N,n}$ est réalisé. Ceci traduit exactement l'inclusion demandée :

$$\boxed{B_N \subset \bigcup_{M \geqslant N} B_{N,M}.}$$

4. On en déduit que :

$$\mathbb{P}(B_N) \leqslant \mathbb{P}\Big(\bigcup_{M \geqslant N} B_{N,M}\Big).$$

Or $(B_{N,M})_{M \geqslant N}$ est une suite croissante d'événements, de sorte que :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{M \geqslant N} B_{N,M}\Big) = \lim_{M \to +\infty} \mathbb{P}(B_{N,M}).$$

La partie précédente montre que, pour tout $M \geqslant N$ fixé, on a :

$$\mathbb{P}(B_{N,M}) \leqslant \lambda \mathbb{V}(S_M - S_N) \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{1}{(2^{-(i+1)})^2}.$$

Par indépendance de $(X_n)_{n \geqslant 1}$, il vient :

$$\mathbb{V}(S_M - S_N) = \mathbb{V}(X_M + \cdots + X_{N+1}) = \mathbb{V}(X_M) + \cdots + \mathbb{V}(X_{N+1}).$$

Comme la série $\sum \mathbb{V}(X_n)$ converge, on en déduit que :

$$0 \leqslant \mathbb{P}(B_N) \leqslant \lim_{M \to +\infty} \mathbb{P}(B_{N,M}) \leqslant \lambda \sum_{k=N+1}^{+\infty} \mathbb{V}(X_k)$$

et ainsi, par théorème d'encadrement, le reste de la série convergente $\sum \mathbb{V}(X_n)$ tendant vers 0, on obtient $\boxed{\mathbb{P}(B_N) \to 0}$.

5. Soit $N \geqslant 1$, on a :

$$\overline{B_N} = [\sup_{n \geqslant N} |S_n - S_N| \leqslant \frac{1}{2^{i+1}}] = \bigcap_{n \geqslant N} [|S_n - S_N| \leqslant \frac{1}{2^{i+1}}].$$

Or, si $\overline{B_N}$ est réalisé, alors pour tout $n, p \geqslant N$, les événements $|S_n - S_N| \leqslant \frac{1}{2^{i+1}}$ et $|S_n - S_N| \leqslant \frac{1}{2^{i+1}}$ sont réalisés, donc, par inégalité triangulaire, $|S_n - S_p| \leqslant \frac{1}{2^i}$, ce qui amène la réalisation de $C_{i,n}$.

Ainsi, $\overline{B_N} \subset C_{i,N}$, donc $\mathbb{P}(\overline{B_N}) \leqslant \mathbb{P}(C_{i,N}) \leqslant 1$. Par théorème d'encadrement, et par passage au complémentaire dans le résultat de la question précédente, il vient $\boxed{\lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}(C_{i,N}) = 1}$.

6. La suite $(C_{i,N})_{N\geqslant 1}$ est une suite croissante d'événements, de sorte que :

$$\mathbb{P}(C_i) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}(C_{i,N}) = 1.$$

Ceci étant valable pour tout $i \geqslant 1$, on conclut par la qeustion 2 : $\boxed{\text{la série } \sum X_n \text{ converge presque sûrement.}}$

Partie V – Application aux séries harmoniques de signe aléatoire

1. (a) Il s'agit d'une tranformation d'Abel. Pour tout $k \geqslant 1$, on a $\varepsilon_k = T_k - T_{k-1}$, de sorte que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{T_k - T_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{T_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{T_k}{k+1},$$

et sachant que $T_0 = 0$, on conclut :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{T_k}{k(k+1)} + \frac{T_n}{n}}$$

(b) On applique les résultats de la deuxième partie à la suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$. Ces variables sont bien indépendantes, possèdent la même loi, et possèdent un moment à tout ordre puisqu'elles sont à valeurs dans un ensemble fini, donc *a fortiori* un moment d'ordre 4. On en déduit qu'il existe un événement A de probabilité 1 tel que pour tout $\omega \in A$, on ait :

$$\frac{T_n(\omega)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} m,$$

avec $m = \mathbb{E}(X_1) = (-1)(1-p) + p = 2p - 1 \neq 0$ puisque $p \neq \frac{1}{2}$. On en déduit que, $T_n(\omega) \underset{+\infty}{\sim} mn$, d'où :

$$\frac{T_n(\omega)}{n(n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{m}{n}.$$

Le terme de droite étant de signe constant, celui de gauche aussi, à partir d'un certain rang, et d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum \frac{T_k(\omega)}{k(k+1)}$ diverge, alors que $\left(\frac{T_n(\omega)}{n}\right)$ admet une limite finie m. Ainsi, pour tout $\omega \in A$, $\sum \frac{\varepsilon_n(\omega)}{n}$ diverge.

On a montré que $\boxed{\sum \frac{\varepsilon_n(\omega)}{n} \text{ diverge presque sûrement.}}$

2. Lorsque $p = \frac{1}{2}$, pour tout $n \geqslant 1$, la variable ε_n est centrée réduite (calcul direct facile, ou remarquer que $\varepsilon_n = 2X - 1$, où X est une variable de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$).
On pose alors $X_n = \frac{\varepsilon_n}{n}$. On obtient une suite de variables indépendantes, et centrées, admettant un moment d'ordre 2 (car finies), et telles que

$$\mathbb{V}(X_n) = \frac{1}{n^2}\mathbb{V}(\varepsilon_n) = \frac{1}{n^2}.$$

Ainsi, $\sum \mathbb{V}(X_n)$ est convergente. On est en situation d'appliquer les résultats de la partie IV, nous assurant la convergence presque sûre de $\sum X_n$.

Ainsi, $\boxed{\sum \frac{\varepsilon_n}{n} \text{ converge presque sûrement.}}$