Lycée Louis-Le-Grand, Paris
MP2I – Mathématiques
A. Troesch

Pour le 12/09/2023

DM n° 1 : Révisions, récurrences

Problème 1 – (D'après un vieux sujet de Bac des années 80)

Partie I –

L'objet de cette partie est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 1.$$

1. Encadrement de $\ln(1+x)$.
   (a) Prouver que, pour tout nombre réel $t \geqslant 0$,
   $$1 - t \leqslant \frac{1}{1+t} \leqslant 1.$$
   (b) En déduire que pour tout $x \geqslant 0$,
   $$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$$
2. Étude d'une fonction auxiliaire.
   Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par
   $$g(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x}.$$
   (a) Après avoir justifié la dérivabilité de g, justifier que pour tout $x \geqslant 0$,
   $$0 \leqslant g'(x) \leqslant \frac{x^2}{4}.$$
   (b) Quel encadrement de $g(x)$ en déduit-on, pour $x \geqslant 0$?
3. En s'aidant de la fonction g, déterminer les variations de f.
4. Étude de f aux bornes de l'intervalle de définition.
   (a) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   (b) À l'aide d'un encadrement obtenu précédemment, prouver que
   $$\lim_{x \to 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$
   (c) En déduire que f est dérivable en 0, et préciser $f'(0)$. Déterminer une équation de la tangente en 0 à la courbe de f.
   (d) Donner l'allure de la courbe de f.

Partie II –

L'objet de cette partie est d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels définies par les relations :

$$u_0 = c \qquad \textit{et} \qquad u_{n+1} = \ln(1+u_n) \text{ si } n \geqslant 0,$$

où c est un nombre réel strictement positif donné.

1. Justifier que (u_n) converge, vers une limite ℓ à préciser.

On pose désormais $c = 1$. Le but de la fin du problème est de déterminer la limite de (nu_n). Pour tout $n \geqslant 0$, on pose $v_n = \frac{1}{u_n}$.

2. À l'aide de résultats de la partie I, déterminer la limite de $v_{n+1} - v_n$.

3. Prouver que, pour tout x de $]0,1]$,
$$\frac{1}{2} - \frac{3}{16}x \leqslant \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{2}.$$
On pourra à cet effet réutiliser la fonction g.
4. En déduire que pour tout $n \geqslant 0$,
$$\frac{1}{2} - \frac{3}{16}u_n \leqslant v_{n+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2},$$
puis que
$$\frac{2}{n+2} \leqslant u_n \leqslant \frac{4}{n+4}.$$
5. En revenant à l'encadrement de $v_{n+1} - v_n$ de la question précédente, en déduire la limite de nu_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Problème 2 – Le problème de Josèphe (ou Josephus)

Ce problème explique comment Flavius Josephus eut la vie sauve. La légende (racontée par Josephus lui-même) dit que Flavius Josephus se retrouva piégé par les romains dans une cave, avec 40 autres rebelles. Ne voulant pas se rendre aux romains, les rebelles décidèrent un suicide collectif, selon les modalités suivantes : le groupe se dispose en cercle. On choisit une origine, et on numérote les personnes de 1 *à* 41 *dans l'ordre. On parcourt ensuite le cercle de 3 en 3 (à partir de 0 : la première personne considérée est donc la troisième), qui est mise à mort par la personne suivante dans cette énumération. Les personnes mortes sont retirées du cercle : ainsi le parcours 3 par 3 s'effectue sur les survivants temporaires. La dernière personne survit ou se suicide par ses propres moyens.*

Josephus et un de ses amis n'étaient pas d'accord avec ce suicide collectif. La question est alors : en quelles positions sur le cercle se placer pour que Josephus et son ami soient les 2 derniers survivants (et puissent alors interrompre le procédé lorsqu'il ne reste plus qu'eux) ? La position du dernier survivant au moins fut trouvée, puisque Josephus survécut à cette histoire.

Ce problème, généralisé à un nombre quelconque de participants reste mathématiquement sans réponse simple à exprimer. Nous nous contenterons d'une étude informatique, et nous limiterons l'étude mathématique à une situation plus simple dans laquelle une expression simple peut être obtenue pour le dernier survivant : il s'agit du cas d'un parcours de 2 en 2.

Partie I – Traitement informatique

On rappelle qu'en Python, un objet `L` *de type* `list` *est constitué d'un nnombre fini d'attributs numérotés à partir de* 0. *Il d'agit donc d'un objet représenté linéairement. Par exemple* `L = [1,2,3]` *est une liste à 3 attributs, l'élément d'attribut* 0 *étant l'entier* 1.
On rappelle qu'on accède à l'élément d'indice i par `L[i]`. *De plus, l'instruction* `del L[i]` *permet de supprimer de la liste l'attribut d'indice i. Ainsi, sur l'exemple précédent, après l'instruction* `del L[1]`, *la liste* `L` *est* `[1,3]`.
L'instruction `len(L)` *retourne la longueur de la liste (c'est-à-dire le nombre d'attributs). Par exemple, la longueur de* `[1,2,3]` *est 3.*
Enfin, on pourra utiliser l'opération `a % b`, *renvoyant le reste de la division euclidienne de l'entier a par l'entier b.*

1. (a) Écrire en Python une fonction prenant en paramètre deux entiers n et k, et retournant le rang du dernier survivant lorsque le groupe est initialement constitué de n personnes, et qu'on le parcourt circulairement de k en k (en commençant donc par la personne k). On prendra garde au décalage entre la numérotation des personnes et les indices d'une liste Python.
   Application numérique : cas du problème de Josephus.
   Application numérique : idem mais en éliminant de 2 en 2.
2. Modifier la fonction précédente de sorte qu'elle prenne un entier p en paramètre, égal au nombre de survivants voulus, et retournant sous forme d'une liste, les rangs des p derniers survivants.
   Application numérique : cas du problème de Josephus, pour deux survivants
   Application numérique : On dispose de 50 gentils, et 50 méchants. Comment disposer les gentils de sorte que dans un processus similaire à celui décrit ci-dessus, en éliminant les personnes de 7 en 7, les 50 premières personnes éliminées soient les méchants.

Partie II – Décomposition en base 2

Soit $(c_0, \dots, c_k) \in \{0,1\}^{k+1}$ tel que $c_k \neq 0$. On note
$$\overline{c_k c_{k-1} \dots c_1 c_0}^2 = \sum_{i=0}^{k} c_i 2^i.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que $(c_0, \dots, c_k)$ est la décomposition de n en base 2 si

$$n = \overline{c_k c_{k-1} \dots c_1 c_0}^2.$$

Les c_i sont appelés chiffres de la décomposition de n en base 2.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $(c_0, \dots, c_k)$ est une décomposition de n en base 2, alors c_0 est le reste de la division euclidienne de n par 2, et $(c_1, \dots, c_k)$ est une décomposition en base 2 du quotient de la division de n par 2.
2. En déduire que tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ admet une et une seule décomposition en base 2.

Partie III – Une relation de récurrence pour le cas $k = 2$

On suppose désormais que l'on élimine les personnes de 2 en 2. Pour un groupe initialement constitué de n personnes, on note $J(n)$ le rang du dernier survivant.

1. Justifier que pour tout $n \geqslant 1$, $J(n)$ est impair. Que vaut $J(1)$?
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J(2n) = 2J(n) - 1$ et $J(2n+1) = 2J(n) + 1$.
3. En déduire $J(2^\alpha - 1)$ et $J(2^\alpha)$, pour tout $\alpha > 0$.
4. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique entier α et un unique entier $\ell \in [\![0, 2^\alpha - 1]\!]$ tels que $n = 2^\alpha + \ell$.
5. Soit $n = 2^\alpha + \ell$, avec $\ell \in [\![0, 2^\alpha - 1]\!]$. Montrer que $J(n) = 2\ell + 1$.
6. Décrire la décomposition en base 2 de $J(n)$ en fonction de celle de n.
7. Application numérique : problème de Josephus avec une élimination de 2 en 2.

Partie IV – Des récurrences plus générales

Nous étudions maintenant la récurrence plus généralement donnée par :

$$\begin{cases} f(1) = \gamma \\ f(2n) = 2f(n) + \beta_0 & \textit{pour } n \geqslant 1 \\ f(2n+1) = 2f(n) + \beta_1 & \textit{pour } n \geqslant 1 \end{cases},$$

où γ, β_0 et β_1 sont des entiers relatifs. Nous donnons ci-dessous deux méthodes pour expliciter f, puis nous généralisons le résultat obtenu dans la partie précédente sur la décomposition en base 2.

1. **Première méthode d'explicitation**
   Cette première méthode consiste à fixer d'une certain manière les coefficients γ, β_0 et β_1, à expliciter la solution dans ce cas, et de retrouver le cas général en combinant des solutions particulières obtenues. Cette méthode est une méthode issue de l'algèbre linéaire, et consistant à considérer l'espace vectoriel des suites vérifiant une telle relation de récurrence : on en cherche alors une base, c'est-à-dire un nombre fini de solutions particulières à partir desquelles toute solution peut s'exprimer de façon unique, en formant une combinaison linéaire.
   (a) En s'inspirant de la partie III, ou en essayant de comprendre f sur la décomposition en base 2 de n, expliciter les 3 suites $(A(n))$, $(B(n))$ et $(C(n))$ vérifiant les relations ci-dessus, et associées aux coefficients $(\gamma, \beta_0, \beta_1)$ respectivement égaux à $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$.
   On les explicitera en fonction de n et de α, l'exposant maximal dans la décomposition en base 2 de n.
   (b) Montrer que la solution générale est donnée, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par :
   $$f(n) = \gamma A(n) + \beta_0 B(n) + \beta_1 C(n).$$
   (c) Retrouver le résultat de la question III-5.
2. **Deuxième méthode d'explicitation**
   On montre dans un premier temps qu'il existe une décomposition sous la forme obtenue ci-dessus, A, B et C étant indépendant des paramètres γ, β_0 et β_1. On trouve ensuite les expressions de A, B et B en retournant le problème : on part de fonctions f en particulier, pour se ramener à un système à résoudre.
   (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $A(n)$, $B(n)$ et $C(n)$ indépendants de γ, β_0 et β_1, tels que
   $$f(n) = \gamma A(n) + \beta_0 B(n) + \beta_1 C(n).$$
   (b) Soit f_1 et f_2 les fonctions définies pour $n \in \mathbb{N}$ par $f_1(n) = 1$ et $f_2(n) = n$. Justifier que f_1 et f_2 vérifient la relation de récurrence étudiée dans cette partie, pour des choix à déterminer des paramètres.
   (c) En utilisant aussi la fonction J, en déduire un système d'équations satisfait par $A(n)$, $B(n)$ et $C(n)$, et retrouver les expressions de la question précédente.

3. **Description sur la représentation binaire**

On note $\overline{b_m \cdots b_0}^2$ la représentation binaire de n. On élargit cette notation de la façon suivante :

$$\overline{c_m \ldots c_0}^2 = \sum_{k=0}^{m} c_k 2^k,$$

pour tout $(c_m, \ldots, c_0) \in \mathbb{N}^*$, y compris si les c_i ne sont pas égaux à 0 ou 1.

Montrer que pour $f(\overline{1 b_{\alpha-1} \ldots b_0}^2) = \overline{\gamma \beta_{b_{\alpha-1}} \ldots \beta_{b_1} \beta_{b_0}}^2$.