Lycée Louis-Le-Grand, Paris
MP2I – Mathématiques
A. Troesch

Pour le 13/10/2023

DM n° 4 : Relations

Suggestion de travail supplémentaire (à ne pas me rendre) : Si vous ne l'avez pas encore fait, vous pouvez regarder le problème 2 de la sélection disponible sur mon site web (équivalence entre axiome du choix et lemme de Zorn)

Problème 1 – sup-irréductibles, familles sup-génératrices, et théorème de représentation de Birkhoff

Dans tout le problème, les ensembles considérés sont toujours **finis**, même si cela n'est pas reprécisé à chaque fois.

Le but du problème est de trouver des parties G d'un ensemble ordonné E engendrant cet espace E au sens des bornes supérieures (dans le sens ou tout élément de E est borne supérieure d'une partie de G). On montre en particulier le rôle important des éléments sup-irréductibles dans cette étude, c'est-à-dire les éléments qui ne sont borne supérieure d'aucune partie dont ils ne sont pas éléments (partie I).
Nous utilisons ces résultats pour montrer certains théorèmes de représentations (consistant à se ramener à des ensembles ordonnés de référence) : un premier résultat élémentaire (partie II) affirme que tout ensemble est « isomorphe » à un sous-ensemble de l'ensemble de ses parties (c'est-à-dire qu'il peut lui être identifié).
Nous montrons ensuite que dans le cas où l'ordre sur E vérifie des conditions particulières (notion de treillis distributif étudié en partie III), E est isomorphe à l'ensemble des sections commençantes du sous-ensemble de ses sup-irréductibles, ces notions étant introduites et étudiées dans les parties IV et V. Ce théorème est dû à Birkhoff (partie VI). On en déduit en particulier que lorsque E est un treillis, l'ensemble ordonné de ses sup-irréductibles est isomorphe à l'ensemble ordonné de ses inf-irréductibles.

Si $x_1, \dots, x_n$ sont des éléments de E, on écrit plus simplement $\sup(x_1, \dots, x_n)$ au lieu de $\sup(\{x_1, \dots, x_n\})$.

Questions préliminaires

Soit E un ensemble ordonné et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles de E admettant tous une borne supérieure.

1. Montrer que $\bigcup_{i\in I} A_i$ et $\{\sup(A_i), i \in I\}$ ont mêmes majorants.
2. En déduire que si l'une des bornes supérieures de $\bigcup_{i\in I} A_i$ ou de $\{\sup(A_i), i \in I\}$ existe, l'autre aussi, et dans ce cas
$$\sup\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sup\{\sup(A_i), i \in I\}.$$
Cette dernière borne supérieure sera notée plus simplement $\sup_{i\in I} \sup(A_i)$.
3. On suppose que pour tous x, y de E, $\sup(x, y)$ existe. Montrer que si x, y et z sont dans E, la borne supérieure ci-dessous existe et :
$$\sup(x, y, z) = \sup(x, \sup(y, z)) = \sup(\sup(x, y), z).$$

On admettra sans preuve les propriétés similaires pour les bornes inférieures.

Partie I – Éléments sup-irréductibles

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné fini (on le désignera simplement par E dans la suite). Un élément x est dit sup-irréductible *s'il n'est la borne supérieure d'aucun sous-ensemble X de E ne le contenant pas, donc si*
$$\forall X \in \mathcal{P}(E), \quad (x = \sup(X) \Longrightarrow x \in X).$$
Pour $x \in E$, on note $E^- x$ l'ensemble des éléments de E couverts par x, c'est-à-dire les éléments $y \in E$ tels que $y < x$ et tels qu'il n'existe pas $z \in E$ vérifiant $y < z < x$.

1. Montrer que les éléments de $E^{-}x$ sont deux à deux non comparables (i.e. il s'agit d'une cochaîne).
2. Soit $x \in E$ un élément sup-irréductible tel que $E^{-}x \neq \varnothing$, et que $E^{-}x$ admette une borne supérieure s.
   (a) Montrer que $x > s$.
   (b) En déduire que $|E^{-}x| = 1$.
3. Montrer que si $|E^{-}x| = 1$ et si y est l'unique élément de $E^{-}x$, pour tout z tel que $z < x$, on a $z \leqslant y$.
4. On suppose que $|E^{-}x| \geqslant 2$ et que $E^{-}x$ n'admet pas de borne supérieure.
   (a) Montrer que x est un élément minimal de l'ensemble des majorants de $E^{-}x$.
   (b) Montrer qu'il existe un majorant y de $E^{-}x$ non comparable avec x.
5. Montrer que $x \in E$ est sup-irréductible si et seulement si l'une des trois conditions exclusives suivantes est satisfaite :
   (i) x est un élément minimal de E, mais non minimum. Que dire de $E^{-}x$ dans ce cas ?
   (ii) $|E^{-}x| = 1$
   (iii) $|E^{-}x| \geqslant 2$ et $E^{-}x$ n'admet pas de borne supérieure.

On note désormais $S(E)$ l'ensemble des éléments sup-irréductibles de E.
Une partie G de E est dite sup-génératrice si tout élément de E est borne supérieure d'un sous-ensemble de G, donc si pour tout $x \in E$, il existe $X \subset G$ tel que

$$x = \sup(X).$$

Pour $x \in E$, on définit la hauteur $h(x)$ de E comme étant la longueur maximale d'une chaîne $x_1 < x_2 < \cdots < x_k = x$.

6. (a) Soit $x \in E$. Montrer que si x n'est pas sup-irréductible, il existe $X \subset E$ tel que $\sup(X) = x$ et tel que pour tout $y \in X$, $h(y) < h(x)$.
   (b) Montrer que l'ensemble $S(E)$ formé des éléments sup-irréductibles de E est une partie sup-génératrice de E.

Pour $x \in E$, on désigne par $S_x(E)$ l'ensemble des sup-irréductibles majorés par x :

$$S_x(E) = \{s \in S(E) \mid s \leqslant x\}.$$

7. Montrer que $\sup(S_x(E)) = x$
8. Soit G une partie sup-génératrice de E. Montrer que $S(E) \subset G$.
9. En déduire que G est une partie sup-génératrice de E si et seulement si $S(E) \subset G$.

Ainsi, l'ensemble $S(E)$ des éléments sup-irréductibles est minimale parmi l'ensemble des familles sup-génératrices de E.

Partie II – Applications croissantes et codages

Soit $(E, \leqslant_E)$ et $(F, \leqslant_F)$ deux ensembles ordonnés. Quand il n'y a pas d'ambiguïté, on notera simplement $\leqslant$ aussi bien pour $\leqslant_E$ que pour $\leqslant_F$.
On dit qu'une application $f : E \to F$ est :

- *croissante si pour tout $(x, y) \in E^2$, $x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$;*
- *strictement croissante si pour tout $(x, y) \in E^2$, $x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$;*
- *un codage si pour tout $(x, y) \in E^2$, $x \leqslant y \Longleftrightarrow f(x) \leqslant f(y)$.*
- *un isomorphisme si c'est un codage bijectif.*

1. Montrer qu'une application strictement croissante est croissante.
2. Montrer que si f est croissante et injective, alors f est strictement croissante.
3. Une application strictement croissante est-elle nécessairement injective ?
4. Montrer que si f est un codage alors f est injective.
5. Montrer que si f est un codage, alors f est strictement croissante.
6. Que dire de la composée de deux codages ? de deux isomorphismes ?

7. Avec les notations de la partie I, montrer que $x \mapsto S_x(E)$ est un codage de E dans $\mathcal{P}(E)$.

Ainsi, tout ensemble ordonné peut être identifié à un sous-ensemble ordonné de l'ensemble de ses parties.

8. Montrer plus généralement que si G est une partie sup-génératrice de E, alors $x \mapsto G_x$ est un codage de E dans $\mathcal{P}(G)$, G_x désignant l'ensemble des éléments de G majorés par x.

Dans la suite du problème, on affine ce résultat en montrant que sous quelques hypothèses supplémentaires sur E (se résumant en disant que E est un treillis distributif), l'application $x \mapsto S_x$ se corestreint un isomorphisme entre le treillis E et le treillis des sections commençantes de $S(E)$, que nous définissons plus loin.

Partie III – Treillis distributif

Un treillis est un ensemble ordonné non vide $(T, \leqslant)$ dans lequel toute partie $X \subset T$ admet une borne supérieure et une borne inférieure.

1. Montrer qu'un treillis T possède un maximum et un minimum.
2. Montrer que T est un treillis si et seulement si T est non vide, et toute paire $\{x, y\} \subset T$ admet une borne supérieure et une borne inférieure.

Pour simplifier les notations, on note $x \vee y = \sup(x, y)$ et $x \wedge y = \inf(x, y)$. On dit qu'un treillis T est distributif si pour tout $(x, y, z) \in T^3$,

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

3. Soit T un treillis distributif. Montrer que pour tout élément s sup-irréductible de T, et tout $X \subset T$, $s \leqslant \sup X$ implique $s \leqslant x$ pour au moins un élément x de X.

   Indication : on pourra considérer $s \wedge (x_1 \vee \cdots \vee x_n)$ où les x_i sont les éléments de X.
4. Montrer que pour tout $(x, y) \in T^2$, $S_{x\vee y}(T) = S_x(T) \cup S_y(T)$.
5. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un exemple de treillis distributif de cardinal 2^n.

Partie IV – Le treillis des sections commençantes

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné (pas nécessairement un treillis). Une partie $C \subset E$ est dite commençante si pour tout $y \in C$ et tout $t \in E$ tel que $t \leqslant y$, on a $t \in C$. Soit pour tout $x \in E$, $E_x = \{y \in E \mid y \leqslant x\}$ l'ensemble des minorants de x.

1. Montrer que si $(C_i)_{i\in I}$ est une famille de parties commençantes, alors $\bigcup\limits_{i\in I} C_i$ et $\bigcap\limits_{i\in I} C_i$ sont des parties commençantes
2. Montrer que pour tout $x \in E$, E_x est une partie commençante.
3. Montrer que toute partie commençante C peut s'écrire sous la forme $C = \bigcup\limits_{x\in C} E_x$.
4. Soit $\mathcal{C}(E)$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ constitué des sections commençantes de E, qu'on munit de l'inclusion. Montrer que $\mathcal{C}(E)$ est un treillis distributif.
5. Montrer que $C \in \mathcal{C}(E)$ est un sup-irréductible de $\mathcal{C}(E)$ si et seulement s'il existe $x \in E$ tel que $C = E_x$.

   Indication : pour le sens direct, on pourra se servir de la partie I.
6. En déduire que tout ensemble ordonné E est isomorphe à l'ensemble ordonné des sup-irréductibles d'un treillis distributif (c'est-à-dire qu'il existe un isomorphisme entre les 2).

Partie V – Comparaison des sup- et des inf-irréductibles du treillis des sections commençantes

On définit la notion d'élément inf-irréductible de façon similaire à celle de sup-irréductible, par symétrie : un élément i est inf-irréductible si et seulement s'il n'est la borne inférieure d'aucun sous-ensemble de E ne le contenant pas. On admettra que toutes les propriétés obtenues pour les sup-irréductibles ont leur analogue pour les inf-irréductibles, qu'on pourra utiliser sans justification. On note $I(E)$ l'ensemble des éléments inf-irréductibles de E.

Soit E un ensemble ordonné, et $\mathcal{C}(E)$ le treillis de ses parties commençantes. On note, pour x dans E, $E^x = \{y \in E \mid y \geqslant x\}$, et $i(x) = E \backslash E^x$.

1. Montrer que $i(x)$ est un élément de $\mathcal{C}(E)$.
2. Montrer que $i(x)$ est un inf-irréductible de $\mathcal{C}(E)$.
3. Soit C une partie commençante de X.
   (a) Montrer que $C = \bigcap_{x \notin C} i(x)$.
   (b) En déduire que tout inf-irréductible de $\mathcal{C}(E)$ est de la forme $i(x)$.
4. Justifier l'existence d'un isomorphisme (c'est-à-dire un codage bijectif) entre l'ensemble $S(\mathcal{C}(E))$ des sup-irréductibles de $\mathcal{C}(E)$ et l'ensemble $I(\mathcal{C}(E))$ des inf-irréductibles de $\mathcal{C}(E)$.

Partie VI – Théorème de représentation de Birkhoff

Soit T un treillis distributif. L'ensemble $S(T)$ désigne toujours l'ensemble des éléments sup-irréductibles de T. On note conformément à la partie I, $S_x(T) = \{s \in S(T) \mid s \leqslant x\}$.
On définit $c : T \mapsto \mathcal{C}(S(T))$ l'application qui à x associe $S_x(T)$.

1. Montrer que c est bien définie, c'est-à-dire que $S_x(T)$ est une section commençante de $S(T)$.
2. Montrer que c est un isomorphisme d'ensembles ordonnés.

Ce résultat affirme donc que tout treillis distributif est isomorphe au treillis des parties commençantes du sous-ensemble de ses sup-irréductibles (théorème de représentation de Birkhoff)

3. Soit T un treillis distributif. Montrer que l'ensemble $S(T)$ de ses sup-irréductibles est isomorphe à l'ensemble $I(T)$ de ses inf-irréductibles.