Lycée Louis-Le-Grand, Paris
MP2I – Mathématiques
A. Troesch

Pour le 20/10/2023

DM n° 5 : Combinatoire

Suggestion de travail supplémentaire (à ne pas me rendre) : Le deuxième problème du DS2 de l'année dernière.

Problème 1 –

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel. Le but de ce problème est de répondre au problème des ménages de Lucas, qui se pose en ces termes :

> *On dispose d'une table circulaire de $2n$ places autour de laquelle on veut placer n couples de sorte que :*
> - *on ait alternance entre les hommes et les femmes*
> - *aucune femme ne soit assise à côté de son conjoint (et réciproquement bien sûr).*
>
> *Combien existe-t-il de façons de faire ?*

On appelle un placement *une répartition des convives autour de la table satisfaisant ces deux critères. On suppose que deux répartitions admissibles obtenues par rotation l'une de l'autre correspondent au même placement (autrement dit, on n'a pas de repère initial sur la table ronde, les places sont indiscernables, à leur ordre près).*
On note $\mu(n)$ le nombre de placements. Le but du problème est de calculer $\mu(n)$.

Partie I – Lemme de Kaplansky (cas linéaire)

Soit $\ell \in \mathbb{N}$, et $n \in \mathbb{N}$. Dans cette partie, on compte le nombre b_n de sous-ensembles de $[\![1,n]\!]$ dont les éléments sont séparés d'au moins ℓ autres éléments de $[\![1,n]\!]$. Autrement dit, si $i_1 < \cdots < i_k$ sont les éléments de E, rangés par ordre croissant, on doit avoir, pour tout $j \in [\![1,k-1]\!]$, $i_{j+1} - i_j > \ell$.
Pour $k \in \mathbb{N}$, on appelle $b_{n,k}$ le nombre de ces sous-ensembles dont le cardinal est k.

1. Montrer que $b_{n,k} = \binom{n-(k-1)\ell}{k}$.
2. Montrer par un raisonnement combinatoire que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite déterminée par :
$$\forall i \in [\![0,\ell]\!],\ b_i = i+1, \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant \ell+1,\ \ b_n = b_{n-1} + b_{n-\ell-1}.$$

Partie II – Lemme de Kaplansky (cas circulaire)

On considère maintenant n points répartis sur un cercle, numérotés de 1 à n dans le sens des aiguilles d'une montre. On recherche maintenant le nombre de façons de choisir un sous-ensemble E constitué de k de ces points de sorte que deux points quelconques de ce sous-ensemble soient séparés par au moins ℓ autres points (sur le cercle). Autrement dit, si $x_0, \dots, x_k$ sont les k points de E, rangés par ordre croissant, il faut avoir, pour tout $i \in [\![1,k-1]\!]$, $x_{i+1} - x_i > \ell$, mais il faut aussi avoir $x_1 + (n - x_k) > \ell$ (distance entre x_1 et x_k ***sur le cercle****).*
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $k \in [\![0,n]\!]$, et $\ell \in \mathbb{N}^*$, on note $A(n,k,\ell)$ l'ensemble des sous-ensembles de $[\![1,n]\!]$ vérifiant ces conditions. On note également
$$B(n,k,\ell) = \{(E,x) \text{ où } E \in A(n,k,\ell) \text{ et } x \in E\}$$

1. Montrer que $|B(n,k,\ell)| = n\binom{n-k\ell-1}{k-1}$.
2. En déduire que $|A(n,k,\ell)| = \dfrac{n}{n-k\ell}\binom{n-k\ell}{k}$.

Partie III – Le problème des ménages de Lucas

On suppose que $n > 1$. Dans un premier temps, on suppose que les places autour de la table sont numérotées dans le sens des aiguilles d'une montre (donc il y a un point de départ), et on décide d'attribuer les places impaires aux dames, les places paires aux messieurs.

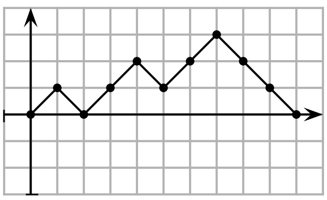
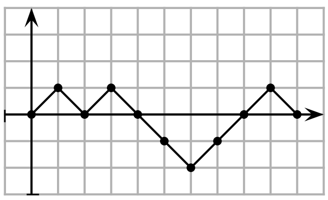
1. *On commence par placer les dames sur les places impaires, dans le sens des aiguilles d'une montre.* Combien y a-t-il de façons de faire ?

2. *Les dames étant placées, il faut repartir les messieurs. On numérote les dames de* 1 *à* n *dans le sens des aiguilles d'une montre ; on numérote également les messieurs en leur donnant le même numéro que leur épouse. Enfin, on renumérote les places vides, en décrétant que pour tout* $i \in [\![1,n]\!]$*, la place située à droite de la dame* i *est la place* i*. Ainsi, la place à gauche de la dame* i *est la place* $i+1$ *si* $i<n$*, et la place* 1 *si* $i=n$*.*
On définit la famille de sous-ensembles de $\mathfrak{S}_n$ *suivante :*
$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad E_{2i-1} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(i) = i\}$$
$$\forall i \in [\![1,n-1]\!], \quad E_{2i} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(i) = i+1\} \qquad \textit{et} \qquad E_{2n} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(n) = 1\}$$
Exprimer le nombre N de façons de placer les hommes en fonction des E_i, et en déduire :
$$N = n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)!.$$

3. Montrer que le nombre de placements possibles sur une table non numérotée est :
$$\mu(n) = (n-1)! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)! \qquad \text{(Formule de Touchard, 1953)}$$

Problème 2 – Chemins de Dyck.

L'objet de ce problème est de dénombrer de plusieurs façons les chemins de Dyck, constitués de pas montants ou descendants, en nombre égal, tels qu'à aucun moment du chemin, on n'ait effectué davantage de pas descendants que de pas montants. Ainsi, si on se déplace sur un axe orienté positivement vers le haut, le chemin débute et termine en l'origine, et reste entièrement dans la partie positive de l'axe.
Par commodité, on associe ce déplacement vers le haut ou le bas à un déplacement vers la droite, de sorte à mieux visualiser le chemin dans un plan, plutôt que sur une droite. Ainsi, les pas sont des pas diagonaux, progressant de 1 *en abscisse et de* 1 *ou* -1 *en ordonnée. Un chemin de Dyck de longueur* $2n$ *est alors un chemin dans le plan reliant* $(0,0)$ *à* $(2n,0)$ *par des pas diagonaux vers la droite, montant ou descendant, de sorte à ce que le chemin reste toujours au-dessus (au sens large) de l'axe des abscisses.*
Par exemple, la première figure ci-dessous est un chemin de Dyck, mais pas la deuxième.

Le but du problème est de dénombrer de plusieurs façons le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n$*. On note* D_n *l'ensemble des chemins de Dyck de longueur* $2n$*, et* d_n *son cardinal.*
Tous les chemins considérés dans cet énoncé partent de l'origine $(0,0)$**, et sont constitués de pas diagonaux vers la droite.**

Partie I – Dénombrement par principe de symétrie

Soit $n \in \mathbb{N}$.

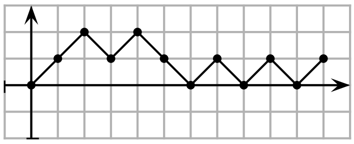
1. Montrer qu'il y a autant de chemins de Dyck de longueur $2n$ que de chemins de longueur $2n+1$ aboutissant en $(2n+1,1)$ et ne rencontrant jamais l'axe des abscisses, sauf au point initial.

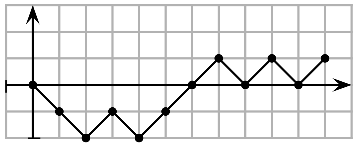
Soit :
- A_n *l'ensemble de tous les chemins aboutissant en* $(2n+1,1)$*,*
- B_n *l'ensemble des chemins de* A_n *qui ne rencontrent l'axe des abscisses qu'en l'origine,*

- B'_n *l'ensemble des chemins de* A_n *commençant par un pas montant, et rencontrant l'axe des abscisses ailleurs qu'en l'origine*
- B''_n *l'ensemble des chemins de* A_n *débutant par un pas descendant.*

2. Montrer que $\{B_n, B'_n, B''_n\}$ est une partition de A_n.

Soit $\Gamma \in B'_n$. *On construit* $\Phi(\Gamma)$ *le chemin obtenu en prenant le symétrique par rapport à l'axe des abscisses de la portion de* Γ *comprise entre* $(0,0)$ *et le premier point de retour sur l'axe des abscisses et en laissant le reste du chemin inchangé. Dans l'exemple ci-dessous, la seconde figure représente l'image de la première par* Φ.





3. Montrer que Φ est une bijection de B'_n dans B''_n.
4. Déterminer $|B''_n|$ et en déduire que
$$d_n = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n}.$$

Ce nombre est appelé nombre de Catalan *et sera par la suite noté* C_n.

Partie II – Dénombrement par le lemme cyclique

Soit Γ *et* Γ' *deux chemins, représentés par des suites* $(a_1, \dots, a_N)$ *et* $(b_1, \dots, b_N)$ *de* 1 *(pas montant) et de* 0 *(pas descendant). On dit que* Γ' *est un conjugué de* Γ *s'il existe* $p \in \{0, \dots, N-1\}$ *tel que* $\Gamma' = (a_{p+1}, \dots, a_N, a_1, \dots, a_p)$. *On remarquera que quitte à prolonger la suite des pas par périodicité, ou à voir les indices dans* $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, *ceci est équivalent à considérer* $p \in \mathbb{Z}$

1. Montrer que la relation « être conjugué » est une relation d'équivalence. Une classe d'équivalence pour cette relation est appelée classe de conjugaison.
2. Trouver et représenter graphiquement tous les conjugués de $(1,1,0,0,0)$ ainsi que ceux de $(0,1,1,0,1,1)$.
3. Soit Γ un chemin de longueur N. On dit que Γ est srtictement périodique si Γ peut être découpée en un nombre $\ell > 1$ de séquences toutes égales. Ainsi, Γ est constitué d'un nombre strictement supérieur à 1 de périodes entières. On remarquera que cela impose que la longueur de la période divise N.

   Montrer que si Γ n'est pas strictement périodique, alors il admet exactement N conjugués 2 à 2 distincts.
4. Soit Γ un chemin de Dyck de longueur $2n$. On lui associe un chemin $\overline{\Gamma}$ en lui rajoutant un dernier pas descendant. Par exemple, si $\Gamma = (1,0,1,0)$, alors $\overline{\Gamma} = (1,0,1,0,0)$.

   Déterminer en fonction de la longueur $2n$ de Γ le cardinal de la classe de conjugaison de $\overline{\Gamma}$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit Γ' un chemin quelconque de $(0,0)$ à $(2n+1,-1)$.

   Montrer qu'il existe un et un seul chemin de Dyck Γ de longueur $2n$ tel que $\overline{\Gamma}$ soit dans la classe de conjugaison de Γ'.
6. En déduire d_n le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n$.

Partie III – Bijection de Rémy

1. Montrer que les nombres de Catalan C_n vérifient la relation de récurrence :
$$C_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (n+1)C_n = 2(2n-1)C_{n-1}$$
   et que réciproquement cette relation détermine C_n.

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, D'_n l'ensemble des chemins de longueur $2n+1$ aboutissant en $(2n+1,-1)$ et dont les $2n$ premiers pas forment un chemin de Dyck. Soit S_n l'ensemble des chemins de D'_n, munis d'un pas marqué (i.e. un couple (Γ, i), où Γ est dans D'_n, et $i \in [\![1, 2n+1]\!]$ est l'indice d'un pas que l'on distingue des autres). On note de même F_n l'ensemble des chemins de D'_n avec un pas descendant marqué (i.e. l'indice i ci-dessus doit correspondre à l'indice d'un pas descendant)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On construit une application Ψ de $S_{n-1} \times \{0,1\} \to F_n$ de la manière suivante : étant donné Γ un élément de S_n de pas marqué p, et $\varepsilon \in \{0,1\}$:

- *si $\varepsilon = 0$, on remplace dans le chemin Γ, le pas p par une séquence $1\underline{0}p$ le pas souligné étant le pas descendant marqué.*
- *si $\varepsilon = 1$, on repère la séquence s la plus longue commençant au pas p (inclus) et ne descendant pas en-dessous de l'ordonnée initiale (juste avant d'effectuer le pas p). On remarquera que :*
  - *cette séquence s est alors immédiatement suivie d'un pas descendant 0. C'est ce pas descendant qu'on marque.*
  - *cette séquence s est vide si (et seulement si) le pas p est un pas descendant.*

  On remplace alors la séquence s dans le mot Γ par $1s0$ (autrement dit on « surélève » la séquence s). Ainsi, la séquence $s0$ est remplacée par $1s0\underline{0}$.

2. Montrer que Ψ est une bijection.
3. En déduire encore une fois que $d_n = C_n$.

Question subsidiaire hors-barême

Établir une bijection entre l'ensemble des chemins de Dyck et l'ensemble des arbres binaires complets (chaque noeud a exactement 2 fils). À quoi correspond la bijection Ψ ci-dessus sur les arbres ? (bijection de Rémy)