

DM n° 6 : Réels

Suggestion de travail supplémentaire (à ne pas me rendre) : Le premier problème du DS2 de l'année dernière, et le problème 3 de la sélection.

Devoirs de vacances

Voici, par ordre de priorité une suggestion d'organisation de votre travail de vacances. Certains arriveront peut-être à faire tout ce qui est suggéré, certains auront peut-être besoin de plus de temps pour reprendre les points essentiels. C'est à vous de moduler selon votre progression.

- Reprendre entièrement votre cours, c'est le moment d'approfondir les points qui sont passés un peu vite. Si vous ne le faites pas maintenant, ce sera beaucoup plus compliqué plus tard, les incertitudes sur le cours ne doivent pas s'accumuler. Faites des fiches si nécessaire. Aidez-vous des programmes de colle pour repérer les points les plus importants. Les résultats doivent être connus de façon précise avec les hypothèses exactes.
- Reprendre les exercices « classiques » de chaque chapitre (voir liste ci-dessous). Reprendre signifie :
 - * essayer de les refaire soi-même ;
 - * confronter votre solution ou votre recherche à la correction qu'on en a donnée ;
 - * si vous n'avez pas trouvé la solution par vous-même, bien étudier la correction, en vous demandant d'une part ce qui vous a manqué pour trouver, d'autre part ce qui aurait pu vous mettre sur la piste. Dans ce cas, reprendre l'exercice 3 ou 4 jours plus tard.
- Faire le DM ci-dessous.
- Préparer les exercices du chapitre 6 qu'on n'a pas encore faits. Les exercices les plus importants sont : 18, 20, 22, 23, 24, 27, 29, 30, 32, 33, 36, 37, 39, 40, 41, 42, 43, 45, 46.
- Si vous n'en avez pas eu le temps jusque là : reprendre vos DM et DS, confronter votre copie au corrigé (même si vous avez réussi à répondre aux questions, il est possible que vous trouviez dans le corrigé d'autres méthodes intéressantes). Essayer de voir (avec corrigé si nécessaire) les questions ou parties auxquelles vous n'aviez pas eu le temps de répondre.
- Vous reposer.
- Faire les problèmes supplémentaires suggérés ci-dessus et lors des précédents DM, si ce n'est pas déjà fait.

Liste des exercices importants qu'il faudrait vraiment revoir :

Cette liste est non exhaustive et à adapter pour chacun. Selon votre niveau, vous pouvez avoir intérêt à regarder aussi d'autres exercices, plus simples, ou plus difficiles. De nombreux sites internet, ainsi que des ouvrages disponibles en librairie proposent des exercices de tout niveau. Pour ceux qui sont intéressés et motivés par des exercices de plus haut niveau, les recueils d'Oraux X-ENS de Francinou, Gianella et Nicolas, aux éditions Cassini sont incontournables. Les exercices sont rangés par thèmes. Certains thèmes sont accessibles dès maintenant.

- Chapitre 1 : 1 - 5 - 8 - 9 - 17 - 19 - 27
- Chapitre 2 : 4 - 9 - 10 - 14 - 18 - 25 - 26 - 35 - 36 - 39 - 43 - 45 - 47.
- Chapitre 3 (sommations) : 2 - 4 - 8 - 10 - 11 - 13 - 14
- Chapitre 4 (combinatoire) : 3 - 6 - 8 - 9 - 11 - 16 - 19 - 21 - 23 - 25 - 26 - 29 - 31
- Chapitre 5 (relations) : 4 - 9 - 10 - 15 - 21 - 23 - 24 - 25 - 27
- Chapitre 6 : 2 - 3 - 5 - 7 - 11 - 14 - 16

Problème 1 – Un théorème de Lagrange sur les fractions continues périodiques

Notations et définitions

- Pour un réel x , $[x]$ désigne sa partie entière, et $\{x\}$ désigne sa partie décimale. À aucun moment dans le problème il ne sera question de singleton, donc cette notation ne saurait être source d'ambiguïté.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$Z_n = \{(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid \forall i \in [1, n], a_i \in \mathbb{N}^*\}.$$

Ainsi, par exemple, $Z_0 = \mathbb{Z}$, et $Z_1 = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$

- On note $Y_0 = Z_0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Y_n = \{(a_0, \dots, a_n) \in Z_n \mid a_n \geq 2\}.$$

- On note

$$Z_\infty = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid a_0 \in \mathbb{Z} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Ainsi, $(a_n) \in Z_\infty$ si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, \dots, a_n) \in Z_n$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $(a_0, \dots, a_n) \in Z_n$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on note :

$$[a_0, a_1, \dots, a_n](x) = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-2} + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n + x}}}}}}.$$

On définit alors :

$$[a_0, \dots, a_n] = [a_0, \dots, a_n](0).$$

Si de plus $(a_0, \dots, a_n) \in Y_n$ (donc, en particulier, si $n \geq 1$, $a_n \geq 2$), on dira que $[a_0, \dots, a_n]$ est une fraction continue finie.

- On peut réexprimer plus rigoureusement la définition précédente de façon récursive de la manière suivante :

$$\begin{cases} [a_0](x) = a_0 + x \\ \forall n \in \mathbb{N}, [a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}](x) = [a_0, a_1, \dots, a_n] \left(\frac{1}{a_{n+1} + x} \right). \end{cases}$$

- Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in Z_\infty$ on note, en cas d'existence de cette limite :

$$[a_0, \dots, a_n, \dots] = \lim_{n \rightarrow +\infty} [a_0, \dots, a_n].$$

L'expression $[a_0, \dots, a_n, \dots]$ est appelée fraction continue (infinie), et on dira, en cas d'existence de cette limite x , que la fraction continue $[a_0, \dots, a_n, \dots]$ converge vers x .

- On dit que x admet un développement en fraction si x est égal à une fraction continue finie, ou s'il existe une fraction continue infinie convergeant vers x .

Rappels, ou résultats admis

- On pourra admettre la variante suivante du théorème des suites adjacentes : si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite telle que :
 - (u_{2n}) est croissante,
 - (u_{2n+1}) est décroissante,
 - $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{2n+1} - u_{2n}) = 0$,
 alors (u_n) admet une limite finie.
- On pourra utiliser sans démonstration le fait que si $\Delta \in \mathbb{N}$ n'est pas un carré parfait (i.e. n'est le carré d'aucun entier), alors $\sqrt{\Delta}$ est irrationnel.

Objectif du problème

On montre dans ce problème que toute fraction continue converge, et que tout réel x admet un unique développement en fraction continue. De plus on montre que ce développement est fini si et seulement si x est rationnel. On exprimera dans la partie I ce développement en fonction de quotients successifs intervenant dans l'algorithme d'Euclide pour le calcul d'un pgcd. La dernière partie a pour but de caractériser les fractions continues ultimement périodiques (c'est-à-dire les fractions continues infinies telles que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit périodique à partir d'un certain rang). On montre plus précisément qu'il s'agit des développements des réels algébriques de degré 2, c'est-à-dire des solutions non rationnelles d'équations du second degré à coefficients rationnels. Ce théorème est dû à Lagrange. La preuve développée ici est la preuve originelle de Lagrange, issue de son ouvrage « Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés ».

Partie I – Développement en fraction continue d'un rationnel

1. (a) Montrer, par récurrence sur n , que pour tout $(a_0, \dots, a_n) \in Z_n$ et tout $x \in \mathbb{Q}_+$, $[a_0, \dots, a_n](x) \in \mathbb{Q}$.
 (b) En déduire que toute fraction continue finie est un élément de \mathbb{Q} .
2. Dans cette question, on montre la réciproque. Soit $x \in \mathbb{Q}$, et $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que $x = \frac{p}{q}$.
 On applique l'algorithme d'Euclide pour le calcul du pgcd de p et q . Ainsi, on dispose de $n \in \mathbb{N}$ et deux familles $(r_k)_{k \in \llbracket -2, n \rrbracket}$, $(a_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, telles que :
 - $r_{-2} = p$, $r_{-1} = q$ (-1 et -2 sont en indice)
 - pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, a_k et r_k sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de r_{k-2} par r_{k-1} ,
 - pour tout $k \in \llbracket -1, n-1 \rrbracket$, $r_k \neq 0$, et $r_n = 0$.
 (a) Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $x = [a_0, \dots, a_k] \left(\frac{r_k}{r_{k-1}} \right)$.
 (b) En déduire que x admet un développement en fraction continue finie, et exprimer cette fraction continue en fonction de a_0, \dots, a_n .

Partie II – Réduction et convergence des fractions continues

On considère une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans Z_∞ .

On montre dans cette partie les deux propriétés suivantes :

- lorsqu'on réduit $[a_0, \dots, a_n]$ au même dénominateur en partant du bas de la fraction, pour diminuer le nombre d'étages, on obtient à chaque étape une fraction réduite, sans avoir de simplification à faire ;
- La fraction continue $[a_0, \dots, a_n, \dots]$ converge.

1. On note, pour toute séquence (a_0, \dots, a_n) de Z_n ,

$$[a_0, \dots, a_n] = \frac{p(a_0, \dots, a_n)}{q(a_0, \dots, a_n)}$$

la représentation irréductible (avec $q(a_0, \dots, a_n) > 0$) de la fraction $[a_0, \dots, a_n]$.

- (a) Pour tout $(a_0, \dots, a_n) \in Z_n$, exprimer $[a_0, \dots, a_n]$ en fonction de $[a_1, \dots, a_n]$.
- (b) Montrer que $p(a_0, \dots, a_n) = a_0 p(a_1, \dots, a_n) + q(a_1, \dots, a_n)$ et $q(a_0, \dots, a_n) = p(a_1, \dots, a_n)$.
- (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $(a_0, \dots, a_{n+1}) \in Z_{n+1}$,

$$\frac{p(a_0, \dots, a_{n+1})}{q(a_0, \dots, a_{n+1})} - \frac{p(a_0, \dots, a_n)}{q(a_0, \dots, a_n)} = \frac{(-1)^n}{q(a_0, \dots, a_n)q(a_0, \dots, a_{n+1})}.$$

On pourra faire une récurrence basée sur la question 1b.

2. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in Z_\infty$. On montre dans cette question la convergence de la fraction continue $[a_0, \dots, a_n, \dots]$.
 - (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q(a_0, a_1, \dots, a_n) = q(1, a_1, \dots, a_n)$.
 - (b) À l'aide de la question 1(b), justifier que si $a_0 > 0$, les suites $(p(a_0, a_1, \dots, a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q(a_0, a_1, \dots, a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ sont strictement croissantes
 - (c) En déduire que la fraction continue $[a_0, \dots, a_n, \dots]$ converge.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $q = \frac{a}{b}$ un rationnel sous forme irréductible. On dit que q est une meilleure approximation de x si pour tout $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ tel que $|d| \leq |b|$,

$$|q - x| \leq \left| \frac{c}{d} - x \right|.$$

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in Z_\infty$, et $x = [a_0, \dots, a_n, \dots]$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $[a_0, \dots, a_n]$ est une meilleure approximation de x .

Partie III – Existence et unicité du développement en fraction continue

1. Variations.

Pour $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in Z_\infty$, on note F_n la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par $x \mapsto [a_0, \dots, a_n](x)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction F_n est strictement croissante si n est paire, et strictement décroissante si n est impaire.

2. Existence.

Nous avons déjà montré que tout rationnel admet un développement en fraction continue. Soit maintenant $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Soit $a_0 = [x]$ et $b_0 = \{x\}$ (partie décimale de x), et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = \left\lfloor \frac{1}{b_n} \right\rfloor \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \left\{ \frac{1}{b_n} \right\}$$

- (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n sont bien définis, et que $x = [a_0, \dots, a_n](b_n)$
 (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$[a_0, \dots, a_{2n}] \leq x \leq [a_0, \dots, a_{2n+1}].$$

- (c) Montrer que $x = [a_0, \dots, a_n, \dots]$.

3. Unicité.

Soit (a_k) et (b_k) deux éléments appartenant chacun à l'un des Y_n ou à Z_∞ . On suppose que $(a_k) \neq (b_k)$, et on veut montrer que $[(a_k)] \neq [(b_k)]$, où $[(a_k)]$ désigne la fraction continue finie ou infinie associée à la famille (a_k) . Soit k_0 le rang de la première différence entre les deux suites (a_n) et (b_n) . Ainsi, soit $a_{k_0} \neq b_{k_0}$, soit l'un des deux entiers a_{k_0} ou b_{k_0} n'est pas défini alors que l'autre l'est.

- (a) On suppose que $a_{k_0} < b_{k_0}$. Comparer (au sens des inégalités dans \mathbb{R}) les quantités suivantes : $[(a_k)]$, $[b_0, \dots, b_{k_0}]$, et $[(b_k)]$.
 (b) Conclure de même lorsque a_{k_0} n'est pas défini et b_{k_0} est défini.

Partie IV – Théorème de Lagrange sur les fractions continues périodiques

On dit que la fraction continue $[a_0, \dots, a_n, \dots]$ est périodique si la suite (a_n) est périodique. Elle est dite ultimement périodique si (a_n) est périodique à partir d'un certain rang.

On dit qu'un réel x est algébrique de degré 2 (ou quadratique) s'il n'est pas rationnel et s'il existe un polynôme P de degré 2 à coefficients entiers tel que $P(x) = 0$.

- Montrer que x est quadratique si et seulement si il existe $\Delta \in \mathbb{N}$ qui n'est pas un carré parfait (carré d'un entier) et deux rationnels $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}^*$ tels que $x = a + b\sqrt{\Delta}$.
- Déterminer le développement en fraction continue de $\sqrt{2}$.
- On suppose que x admet un développement en fraction continue ultimement périodique. Montrer que f est algébrique de degré 2.
- Réciproquement, on suppose jusqu'à la fin du devoir que x est algébrique de degré 2, et on note

$$P_0(X) = E_1 X^2 + 2\varepsilon_0 X - E_0$$

un polynôme dont x est racine, E_1, E_0 et ε_1 étant des entiers. Le réel x étant irrationnel par définition, son développement en fraction continue $[a_0, \dots, a_n, \dots]$ est infini.

- (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = [r_n]$, où r_n est une racine strictement supérieure à 1 d'un polynôme $P_n = E_{n+1} X^2 - 2\varepsilon_n X - E_n$ à coefficient entier, tel que les suites (E_n) et (ε_n) vérifient :

(i) E_0, E_1 , et ε_0 sont définies par le polynôme P_0 dont x est racine ;

(ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_{n+1} = a_n E_n - \varepsilon_n$.

(iii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E_{n+2} = E_n + 2\varepsilon_n a_n - E_{n+1} a_n^2$

On pourra se servir de la description du développement en fraction continue de x , obtenu dans la partie III.

- (b) Soit Δ_n le discriminant de P_n . Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta_n = \Delta_0$.

On note dans la suite du devoir $\Delta = \Delta_n$, et $\Delta' = \frac{1}{4}\Delta$.

- (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E_{n+1} = \frac{\Delta' - \varepsilon_n^2}{E_n}$.

- (d) Justifier qu'il existe un rang n_0 tel que P_{n_0} ait une et une seule racine dans $]1, +\infty[$.

- (e) En déduire que pour tout $n > n_0$, P_n admet une et une seule racine positive, puis que pour tout $n > n_0$, $E_n E_{n+1} > 0$.

- (f) Montrer que pour tout $n > n_0 + 1$, $|\varepsilon_n| < \sqrt{\Delta'}$ et $|E_n| < \Delta'$.

- (g) En déduire que pour $n > n_0 + 1$, le nombre de couples (E_n, ε_n) différents est fini.

- (h) Montrer que le développement en fraction continue de x est ultimement périodique.