Lycée Louis-Le-Grand, Paris
MP2I – Mathématiques
A. Troesch

Pour le 08/12/2023

DM n° 9 : Continuité, dérivation

Suggestion de travail supplémentaire (à ne pas me rendre) : le problème 5 de la sélection, un peu dans le même esprit que le premier problème de ce DM. Le problème 6 de la sélection.

La partie IV du problème 2 est facultative.

Problème 1 – Une fonction continue partout dérivable nulle part

Partie I – Une limite non continue de fonctions continues

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement *vers la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ si pour tout $x \in I$, la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.*
Nous donnons un exemple montrant que si (f_n) converge simplement vers f, même si toutes les fonctions f_n, $n \in \mathbb{N}$ sont continues, la fonction limite f n'est pas forcément continue. Ainsi, la continuité n'est pas forcément préservée par passage à la limite.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On définit la fonction $f_{x_0,n}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{x_0,n}(x) = \mathrm{e}^{-n(x-x_0)^2}.$$

1. Montrer que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{x_0,n}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Montrer que la suite $(f_{x_0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f_{x_0} que l'on déterminera.
3. f_{x_0} est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, et $x_1, \dots, x_m$ des réels deux à deux distincts. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$f_n = f_{x_1,n} + \cdots + f_{x_m,n}.$$

4. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
5. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction qui n'est continue en aucun des points x_i, $i \in [\![1, m]\!]$.

Partie II – Un critère de continuité pour des séries de fonctions

D'après la partie précédente, on ne peut pas conclure directement à la continuité de la limite d'une suite de fonctions continues (et donc à la continuité d'une somme d'une série de fonctions continues). L'objet de cette partie est de donner un critère simple de continuité d'une limite de suite de fonctions ou d'une somme de série de fonctions.
On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ converge uniformément vers la fonction f si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0,\ \forall x \in I,\ \forall n \geqslant N, \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Ainsi, contrairement au cas de la convergence simple, N est indépendant de x. On peut donc contrôler de façon globale la convergence de la suite vers f : pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un « voisinage tubulaire » de la courbe de f (c'est-à-dire un « tube » encadrant la courbe de f à ε près des deux côtés) dans lequel vont se tracer les courbes des f_n à partir d'un certain rang.

1. Montrer que la suite $(f_{x_0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ de la partie I n'est pas uniformément convergente.
2. Justifier qu'une suite uniformément convergente est simplement convergente.

3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues convergeant uniformément vers f. Montrer que f est continue sur I.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On dit $\sum f_n$ converge simplement si pour tout $x \in I$, $\sum f_n(x)$ converge. On dit que $\sum f_n$ converge uniformément si la suite des sommes partielles converge uniformément. On dit que $\sum f_n$ converge normalement s'il existe une suite positive $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que :

$$\sum a_n \text{ converge,} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ \ |f_n(x)| \leqslant a_n.$$

4. Montrer que si $\sum f_n$ converge normalement, alors $\sum f_n$ converge uniformément.

Partie III – La fonction de Weierstrass : une fonction partout continue nulle part dérivable

On étudie ici une fonction, obtenue comme limite d'une série de fonction. On montre que cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$, mais dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$. L'exemple qui suit a été donné par Weierstrass en 1861 (pour des valeurs particulières de a et b). De nombreux autres exemples de fonctions partout continues et nulle part dérivables peuvent être trouvés dans la littérature mathématique (Gini, Bolzano, Van der Waerden...)
Soit $b \in]0,1[$, et a un entier positif impair tel que $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. On définit f par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b^n \cos(a^n \pi x).$$

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $h \in \mathbb{R}^*$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$S_m(h) = \frac{1}{h}\sum_{n=0}^{m-1} b^n(\cos(a^n\pi(x+h)) - \cos(a^n\pi x)) \qquad \text{et} \qquad R_m(h) = \frac{1}{h}\sum_{n=m}^{+\infty} b^n(\cos(a^n\pi(x+h)) - \cos(a^n\pi x)).$$

2. Montrer que : $\forall h \in \mathbb{R}^*,\ |S_m(h)| \leqslant \pi\dfrac{(ab)^m}{ab-1}$.

Soit $\alpha_m = \left\lfloor a^m x + \dfrac{1}{2}\right\rfloor$, et $\beta_m = a^m x - \alpha_m$. On pose $h_m = \dfrac{1-\beta_m}{a^m}$.

3. Justifier que $|h_m| \leqslant \dfrac{3}{2a^m}$.
4. Soit n un entier supérieur ou égal à m.
   (a) Montrer que $\cos(\pi a^n(x+h_m)) = (-1)^{\alpha_m+1}$. Calculer de même $\cos(\pi a^{n-m}\alpha_m)$ et $\sin(\pi a^{n-m}\alpha_m)$ en fonction de α_m.
   (b) En déduire que $\cos(a^n\pi x) = (-1)^{\alpha_m}\cos(\pi a^{n-m}\beta_m)$.
5. Montrer que $|R_m(h_m)| \geqslant \dfrac{b^m}{|h_m|}$.
6. Montrer que : $\left|\dfrac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m}\right| \geqslant \dfrac{2(ab)^m}{3}\cdot\dfrac{ab - \left(1+\frac{3\pi}{2}\right)}{ab-1}$.
7. Montrer que f n'est dérivable en aucun réel x.

Problème 2 – Fonctions semi-continues et lemme d'Urysohn

Question préliminaire

Soit $a \in \mathbb{R}$, et $V_1, \dots, V_n$ des voisinages de a. Montrer que $V_1 \cap \cdots \cap V_n$ est un voisinage de a. Cela reste-t-il vrai pour une intersection d'un nombre infini de voisinages ?

On pourra admettre sans preuve que ce résultat reste vrai pour les voisinages d'un point a d'un espace métrique quelconque, et même pour les voisinages d'un point a d'un espace topologique (voir définitions en début de partir IV).

Partie I – Fonctions semi-continues

On dit qu'une fonction f définie sur un sous-ensemble ouvert E de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est semi-continue inférieurement si pour tout a de E et tout $\lambda < f(a)$, il existe V un voisinage de a tel que pour tout x de V on ait $f(x) \geqslant \lambda$. On dit que f définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est semi-continue supérieurement si $-f$ est semi-continue inférieurement.

Vous pouvez utiliser les abréviations SCI et SCS respectivement pour « semi-continue inférieurement » et « semi-continue supérieurement ».

Soit $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

1. Montrer que si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et continue, alors f est semi-continue inférieurement.
2. (a) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction indicatrice $\mathbb{1}_U$ est semi-continue inférieurement sur $\mathbb{R}$.
   (b) Soit X un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non ouvert. La fonction $\mathbb{1}_X$ est-elle semi-continue inférieurement ?
   (c) Soit $b \in \mathbb{R}$ et $f : E \to \mathbb{R}$. Montrer que f est semi-continue inférieurement si et seulement si $f + b$ est semi-continue inférieurement.
   (d) Soit $F \subset \mathbb{R}$. Justifier que F est fermé si et seulement si $\mathbb{1}_F$ est semi-continue supérieurement sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f est continue si et seulement si elle est semi-continue inférieurement et supérieurement.
4. Montrer que f est semi-continue inférieurement si et seulement pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]\lambda, +\infty])$ est un ouvert.
5. (a) Soit f une fonction semi-continue inférieurement sur E et $\mu \geqslant 0$. Montrer que μf est semi-continue inférieurement.
   (b) Que peut-on dire lorsque $\mu \leqslant 0$?
6. Soit f et g deux fonctions semi-continues inférieurement. Montrer que $f + g$ est semi-continue inférieurement.
7. Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille de fonctions semi-continues inférieurement. On définit $f = \sup_{i \in I}(f_i)$ l'enveloppe supérieure de la famille (f_i), c'est-à-dire l'application qui à x associe $\sup_{i \in I}(f_i(x))$, bien définie à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Montrer que f est semi-continue inférieurement.
8. (a) Montrer que l'enveloppe inférieure $\inf_{i \in I}(f_i)$ (définie de façon analogue à l'enveloppe supérieure) d'un nombre fini de fonctions semi-continues inférieurement est semi-continue inférieurement
   (b) Trouver une famille $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions semi-continues inférieurement telles que $\inf_{n \in \mathbb{N}}(f_n)$ ne soit pas semi-continue inférieurement. On pourra se servir des exemples du début de la partie.

Nous avons notamment démontré dans cette partie que toute enveloppe supérieure d'un nombre quelconque de fonctions semi-continues inférieurement l'est encore, ainsi que toute enveloppe inférieure d'un nombre fini de fonctions semi-continues.

De façon symétrique, en considérant $-f$, toute enveloppe inférieure d'un nombre quelconque de fonctions semi-continues supérieurement l'est aussi, ainsi que les enveloppes supérieures d'un nombre fini de fonctions semi-continues supérieurement.

En particulier, en combinant les deux résultats, les enveloppes inférieures ou supérieures d'un nombre fini de fonctions continues sont continues, mais le résultat est faux pour une borne supérieure (ou inférieure) infinie. En revanche, toute enveloppe supérieure d'un nombre quelconque de fonctions continues est toujours semi-continue inférieurement.

Le but de la partie partie suivante est de montrer que réciproquement, toute fonction semi-continue inférieurement et minorée est l'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions continues. Quitte à ajouter une constante à toutes les fonctions, il est clair qu'on peut se limiter à l'étude du cas des fonctions semi-continues inférieurement, et positives.

Partie II – Lemme d'Urysohn et caractérisation des fonctions semi-continues inférieurement

Soit F un fermé non vide de $\mathbb{R}$ et U un ouvert de $\mathbb{R}$ tels que $F \subset U$. Le lemme d'Urysohn affirme qu'il existe une application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ et telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) \in [0,1], \qquad \forall x \in F,\ \varphi(x) = 1 \qquad \textit{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \backslash U,\ \varphi(x) = 0.$$

Dans cette partie, nous démontrons ce résultat, et nous l'appliquons pour démontrer la caractérisation des fonctions semi-continues inférieurement évoquée ci-dessus.

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $F_x = \{|x-y|,\ y \in F\}$. Montrer que F_x admet une borne inférieure, qu'on notera $d_F(x)$, appelée distance de x à F.
   (b) Que vaut $d_F(x)$ lorsque $x \in F$?
   (c) Justifier que si $x \notin F$, $d_F(x) > 0$.
2. Montrer que pour tout $(x, x') \in \mathbb{R}^2$, $|d_F(x) - d_F(x')| \leqslant |x - x'|$, et en déduire que d_F est continue.
3. On définit de même $d_{U^c}(x)$ la distance de x au complémentaire U^c de U dans $\mathbb{R}$.
   (a) En considérant la fonction φ définie par
   $$\varphi(x) = \frac{d_{U^c}(x)}{d_F(x) + d_{U^c}(x)},$$
   terminer la preuve du lemme d'Urysohn.
   (b) Expliciter la fonction φ de la question précédente dans le cas où $F = [a, b]$ et $U =]c, d[$, avec $c < a < b < d$.
4. Soit f une fonction positive, semi-continue inférieurement sur un ouvert E de $\mathbb{R}$, et $\mathcal{C}(f)$ l'ensemble des fonctions définies sur E, continues positives g telles que $g \leqslant f$. Montrer que
   $$f = \sup_{g \in \mathcal{C}(f)} g.$$
   Indication : on pourra, pour a tel que $f(a) > 0$, considérer une fonction φ de $\mathcal{C}(f)$ prenant une valeur arbitrairement proche de $f(a)$, et s'annulant en dehors d'un ouvert suffisamment bien choisi contenant a.

On peut remarquer que la démonstration donnée est valable pour toute fonction définie sur un espace métrique quelconque. C'est dans ce cadre élargi que l'utilisation du lemme d'Urysohn prend son intérêt, car dans le cas réel, il n'est pas dur de construire explicitement des fonctions pics. Mais même dans ce cadre, on ne se sert que d'une version très réduite du théorème, dans le cas de fermés F très particuliers.

Partie III – Lemme d'Urysohn différentiel

Dans cette partie, on montre que la fonction φ répondant au lemme d'Urysohn peut être choisie de classe $\mathcal{C}^\infty$. Ainsi, la preuve de la fin de la partie précédente s'adapte facilement pour montrer qu'une fonction positive semi-continue supérieurement est la borne supérieure de $\mathcal{C}^\infty(f)$, l'ensemble des fonctions positives de classe $\mathcal{C}^\infty$ majorées par f.

1. Montrer que la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$\psi(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$
   est continue sur $\mathbb{R}$
2. Justifier que ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
3. Construire à l'aide de ψ une application φ_0 de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors de $[0, 1]$ et strictement positive sur $]0, 1[$.
4. En considérant une primitive de φ_0, montrer qu'il existe une fonction croissante Φ_0 de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, nulle sur $]-\infty, 0]$, et égale à 1 sur $[1, +\infty[$.
5. Soit $a < c < d < b$. Construire à l'aide de Φ_0 une application $\chi_{a,c,d,b}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[0, 1]$, égale à 1 sur $[c, d]$ et nulle hors de $]a, b[$.

*6. Soit F un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}$ et U un ouvert tel que $F \subset U$. On admet que U est union au plus dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints. Montrer qu'il existe une application $\chi_{U,F}$ prenant ses valeurs dans $[0, 1]$, égal à 1 sur F et à 0 hors de U.
   Indication : on pourra montrer que si $U = \bigcup_{j \in J}]a_j, b_j[$, union au plus dénombrable d'intervalles deux à deux disjoints, alors pour tout $j \in J$, on peut trouver c_j et d_j tels que $F \cap]a_j, b_j[\subset [c_j, d_j] \subset]a_j, b_j[$. On pourra aussi réduire un peu l'intervalle $]a_j, b_j[$ afin de faciliter le recollement.

Partie IV – Généralisation topologique du lemme d'Urysohn

On montre ici le lemme d'Urysohn dans un espace topologique E, c'est-à-dire dans un espace E muni d'une topologie $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(E)$. Les éléments de $\mathcal{O}$ sont les ouverts de E et vérifient les deux propriétés de stabilité suivantes :

- *Toute union d'ouverts est un ouvert*
- *Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.*

En particulier, $\varnothing$ et E sont des ouverts en tant qu'union vide et intersection vide d'ouverts. Les complémentaires des ouverts sont appelés fermés. Un voisinage d'un point a de E est un ensemble V contenant un ouvert U tel que $a \in U \subset V$. Dans ce cadre, la caractérisation topologique de la continuité permet de définir la notion de fonction continue de E dans $\mathbb{R}$, ainsi que la notion de fonction semi-continue inférieurement et supérieurement. On admettra que tous les résultats démontrés dans la partie I restent vrais dans ce cadre, notamment le fait que l'enveloppe supérieure d'une famille quelconque de fonctions semi-continues inférieurement est encore semi-continue inférieurement, et que l'enveloppe inférieure d'une famille quelconque de fonctions semi-continues supérieurement est encore semi-continue supérieurement ; ainsi que le fait qu'une fonction est continue si et seulement si elle est semi-continue inférieurement et supérieurement.

On suppose qu'on dispose d'un sous-ensemble $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(E)$, constitué de sous-ensembles fermés, et vérifiant la propriété suivante : pour tout $K \in \mathcal{K}$, s'il existe un ouvert U tel que $K \subset U$, alors il existe un ouvert V tel que $\overline{V} \in \mathcal{K}$ et $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$, l'ensemble $\overline{V}$ étant l'adhérence de V, c'est-à-dire l'ensemble des points x de E tel que tout ouvert contenant x intersecte V.

*1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}$ des fermés d'un espace métrique vérifie la condition imposée pour l'ensemble $\mathcal{K}$.

*2. Soit $K \in \mathcal{K}$ et U un ouvert tel que $K \subset U$. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des nombres dyadiques de $]0, 1]$, donc des nombres s'écrivant sous la forme $\frac{p}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in [\![0, 2^n]\!]$. Construire une famille $(U_r)_{r\in\mathcal{D}}$ telle que :
   - pour tout $r \in \mathcal{D}$, $K \subset U_r \subset \overline{U_r} \subset U$,
   - pour tout $(r, r') \in \mathcal{D}^2$ tels que $r < r'$, on ait $\overline{U_r} \subset U_{r'}$;

3. On définit f sur E par $f(x) = \sup\limits_{r\in\mathcal{D}}((1 - r)\mathbb{1}_{U_r}(x))$ et g par $g(x) = \inf\limits_{r\in\mathcal{D}}(1 - (r\mathbb{1}_{(U_r)^c}(x)))$, l'ensemble $(U_r)^c$ désignant le complémentaire de U_r dans E.

   Que dire des semi-continuités inférieures et supérieures de f et g ?

*4. Montrer que $f = g$ et conclure.

5. On suppose de plus que pour tout x de E, et tout voisinage V de x, il existe K dans $\mathcal{K}$ tel que K soit un voisinage de x et $K \subset V$. Montrer que toute application semi-continue inférieurement sur E est l'enveloppe supérieure de fonctions continues.