Lycée Louis-Le-Grand, Paris
MP2I – Mathématiques
A. Troesch

Pour le 18/01/2024 et le 23/01/2024

DM nº 13 : Suites, asymptotique

Suggestion de travail supplémentaire (à ne pas me rendre) : Encore le DS5 de l'année dernière.

Consignes de remise des copies :

- Les problèmes 1 et 2 sont à me rendre au plus tard le jeudi 18/01, en version numérisée en format pdf, si possible en un seul fichier. Le nom du fichier doit être `dm13-votre_nom.pdf` (par exemple `dm13-troesch.pdf` si j'avais une copie à rendre) et doit être envoyé à l'adresse `alain.troesch.pro+dm@gmail.com` (ou transmis par clé usb).
- Le problème 3 doit être rendu en format papier mardi 23/01.

Problème 1 – Formule de Stirling

Partie I – Intégrales de Wallis.

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $I_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} \cdot I_{n-1}$.
2. En déduire une expression explicite de I_{2p} et de I_{2p+1} à l'aide de factorielles.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \geqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \geqslant \dfrac{n}{n+1}$.
4. En déduire la formule de Wallis :
$$\lim_{p \to +\infty} \sqrt{p} \cdot \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Partie II – Formule de Stirling.

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \ln \dfrac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}$. On admettra que pour toute suite (u_n) de limite nulle,
$$\ln(1+u_n) = u_n - \frac{u_n^2}{2} + \frac{u_n^3}{3} + O(u_n^4).$$

1. Montrer qu'il existe un réel α non nul qu'on déterminera tel que $S_n - S_{n-1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{n^2}$
2. À l'aide d'une comparaison avec une intégrale, montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ est convergente.
3. En déduire que (S_n) admet une limite finie S dans $\mathbb{R}$.
4. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma_n = \dfrac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}$. En considérant $\dfrac{\sigma_n^2}{\sigma_{2n}}$, déterminer la valeur de S.
5. En déduire la formule de Stirling : $n! = n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}(1+o(1))$.

Problème 2 –

PARTIE I – Étude d'une suite définie par une récurrence linéaire.

1. On considère l'équation $P(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$. Montrer qu'elle admet trois racines réelles distinctes $x_1 < x_2 < x_3$ vérifiant $-2 < x_1 < -1 < 0 < x_2 < 1 < x_3 < 2$.
2. En écrivant P sous forme factorisée à l'aide de ses racines, et en développant, montrer que $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ et en déduire que $|x_2| < |x_1| < |x_3|$.

3. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par les conditions initiales $a_0 = 0$, $a_1 = 0$ et $a_2 = 1$ et la relation $a_{n+3} = a_{n+2} + 2a_{n+1} - a_n$. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, et que pour tout $n \geqslant 2$, $a_n > 0$.
4. Montrer qu'il existe un unique triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \lambda_3 x_3^n.$$
On exprimera λ_1, λ_2 et λ_3 en fonction de x_1, x_2 et x_3.
Il est demandé de ne pas utiliser ces expressions dans le reste du problème.
5. Montrer que si $|r| < |s|$, alors $r^n = o(s^n)$.
En déduire que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à une suite géométrique qu'on précisera en fonction des x_i et des λ_i.
6. Justifier que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ converge vers x_3.
(On pourra utiliser la question 5.)

PARTIE II – Étude et amélioration de la vitesse de convergence de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On rappelle que si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que (v_n) ne s'annule pas (au moins à partir d'un certain rang), on dit que (u_n) est dominée par (v_n) et on écrit $u_n = O(v_n)$, si et seulement si la suite $\left(\left|\dfrac{u_n}{v_n}\right|\right)$ est majorée.

1. Montrer que si $u_n = o(v_n)$, et si v_n ne s'annule pas, alors $u_n = O(v_n)$.
2. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n = b_n - x_3$. Montrer que $\varepsilon_n \underset{+\infty}{\sim} (x_1 - x_3)\dfrac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\dfrac{x_1}{x_3}\right)^n$.
3. En déduire que $|b_n - x_3| = O\left(\left|\dfrac{x_1}{x_3}\right|^n\right)$.
4. Soit $\beta > 0$, et soit $E(\beta)$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n = O(\beta^n)$.
   (a) Montrer que si $\beta < 1$, tous les éléments de $E(\beta)$ convergent vers 0.
   (b) Montrer que $E(\beta)$ contient toutes les suites géométriques de raison q, avec $|q| < \beta$.
   (c) Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E(\beta)$ et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente de limite non nulle, dont tous les termes sont non nuls, alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans $E(\beta)$.
5. On pose $\beta = \max\left(\left|\dfrac{x_2}{x_3}\right|, \left|\dfrac{x_2 x_1}{x_3^2}\right|, \left|\dfrac{x_1}{x_3}\right|^2\right)$. Vérifier que $\beta < \left|\dfrac{x_1}{x_3}\right|$, et montrer que
$$b_n - x_3 - (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n = O(\beta^n).$$
6. Pour tout $n \geqslant 3$, on pose $c_n = \dfrac{b_{n+1} - b_n}{b_n - b_{n-1}}$. Justifier que $c_n - \dfrac{x_1}{x_3} = O\left(\left(\dfrac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right)$.
7. Pour tout $n \geqslant 3$, on pose $d_n = \dfrac{b_{n+1} - c_n b_n}{1 - c_n}$. Montrer que $d_n - x_3 = O(\beta^n)$. En quoi peut-on dire qu'on a accéléré la convergence de la suite ?

Problème 3 – Convergence en un point fixe attractif d'une suite définie par une récurrence

Soit α et β deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ tels que $\alpha < \beta$, et soit $I =]\alpha, \beta[$ l'intervalle ouvert d'extrémités α et β. Soit $f : I \to I$ une fonction ***de classe*** $\mathcal{C}^1$ *sur I. On note $\Omega = \{x \in I \mid f(x) = x\}$ l'ensemble des points fixes de f.*

On suppose dans tout le problème que Ω est non vide.

On appellera suite récurrente, ou, s'il faut éviter une ambiguïté, suite récurrente associée à f, une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de I vérifiant la relation de récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = f(x_n).$$

Partie I – Convergence vers un point fixe attractif

Soit $r \in \Omega$. On suppose que r est un point fixe attractif, c'est-à-dire tel que $|f'(r)| < 1$. On considère (x_n) une suite récurrente associée à f.

1. Montrer qu'il existe un réel $\delta > 0$ et un réel $k \in [0, 1[$ tel que pour tout $x \in]r - \delta, r + \delta[$, $x \in I$ et $|f'(x)| < k$.
2. En déduire que s'il existe N tel que $|x_N - r| < \delta$, alors pour tout $n \geqslant N$,

$$|x_n - r| \leqslant |x_N - r| k^{n-N}.$$

3. En déduire qu'une suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers r si et seulement s'il existe un indice $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_N \in B(r, \delta)$.

Partie II – Estimation de la vitesse de convergence

On se propose dans cette partie d'étudier la vitesse de convergence d'une suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non stationnaire, convergeant vers un point fixe attractif r. On suppose dans la suite de cette partie que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et que la suite récurrence (x_n) définie par f converge vers r sans être stationnaire.

1. Montrer que pour tout $k > |f'(r)|$, $|x_n - r| = o(k^n)$.
2. Montrer que pour tout suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite r,

$$f(u_n) = f(r) + (u_n - r)f'(r) + \frac{1}{2}(u_n - r)^2 f''(r) + o((u_n - r)^2).$$

3. On suppose dans cette question que $f'(r) \neq 0$.
   (a) Soit $k > |f'(r)|$. Montrer qu'on a :

   $$\forall j \in \mathbb{N}, \quad x_{j+1} - r = f'(r)(x_j - r)(1 + R_j), \qquad \text{où } R_j = O(k^j).$$

   (b) En déduire que : $\forall n \geqslant 1, \quad x_n - r = (f'(r))^n (x_0 - r) \displaystyle\prod_{j=0}^{n-1} (1 + R_j)$.

   (c) Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\ln(|1 + R_j|)$ est défini, et qu'il existe M tel que

   $$|\ln(|1 + R_j|)| \leqslant M k^j.$$

   (d) En déduire l'existence d'un réel $\lambda \neq 0$ tel que $x_n - r \underset{+\infty}{\sim} \lambda (f'(r))^n$
4. On suppose dans cette question que $f'(r) = 0$ et que $f''(r) \neq 0$.
   (a) Montrer qu'il existe une suite $(S_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de limite nulle telle que :

   $$\forall j \in \mathbb{N}, \quad x_{j+1} - r = \frac{f''(r)}{2}(x_j - r)^2 (1 + S_j).$$

   (b) En déduire que pour tout $n \geqslant 2$,

   $$x_n - r = \frac{2}{f''(r)} \left(\frac{f''(r)}{2}(x_0 - r) \prod_{j=0}^{n-2} |1 + S_j|^{2^{-j-1}} \right)^{2^n} (1 + S_{n-1}).$$

   (c) Montrer que la suite $\left(\displaystyle\prod_{j=0}^{n-2} |1 + S_j|^{2^{-j-1}} \right)_{n\geqslant 2}$ converge et que sa limite est non nulle.

   *(d) On note, pour tout $n \geqslant 2$, $\pi_n = \displaystyle\lim_{m\to+\infty} \prod_{j=n-1}^{m} |1 + S_j|^{2^{-j-1}}$.

   Montrer que la suite $(2^n \ln \pi_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers 0.

   (e) Montrer qu'il existe une constante $\lambda \in]0, 1[$, telle que $x_n - r \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2\lambda^{2^n}}{f''(r)}$.

Partie III – Un exemple : les suites de Héron

Soit $a > 0$. Pour tout entier $p \geqslant 2$, on définit une fonction f_p sur $I =]0, +\infty[$ par $f_p(x) = \dfrac{1}{p}\left((p-1)x + \dfrac{a}{x^{p-1}} \right)$.

1. (a) Montrer que quelle que soit la valeur initiale $x_0 > 0$, la suite récurrente associée à f_p existe, qu'elle vérifie $x_n \geqslant a^{\frac{1}{p}}$ pour tout $n \geqslant 1$, et qu'elle converge vers $r = a^{\frac{1}{p}}$

(b) Montrer que f_p vérifie pour le point fixe r les hypothèses de la question II-4.

Étant donné une suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non stationnaire associée à f_p, on note $\lambda_p(x_0)$ la constante donnée par II-4(e) telle que $x_n - r \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{f''(r)}(\lambda_p(x_0))^{2^n}$.

2. *Dans cette question, on suppose que $p = 2$.*

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire x_n sous la forme $\dfrac{u_n}{v_n}$, où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définies par $u_0 = x_0$, $v_0 = 1$ et les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n^2 + av_n^2 \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = 2u_n v_n.$$

(b) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + \sqrt{a} \cdot v_{n+1}$ en fonction de $u_n + \sqrt{a} \cdot v_n$.

(c) Exprimer $u_n + \sqrt{a} \cdot v_n$, $u_n - \sqrt{a} \cdot v_n$ puis x_n en fonction de x_0, $\sqrt{a}$ et n.

(d) En déduire que $\lambda_2(x_0) = \dfrac{|x_0 - \sqrt{a}|}{x_0 + \sqrt{a}}$.

3. *On ne suppose plus que $p = 2$. Un nombre réel $r > 0$ étant donné, on associe, à tout entier naturel $q > 1$, la fonction g_q définie sur $]0, +\infty[$ par $g_q(x) = \left(\dfrac{1}{2}\left(x^q + \dfrac{r^{2q}}{x^q}\right)\right)^{\frac{1}{q}}$.*

(a) Montrer que, quelle que soit la valeur $y_0 > 0$, la suite récurrente $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à g_q existe.

(b) Reconnaître la relation de récurrence satisfaite par (y_n^q) , et en déduire l'expression de y_n en fonction de y_0, r, q et n.

(c) En déduire que si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire, il existe deux constantes non nulles μ_q et C, que l'on explicitera en fonction de r, q et y_0, telles que $y_n - r \underset{+\infty}{\sim} C(\mu_q)^{2^n}$.

(d) Soit $(u_p)_{p\geqslant 2}$ la suite définie par $u_p = \left(\dfrac{p-1}{p}\right)^{p-1}$, et soit, pour tout $p \geqslant 2$, $v_p = \dfrac{u_{p+1}}{u_p}$.

Montrer, à l'aide d'une étude de fonction, que $(v_p)_{p\geqslant 2}$ est croissante de limite 1.

(e) En déduire que pour tout $p \geqslant 2$, $u_p \leqslant \frac{1}{2}$.

*(f) On pose $r = a^{\frac{1}{p}}$. On note $\mu_q(y_0)$ la constante obtenue dans la question 3(c) pour la suite (y_n) initialisée par y_0.

Montrer que pour tout $x \geqslant a^{\frac{1}{p}}$, $f_p(x) \leqslant g_{p-1}(x)$.

Indication : on pourra montrer que $t \mapsto \left(p - 1 + t^{\frac{p}{2(p-1)}}\right)$ est concave sur $[0, 1]$.

(g) On suppose que $x_0 > a^{\frac{1}{p}}$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites récurrentes de même valeur initiale x_0, associées respectivement à f_p et g_{p-1}.

Montrer que $\lambda_p(x_0) \leqslant \mu_{p-1}$.