Lycée Louis-Le-Grand, Paris
MP2I – Mathématiques
A. Troesch

Pour le 08/03/2024

DM n° 17 : Matrices

Suggestion de travail supplémentaire (à ne pas me rendre) : L'exercice du DS 7.

La dernière partie utilise des développements limités. Vous êtes autorisés à admettre la formule de Taylor-Young, ainsi que la propriété d'unicité des développements limités (voir le chapitre correspondant dans le polycopié). Ce seront des propriétés qu'on verra prochainement en cours.

Problème 1 – Exponentielles et logarithmes de matrices

L'objet de ce problème est d'étudier certaines séries de matrices $\sum A_n$ où $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrice. On s'intéresse notamment aux séries exponentielles et logarithmiques.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit pour tout $n \in n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ (matrice carrée de taille p). On dit que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ si pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, la suite numérique des coefficients en position (i,j) des matrices A_n converge vers le coefficient en position (i,j) de A (convergence coefficient par coefficient). La série $\sum A_n$ converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles converge, ce qui équivaut à dire que les séries convergent coefficient par coefficient.

On définit, pour tout matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ pour laquelle les séries convergent :

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}, \qquad \text{et} \qquad \ln(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(A-I_p)^n}{n}.$$

On se propose d'étudier ces deux séries, ainsi que la série géométrique, sur un exemple explicite, puis on essaye de trouver des conditions sur A permettant de définir ces deux fonctions

On rappelle que la série de réels $\sum a_n$ est dite absolument convergente si $\sum |a_n|$ converge, et que dans ce cas $\sum a_n$ est convergente aussi. On rappelle aussi que si pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou au moins à partir d'un certain rang), $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge (TCSTP, théorème de convergence des séries à termes positifs).

Partie I – Premier exemple

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $p \geqslant 2$. Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & a \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

1. Dans cette question, $p = 4$ et $a = 1$.
   (a) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire l'existence et l'expression de $\exp(A)$.
   (c) Montrer que $\exp(A)$ est inversible, et donner son inverse.
   (d) On note $C = \exp(A) - I_4$. Calculer C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (e) Que vaut $\ln(\exp(A))$?
   (f) Montrer que $I_4 - A$ est inversible et calculer son inverse par la méthode du pivot.
   (g) Comparer à $\sum_{n=0}^{+\infty} A^n$ et commenter.
2. Étendre les résultats précédents à $p \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$ quelconques.

Partie II – Normes de matrices

On se fixe $p \in \mathbb{N}^*$.

Une norme sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est une application $\mathcal{N} : \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ telle que :

(i) Pour tout $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $\mathcal{N}(A) = 0 \iff A = 0$ (séparation)

(ii) Pour tout $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathcal{N}(\lambda A) = |\lambda|\mathcal{N}(A)$ (positive homogénéité)

(iii) Pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})^2$, $\mathcal{N}(A + B) \leqslant \mathcal{N}(A) + \mathcal{N}(B)$ (inégalité triangulaire)

1. Montrer que si $\mathcal{N}$ est une norme sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, alors pour tout $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $\mathcal{N}(A) \geqslant 0$
2. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On définit :

$$\|A\| = \max_{(i,j) \in [\![1,p]\!]^2} |a_{i,j}|$$

   (a) Vérifier que $A \mapsto \|A\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
   (b) Vérifier que pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $\|AB\| \leqslant p\|A\| \cdot \|B\|$.
   (c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, majorer $\|A^n\|$ en fonction de n, de p et de $\|A\|$.
3. Soit (A_n) une suite d'éléments de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que la suite de matrices (A_n) tend vers A au sens de l'énoncé (i.e. coefficient par coefficient) si et seulement si $A_n \to A$ au sens de $\|.\|$ (i.e. $\|A_n - A\| \to 0$).
   (b) Montrer que si $\sum \|A_n\|$ converge, alors $\sum A_n$ converge (on dit que $\sum A_n$ est absolument convergente).
4. Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, on définit de même $\|X\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant p} |x_i|$. On définit alors :

$$|||A||| = \sup_{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}} \frac{\|AX\|}{\|X\|}$$

   On admettra que ce sup est bien défini (cela provient de la finitude de la dimension de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$).
   (a) Montrer que $A \mapsto |||A|||$ est une norme sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $|||AB||| \leqslant |||A||| \cdot |||B|||$. Une norme sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ vérifiant cette inégalité est appelée une norme matricielle.
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|||A^n||| \leqslant |||A|||^n$.
5. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|A\| \leqslant |||A|||$
   (b) En déduire que si A_n converge vers A au sens de $|||.|||$ (i.e. si $|||A_n - A||| \to 0$), alors A_n converge aussi vers A au sens de $\|.\|$.
   (c) Montrer que si $\sum |||A_n|||$ converge, alors $\sum A_n$ converge.

Partie III – Produit de Cauchy de deux séries de matrices

Dans cette partie, on utilise les sous-ensembles suivants de $\mathbb{N}^2$:

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K_n = [\![0, n]\!]^2$
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D_n = [\![0, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor]\!]^2$
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = \{(i, j) \in K_n \mid i + j \leqslant n\}$.

1. Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes positifs convergentes. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{(i,j) \in D_n} a_i b_j \leqslant \sum_{(i,j) \in T_n} a_i b_j \leqslant \sum_{(i,j) \in K_n} a_i b_j$.
   (b) En déduire que $\sum c_n$ converge, et que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} a_j\right)$
2. Soit (A_n) et (B_n) deux suites d'éléments de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On suppose que $\sum A_n$ et $\sum B_n$ sont absolument convergentes (au sens de II-3(b)). On définit

$$\forall \in \mathbb{N}, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} A_k B_{n-k}.$$

(a) Montrer que $\left\| \sum_{(i,j)\in K_n} A_iB_j - \sum_{(i,j)\in T_n} A_iB_j \right\| \leqslant \sum_{(i,j)\in K_n} |||A_i||| \cdot |||B_j||| - \sum_{(i,j)\in T_n} |||A_i||| \cdot |||B_j|||$

(b) En déduire que $\sum C_n$ converge et que $\sum_{k=0}^{+\infty} C_k = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} A_i\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} B_j\right)$.

(c) Justifier que $\sum C_n$ converge absolument.

Partie IV – Exponentielle générale

1. À l'aide de la norme $|||.|||$, montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, la série définissant $\exp(A)$ est bien définie. Ainsi, $\exp(A)$ est bien définie pour toute matrice carrée.
2. Soit $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA$. Établir $\exp(A)\exp(B) = \exp(A+B)$.
3. Trouver deux matrices A et B telles que $\exp(A)\exp(B) \neq \exp(A+B)$.

Partie V – Logarithme matriciel

1. (a) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ est absolument convergente sur $]-1,1[$.

(b) À l'aide d'une formule de Taylor, montrer que pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\ln(1+x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}.$$

(c) On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$, et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\ln(1+x)^k = \sum_{i=0}^{n} a_{k,i}x^i + o(x^n) \qquad \text{et} \qquad (-\ln(1-x))^k = \sum_{i=0}^{n} b_{k,i}x^i + o(x^n)$$

les développements limités de $\ln(1+x)^k$ et $(-\ln(1-x))^k$ au voisinage de 0.
Montrer que si $i < k$, $a_{k,i} = b_{k,i} = 0$

(d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{k,n}}{k!} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \text{ ou } n = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{b_{k,n}}{k!} = 1$$

2. Justifier que pour tout $(k,i) \in \mathbb{N}^2$, $|a_{k,i}| = b_{k,i}$
3. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $|||A||| < 1$. Montrer que $\ln(I_p + A)$ est bien définie (i.e. la série qui le définit est convergente).
4. On suppose jusqu'à la fin du problème que $|||A||| < 1$.

(a) Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\ln(I_p + A)^k = \sum_{i=0}^{+\infty} a_{k,i}A^i.$$

(b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}(\ln(I_p + A))^k = I_p + A + \sum_{m=N+1}^{+\infty} A^m \sum_{k=0}^{N} \frac{a_{k,m}}{k!}.$$

(c) En faisant les majorations dans $\overline{\mathbb{R}}$, et en faisant intervenir les coefficients $b_{k,m}$ montrer que

$$\left\| \sum_{m=N+1}^{+\infty} A^m \sum_{k=0}^{N} \frac{a_{k,m}}{k!} \right\| \leqslant \frac{|||A|||^{N+1}}{1 - |||A|||}.$$

(d) En déduire que $\exp(\ln(I_p + A)) = I_p + A$.