

DM n° 20 : DL - Polynômes

Suggestion de travail supplémentaire (à ne pas me rendre) : Le problème 16 de la sélection : très joli problème de géométrie polynomiale. Il s'agit d'étudier des propriétés de l'image réciproque d'un disque de rayon 2 par un polynôme unitaire.

Problème 1 – Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On étudie les polynômes $P(X)$ à coefficients réels tels que :

$$(X^2 - 1)P''(X) + 4XP'(X) = \lambda P(X). \quad (1)$$

Partie I – Propriétés des solutions de (1)

Soit $P(X)$ une solution non nulle de (1), de degré noté n .

1. Montrer que $\lambda = n(n + 3)$.
2. Soit $Q(X) = (-1)^n P(-X)$. Montrer que $Q(X)$ est solution de (1).
3. En étudiant le degré du polynôme $P(X) - Q(X)$, prouver que $P(X) = Q(X)$.
En déduire la parité de $P(X)$ en fonction de n .

Inversement, on se propose de prouver qu'étant donné un entier $n \geq 0$, il existe un polynôme $P_n(X)$ et un seul dont le terme de plus haut degré est X^n et tel que $P_n(X)$ soit solution de l'équation (1), avec le choix de $\lambda = n(n + 3)$.

4. Déterminer $P_0(X)$, $P_1(X)$, $P_2(X)$.

5. Dans le cas général, on pose : $P_n(X) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2k} X^{n-2k}$, avec $a_0 = 1$.

Expliciter un système linéaire satisfait par les nombres a_{2k} , $k \in \llbracket 0, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \rrbracket$.

Montrer que ce système admet une unique solution (que l'on ne demande pas d'expliciter)

6. Donner à l'aide des polynômes P_n , $n \in \mathbb{N}$, et selon les valeurs de λ , l'ensemble E_λ des solutions polynomiales de l'équation (1).

Partie II – Une relation de récurrence pour le calcul de P_n

On se propose d'établir que pour tout $n \geq 2$:

$$P_n(X) - XP_{n-1}(X) + \frac{n^2 - 1}{4n^2 - 1} P_{n-2}(X) = 0. \quad (2)$$

1. On considère, pour tout $n \geq 2$, $R_n(X) = (X^2 - 1)P'_n(X) - nXP_n(X)$.
 - (a) Calculer $R'_n(X)$ en fonction de $P'_n(X)$ et de $P_n(X)$.
 - (b) Déterminer $(X^2 - 1)R''_n(X) + 4XR'_n(X)$ en fonction du polynôme $R_n(X)$ seulement.
 - (c) Montrer que $(X^2 - 1)P'_n(X) - nXP_n(X) + \frac{n(n + 2)}{2n + 1} P_{n-1}(X) = 0$
2. Donner une relation entre $P'_n(X)$, $P'_{n-1}(X)$ et $P_n(X)$, et montrer finalement la relation (2).
3. Écrire une fonction Python prenant n en paramètre et retournant P_n (sous forme de liste des coefficients)

Problème 2 – (Développement asymptotique de la fonction Γ et formule de Stirling, d'après X 2015)

Ce problème a pour but de déterminer un développement asymptotique en $+\infty$ de la fonction Γ , définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt,$$

pour tout x en lequel cette intégrale est convergente. Cette fonction est une généralisation à $\mathbb{R}$ des factorielles. À ce titre, on retrouve de la sorte la formule de Stirling, et même le terme suivant du développement asymptotique de la factorielle en $+\infty$.

- On admet le résultat suivant (intégrale de Gauss, calculée lors d'un exercice) :

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

- On rappelle que si f est continue sur un intervalle $]a, b]$, $\int_a^b f(t) dt$ est convergente ssi $\lim_{A \rightarrow a^+} \int_A^b f(t) dt$ existe dans $\mathbb{R}$, et cette limite est alors par définition égale à $\int_a^b f(t) dt$. Une définition similaire vaut pour la borne supérieure. Si on doit prendre la limite sur les deux bornes, il faut faire les deux passages à la limite indépendamment.
- On rappelle que si f et g sont deux fonctions positives et continues sur $]a, b]$, et si $f \leq g$, la convergence de $\int_a^b g$ entraîne celle de $\int_a^b f$; la conclusion est la même si $f = o(g)$ et $f \sim_a g$. Une propriété symétrique est valable pour les fonctions continues sur $[a, b[$ (b pouvant être $+\infty$).
- On rappelle également que si f est continue sur $]a, b[$, alors l'intégrale $\int_a^b f$ converge si et seulement s'il existe $c \in]a, b[$, tel que $\int_a^c f$ ET $\int_c^b f$ convergent.
- Enfin, si f est une fonction continue sur $]a, b]$ (ou $[a, b[$, ou $]a, b[$, les bornes pouvant être infinies) on dit que f est intégrable sur $]a, b]$ si $\int_a^b |f|$ converge. On rappelle que l'intégrabilité de f entraîne alors aussi la convergence de $\int_a^b f$.

Partie I – Autour de la fonction Γ

1. Justifier la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}} dt$.
2. Déterminer les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ pour lesquelles l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$ est convergente.
3. Déterminer le domaine de définition de la fonction Γ , c'est-à-dire l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles l'intégrale définissant Γ est convergente.
4. Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.
5. À l'aide d'un changement de variable (qu'on effectuera d'abord sur un intervalle $[a, b]$ sur lequel l'intégrande est continue), montrer que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Partie II – Généralisation de la formule de Stirling

1. Montrer que pour tout $y > 0$, $\Gamma(y) = y^{-1} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^y dt$, puis que

$$\Gamma(y) = e^{-y} y^y \int_{-1}^{+\infty} e^{-y\varphi(u)} du,$$

où φ est la fonction définie sur $] -1, +\infty[$ par $\varphi(u) = u - \ln(1+u)$.

2. Montrer que φ induit par restriction une bijection $\varphi_- :] -1, 0[\rightarrow]0, +\infty[$ et une bijection $\varphi_+ :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$. On notera φ_-^{-1} et φ_+^{-1} leurs bijections réciproques.

3. (a) Montrer que pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de 0 telle que $\frac{f(x)}{x}$ admette une limite finie en 0, la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ se prolonge en 0 en une fonction de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ au voisinage de 0 (on pourra se ramener au cas d'une fonction f dont toutes les dérivées en 0 sont nulles jusqu'à l'ordre n)
- (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute fonction f de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de 0 dont le développement limité à l'ordre k (pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$) au voisinage de 0 est donné par

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k + o(x^k),$$

la fonction définie par

$$g(x) = \frac{f(x) - (a_0 + a_1x + \cdots + a_{k-1}x^{k-1})}{x^k}$$

se prolonge par continuité en 0 en une fonction de classe $\mathcal{C}^{n-k}$ au voisinage de 0.

- (c) Montrer que la fonction $\sqrt{\varphi}$ est définie sur $] -1, +\infty[$, et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur chacun des intervalles $] -1, 0]$ et $[0, +\infty[$ (mais les dérivées n -ièmes à gauche et à droite en 0 peuvent différer).
4. (a) Montrer que $\sqrt{\varphi}$ induit des bijections de $] -1, 0]$ sur $[0, +\infty[$ et de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$. On note ψ_- et ψ_+ respectivement leurs réciproques.
- (b) Justifier que ψ_- et ψ_+ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine et exprimer φ_-^{-1} et φ_+^{-1} en fonction de ψ_- et de ψ_+ .
- (c) Justifier que ψ_- et ψ_+ admettent des développements limités à tous ordres au voisinage à droite de 0. En se servant d'un développement de $\sqrt{\varphi}$, déterminer les développements à l'ordre 3 de ψ_- et ψ_+ .
- (d) En déduire que lorsque x est au voisinage de 0, $x > 0$, on a :

$$\varphi_+^{-1}(x) = \sqrt{2x} + \frac{2x}{3} + \frac{x^{3/2}}{9\sqrt{2}} + o(x^{3/2}) \quad \text{et} \quad \varphi_-^{-1}(x) = -\sqrt{2x} + \frac{2x}{3} - \frac{x^{3/2}}{9\sqrt{2}} + o(x^{3/2}),$$

ainsi que :

$$(\varphi_+^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} + \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{x}}{6\sqrt{2}} + o(\sqrt{x}) \quad \text{et} \quad (\varphi_-^{-1})'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2x}} + \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{x}}{6\sqrt{2}} + o(\sqrt{x})$$

5. (a) Montrer que pour tout $y > 0$, $\Gamma(y) = e^{-y}y^y \int_0^{+\infty} e^{-yt}((\varphi_+^{-1})'(t) - (\varphi_-^{-1})'(t)) dt$

* (b) En déduire que lorsque y tend vers $+\infty$,

$$\Gamma(y) = e^{-y}y^y \left(\frac{2\pi}{y} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{12y} + o\left(\frac{1}{y}\right) \right).$$

6. Retrouver la formule de Stirling à partir de cette égalité.

Problème 3 – Polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_p$.

Soit p un nombre premier, et soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier fixé. On note pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A(k)$ l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de degré k de $\mathbb{F}_p[X]$, et $I(k) = \text{Card}(A(k))$. Le but de l'exercice est de donner une formule pour le calcul de $I(n)$.

1. Soit d un diviseur de n et $P \in A(d)$.

- (a) On définit la relation de congruence modulo P sur $\mathbb{F}_p[X]$ par $Q_1 \equiv Q_2 [P]$ si et seulement si $Q_1 - Q_2$ est divisible par P . Montrer que la relation de congruence est une relation d'équivalence.
- (b) Soit $\mathbb{K}$ le quotient de $\mathbb{F}_p[X]$ par la relation de congruence modulo P . Montrer que la somme et le produit de $\mathbb{F}_p[X]$ passent au quotient, et que $\mathbb{K}$ muni de ces lois est un corps fini.

On note $\chi \in \mathbb{K}$ la classe d'équivalence du monôme X de $\mathbb{F}_p[X]$, et on identifie les éléments de $\mathbb{F}_p$ aux classes d'équivalence des polynômes constants. Ainsi, on peut considérer que $\mathbb{F}_p \subset \mathbb{K}$, et en particulier, tout polynôme de $\mathbb{F}_p[X]$ peut être vu comme un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

- (c) Montrer que P admet une racine dans $\mathbb{K}$, en tant que polynôme de $\mathbb{K}[X]$ (on donnera explicitement une racine de P).

(d) Montrer que $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel de dimension d sur $\mathbb{F}_p$, puis que

$$\text{Card}(\mathbb{K}) = p^d.$$

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{K}$, $x^{p^d} = x$. En considérant $P \wedge (X^{p^n} - X)$, en déduire que P divise $X^{p^n} - X$.

3. Nous établissons la réciproque :

- (a) Montrer qu'il existe un corps $\mathbb{K}'$ contenant $\mathbb{F}_p$ tel que $X^{p^n} - X$ soit scindé sur $\mathbb{K}'$. Justifier que ses racines sont toutes simples.
- (b) Soit $\mathbb{F}_{p^n}$ le sous-ensemble de $\mathbb{K}'$ constitué des racines de $X^{p^n} - X$. Montrer que $\mathbb{F}_{p^n}$ est un corps fini dont on précisera le cardinal, et que $\mathbb{F}_p \subset \mathbb{F}_{p^n}$.
- (c) Soit P un facteur irréductible sur $\mathbb{F}_p$ de $X^{p^n} - X$, et $\mathbb{K}$ et χ comme dans la question 1. Montrer que l'identification de χ à une racine x de P dans $\mathbb{F}_{p^n}$ permet de considérer $\mathbb{K}$ comme sous-corps de $\mathbb{F}_{p^n}$.
- (d) En déduire que $d \mid n$.

4. Déduire des questions précédentes que :

$$\sum_{d \mid n} dI(d) = p^n \quad \text{puis:} \quad I(n) = \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) p^d,$$

où μ est la fonction de Möbius, définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ admet dans sa décomposition un facteur premier de valuation au moins 2} \\ (-1)^k & \text{sinon,} \end{cases}$$

où k est le nombre de facteurs premiers distincts dans la décomposition primaire de n .