

DM n° 22 : Balbutiements d'algèbre linéaire

Problème 1 – Complexifié d'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

On rappelle que tout espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ peut être considéré comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On distinguera soigneusement, pour un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E , les notions de :

- *sous-espace* (pour la structure complexe)
- *sous-espace sur $\mathbb{R}$* (pour la structure réelle)
- *sous-espace réel* (défini en 2)

Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

1. Vérifier que tout sous-espace de E est un sous-espace de E sur $\mathbb{R}$, et que la réciproque est fausse.
2. Soit F un sous-espace de E sur $\mathbb{R}$; on note iF l'ensemble des vecteurs de la forme ix , pour x décrivant F : ainsi, $iF = \{ix \mid x \in F\}$. On dit que F est un *sous-espace réel* si $F \cap iF = \{0\}$.
 - (a) Vérifier que iF est un sous-espace vectoriel de E sur $\mathbb{R}$.
 - (b) Montrer que $i(iF) = F$.
 - (c) Si F est de dimension finie, exprimer une base (sur $\mathbb{R}$) de iF en fonction d'une base (sur $\mathbb{R}$) donnée $b_1, \dots, b_n$ de F . Déterminer une relation entre $\dim(F)$ et $\dim(iF)$.
 - (d) Montrer que $F \cap iF$ est le plus grand sous-espace de E inclus dans F .
 - (e) Montrer que tout supplémentaire de $F \cap iF$ dans F est un sous-espace réel de E .
3. Soit F un sous-espace réel de E . Vérifier que :
 - (a) toute famille libre (sur $\mathbb{R}$) dans F est libre sur $\mathbb{C}$ dans E .
 - (b) si $\dim_{\mathbb{C}} E = n$, on a $\dim_{\mathbb{R}} F \leq n$, avec égalité si et seulement si $E = F \oplus iF$.
4. Soit G un sous-espace de E de dimension finie. Montrer que G contient un sous-espace réel F vérifiant : $F \oplus iF = G$. Un tel sous-espace est-il unique ?
- *5. En utilisant l'axiome du choix, généraliser la question précédente au cas d'un sous-espace de dimension infinie.
6. Soit F un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ quelconque.
 - (a) Vérifier qu'on définit une structure d'espace vectoriel complexe sur $F \times F$ par les opérations :

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \quad \text{et} \quad (a + ib) \cdot (x, y) = (ax - by, bx + ay).$$

On note $F_{\mathbb{C}}$ l'espace vectoriel ainsi obtenu. Cet espace est appelé le *complexifié* de F . On note encore F le sous-espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de $F_{\mathbb{C}}$ constitué des éléments $(x, 0)$, pour $x \in F$.

- (b) Montrer que F est un sous-espace réel de $F_{\mathbb{C}}$.
- (c) Montrer que $F_{\mathbb{C}} = F \oplus iF$.
- (d) Un sous-espace réel de $F_{\mathbb{C}}$ est-il forcément un sous-espace sur $\mathbb{R}$ de F ?
7. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ (de dimension finie). Existe-t-il un espace vectoriel F sur $\mathbb{R}$ tel que E soit isomorphe au complexifié de F ?

Problème 2 – Polynôme minimal irréductible

On considère un espace vectoriel E sur un corps $\mathbb{K}$. On admettra le théorème de la dimension : si E admet une base finie, alors toutes les bases de E sont finies et de même cardinal. Ce cardinal commun est par définition la dimension de E , qui est notée $\dim(E)$.

On admettra également que si F est un sous-espace vectoriel de E , alors $\dim(F) \leq \dim(E)$, et que l'égalité est alors vérifiée si et seulement si $F = E$.

On se donne f un endomorphisme non nul de E , et on suppose que f admet un polynôme annulateur $P \in \mathbb{K}[X]$ irréductible unitaire, dont on notera le degré $d > 0$.

Question préliminaire :

Montrer que $\text{Ker}(f) = \{0\}$.

Partie I – Polynôme minimal ponctuel

On appelle polynôme annulateur ponctuel de f en $x \in E$, un polynôme $Q = \sum_{i=0}^k a_i X^i$ tel que

$$P(f)(x) = \sum_{i=0}^k a_i f^i(x) = 0,$$

où f^i désigne l'itérée de la composition.

Soit I le sous-ensemble de $\mathbb{K}[X]$ formé des polynômes annulateurs de f et, pour $x \in E$, J_x le sous-ensemble de $\mathbb{K}[X]$ formé des polynômes annulateurs ponctuels de f en x .

1. Montrer que I et J_x , pour $x \in E$, sont des idéaux de $\mathbb{K}[X]$.
2. En déduire l'existence de polynômes unitaires de degrés minimaux, Q et Q_x , tels que Q soit annulateur de f et Q_x soit annulateur ponctuel de f en x , et que Q (resp. Q_x) divise tout autre polynôme annulateur (resp. polynôme annulateur ponctuel en x) de f .
3. Montrer que $Q = P$
4. Montrer que pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $Q_x = P$.

Partie II – Endomorphisme induit

Soit F un sous-espace réduit à $\{0\}$ de E . On dit que F est stable par f si $f(F) \subset F$.

1. Montrer que si F est un sous-espace stable par f , alors f définit par restriction/corestriction un endomorphisme $\tilde{f}$ (appelé endomorphisme induit par f sur F) et que tout polynôme annulateur de f est aussi polynôme annulateur de $\tilde{f}$.
2. Montrer que sous les conditions du problème, le polynôme minimal de $\tilde{f}$ (i.e. polynôme annulateur non nul unitaire de plus petit degré) est P .

Partie III – Dimension de E

On suppose dans cette partie que E est de dimension finie.

1. Soit $e_1 \in E \setminus \{0\}$. Montrer que $(e_1, f(e_1), \dots, f^{d-1}(e_1))$ est une famille libre de E , et en déduire que $\dim(E) \geq d$.
On note $E_1 = \text{Vect}(e_1, \dots, f^{d-1}(e_1))$.
2. Montrer que E_1 est stable par f .
3. On suppose que $E_1 \neq E$, et on considère $e_2 \in E \setminus E_1$. On note $E_2 = \text{Vect}(e_2, f(e_2), \dots, f^{d-1}(e_2))$.
 - (a) Montrer que $E_1 \cap E_2$ est stable par f .
 - (b) En considérant un polynôme annulateur de l'endomorphisme de $E_1 \cap E_2$ induit par f , en déduire que $E_2 \cap E_1 = \{0\}$.
 - (c) Montrer l'existence de vecteurs $e_1, \dots, e_k$ de E tels que

$$E = \bigoplus_{i=1}^k E_i,$$

où, pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $E_i = \text{Vect}(e_i, f(e_i), \dots, f^{d-1}(e_i))$.

4. Montrer que $\dim(E)$ est divisible par d , et en décrire une base à l'aide des vecteurs e_i (on justifiera la réponse).