

DM n° 23 : Algèbre linéaire : entraînement pour le DS

Ce devoir n'est pas à rendre. Il est donné en guise d'entraînement au DS du 07/05.

Problème 1 – Sous-espaces stables par un endomorphisme

Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel sur un corps K . On suppose que E est de dimension finie non nulle.

Le but de ce problème est d'étudier les sous-espaces stables par un endomorphisme u de E . On rappelle qu'un sous-espace F de E est dit stable par u lorsque $u(F) \subset F$.

Étant donné $u \in \mathcal{L}(E)$, on note $K[u] = \{P(u) \mid P \in K[X]\}$ le sous-ensemble de $\mathcal{L}(E)$ constitué des endomorphismes s'écrivant comme un polynôme en l'endomorphisme u . On rappelle que pour tous polynômes P et Q , on a $P(u) \circ Q(u) = Q \circ P(u) = (PQ)(u)$.

On rappelle que P est un polynôme annulateur de u si $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Partie I – Quelques résultats préliminaires sur les sous-espaces stables

1. **Intersection et somme de sous-espaces stables.** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

- (a) Justifier qu'il existe un sous-espace de E stable par u .
- (b) Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces stables par u . Montrer que $\bigcap_{i \in I} F_i$ est stable par u , ainsi que, lorsque I est fini, $\sum_{i \in I} F_i$.

2. **Endomorphismes laissant stable un sous-espace donné.** Soit F un sous-espace de E .

- (a) Montrer que si F est stable par u et v de $\mathcal{L}(E)$, alors F est stable par $\lambda u + v$ ($\lambda \in K$) et par $u \circ v$.
- (b) Que peut-on dire de la structure algébrique de $\{u \in \mathcal{L}(E) \mid u(F) \subset F\}$?
- (c) Justifier que si F est stable par u , alors F est stable par tout élément $P(u)$ de $K[u]$ ($P \in K[X]$).

3. **Sous-espaces stables définis par des noyaux et images de polynômes en u .** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

- (a) Montrer que $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont stables par u .
- (b) Montrer plus généralement que pour tout $P \in K[X]$, $\text{Ker}(P(u))$ et $\text{Im}(P(u))$ sont stables par u .

4. **Polynôme minimal ponctuel.** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$.

- (a) En étudiant la liberté d'une certaine famille, montrer qu'il existe un polynôme $P \in K[X]$ non nul tel que $P(u)(x) = 0$.
- (b) Montrer que l'ensemble des polynômes P tels que $P(u)(x) = 0$ est un idéal de $K[X]$.
- (c) En déduire l'existence et l'unicité d'un polynôme $\pi_{u,x}$ unitaire non nul de degré minimal tel que $\pi_{u,x}(u)(x) = 0$. Ce polynôme $\pi_{u,x}$ est appelé polynôme minimal ponctuel de u en x .

5. **Sous-espaces cycliques.** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

- (a) Soit X une partie de E . Montrer l'existence d'un sous-espace stable par u minimal au sens de l'inclusion et contenant X . Lorsque $X = \{x\}$ est un singleton, on note $\langle x \rangle_u$ ce sous-espace stable minimal.
- (b) Montrer que $\langle x \rangle_u = \text{Vect}(u^k(x), k \in \mathbb{N})$, et en notant $d = \deg(\pi_{u,x})$, montrer que $\mathcal{B}_x = (u^k(x))_{k \in [0, d-1]}$ en est une base.
- (c) Soit u_x l'endomorphisme de $\langle x \rangle_u$ induit par u sur le sous-espace stable $\langle x \rangle_u$. Déterminer sa matrice dans la base $\mathcal{B}_x$ en fonction des coefficients du polynôme $\pi_{u,x}$.

Partie II – Sous-espaces stables par un projecteur ou une symétrie

Soit p un projecteur de E .

1. Soit F un sous-espace vectoriel de $\text{Im}(p)$ et G un sous-espace vectoriel de $\text{Ker}(p)$. Montrer que $F + G$ est stable par p .
2. Soit H un sous-espace vectoriel de E stable par p . Montrer que $H = (H \cap \text{Im}(p)) \oplus (H \cap \text{Ker}(p))$.
3. En déduire une description exhaustive des sous-espaces stables par p .

On montre dans la suite du devoir que ceci est un cas particulier d'une situation générique.

Partie III – Diagonalisation

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que $x \in E$ est un vecteur propre de u s'il est non nul et si $u(x)$ et x sont colinéaires, autrement dit si x est non nul et s'il existe $\lambda \in K$ tel que $u(x) = \lambda x$. Le scalaire λ est alors appelé valeur propre de u . Ainsi, $\lambda \in K$ est une valeur propre de u si et seulement s'il existe un vecteur x non nul tel que $u(x) = \lambda x$. On dira dans ce cas que x est un vecteur propre associé à la valeur propre λ .

On note $\text{Sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u . Ce sous-ensemble de K est appelé spectre de u .

1. Valeurs propres et espaces propres

- (a) Montrer que λ est une valeur propre de u si et seulement si $u - \lambda \text{id}$ n'est pas un automorphisme, et que dans ce cas, les vecteurs propres associés à λ sont les vecteurs non nuls de $\text{Ker}(u - \lambda \text{id})$. On note $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{id})$. Ce sous-espace de E est appelé sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ .
- (b) Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des valeurs propres de u et $F_1, \dots, F_k$ des sous-espaces vectoriels de $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_k}(u)$. Montrer que $F_1 + \dots + F_k$ est stable par u .

2. Valeurs propres et polynôme annulateur

- (a) Soit P un polynôme, et x un vecteur propre de u , associé à une valeur propre λ . Montrer que $P(u)(x) = P(\lambda) \cdot x$.
- (b) En déduire que si P est un polynôme annulateur de u , $\text{Sp}(u) \subset \text{rac}(P)$, où $\text{rac}(P)$ désigne l'ensemble des racines de P .
- (c) Justifier que l'ensemble I_u des polynômes $P \in K[X]$ tels que $P(u) = 0$ est un idéal de $K[X]$, et en déduire l'existence d'un polynôme unitaire non nul π_u annulateur de u et divisant tout autre polynôme annulateur. Ce polynôme est appelé polynôme minimal de u .
- (d) Soit λ une racine de π_u . On écrit $\pi_u = (X - \lambda)Q$, avec $Q \in K[X]$. En supposant que λ n'est pas valeur propre de u , contredire la minimalité de π_u .
- (e) En déduire que $\text{Sp}(u) = \text{rac}(\pi_u)$.
- (f) En déduire que u admet un nombre fini de valeurs propres.

3. Lemme de décomposition des noyaux. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

- (a) Soit P et Q deux polynômes de $K[X]$ premiers entre eux. En se servant d'une relation de Bezout, montrer que

$$\text{Ker}((PQ)(u)) = \text{Ker}(P(u)) \oplus \text{Ker}(Q(u)).$$

- (b) En déduire que si $P_1, \dots, P_k$ sont des polynômes deux à deux premiers entre eux, alors

$$\text{Ker}((P_1 \cdots P_k)(u)) = \text{Ker}(P_1(u)) \oplus \cdots \oplus \text{Ker}(P_k(u)).$$

4. Diagonalisabilité. On dit que u est diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale.

- (a) Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres de u . Montrer que la somme $E_{\lambda_1}(u) + \cdots + E_{\lambda_k}(u)$ est directe, et identifier cette somme comme noyau d'un polynôme en u .
- (b) Montrer que u est diagonalisable si et seulement si

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u).$$

- (c) En déduire que u est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal π_u est scindé à racines simples.

Partie IV – Description des sous-espaces stables

Soit u un endomorphisme de E , et π_u son polynôme minimal, factorisé sous la forme

$$\pi_u = P_1^{\alpha_1} \cdots P_k^{\alpha_k},$$

où les P_i sont des polynômes irréductibles unitaires deux à deux distincts, et les α_i des entiers naturels non nuls.

1. Justifier que $E = \bigoplus_{i=1}^k \text{Ker}(P_i^{\alpha_i}(u))$.
2. Soit F un sous-espace stable par u , et $v \in \mathcal{L}(F)$ l'endomorphisme de F induit par u .
 - (a) Décrire $\text{Ker}(P_i^{\alpha_i}(v))$ en fonction de $\text{Ker}(P_i^{\alpha_i}(u))$ et F .
 - (b) En déduire que

$$F = \bigoplus_{i=1}^k (\text{Ker}(P_i^{\alpha_i}(u)) \cap F).$$

3. En déduire qu'un sous-espace F de E est stable par u si et seulement s'il s'écrit comme somme directe de sous-espaces F_i des $\text{Ker}(P_i^{\alpha_i}(u))$, chaque F_i étant stable par u .
4. Donner une description des sous-espaces stables par un endomorphisme diagonalisable u en fonction des sous-espaces vectoriels des sous-espaces propres de u .
5. Expliquer en quoi le résultat de la partie II concernant les projecteurs est un cas particulier du résultat de la question précédente.
6. On suppose que u possède n valeurs propres distinctes, n étant la dimension de E .
 - (a) Justifier que u est diagonalisable et donner la dimension des sous-espaces propres de u .
 - (b) Montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de sous-espaces stables par u . En donner une description. Combien y en a-t-il ?

Partie V – Endomorphismes semi-simples

On dit que u est semi-simple si tout sous-espace de E stable par u admet un supplémentaire dans E stable par u .

Soit u un endomorphisme quelconque de E .

1. Montrer que pour tout $y \in E$ non nul, $\pi_{u,y}$ divise π_u (notation introduite dans la partie I pour le polynôme minimal ponctuel $\pi_{u,y}$ et dans la partie III pour le polynôme minimal π_u).
2. On suppose dans cette question que π_u est irréductible. On souhaite montrer que u est semi-simple.
 - (a) Justifier que pour tout y non nul de E , $\pi_{u,y} = \pi_u$.
 - (b) Soit F un sous-espace stable par u tel que $F \neq E$, et on fixe $x \in E \setminus F$. Montrer que $F \cap \langle x \rangle_u = \{0\}$.
 - (c) Conclure soigneusement.
3. On suppose dans cette question que $\pi_u = P_1 \cdots P_k$, les P_i étant irréductibles unitaires distincts.
 - (a) Soit $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$. Montrer que l'endomorphisme φ_i induit par u sur $\text{Ker}(P_i(u))$ est semi-simple. On justifiera au préalable que $\text{Ker}(P_i(u)) \neq \{0\}$.
 - (b) En déduire que u est semi-simple.
4. On suppose inversement qu'il existe un irréductible unitaire P de $K[X]$ tel que P^2 divise π_u . On note $\pi_u = PQ$, avec $Q \in K[X]$. On souhaite prouver que le sous-espace $F = \text{Ker}(P(u))$ ne possède pas de supplémentaire stable par u . On raisonne par l'absurde et on considère S un tel supplémentaire.
 - (a) Soit $x \in S$. Justifier que $Q(u)(x) \in F$, et en déduire que $Q(u)(x) = 0$.
 - (b) L'endomorphisme u est-il semi-simple ?

Partie VI – $K[u]$ -modules et sous-espaces stables

Soit A un anneau, et E un ensemble, muni d'une loi de composition interne additive notée $+$, et d'une loi de composition externe sur A , notée $\cdot$. On dit que E est un module sur A (ou un A -module) si ces lois vérifient les mêmes propriétés que celles définissant un espace vectoriel, à la seule exception que le corps de base est remplacé par un anneau. Un sous- A -module de E est un sous-ensemble de E non vide et stable par combinaisons linéaires à coefficients dans A . Si F et G sont deux sous-modules de E , on définit la somme $F + G$ comme l'ensemble des éléments de E s'écrivant

sous la forme $f + g$, où $f \in F$ et $g \in G$. On dira, comme dans le cas des espaces vectoriels, que F et G sont en somme directe si $F \cap G = \{0\}$ (et on notera dans ce cas la somme $F \oplus G$), et que F et G sont supplémentaires dans E si $F \oplus G = E$. On prendra garde au fait que contrairement au cas des espaces vectoriels, un sous-module de E peut ne pas avoir de supplémentaire dans E .

On remarquera que si A est un corps, les notions de A -module et de A -espace vectoriel coïncident.

On reprend le contexte initial (E est un espace vectoriel sur un corps K) et on considère un endomorphisme u de E .

1. Justifier que $K[u]$ est un anneau, isomorphe au quotient $K[X]/(\pi_u)$ (on pourra voir $K[u]$ comme l'image d'un morphisme d'anneaux de $K[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$).
2. Montrer que l'opération $P(u) \cdot x = P(u)(x)$ munit E d'une structure de $K[u]$ -module.
3. Montrer que si M est un sous- $K[u]$ -module de E , alors M est un sous-espace vectoriel de E . La réciproque est-elle vraie en général? Caractériser les endomorphismes pour lesquels la réciproque est vraie. Que vaut $K[u]$ dans ce cas?
4. Montrer qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par u si et seulement s'il s'agit d'un sous- $K[u]$ -module de E .

En particulier, on observera qu'un sous-espace F stable par u admet un supplémentaire stable par u si et seulement si le $K[u]$ -module F admet un supplémentaire (en tant que $K[u]$ -module) dans E .

5. On se propose dans cette question de retrouver à l'aide de cette structure de $K[u]$ -module le fait que si π_u est irréductible, u est semi-simple. On suppose donc que π_u est irréductible.
 - (a) Justifier que $K[u]$ est un corps.
 - (b) En déduire que u est semi-simple.

Partie VII – Endomorphismes cycliques et endomorphismes simples

On dit que u est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $\langle x \rangle_u = E$. On dit d'autre part que u est simple lorsque les seuls sous-espaces de E stables par u sont $\{0\}$ et E . On étudie dans cette partie quelques propriétés de ces familles d'endomorphismes.

1. On suppose dans cette question que u est cyclique, et on fixe $x \in E$ tel que $\langle x \rangle_u = E$. Soit F un sous-espace stable par u .
 - (a) Soit I l'ensemble des polynômes $P \in K[X]$ tels que $P(u)(x) \in F$. Montrer qu'il existe $D \in K[X]$ unitaire et divisant π_u tel que $I = D \cdot K[X] = (D)$.
 - (b) Montrer que $F = \langle D(u)(x) \rangle_u$.
 - (c) En déduire qu'il n'existe qu'un nombre fini de sous-espaces de E stables par u .
2. On suppose que K est infini. Montrer la réciproque de la question précédente.
3. Dans cette question, on souhaite montrer que u est simple si et seulement si son polynôme minimal est irréductible de degré égal à $n = \dim(E)$.
 - (a) Supposons que π_u est irréductible, et notons d son degré. Montrer que tout sous- $K[u]$ -espace vectoriel de E est un sous- K -espace vectoriel de dimension divisible par d .
 - (b) En déduire que si π_u est irréductible de degré n , alors u est simple.
 - (c) Établir la réciproque.

Problème 2 – Dualité et théorème d'Erdős-Kaplansky

Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés liées à la dualité en algèbre linéaire, c'est-à-dire à la comparaison de certaines situations se produisant dans E et dans son dual E^* . On montre en particulier qu'en dimension finie, le bidual E^{**} peut être identifié canoniquement à E .

Notre but final est de démontrer, dans la dernière partie que ce résultat est toujours faux en dimension infinie. Plus précisément, nous démontrons le théorème d'Erdős-Kaplansky, affirmant que la dimension de E^* est dans ce cas égal à son cardinal (i.e. E^* peut être mis en bijection avec n'importe laquelle de ses bases). Pour cette partie, nous aurons besoin de certains prérequis sur les cardinaux, que nous avons déjà démontrés dans certains DM, et que nous admettrons ici pour ne pas trop rallonger le sujet. Nous admettrons également quelques propriétés liées à la dimension infinie.

Dans tout le problème, on considère que l'axiome du choix est valide.

Rappels et notations

- Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne un corps.
- On rappelle que le dual E^* d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires sur E .
- Le bidual $E^{**} = (E^*)^*$ de E est par définition le dual du dual de E , donc $\mathcal{L}(E^*, \mathbb{K})$.
- Soit A un ensemble, et $(a, b) \in A^2$. Le symbole de Kroneker $\delta_{a,b}$ est égal à 1 si $a = b$ et 0 sinon.
- Soit A un ensemble. On note $\mathbb{K}^A$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ constitué de toutes les applications de A dans $\mathbb{K}$, et $\mathbb{K}^{(A)}$ son sous-espace constitué des applications à support fini (c'est-à-dire s'annulant en tout point de A sauf en un nombre fini)
- On admet que tout espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ admet au moins une base $\mathcal{B}$, y compris si E est de dimension infinie. Plus précisément, on admet qu'on peut généraliser (avec l'axiome du choix) le théorème de la base incomplète, dans sa version la plus précise : étant donnée une famille libre de E , on peut la compléter en une base par ajout de vecteurs d'une famille génératrice fixée.
- En particulier, on en déduit que tout sous-espace d'un espace E admet un supplémentaire dans E , sans condition de dimension.
- On rappelle que deux ensembles A et B sont de même cardinal si et seulement s'il existe une bijection $f : A \rightarrow B$. On notera $|A| = |B|$.
- On admet le théorème de Cantor-Berstein (démontré en DM), stipulant que $|A| = |B|$ si et seulement s'il existe deux injections $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow A$, ou, de façon équivalente, s'il existe deux surjections $s : A \rightarrow B$ et $t : B \rightarrow A$.
- On dit que $|A| \leq |B|$ s'il existe une injection $A \rightarrow B$, ou, de façon équivalente, s'il existe une surjection $B \rightarrow A$.
- Soit A un ensemble infini. On admet que $|A \times A| = |A|$ (résultat démontré en DM avec des ordinaux et une récurrence transfinie, qu'on peut aussi redémontrer de façon plus directe avec le lemme de Zorn)
- On rappelle le théorème de Cantor, démontré en début d'année : pour tout ensemble X , on a $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.
- On admet la généralisation suivante du théorème de la dimension : toutes les bases d'un espace vectoriel ont même cardinal (y compris en dimension infinie) : ainsi si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont deux bases de E , il existe une bijection de $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{C}$. Ce résultat fait l'objet de la question subsidiaire.
- On définit alors la dimension de E comme le cardinal commun de toutes les bases de E . On pourra par exemple parler d'espaces de dimension dénombrable, ou de dimension égale au cardinal de $\mathbb{R}$.
- La caractérisation des isomorphismes par préservation des bases assure que si $f : E \rightarrow F$ est un isomorphisme, alors $\dim E = \dim F$, y compris en dimension infinie

Partie I – Résultats préliminaires

1. Famille duale d'une base, base duale

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $\mathcal{B}$ une base de E . Pour $b \in \mathcal{B}$, on définit $b^* \in E^*$, la forme linéaire définie par son image sur la base $\mathcal{B}$ de la façon suivante :

$$\forall \beta \in \mathcal{B}, \quad b^*(\beta) = \delta_{b,\beta}.$$

Autrement dit, b^* prend la valeur 1 sur le vecteur b de la base $\mathcal{B}$ et 0 sur tous les autres vecteurs de la base $\mathcal{B}$. On note $\mathcal{B}^* = (b^*)_{b \in \mathcal{B}}$ la famille de E^* ainsi définie, appelée famille duale de $\mathcal{B}$

- Montrer que pour tout $x \in E$, de coordonnées $(x_\beta)_{\beta \in \mathcal{B}}$ dans la base $\mathcal{B}$ (i.e. $x = \sum_{\beta \in \mathcal{B}} x_\beta \beta$), et tout $b \in \mathcal{B}$, $b^*(x) = x_b$. Ainsi, b^* est la forme linéaire qui à x associe sa coordonnée sur b relativement à la base $\mathcal{B}$.
- Montrer que $\mathcal{B}^*$ est une famille libre de E^* .
- Montrer que si E est de dimension finie, $\mathcal{B}^*$ est une base. Cette base est appelée base duale de la base $\mathcal{B}$.

2. Codimension d'un espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension quelconque, et F un sous-espace vectoriel de E . On se donne S et T deux supplémentaires de F dans E , et on définit p la projection sur T parallèlement à F .

- Montrer que $\text{Ker}(p|_S) = \{0\}$. Que peut-on en déduire sur $p|_S$?
- Soit $\mathcal{B}$ une base de S . Construire une base $\mathcal{C}$ de T telle qu'il existe une injection $i : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$
- En déduire que S et T ont même dimension (finie ou infinie).

On définit alors la codimension de F dans E comme étant la dimension commune de tous les supplémentaires de F dans E . On la note $\text{codim}_E(F)$.

Partie II – Dualité en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n , et E^* son espace dual. On définit une application $(x, \varphi) \mapsto \langle x, \varphi \rangle$ sur $E \times E^*$ par :

$$\forall (x, \varphi) \in E \times E^*, \quad \langle x, \varphi \rangle = \varphi(x).$$

1. Montrer que $(x, \varphi) \mapsto \langle x, \varphi \rangle$ est une forme bilinéaire sur $E \times E^*$ (i.e. linéaire par rapport à chacune de ses variables).
2. Soit $x \in E$. On définit $\tilde{x} : E^* \longrightarrow \mathbb{K}$ par :

$$\forall \varphi \in E^*, \quad \tilde{x}(\varphi) = \varphi(x).$$

Justifier que $\tilde{x} \in E^{**}$

3. Soit $J : E \rightarrow E^{**}$ définie par $J(x) = \tilde{x}$. Montrer que J injective, puis que c'est un isomorphisme.

L'application J est appelée *isomorphisme canonique de E dans E^{**}* . Il est assez fréquent d'identifier via cet isomorphisme les éléments de E et ceux de E^{**} . Le résultat qu'on vient de montrer implique notamment que toute forme linéaire que E^{**} correspond (en dimension finie) à une évaluation en un vecteur x de E .

Partie III – Orthogonalité duale

Soit E un espace vectoriel de dimension quelconque sur $\mathbb{K}$; on définit la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de même qu'en II.

- Pour G un sous-espace vectoriel de E , on appelle *orthogonal de G dans E^** l'ensemble

$$G^\circ = \{\varphi \in E^* \mid \forall x \in G, \langle x, \varphi \rangle = 0\}$$

- Pour H un sous-espace vectoriel de E^* , on appelle *orthogonal de H dans E* l'ensemble

$$H^\circ = \{x \in E \mid \forall \varphi \in H, \langle x, \varphi \rangle = 0\}$$

Dans les questions qui suivent, G désigne un sous-espace vectoriel de E et H un sous-espace vectoriel de E^* .

1. Propriétés élémentaires

- (a) Montrer que G° est un sous-espace vectoriel de E^* et H° est un sous-espace vectoriel de E .
- (b) Montrer que $G \subset G^{\circ\circ}$ (orthogonal dans E de G°), et que $H \subset H^{\circ\circ}$ (orthogonal dans E^* de H°).
- (c) Montrer que si G_1 et G_2 sont deux sous-espaces de E tels que $G_1 \subset G_2$, alors $G_2^\circ \subset G_1^\circ$. Énoncer et démontrer une propriété similaire pour des sous-espaces de E^* .
- (d) Soit S un supplémentaire de G dans E . Montrer que $\varphi \mapsto (\varphi|_G, \varphi|_S)$ est un isomorphisme de E^* sur $G^* \times S^*$.
- (e) Montrer que $G^\circ = \{\varphi \in E^* \mid G \subset \text{Ker}(\varphi)\}$. En déduire un isomorphisme entre G° et S^* .

2. Cas de la dimension finie

On suppose dans cette question que E est de dimension finie.

- (a) Montrer à l'aide de résultats précédents que $\dim G + \dim G^\circ = \dim E$.
 - (b) Montrer que $G = G^{\circ\circ}$ (orthogonal dans E de l'orthogonal dans E^*).
 - (c) Justifier que H vérifie des relations similaires à celles des deux questions précédentes.
3. Dans cette question, on ne suppose plus E de dimension finie, et on étudie $H^{\circ\circ}$, lorsque H est un sous-espace de dimension finie de E^* .
 - (a) Soit G un sous-espace de E de codimension finie. À l'aide d'une question précédente, montrer que G° est de dimension finie, et que $\dim(G^\circ) = \text{codim}_E(G)$.
 - (b) Soit H un sous-espace vectoriel de dimension finie p de E^* , et $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ une base de H . On pose $G = H^\circ$ son orthogonal dans E . Soit $u : E \longrightarrow \mathbb{K}^p$ définie pour tout $x \in E$ par

$$u(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_p(x)).$$

Montrer que $H^\circ = \text{Ker}(u)$

- (c) En considérant un supplémentaire de $\text{Ker}(u)$ dans E , en déduire que $\text{codim}_E(G) \leq \dim H$.
- (d) À l'aide de résultats antérieurs, en déduire que $G^\circ = H$, i.e. $H^{\circ\circ} = H$.

Partie IV – Transposée d’une application linéaire

Cette partie a pour but de montrer de quelle manière ces propriétés d’orthogonalité permettent de retrouver l’égalité $\text{rg}(M) = \text{rg}({}^tM)$ pour des matrices, par une approche vectorielle. Elle est complètement indépendante des deux dernières parties.

Soit E et F deux espaces vectoriels, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On définit la transposée ${}^tf : F^* \rightarrow E^*$ de f par

$$\forall \varphi \in F^*, \quad {}^tf(\varphi) = \varphi \circ f.$$

1. Justifier que tf est bien définie (i.e. à valeurs dans E^*) et que ${}^tf \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$.
2. Montrer que $\text{Ker}({}^tf) = \text{Im}(f)^\circ$.
3. En déduire que si E et F sont deux espaces de dimension finie, $\text{rg}(f) = \text{rg}({}^tf)$.
4. Retrouver à l’aide de ce résultat l’égalité $\text{rg}(M) = \text{rg}({}^tM)$ pour toute matrice M de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Indication : si $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$, exprimer la matrice de tf relativement aux bases duales $\mathcal{C}^*$ et $\mathcal{B}^*$.

Partie V – Minoration de la dimension d’un sous-espace de $\mathbb{K}^A$

1. Description du dual de $\mathbb{K}^{(A)}$.

Soit A un ensemble quelconque

- (a) Soit, pour tout $a \in A$, e_a l’application de $\mathbb{K}^{(A)}$ définie par

$$\forall b \in A, \quad e_a(b) = \delta_{a,b}.$$

Montrer que $\mathcal{B} = (e_a)_{a \in A}$ est une base de $\mathbb{K}^{(A)}$ (appelée base canonique).

- (b) Pour tout $f : A \rightarrow \mathbb{K}$, on définit $\varphi_f \in (\mathbb{K}^{(A)})^*$ par son image sur les vecteurs de la base $\mathcal{B}$:

$$\forall a \in A, \quad \varphi_f(e_a) = f(a).$$

Montrer que l’application $\Phi : f \mapsto \varphi_f$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}^A$ dans le dual $(\mathbb{K}^{(A)})^*$ de $\mathbb{K}^{(A)}$.

2. CNS de minoration de la dimension d’un sous-espace de $\mathbb{K}^A$.

- (a) Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^A$. On suppose qu’il existe $a_1, \dots, a_p \in A$ et $f_1, \dots, f_p \in V$ tels que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, \quad f_i(a_j) = \delta_{i,j}.$$

Montrer que $\dim V \geq p$.

- (b) Réciproquement, on suppose que $\dim V \geq p$, et on considère $V' = \Phi(V) \in (\mathbb{K}^{(A)})^*$. Soit H un sous-espace vectoriel de V' tel que $\dim H = p$.

- i. Montrer qu’il existe des éléments $a_1, \dots, a_p$ de A tels que $\text{Vect}(e_{a_1}, \dots, e_{a_p})$ soit un supplémentaire de H° dans $\mathbb{K}^{(A)}$ (les e_{a_k} sont les éléments de $\mathbb{K}^{(A)}$ introduits dans la question 1).
- ii. À l’aide de la partie I, en déduire qu’il existe $f_1, \dots, f_p \in \Phi^{-1}(H) \subset V$ tels que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, \quad f_i(a_j) = \delta_{i,j}.$$

Partie VI – Théorème d’Erdős-Kaplansky (partie difficile)

Le but de cette partie est de démontrer que si E est de dimension infinie, alors $\dim E^* = |E^*|$. Puisque E est isomorphe à $\mathbb{K}^{(A)}$, où A est une base de E , on peut supposer sans perte de généralité que $E = \mathbb{K}^{(A)}$, pour un certain ensemble infini A , et donc $E^* = \mathbb{K}^A$ d’après V-1.

1. Soit $\mathbb{L}$ un sous-corps de $\mathbb{K}$, et $(f_1, \dots, f_p)$ une famille libre de $\mathbb{K}^A$ telle que pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, et tout $a \in A$, $f_i(a) \in \mathbb{L}$. On pose $V = \text{Vect}_{\mathbb{L}}(f_1, \dots, f_p) \subset \mathbb{L}^A$ et $W = \text{Vect}_{\mathbb{K}}(f_1, \dots, f_p) \subset \mathbb{K}^A$
 - (a) Justifier qu’il existe $(a_1, \dots, a_p) \in A^p$ et $(g_1, \dots, g_p) \in V^p$ tels que : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, \quad g_i(a_j) = \delta_{i,j}$.
 - (b) Montrer que $(g_1, \dots, g_p)$ est une $\mathbb{K}$ -base de W .
 - (c) Montrer que pour tout $f \in W$, et tout $a \in A$, $f(a) \in \mathbb{L}[f(a_1), \dots, f(a_p)]$, où $\mathbb{L}[f(a_1), \dots, f(a_p)]$ est le plus petit sous-corps de $\mathbb{K}$ contenant tous les éléments de $\mathbb{L}$, ainsi que les éléments $f(a_i)$, $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

2. (a) Soit G un groupe et M une partie infinie de G . Montrer que si G' est le sous-groupe de G engendré par M , alors $|G'| = |M|$ (au sens des cardinaux infinis, i.e. G' et M sont équipotents)
- (b) Soit $\mathbb{K}$ un corps et M une partie infinie de $\mathbb{K}$. On considère (A_n) et (P_n) deux suites de parties de $\mathbb{K}$ définies par récurrence de la manière suivante : $A_0 = M$, et
 - si A_n est construit, P_n est le sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{K}^*$ engendré par $A_n \cap \mathbb{K}^*$;
 - si P_n est construit, A_{n+1} est le sous-groupe additif de $\mathbb{K}$ engendré par P_n .
 Montrer que les ensembles A_n et P_n ont tous le même cardinal que M .
- (c) Soit $\mathbb{K}'$ le corps engendré par la partie M de la question précédente, c'est-à-dire le plus petit sous-corps de $\mathbb{K}$ contenant tous les éléments de M . Montrer que $|\mathbb{K}'| = |M|$.
3. Soit $\mathbb{K}$ un corps, et C un ensemble infini tel que $|C| \geq |\mathbb{K}|$.
 - (a) Montrer que $|\mathbb{K}^{(C)}| \leq |\mathcal{P}_f(C \times \mathbb{K})|$ (où $\mathcal{P}_f$ désigne l'ensemble des parties finies)
 - (b) En déduire que $|\mathbb{K}^{(C)}| = |C|$.
4. **Démonstration du théorème d'Erdős-Kaplansky.**
 - (a) Montrer que $|\mathbb{K}| \leq \dim(\mathbb{K}^{\mathbb{N}})$ (autrement dit, les bases de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ont un cardinal supérieur ou égal à celui de $\mathbb{K}$).
Indication : raisonner par l'absurde en considérant une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, de cardinal strictement inférieur à celui de $\mathbb{K}$. Considérer $\mathbb{L}$ le sous-corps de $\mathbb{K}$ engendré par tous les $\beta(n)$, pour $\beta \in \mathcal{B}$ et $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $|\mathbb{L}| < |\mathbb{K}|$, puis construire une suite d'éléments (ξ_n) d'éléments de $\mathbb{K}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\xi_n \notin \mathbb{L}[\xi_1, \dots, \xi_{n-1}]$. Appliquer la question 1 à $f : n \mapsto \xi_n$ pour conclure.
 - (b) En déduire que pour tout A infini, $\dim(\mathbb{K}^A) \geq |\mathbb{K}|$.
 - (c) En déduire enfin, à l'aide de la question 3, que $\dim(\mathbb{K}^A) = |\mathbb{K}^A|$ (théorème d'Erdős-Kaplansky)
 - (d) Montrer que si E est de dimension infinie, $\dim(E) < \dim(E^*)$.

Question subsidiaire.

Montrer que si E est de dimension infinie, alors toutes les bases de E ont même cardinal.

Indication : Soit deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. On pourra associer à tout $b \in \mathcal{B}$, la partie finie $\gamma(b)$ de $\mathcal{C}$ constituée des vecteurs de c sur lesquels les composantes de b sont non nulles.

Sources :

Arnaudière, Lelong-Ferrand, *Cours de mathématiques, 1. Algèbre* (Dunod)

Bourbaki, *Algèbre, chapitres 1 à 3*, (Springer), II-7.5 et exercice II-7.3 p II.193