Lycée Louis-Le-Grand, Paris
MP2I – Mathématiques
A. Troesch Pour le 17/05/2024

DM n° 24 : Algèbre linéaire

Suggestion de travail supplémentaire (à ne pas me rendre) : le problème 2 du DS 8 de l'année dernière, les problèmes 20 et 19 de la sélection

Problème 1 – Réduction de Jordan

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n. On admet sans preuve le résultat suivant, vu par ailleurs :

> Soit $P = (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ le polynôme minimal de u, les λ_i étant deux à deux distincts. On a alors :
> $$E = \bigoplus_{i \in [\![1,k]\!]} \mathrm{Ker}((u - \lambda_i \mathrm{id})^{\alpha_i}).$$

Le but du problème est de montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ relativement à laquelle la matrice de u s'écrit par blocs :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{J_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{J_\ell} \end{pmatrix}, \text{ où tout bloc } J_\ell \text{ est de la forme } J_\ell = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

On notera au passage que la preuve permettrait de retrouver le théorème des noyaux itérés, indissociable de ce résultat.

Partie I – Réduction du problème

1. Soit, avec les notations de l'introduction, pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, $E_i = \mathrm{Ker}((u - \lambda_i \mathrm{id})^{\alpha_i})$. Montrer que E_i est stable par u et $u - \lambda_i \mathrm{id}$.
2. Soit pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, u_i l'endomorphisme de E_i induit par u sur E_i. Justifier que si pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, $\mathcal{B}_i$ est une base de E_i, et si $\mathcal{B}$ est la base de E obtenue en juxtaposant dans cet ordre les bases, $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_k$, alors on a la représentation par blocs :
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u_1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u_2)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_k}(u_k)} \end{pmatrix}.$$
3. Soit v_i l'endomorphisme de E_i induit par $u - \lambda_i \mathrm{id}$ sur E_i. Montrer que v_i est nilpotent.
4. Montrer que si tout endomorphisme nilpotent de tout $\mathbb{C}$-ev de dimension finie admet une réduction de Jordan, alors tout endomorphisme de tout $\mathbb{C}$-ev de dimension finie admet une réduction de Jordan.

Partie II – Réduction de Jordan d'un endomorphisme nilpotent

D'après la partie précédente, on peut donc se limiter à l'étude de la réduction de Jordan d'un endomorphisme nilpotent. Soit donc $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent.

1. Soit p l'indice de nilpotence de u, c'est-à-dire le plus petit entier positif tel que $u^p = 0$. En particulier, $u^{p-1} \neq 0$. Soit S un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u^{p-1})$ dans E. Soit x non nul dans S. Montrer que la famille $(u^{p-1}(x), u^{p-2}(x), \dots, u(x), x)$ est libre. On note F le sous-espace engendré par cette famille.
2. Montrer que F est stable par u.
3. Montrer que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a $\mathrm{Ker}(u^{k-1}) \oplus \mathrm{Vect}(u^{p-k}(x)) \subset \mathrm{Ker}(u^k)$
4. Soit S_p un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u^{p-1}) \oplus \mathrm{Vect}(x)$ dans $\mathrm{Ker}(u^p)$. Montrer qu'il existe un supplémentaire S_{p-1} de $\mathrm{Ker}(u^{p-2}) \oplus \mathrm{Vect}(u(x))$ dans $\mathrm{Ker}(u^{p-1})$ contenant $u(S_p)$.
5. Montrer plus généralement qu'on peut construire une suite $(S_k)_{k\in[\![1,p]\!]}$, S_k étant un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u^{k-1}) \oplus \mathrm{Vect}(u^{p-k}(x))$ dans $\mathrm{Ker}(u^k)$, et tel que $u(S_{k+1}) \subset S_k$, pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$
6. Montrer que $T = S_1 + \cdots + S_p$ est un supplémentaire de F dans E, stable par u.
7. Terminer la preuve de l'existence d'une décomposition de Jordan, par récurrence.

Problème 2 – Théorème de Gerstenhaber (d'après Mines-Ponts MP 2020, largement remanié)

Dans tout le problème, les espaces vectoriels considérés sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Rappels et notations

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E.

- *u est dit nilpotent s'il existe un entier $p \geqslant 0$ tel que $u^p = 0$.*
- *u étant un endomorphisme nilpotent, le plus petit des entiers p tels que $u^p = 0$ est appelé nilindice de u (ou indice de nilpotence), et est noté $\nu(u)$.*
- *On remarquera qu'on a alors $u^k = 0$ pour tout $k \geqslant \nu(u)$.*
- *On rappelle que $u^0 = \mathrm{id}_E$.*
- *L'ensemble des endomorphismes nilpotents de E est noté $\mathcal{N}(E)$.*
- *Un sous-espace vectoriel $\mathcal{V}$ de $\mathcal{L}(E)$ est dit nilpotent si tous ses éléments sont des endomorphismes nilpotents, donc si $\mathcal{V} \subset \mathcal{N}(E)$.*
- *Une matrice triangulaire supérieure est dite triangulaire supérieure stricte lorsque tous ses coefficients diagonaux sont nuls. On note $T_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Objectif du problème

L'objectif du problème est de démontrer le théorème suivant, démontré par Murray Gerstenhaber en 1958 :

Théorème de Gerstenhaber – Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n > 0$, et $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(E)$. Alors :

(i) $\dim(\mathcal{V}) \leqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$;

(ii) si $\dim(\mathcal{V}) = \dfrac{n(n-1)}{2}$, il existe une base de E dans laquelle tout endormophisme de $\mathcal{V}$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

Les quatre premières parties du sujet sont largement indépendantes les unes des autres.

- *La partie I est consacrée à la construction d'une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme nilpotent donné est triangulaire supérieure stricte. Ce résultat découlant de façon directe de théorèmes vus en deuxième année, cette partie était absente du sujet original.*
- *La partie II donne quelques généralités sur les endomorphismes nilpotents*
- *Dans la partie III, on met en évidence un mode de représentation des endomorphismes de rang 1, à l'aide d'un produit scalaire.*
- *Dans la partie IV, on établit deux résultats généraux sur les sous-espaces vectoriels nilpotents : une identité sur les traces (lemme A) et une condition suffisante pour que les éléments d'un sous-espace nilpotent possèdent un élément commun dans leur noyau (lemme B).*
- *Dans l'ultime partie V, les résultats des parties précédentes sont combinés pour établir le théorème de Gerstenhaber, par récurrence sur la dimension de l'espace E.*

Partie I – Trigonalisation des endomorphismes nilpotents

On montre dans cette partie qu'un endomorphisme nilpotent peut toujours être représenté dans une base convenable par une matrice triangulaire stricte.
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et u un endomorphisme nilpotent de E.

1. Justifier que $\mathrm{Ker}(u) \neq \{0\}$.
2. On se donne x un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(u)$, et H un supplémentaire de $\mathrm{Vect}(x)$ dans E. On note $\pi \in \mathcal{L}(E)$ le projecteur sur H parallèlement à $\mathrm{Vect}(x)$, et $\overline{u} \in \mathcal{L}(H)$ définie par :

$$\forall z \in H, \quad \overline{u}(z) = \pi(u(z)).$$

   (a) Justifier que $\overline{u}$ est un endomorphisme de H.
   (b) Montrer que pour tout $z \in H$, et tout $k \in \mathbb{N}$, $\overline{u}^k(z) = \pi(u^k(z))$, et en déduire que $\overline{u} \in \mathcal{N}(H)$.
   (c) Soit $b_1 = x$, et $\mathcal{B}' = (b_2, \ldots, b_n)$ une base de H. Justifier que $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ est une base de E, et exprimer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ en fonction de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\overline{u})$ (on utilisera une représentation par blocs ; on ne demande pas de déterminer les coefficients en position $(1, j)$, pour $j \in [\![2, n]\!]$).
3. Montrer par récurrence sur la dimension de E que pour tout endomorphisme nilpotent u de E, il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure stricte.
4. Montrer que pour tout $u \in \mathcal{N}(E)$, et tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{tr}(u^k) = 0$

Partie II – Généralités sur les endomorphismes nilpotents

On commence par montrer que la borne du théorème de Gerstenhaber peut être atteinte. C'est l'objet de la question 1.
On considère toujours un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie $n > 0$.

1. Soit $\mathcal{B}$ une base de E, et $\mathcal{N}_{\mathcal{B}}$ l'ensemble des endomorphismes de E dont la matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ est dans $T_n^{++}(\mathbb{R})$. Justifier que $\mathcal{N}_{\mathcal{B}}$ est un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(E)$, et que sa dimension vaut $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Dans les questions suivantes, on étudie certaines familles libres définies par un endomorphisme nilpotent, pour en déduire une description de $\mathrm{Im}(u^{p-1})$ lorsque le nilindice de u est presque maximal.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

2. Soit $x \in E$, et $p \geqslant 1$ tel que $u^p(x) = 0$ et $u^{p-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ est libre.
3. En déduire que si u est nilpotente de nilindice p, alors $p \leqslant n$.
4. Plus généralement, montrer que si x et y sont deux vecteurs et $p \geqslant q$ deux entiers tels que $u^p(x) = u^q(y) = 0$, et si $(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y))$ est une famille libre, alors $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x), y, u(y), \ldots, u^{q-1}(y))$ est libre.
5. En déduire que si u est nilpotente de nilindice $p \geqslant \max(2, n-1)$:
   (a) $\dim(\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u)) = 1$ (on pourra raisonner par l'absurde, en utilisant la question précédente, et en choisissant pour y un antécédent d'un vecteur de cette intersection)
   (b) $\mathrm{Im}(u^{p-1}) = \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{rg}(u^{p-1}) = 1$.

Partie III – Endomorphismes de rang 1

On considère ici un espace vectoriel E de dimension n, et $(b_1, \ldots, b_n)$ une base de E. On définit, pour tout $(x, y) \in E^2$:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

où $[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *et* $[y]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ *sont les coordonnées de x et y dans la base $\mathcal{B}$. L'application $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ définit ce qu'on appelle un produit scalaire. On dira que deux vecteurs x et y sont orthogonaux (et on note $x \perp y$) si $\langle x, y \rangle = 0$.*
Étant donné $a \in E$ et $x \in E$, on notera $a \otimes x$ l'application de E dans lui-même définie par :

$$\forall z \in E, \quad (a \otimes x)(z) = \langle a, z \rangle \cdot x.$$

On remarquera que l'opération $\otimes$ prend en arguments deux vecteurs et retourne une application.

1. Montrer que pour tout $(a, x) \in (E\backslash\{0\})^2$, $a \otimes x \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathrm{rg}(a \otimes x) = 1$.
2. On fixe $x \in E\backslash\{0\}$. Soit
$$\mathcal{F} = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Vect}(x).\}.$$
Justifier que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et montrer que $\dim(\mathcal{F}) = n$.
3. Montrer que l'application $a \mapsto a \otimes x$ est un isomorphisme de E sur $\mathcal{F}$.
4. Soit $a \in E$ et $x \in E\backslash\{0\}$. Montrer que $\mathrm{tr}(a \otimes x) = \langle a, x\rangle$.
5. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $v \circ (a \otimes x) = a \otimes v(x)$, et en déduire $\mathrm{tr}(v \circ (a \otimes x))$.

Partie IV – Deux lemmes sur les sous-espaces nilpotents

On considère ici un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension $n > 0$. Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(E)$, contenant un élément non nul. On note
$$p = \max_{u \in \mathcal{V}}(\nu(u)),$$
appelé nilindice générique de $\mathcal{V}$. On notera que $p \geqslant 2$.
On définit alors :
$$\mathcal{V}^\bullet = \bigcup_{u \in \mathcal{V}} \mathrm{Im}(u^{p-1}) \qquad \textit{et} \qquad K(\mathcal{V}) = \mathrm{Vect}(\mathcal{V}^\bullet).$$
Enfin, étant donné $x \in E$, on note :
$$\mathcal{V}x = \{v(x) \mid v \in \mathcal{V}\}.$$
L'objectif de cette partie est d'établir les deux lemmes suivants :

- **Lemme A.** Soit u et v dans $\mathcal{V}$. Alors $\mathrm{tr}(u^k v) = 0$ pour tout entier naturel k.
- **Lemme B.** Soit $x \in \mathcal{V}^\bullet\backslash\{0\}$. Si $K(\mathcal{V}) \subset \mathrm{Vect}(x) + \mathcal{V}x$, alors $v(x) = 0$ pour tout $v \in \mathcal{V}$.

1. Un lemme polynomial.
   (a) Soit F un $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, et $(x_0, \ldots, x_k)$ une famille d'éléments de F, tels que $\sum_{i=0}^{k} t^i x_i = 0$ pour une infinité de valeurs de t. Montrer que pour tout $i \in [\![0, k]\!]$, $x_i = 0$.
   (b) Soit F' un sous-espace vectoriel de F et $(x_0, \ldots, x_k)$ une famille d'éléments de F, tels que $\sum_{i=0}^{k} t^i x_i \in F'$ pour une infinité de valeurs de t Montrer que pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $x_i \in F'$. On pourra pour cela se ramener à la question précédente en projetant convenablement.

Dans les questions 2 à 5, on se donne deux éléments arbitraires u et v de $\mathcal{V}$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer qu'il existe une unique famille $(f_0^{(k)}, \ldots, f_k^{(k)})$ d'endomorphismes de E tels que
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (u + tv)^k = \sum_{i=0}^{k} t^i f_i^{(k)}.$$
   (b) Montrer que $f_0^{(k)} = u^k$ et que $f_1^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-1-i}$.
3. Étant donné $k \in \mathbb{N}$, donner une expression simplifiée de $\mathrm{tr}(f_1^{(k+1)})$, et en déduire la validité du lemme A.
4. Soit $y \in E$. Démontrer que $f_1^{(p-1)}(y) \in K(\mathcal{V})$. À l'aide d'une relation entre $u(f_1^{(p-1)}(y))$ et $v(u^{p-1}(y))$ en déduire que $v(x) \in u(K(\mathcal{V}))$ pour tout $x \in \mathrm{Im}(u^{p-1})$.
5. Soit $x \in \mathcal{V}^\bullet\backslash\{0\}$ tel que $K(\mathcal{V}) \subset \mathrm{Vect}(x) + \mathcal{V}x$. On choisit $u \in \mathcal{V}$ tel que $x \in \mathrm{Im}(u^{p-1})$.
   (a) Montrer que pour tout $y \in K(\mathcal{V})$, et tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $\lambda_k \in \mathbb{R}$ et $y_k \in K(\mathcal{V})$ tels que $y = \lambda_k x + u^k(y_k)$. En déduire que $K(\mathcal{V}) \subset \mathrm{Vect}(x)$.
   (b) En déduire que pour tout $v \in \mathcal{V}$ tel que $v^{p-1} \neq 0$, $v(x) = 0$
   (c) Soit $v \in \mathcal{V}$. Justifier qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $(u + tv)$ soit nilpotente de nilindice égal à p. En déduire la validité du lemme B.

Partie V – Démonstration du théorème de Gerstenhaber

Dans cette ultime partie, nous démontrons le théorème de Gerstenhaber par récurrence sur l'entier $n \geqslant 1$*. Le cas* $n = 1$ *est immédiat, et nous le considérerons comme acquis. On se donne donc un entier naturel* $n \geqslant 2$*, et on suppose que pour tout* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* E' *de dimension* $n-1$*, et tout sous-espace vectoriel nilpotent* $\mathcal{V}'$ *de* $\mathcal{L}(E')$*, on a* $\dim(\mathcal{V}') \leqslant \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$*, et que si on a l'égalité, alors il existe une base de* E' *dans laquelle tous les éléments de* E' *admettent une représentation matricielle strictement triangulaire supérieure.*

On se fixe un $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* E *de dimension* n*, ainsi qu'un sous-espace vectoriel nilpotent* $\mathcal{V}$ *de* $\mathcal{L}(E)$*.*

On considère dans un premier temps un vecteur x *arbitraire de* $E\backslash\{0\}$*, et on considère* H *un supplémentaire de* $\mathrm{Vect}(x)$ *dans* E*. On pose :*

$$\mathcal{W} = \{v \in \mathcal{V} \mid v(x) = 0\}$$

On note π *la projection sur* H *parallèlement à* $\mathrm{Vect}(x)$*. Pour tout* $u \in \mathcal{W}$*, on note* $\overline{u}$ *l'endomorphisme de* E *défini par :*

$$\forall z \in H, \quad \overline{u}(z) = \pi(u(z)),$$

comme dans la partie I. On considère enfin les ensembles :

$$\overline{\mathcal{V}} = \{\overline{u} \mid u \in \mathcal{W}\} \qquad \textit{et} \qquad \mathcal{Z} = \{u \in \mathcal{W} \mid \overline{u} = 0\}.$$

1. En interprétant ces ensembles comme images ou noyaux d'applications linéaires, montrer que $\mathcal{V}x$, $\mathcal{W}$, $\overline{\mathcal{V}}$ et $\mathcal{Z}$ sont des sous-espaces vectoriels respectifs de E, $\mathcal{V}$, $\mathcal{L}(H)$ et $\mathcal{V}$, et que :
$$\dim \mathcal{V} = \dim(\mathcal{V}x) + \dim \mathcal{Z} + \dim \overline{\mathcal{V}}.$$

On considère $b_1 = x$ *et* $(b_2, \ldots, b_n)$ *une base de* H*. Ainsi,* $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ *est une base de* E*. On considère le produit scalaire* $\langle ., . \rangle$ *défini comme dans la partie III, à partir des coordonnées des vecteurs dans cette base* $\mathcal{B}$*.*

2. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel L de E tel que :
$$\mathcal{Z} = \{a \otimes x \mid a \in L\} \qquad \text{et} \qquad \dim L = \dim \mathcal{Z},$$
et qu'alors, $x \in L^\perp$, où $L^\perp = \{y \in E \mid \forall \ell \in L,\ \langle y, \ell \rangle = 0.\}$.
3. En considérant u et $a \otimes x$ pour $u \in \mathcal{V}$ et $a \in L$, déduire du lemme A que $\mathcal{V}x \subset L^\perp$, et que plus généralement, $u^k(x) \in L^\perp$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $u \in \mathcal{V}$.
4. Justifier que $L^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E et que $L \oplus L^\perp$ est une somme directe.
5. En déduire que
$$\mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x \subset L^\perp, \qquad \text{puis:} \qquad \dim \mathcal{V}x + \dim L \leqslant n - 1.$$
6. Justifier que $\overline{\mathcal{V}}$ est un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(H)$.
7. Démontrer que $\dim \mathcal{V} \leqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Dans toute la suite du problème, on suppose que $\dim \mathcal{V} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

8. Démontrer que :
$$\dim \overline{\mathcal{V}} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}, \qquad \dim(\mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x) + \dim L = n \qquad \text{et} \qquad L^\perp = \mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x.$$
9. En appliquant l'hypothèse de récurrence, montrer que le nilindice générique de $\mathcal{V}$ est supérieur ou égal à $n-1$, et que, si en outre $\mathcal{V}x = \{0\}$, alors il existe une base de E dans laquelle tout élément de $\mathcal{V}$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

Compte tenu du résultat de la question précédente, il ne nous reste plus qu'à établir que l'on peut choisir le vecteur x *tel que* $\mathcal{V}x = \{0\}$*.*

On choisit x *dans* $\mathcal{V}^\bullet\backslash\{0\}$*. On note* p *le nilindice générique de* $\mathcal{V}$*, et on fixe* $u \in \mathcal{V}$ *tel que* $x \in \mathrm{Im}(u^{p-1})$*. On rappelle que* $p \geqslant n-1$ *d'après la question 9.*

10. Soit $v \in \mathcal{V}$ tel que $v(x) \neq 0$. Montrer que $\mathrm{Im}(v^{p-1}) \subset \mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$.
On pourra pour cela utiliser les résultats des questions II-5 et V-8.
11. On suppose qu'il existe v_0 dans $\mathcal{V}$ tel que $v_0(x) \neq 0$. Soit $v \in \mathcal{V}$. En considérant $v + tv_0$, pour t réel, montrer que $\mathrm{Im}(v^{p-1}) \subset \mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$.
12. Conclure.