Lycée Louis-Le-Grand, Paris
MP2I – Mathématiques
A. Troesch

Pour le 27/05/2024

DM n° 25 : Fonctions continues et dérivables sur un intervalle

Suggestion de travail supplémentaire (à ne pas me rendre) : le problème 11 de la sélection, plutôt plus facile et moins technique que le problème ci-dessous (et je je voulais dans un premier temps donner avant de me souvenir qu'il était dans la sélection).

Problème 1 – Exposant de Hölder ponctuel (adapté de Polytechnique MP 2013)

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions continues, définies sur l'intervalle compact $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout $f \in \mathcal{C}$, on note $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$.
On note $\mathcal{C}_0$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}$ formé par les fonctions f telles que $f(0) = f(1) = 0$.

Partie I – Résultats préliminaires

Dans cette partie, on établit quelques résultats préliminaires, indépendants les uns des autres, qui serviront dans la suite du problème.

1. Justifier que pour tout $f \in \mathcal{C}$, $\|f\|_\infty$ est bien définie dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\mathcal{C}_0$ est stable par combinaison linéaire ; autrement dit, si f et g sont deux éléments de $\mathcal{C}_0$ et λ et μ des réels, alors $\lambda f + \mu g$ est élément de $\mathcal{C}_0$.
3. Soit $I = [a,b]$ un intervalle fermé, et $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$. Montrer que si f est continue sur $[a,b]$, et dérivable sur $]a,b[\setminus\{x_1,\dots,x_n\}$, et vérifie $|f'(x)| \leqslant M$ pour tout $x \in]a,b[\setminus\{x_1,\dots,x_n\}$, alors
$$|f(b) - f(a)| \leqslant M|b-a|.$$
4. Montrer que pour tout $s \in]0,1[$, et $a,b \geqslant 0$, on a $a^s + b^s \leqslant 2^{1-s}(a+b)^s$.

Partie II – Définition de l'exposant de Hölder ponctuel

Soit $x_0 \in [0,1]$. Pour tout $s \in [0,1[$, on désigne par $\Gamma^s(x_0)$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}$ formé par les fonctions f qui vérifient :
$$\sup_{x\in[0,1]\setminus\{x_0\}} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^s} < +\infty.$$

5. Déterminer $\Gamma^0(x_0)$
6. (a) Montrer que $\Gamma^s(x_0)$ est stable par combinaison linéaire, et que pour tous réels s_1 et s_2 tels que $0 \leqslant s_1 \leqslant s_2 < 1$, on a $\Gamma^{s_2}(x_0) \subset \Gamma^{s_1}(x_0)$.
   (b) Soit $f \in \mathcal{C}$. Montrer que si f est dérivable en x_0, alors $f \in \Gamma^s(x_0)$ pour tout $s \in [0,1[$.
   (c) Montrer que pour tout $x_0 \in]0,1[$, il existe $f \in \mathcal{C}$ non dérivable en x_0, tel que pour tout $s \in [0,1[$, $f \in \Gamma^s(x_0)$.

Pour tout $f \in \mathcal{C}$, et tout $x_0 \in [0,1]$, on pose
$$\alpha_f(x_0) = \sup\{s \in [0,1] \ \mid \ f \in \Gamma^s(x_0)\}.$$

Le réel $\alpha_f(x_0)$ est appelé exposant de Hölder ponctuel de f en x_0 : il permet de mesurer finement la régularité locale de f au voisinage du point x_0.

7. Soit $p : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{|1-4x^2|}$. Déterminer l'exposant de Hölder ponctuel de p en $\frac{1}{2}$.

Pour tout $f \in \mathcal{C}$, on définit la fonction $\omega_f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ par :

$$\omega_f(h) = \sup\{|f(y) - f(x)| \ \mid \ x, y \in [0,1] \text{ et } |x-y| \leqslant h\}.$$

8. (a) Montrer que ω_f est croissante, et continue en 0.
   (b) Montrer que pour tout $h, h' \in [0,1]$ tels que $h \leqslant h'$, ω_f vérifie :
   $$\omega_f(h') \leqslant \omega_f(h) + \omega_f(h'-h).$$
   (c) En déduire que ω_f est continue sur $[0,1]$.
9. (a) Soit $s \in [0,1[$. On suppose que la fonction $h \mapsto \dfrac{\omega_f(h)}{h^s}$ est bornée sur $]0,1]$. Pour tout $x_0 \in [0,1]$, montrer que $f \in \Gamma^s(x_0)$.
   (b) Soit $q : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :
   $$\begin{cases} q(x) = x\cos\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ q(0) = 0 \end{cases}$$
   Montrer que pour tout $x_0 \in [0,1]$, $\alpha_q(x_0) = 1$, mais que $\frac{\omega_q(h)}{\sqrt{h}}$ ne tend pas vers 0 quand h tend vers 0.

Partie III – Le système de Schauder

On note $\mathcal{I} = \{(j,k) \in \mathbb{N}^2 \ \mid \ j \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leqslant k < 2^j\}$. Pour $j \in \mathbb{N}$, on désigne par $\mathcal{T}_j$ l'ensemble

$$\mathcal{T}_j = \{k \in \mathbb{N} \ \mid \ 0 \leqslant k < 2^j\}.$$

Pour tout $(j,k) \in \mathcal{I}$, soit $\theta_{j,k} : [0,1] \to [0,1]$ la fonction définie pour tout $x \in [0,1]$ par :

$$\theta_{j,k}(x) = \begin{cases} 1 - |2^{j+1}x - 2k - 1| & \text{si } x \in [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La famille des fonctions $(\theta_{j,k})_{(j,k)\in\mathcal{I}}$ est appelé le système de Schauder.

10. (a) Représenter graphiquement $\theta_{j,k}$ dans les 3 cas suivants : $(j,k) = (0,0), (1,0)$ et $(1,1)$.
    (b) Décrire le graphe de $\theta_{j,k}$ dans le cas général.
11. (a) Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathcal{T}_{j+1}$, il existe un unique entier $k' \in \mathcal{T}_j$ tel que
    $$[k2^{-j-1}, (k+1)2^{-j-1}] \subset [k'2^{-j}, (k'+1)2^{-j}].$$
    On précisera le lien entre k et k'.
    (b) Calculer $\theta_{j,k}(\ell 2^{-j-1})$ pour tous $j \in \mathbb{N}$, $k \in \mathcal{T}_j$, $\ell \in \mathcal{T}_{j+1}$
    (c) Montrer que pour tout $(j,k) \in \mathcal{I}$, la fonction $\theta_{j,k}$ est continue, affine sur chaque intervalle de la forme $[\ell 2^{-n}, (\ell+1)2^{-n}]$, où $n > j$ et $\ell \in \mathcal{T}_n$.
    (d) Prouver que pour tout $(j,k) \in \mathcal{I}$ et tout $(x,y) \in [0,1]^2$, on a :
    $$|\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(y)| \leqslant 2^{j+1}|x-y|.$$

Dans le reste de la partie, f est un élément de $\mathcal{C}^0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $S_n f$ la fonction définie par :

$$S_n f = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} c_{j,k}(f)\theta_{j,k},$$

où, pour tout $(j,k) \in \mathcal{I}$, on a posé

$$c_{j,k}(f) = f\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)2^{-j}\right) - \frac{f(k2^{-j}) + f((k+1)2^{-j})}{2}.$$

12. Montrer que $\lim_{j\to+\infty} \max_{k\in\mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| = 0$.

13. (a) Montrer que pour toutes fonctions f et g de $\mathcal{C}_0$, et tous réels λ et μ, $c_{j,k}(\lambda f + \mu g) = \lambda c_{j,k}(f) + \mu c_{j,k}(g)$.
    (b) Pour tout $(j,k) \in \mathcal{I}$, $(i,\ell) \in \mathcal{I}$, calculer $c_{j,k}(\theta_{i,\ell})$.
    (c) Montrer que pour tout $(j,k) \in \mathcal{I}$ tel que $j \leqslant n$, $c_{j,k}(S_n f) = c_{j,k}(f)$.

14. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\ell \in \mathcal{T}_{n+1}$, la fonction $S_n f$ est affine sur l'intervalle $[\ell 2^{-n-1}, (\ell+1)2^{-n-1}]$.
    (b) En raisonnant par récurrence, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\ell \in \mathcal{T}_{n+1}$, $(S_n f)(\ell 2^{-n-1}) = f(\ell 2^{-n-1})$.
    (c) Interpréter graphiquement la fonction $S_n(f)$.

15. (a) En déduire que pour tout $f \in \mathcal{C}_0$, $\lim_{n\to+\infty} \|f - S_n f\|_\infty = 0$.
    (b) On suppose de plus f de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer qu'il existe une constante M_1 telle que pour tout $(j,k) \in \mathcal{I}$, $|c_{j,k}(f)| \leqslant M_1 2^{-j}$. En déduire que $\|f - S_n f\|_\infty \leqslant M_1 2^{-n}$. On pourra exprimer $f - S_n(f)$ comme le reste d'une certaine série.
    (c) On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer qu'il existe une constante M_2 telle que $\|f - S_n f\|_\infty \leqslant M_2 4^{-n}$.

16. Soit $s \in [0,1[$. Montrer que si $f \in \Gamma^s(x_0) \cap \mathcal{C}_0$, alors il existe un réel $c_1 > 0$ tel que pour tout $(j,k) \in \mathcal{I}$, on ait :

$$|c_{j,k}(f)| \leqslant c_1(2^{-j} + |k2^{-j} - x_0|)^s.$$

Partie IV – Minoration de l'exposant de Hölder ponctuel

L'objectif de cette partie est d'établir une forme de réciproque du dernier résultat de la partie précédente. Dans toute cette partie, on désigne par $f \in \mathcal{C}_0$ une fonction vérifiant la propriété suivante :

$(\mathcal{P}_1)$: *il existe $x_0 \in [0,1]$, $s \in]0,1]$, et $c_1 \in]0,+\infty[$ tels que pour tout $(j,k) \in \mathcal{I}$,*

$$|c_{j,k}(f)| \leqslant c_1(2^{-j} + |k2^{-j} - x_0|)^s.$$

Dans tout le reste de la partie, on fixe les réels x_0, s et c_1 de la propriété $(\mathcal{P}_1)$, et $x \in [0,1]\backslash\{x_0\}$.
On note $\tilde{k}_j(x)$ la partie entière du réel $2^j x$, donc l'unique entier tel que

$$\tilde{k}_j(x) \leqslant 2^j x < \tilde{k}_j(x) + 1.$$

17. Montrer qu'il existe un unique $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-n_0-1} < |x - x_0| \leqslant 2^{-n_0}$.

18. On pose pour tout $j \in \mathbb{N}$:

$$W_j = \sum_{k\in\mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| \cdot |\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(x_0)|.$$

    Montrer que

$$W_j \leqslant \left(|c_{j,\tilde{k}_j(x)}(f)| + |c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f)|\right) 2^{j+1}|x - x_0|.$$

19. (a) Montrer que pour tout $j \leqslant n_0$ (n_0 est déterminé dans la question 17), on a :

$$W_j \leqslant 4c_1 2^{(1-s)j} 3^s |x - x_0|.$$

    (b) En déduire que, en posant $c_2 = 8(2^{1-s} - 1)^{-1}(3/2)^s c_1$,

$$\sum_{j=0}^{n_0} \sum_{k\in\mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| \cdot |\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(x_0)| \leqslant c_2|x - x_0|^s.$$

20. Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $|c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f)| \leqslant 2^{s(1-j)}c_1$. En déduire, en posant $c_3 = (1 - 2^{-s})^{-1}2^s c_1$,

$$\sum_{j=n_0+1}^{+\infty} \sum_{k\in\mathcal{T}_j} |c_{k,j}(f)| \cdot |\theta_{j,k}(x_0)| \leqslant c_3|x - x_0|^s.$$

Dans la suite du problème, on suppose que $\|f\|_\infty = 1$ et on rappelle que la fonction ω_f a été définie à la question 8.

21. Montrer qu'il existe un unique $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\omega_f(2^{-n_1-1}) < 2^{-n_0 s} \leqslant \omega_f(2^{-n_1})$.

22. Montrer que pour tout $n \geqslant n_1$, où n_1 est déterminé dans la question 21, on a :

$$\|f - S_n f\|_\infty \leqslant 2^{s+1}|x - x_0|^s.$$

On pourra utiliser les résutats des questions 14(a) et 14(b).

23. (a) Montrer que lorsque $n_0 < n_1$, on a :

$$\sum_{j=n_0+1}^{n_1} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| \cdot |\theta_{j,k}(x)| \leqslant c_1 3^s (n_1 - n_0)|x - x_0|^s.$$

On suppose de plus dans la suite que la fonction ω_f vérifie la propriété suivante :

$(\mathcal{P}_2)$: *Pour tout entier $N \geqslant 1$, il existe un réel $c_4(N) > 0$ tel que pour tout $h \in]0, 1]$,*

$$\omega_f(h) \leqslant c_4(N) \left(1 + |\log_2(h)|\right)^{-N}.$$

(b) Pour tout entier $N \geqslant 1$, on pose $c_5(N) = 3^s c_1 (c_4(N))^{1/N}$. Montrer que :

$$n_1 - n_0 \leqslant n_1 + 1 \leqslant \left(\frac{c_4(N)}{\omega_f(2^{-n_1})}\right)^{\frac{1}{N}}$$

et en déduire

$$\sum_{j=n_0+1}^{n_1} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| \cdot |\theta_{j,k}(x)| \leqslant c_5(N)|x - x_0|^{(1-\frac{1}{N})s}.$$

24. Déduire de ce qui précède que $\alpha_f(x_0) \geqslant s$.

On pourra distinguer les cas $n_0 \geqslant n_1$ et $n_0 < n_1$.