 Pour le 06/06/2024

DM n° 26 : Séries numériques

Suggestion de travail supplémentaire (à ne pas me rendre) : Le DM ci-dessous n'est pas très long. Profitez-en pour voir le problème 11 de la sélection, déjà proposé la dernière fois, qui est un très bon entraînement pour le prochain (et dernier) DS. Et aussi deux (courts) problèmes sur les séries : le problème 10 de la sélection et le problème 1 du DS 9 de l'année dernière.

Problème 1 – (Séries et caractères, Mines MP 2007, épreuve de 3h)

Dans ce problème, on se fixe un entier $N \geqslant 2$. Pour $a \in \mathbb{N}$, on note $\overline{a}$ sa classe dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. L'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ est noté $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$. On note P l'ensemble des éléments de $\{1, \dots, N-1\}$ premiers avec N. On rappelle que φ, l'indicatrice d'Euler, est telle que $\varphi(N)$ représente le cardinal de P.
On suppose fixée une application χ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ qui satisfait les propriétés suivantes :

(i) $\chi(0) = 0$ et χ n'est pas identiquement nulle

(ii) Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, non premier avec N, $\chi(a) = 0$

(iii) Pour tous les entiers relatifs a et b, $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$

(iv) χ est N-périodique : pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $\chi(a+N) = \chi(a)$.

NB : Tout résultat hors programme utilisé devra être redémontré.

Préliminaires

1. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ deux suites réelles ou complexes. On pose, pour tout $n \geqslant 1$:
$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k.$$
Montrer que pour tout $(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $2 \leqslant n < m$:
$$\sum_{k=n}^{m} \alpha_k u_k = -u_n A_{n-1} + \sum_{k=n}^{m-1} A_k(u_k - u_{k+1}) + u_m A_m.$$

2. Soit $x \in [-1,1]$. Montrer que
$$\mathrm{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Partie I – Étude de cas particuliers

3. Calculer $\chi(1)$.
4. Lorsque $N = 2$, déterminer χ.

On suppose jusqu'à la fin de cette partie que $N = 4$.

5. Montrer que $\chi(3)$ ne peut prendre que les valeurs 1 ou -1.
6. On suppose maintenant que $\chi(3) = -1$. Montrer la convergence et calculer la valeur de la série
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(n)}{n}.$$

Partie II – Convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\chi(n)}{n}$

Dans cette partie, a est un entier supérieur ou égal à 1 et premier avec N. Pour $k \in \{1, \ldots, N-1\}$, on désigne par r_k le reste de la division de ak par N

7. Montrer que les r_k sont deux à deux distincts.
8. En considérant le produit $\prod_{k\in P} ak$, montrer que $a^{\varphi(N)} - 1$ est divisible par N. Proposer une autre démonstration de ce résultat reposant sur un théorème du cours d'algèbre.
9. Montrer que $|\chi(a)| = 1$.
10. Établir l'identité
$$\sum_{k=1}^{N-1} \chi(ak) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k).$$

On suppose dorénavant qu'il existe a premier avec N tel que $\chi(a) \neq 1$.

11. Pour chaque entier n, calculer $\sum_{k=n}^{n+N-1} \chi(k)$.
On pourra commencer par le cas $n = 0$.
12. Montrer que pour tout $m > 0$: $\left|\sum_{k=1}^{m} \chi(k)\right| \leqslant \varphi(N)$.
13. En déduire que la série de terme général $\frac{\chi(n)}{n}$ converge.

Partie III – Comportement asymptotique

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $f_n = \sum_{d|n} \chi(d)$.

14. Soit n et m deux entiers strictement positifs, premiers entre eux. Montrer que $f_{nm} = f_n f_m$.
15. Soit p un nombre premier, et $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Exprimer f_{p^α} en fonction de la valeur de $\chi(p)$.
16. Pour tout entier $n \geqslant 1$, établir : $0 \leqslant f_n \leqslant n$.
17. Pour tout entier $n \geqslant 1$, établir : $f_{n^2} \geqslant 1$.
18. Déterminer, suivant la valeur de $x \in \mathbb{R}$, la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n x^n$. On précisera les cas de convergence absolue et de divergence grossière. On note $f(x)$ la somme de cette série.
19. Montrer que pour tout $x \in [\frac{1}{2}, 1[$,
$$f(x) \geqslant \frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}} \int_{\sqrt{\ln(2)}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\, \mathrm{d}u.$$