LYCÉE LOUIS-LE-GRAND, Paris
MP2I – Mathématiques
A. TROESCH

Sine die

# DM n° 27 : Déterminants, probabilités

Ce DM n'est pas destiné à m'être rendu. Je vous le donne pour vous occuper jusqu'à la fin de l'année.

**Suggestion de travail supplémentaire (à ne pas me rendre) :** Vous pouvez aussi regarder le DS 10 de l'année dernière, ainsi que les problèmes 21, 22, 23, 24 de la sélection.

**Problème 1 – (Résultant de deux polynômes)**

Soit $P$ et $Q$ deux polynômes. Le but de ce problème est de trouver une condition sur les coefficients de $P$ et de $Q$ dans la base canonique de $\mathbb{C}[X]$ pour que deux polynômes aient au moins une racine commune. Cette condition s'exprimera sous forme de la nullité d'un certain déterminant, appelé déterminant de Sylvester, ou résultant des polynômes $P$ et $Q$.

## Partie I – Définition du résultant et propriété fondamentale

Dans cette partie, $P$ et $Q$ désignent deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$, de degrés respectifs $m$ et $n$, que l'on écrit :

$$P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^{m-k} \qquad \text{et} \qquad Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^{n-k}$$

(attention à l'indexation inhabituelle des coefficients) On appelle résultant des polynômes $P$ et $Q$, noté $R(P,Q)$, le déterminant de la matrice carrée d'ordre $m+n$ suivante (matrice de Sylvester) :

$$S(P,Q) = \begin{pmatrix}
a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\
a_1 & a_0 & 0 & & \vdots & b_1 & b_0 & \ddots & \vdots \\
\vdots & a_1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & b_1 & \ddots & 0 \\
\vdots & & \ddots & a_0 & 0 & \vdots & & \ddots & b_0 \\
a_m & & & a_1 & a_0 & \vdots & & & b_1 \\
0 & a_m & & & a_1 & b_n & & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & 0 & b_n & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & a_m & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & a_m & 0 & \cdots & 0 & b_n
\end{pmatrix}$$

Cette matrice est constituée de $n$ colonnes construites avec les coefficients de $P$, décalés d'une colonne à l'autre, et de $m$ colonnes construites avec les coefficients de $Q$. Ainsi, $R(P,Q) = \det(S(P,Q))$. On prendra garde au fait qu'il n'y a pas de raison pour que le terme $a_m$ de la première colonne soit sur la même ligne que le terme $a_0$ de la dernière colonne construite avec les coefficients de $P$. Ce n'est en général pas le cas.

1. Montrer que $R(P,Q) = (-1)^{mn} R(Q,P)$.
2. Soit $\alpha$ une racine commune de $P$ et $Q$. Montrer que la vecteur $C_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha^{m+n-1} \\ \alpha^{m+n-2} \\ \cdots \\ \alpha^0 \end{pmatrix}$ est dans le noyau de ${}^tS(P,Q)$.

   Que peut-on dire de $R(P,Q)$ dans ce cas ?
3. Montrer que si $P$ et $Q$ sont premiers entre eux, toute relation $UP + VQ = 0$ avec $U \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ et $V \in \mathbb{C}_{m-1}[X]$ implique $U = V = 0$.

4. En déduire que si $P$ et $Q$ n'ont pas de racine commune, alors $R(P,Q) \neq 0$
   Indication : on pourra étudier la liberté de la famille des colonnes de $S(P,Q)$, en interprétant ces colonnes comme les coordonnées de polynômes dans la base $(X^{m+n-1}, \ldots, X, 1)$ de $\mathbb{C}_{m+n-1}[X]$.

*Ainsi, $P$ et $Q$ ont une racine commune si et seulement si $R(P,Q) = 0$.*

5. On appelle discriminant d'un polynôme $P$ le résultant $\Delta(P) = R(P, P')$.
   (a) Justifier que $P$ admet au moins une racine multiple si et seulement si son discriminant $\Delta(P)$ est nul.
   (b) Montrer que le discriminant du polynôme $P = X^3 + pX + q$ est $4p^3 + 27q^2$.

*Il n'est pas très surprenant que cette dernière expression intervienne dans les formules de Cardan exprimant les racines de $X^3 + pX + q$...*

**Partie II – Expression du résultant à l'aide des racines**

On note $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ les racines (non nécessairement distinctes) de $P$ et $\beta_1, \ldots, \beta_n$ celles de $Q$. On définit $M$ la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \beta_1^{m+n-1} & \beta_1^{m+n-2} & \cdots & \beta_1^1 & \beta_1^0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \beta_n^{m+n-1} & \beta_n^{m+n-2} & \cdots & \beta_n^1 & \beta_n^0 \\ \alpha_1^{m+n-1} & \alpha_1^{m+n-2} & \cdots & \alpha_1^1 & \alpha_1^0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \alpha_m^{m+n-1} & \alpha_m^{m+n-2} & \cdots & \alpha_m^1 & \alpha_m^0 \end{pmatrix}$$

1. En calculant $M \times S(P,Q)$, montrer que

$$R(P,Q) = a_0^n \prod_{j=1}^{m} Q(\alpha_j) = (-1)^{mn} b_0^m \prod_{i=1}^{n} P(\beta_i)$$

2. **Matrices circulantes**
   (a) Soit $P = X^n - 1$ et $Q = a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$. Montrer que

$$R(P,Q) = \det(C(a_0, \ldots, a_{n-1})),$$

   où $C(a_0, \ldots, a_{n-1})$ est la matrice circulante :

$$C(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

   (b) En déduire que $\det(C(a_0, \ldots, a_{n-1})) = \prod_{\zeta \in \mathbb{U}_n} Q(\zeta)$.

**Problème 2 – Algorithme de Lewis Carroll pour le calcul d'un déterminant (d'après Mines PSI 2010)**

*Le but de ce problème est d'établir une formule (appelée formule de condensation), permettant de construire un algorithme pour calculer un déterminant en réduisant sa taille petit à petit, de sorte à se ramener uniquement à des déterminants $2 \times 2$, et ceci de façon plus efficace que par un enchaînement de développements suivant des lignes ou colonnes. On voit ensuite comment les techniques développées permettent de généraliser la définition du déterminant pour définir des $\lambda$-déterminants (qui ne sont pas à proprement parler des déterminants, puisqu'il ne s'agit pas de formes alternées)*

**Notations et rappels**

*Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 1, $\mathbb{K}$ un corps et $M$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

- *On note $M_{i,j}$ le coefficient de $M$ qui se trouve sur la $i$-ième ligne et la $j$-ième colonne.*
- *On note ${}^tM$ la transposée de $M$, définit par $({}^tM)_{i,j} = M_{j,i}$, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.*
- *On note $\det(M)$ son déterminant.*
- *Pour $n \geqslant 2$, et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $[M]_i^j$ la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ obtenue à partir de $M$ en enlevant la $i$-ième ligne et la $j$-ième colonne de $M$.*
- *Plus généralement, pour des $r$-uplets $(i_1,\ldots,i_r)$ et $(j_1,\ldots,j_r)$ d'éléments 2 à 2 distincts de $[\![1,n]\!]$, on note $[M]_{i_1,\ldots,i_r}^{j_1,\ldots,j_r}$ la matrice obtenue à partir de $M$ en supprimant les lignes d'indices $i_1,\ldots,i_r$ et les colonnes d'indices $j_1,\ldots,j_r$. C'est donc une matrice de $\mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$. On conviendra que si $r=0$, cette matrice vaut $M$.*
- *On note $\mathrm{Com}(M)$ la comatrice de $M$, définie par*

$$\mathrm{Com}(M)_{i,j} = (-1)^{i+j}\det([M]_i^j).$$

- *On désigne par $I_n$ la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et par $e=(e_1,\ldots,e_n)$ la base canonique du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$.*

## Partie I – Formule de condensation de Desnanot-Jacobi

*Dans cette partie, on montre la formule suivante (formule de Desnanot-Jacobi), pour tout $n \geqslant 3$, permettant de ramener le calcul d'un déterminant d'ordre $n$ à des calculs de déterminants d'ordre $n-1$ et $n-2$ :*

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\quad \det(M)\det([M]_{1,n}^{1,n}) = \det([M]_1^1)\det([M]_n^n) - \det([M]_n^1)\det([M]_1^n). \tag{1}$$

*On introduit la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ suivante :*

$$M^* = \begin{pmatrix} \det([M]_1^1) & 0 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{n+1}\det([M]_n^1) \\ -\det([M]_1^2) & 1 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{n+2}\det([M]_n^2) \\ \det([M]_1^3) & 0 & 1 & \ddots & \vdots & (-1)^{n+3}\det([M]_n^3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ (-1)^n\det([M]_1^{n-1}) & 0 & 0 & \ddots & 1 & -\det([M]_n^{n-1}) \\ (-1)^{n+1}\det([M]_1^n) & 0 & 0 & \cdots & 0 & \det([M]_n^n) \end{pmatrix}$$

*Autrement dit $M^*$ est obtenue de ${}^t\mathrm{Com}(M)$ en remplaçant, pour tout $j \in [\![2,n-1]\!]$, la colonne $j$ par la colonne correspondante de la matrice $I_n$.*

1. Montrer que $\det(M^*) = \det([M]_1^1)\det([M]_n^n) - \det([M]_n^1)\det([M]_1^n)$.
2. Écrire le calcul explicite de la matrice produit $M \cdot M^*$, sous la forme du tableau usuel de taille $n \times n$.
   Indication : on pourra utiliser le produit $M \cdot {}^t\mathrm{Com}(M)$.
3. En déduire la formule (1) dans le cas où $M$ est inversible.

*4. Démontrer (1) dans le cas où $M$ n'est pas inversible (ce résultat ne sert pas pour la suite).

## Partie II – Algorithme de Dodgson (ou de Lewis Carroll)

*Nous présentons et justifions dans cette partie un algorithme mis au point par le Révérend Charles L. Dodgson, plus connu sous son nom de plume, Lewis Carroll. Et oui ! Le papa d'Alice était aussi mathématicien ! Cet algorithme, basé sur la formule de condensation démontrée dans la partie précédente, permet de ramener le calcul de certains déterminants à des calculs de plusieurs déterminants de taille 2.*
*L'algorithme fonctionne comme suit :*

- *Donnée initiale : une matrice $M$ de taille $n \times n$.*
- *On construit itérativement des couples $(A^{(k)}, B^{(k)}) \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n-k-1}(\mathbb{K})$, pour $k \in [\![0,n-2]\!]$, dont on note les coefficients $A_{i,j}^{(k)}$ et $B_{i,j}^{(k)}$ :*
  - $*$ *$A^{(0)} = M$ et $B^{(0)}$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont des 1*

* *Si pour $k \leqslant n-3$, $A^{(k)}$ et $B^{(k)}$ sont construits, on définit, si c'est possible, $A^{(k+1)}$ par :*

$$\forall (i,j) \in [\![1, n-k-1]\!]^2, \quad A_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{B_{i,j}^{(k)}} \times \begin{vmatrix} A_{i,j}^{(k)} & A_{i,j+1}^{(k)} \\ A_{i+1,j}^{(k)} & A_{i+1,j+1}^{(k)} \end{vmatrix}$$

*et $B^{(k+1)}$ par :*

$$\forall (i,j) \in [\![1, n-k-2]\!], \quad B_{i,j}^{(k+1)} = A_{i+1,j+1}^{(k)}, \quad \textit{i.e.} \quad B^{(k+1)} = [A^{(k)}]_{1,n-k}^{1,n-k}$$

- *Si $(A^{(n-2)}, B^{(n-2)}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ a pu être défini, et si $B_{1,1}^{(n-2)}$ est non nul, l'algorithme s'arrête en retournant la valeur :*

$$A_{1,1}^{(n-1)} = \frac{\det(A^{(n-2)})}{B_{1,1}^{(n-2)}}.$$

- *Si au cours de l'algorithme, l'un des coefficients $B_{i,j}^{(k)}$ est nul, on décrète l'échec de l'algorithme de Lewis Carroll. Sinon, l'algorithme peut être mené à son terme, et on dit que $M$ est LC-déterminable.*
- *Remarquez qu'à chaque étape, la matrice $B^{(k)}$ est un peu plus petite que $A^{(k)}$.*

1. (a) Montrer que la matrice ci-dessous est LC-déterminable, et calculer la valeur retournée par l'algorithme de Lewis Carroll :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   (b) Calculer par une autre méthode le déterminant de la matrice $M$, et comparer avec la valeur obtenue dans la question précédente.

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose dans cette question que la matrice $M$ est LC-déterminable.
   (a) Soit $(r,s) \in [\![1, n-2]\!]$. Montrer à l'aide de la partie II que $A_{r,s}^{(2)}$ est le déterminant d'une matrice $3 \times 3$ extraite de $M$ que l'on précisera
   (b) Généraliser, et en déduire que $A_{1,1}^{(n-1)} = \det(M)$, ce qui prouve la validité de l'algorithme.
3. Quel est le nombre $u_n$ de déterminants $2 \times 2$ calculés lors de l'utilisation de cet algorithme sur une matrice d'ordre $n$ ?
4. Soit $v_n$ le nombre de déterminants $2 \times 2$ calculés en utilisant l'algorithme consistant à développer suivant la première colonne pour se ramener à des déterminants $(n-1) \times (n-1)$, puis à recommencer sur chaque déterminant $(n-1) \times (n-1)$ et ainsi de suite jusqu'à se ramener à des déterminants $2 \times 2$. Déterminer $v_n$ et comparer asymptotiquement $u_n$ et $v_n$ au voisinage de $+\infty$.

## Partie III – Le $\lambda$-déterminant

*Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On introduit la notion de $\lambda$-déterminant d'une matrice $M$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ convenable (dans un sens qu'on précisera), de la manière suivante :*

- *Soit $(a) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$, $\det_\lambda(a) = a$*
- *Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4$, $\det_\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad + \lambda bc$.*
- *On impose de plus pour tout matrice $M$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la formule suivante, généralisant (1) :*

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \det_\lambda(M)\det_\lambda([M]_{1,n}^{1,n}) = \det_\lambda([M]_1^1)\det_\lambda([M]_n^n) + \lambda \det_\lambda([M]_n^1)\det_\lambda([M]_1^n). \qquad (2)$$

*Cette formule permet donc de calculer $\det_\lambda(M)$ par récurrence sur l'ordre de $M$, à condition que $\det_\lambda([M]_{1,n}^{1,n})$ soit non nul, et que les déterminants d'ordre plus petit aient pu être calculés (ce qui donne d'autres conditions de non nullité). Si le $\lambda$-déterminant de $M$ peut être défini de la sorte, on dira que $M$ est $\lambda$-déterminable.*

1. Montrer qu'en général, on n'a pas $\det_\lambda(AB) = \det_\lambda(A)\det_\lambda(B)$.

2. Soit $M$ une matrice $\lambda$-déterminable. Soit $t \in \mathbb{K}^*$ et $j \in [\![1, n]\!]$, et soit $M'$ la matrice obtenue à partir de $M$ par multiplication de la $j$-ième colonne de $M$ par $t$. Montrer que $M'$ est $\lambda$-déterminable, et donner la valeur de $\det_\lambda(M')$ en fonction de $\det_\lambda(M)$ et de $t$.
3. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{K}^*)^n$, et
$$W(x_1, \ldots, x_n) = (x_j^{i-1})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$
la matrice de Vandermonde de taille $n \times n$. On suppose de plus que pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i < j$, $x_j + \lambda x_i \neq 0$. Montrer que $W(x_1, \ldots, x_n)$ est $\lambda$-déterminable, et calculer $\det_\lambda(W(x_1, \ldots, x_n))$ en fonction des $x_j + \lambda x_i$ (on pourra commencer par le cas $n = 3$). On notera
$$V_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \det_\lambda(W(x_1, \ldots, x_n)).$$

**Problème 3 – (d'après ESCP)**

*Pour toute variable aléatoire réelle $Y$ définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et possédant une espérance mathématique, on note $E(Y)$ cette espérance pour la probabilité $P$.*
*Pour tout événement $C$ de $\mathcal{A}$ tel que $P(C) > 0$, on note, sous réserve d'existence, $E(Y \mid C)$ l'espérance de $Y$ pour la probabilité conditionnelle $P_C$ (espérance de $Y$ sachant $C$).*

**Partie I –**

*Cette partie constitue une application particulière des résultats généraux étudiés dans la suite du problème.*

*On possède $n$ urnes ($n \geqslant 3$) numérotées de 1 à $n$, dans lesquelles on répartit au hasard et de façon indépendante, $m$ boules indiscernables ($m \geqslant 4$), de sorte que, pour tout $i$ de $[\![1, n]\!]$, la probabilité pour chaque boule d'être placée dans l'urne numéro $i$ soit égale à $\frac{1}{n}$.*
*On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.*
*À l'issue de cette expérience, on pose, pour tout $i$ de $[\![1, n]\!]$ :*
$$X_i = \begin{cases} 1 & \textit{si l'urne numéro } i \textit{ est vide} \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$
*On pose $W_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.*

1. (a) Déterminer, pour tout $i$ de $[\![1, n]\!]$, la loi de la variable aléatoire $X_i$.
   (b) Calculer la covariance de $X_i$ et $X_j$. Les variables aléatoires $X_i$ et $X_j$ sont-elles indépendantes ?
2. (a) Exprimer l'espérance $E(W_n)$ de $W_n$ en fonction de $n$ et $m$.
   (b) On note $V(W_n)$ la variance de $W_n$. Calculer $V(W_n)$ en fonction de $n$ et $m$.
   (c) Vérifier que $E(W_n) - V(W_n) \geqslant 0$
3. Dans cette question, l'entier $m$ vérifie $m = \lfloor n \ln n + \theta n \rfloor$, où $\theta$ est une constante réelle positive et $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de $x$.
   (a) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} E(W_n)$.
   (b) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} (E(W_n) - V(W_n)) = 0$.
   (c) Soit $T_n$ une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\mu_n = E(W_n)$.
   **On admet** que pour tout $k$ de $\mathbb{N}$, on a :
$$|P(W_n = k) - P(T_n = k)| \leqslant \min\left(1, \frac{1}{\mu_n}\right) \times (\mu_n - V(W_n)).$$
   Montrer que la suite de variable aléatoires $(W_n)_{n \geqslant 3}$ converge en loi vers une variable $T$ suivant une loi de Poisson de paramètre $\mu = \lim\limits_{n \to +\infty} E(W_n)$, c'est-à-dire :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \to +\infty} P(W_n = k) = P(T = k).$$

**Partie II –**

*Dans cette partie, $\lambda$ désigne un réel strictement positif.*
*Soit $M$ une variable aléatoire définie un un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$.*
*Soit $A$ une partie quelconque de $\mathbb{N}$, et $\overline{A}$ son complémentaire dans $\mathbb{N}$. On rappelle que si $A$ est non vide, alors*

$$P([M \in A]) = \sum_{i \in A} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!},$$

*et on pose par convention $[M \in \varnothing] = \varnothing$.*
*On considère la fonction $f_A$ définie sur $\mathbb{N}$ par $f_A(0) = 0$, et pour tout $k$ de $\mathbb{N}$ :*

$$f_A(k+1) = \frac{k!}{\lambda^{k+1}} \mathrm{e}^{\lambda} \left( P([M \in A] \cap [M \leqslant k]) - P([M \in A]) \times P([M \leqslant k]) \right).$$

1. (a) Déterminer la fonction $f_A$ dans les cas particuliers $A = \varnothing$ et $A = \mathbb{N}$.
   (b) Donner l'expression de $f_A(1)$ en fonction de $\lambda$ et de $P([M \in A])$ dans les deux cas suivants : $0 \in A$ et $0 \in \overline{A}$.
   Exprimer $f_A(2)$ en fonction de $\lambda$ et de $P([M \in A])$ dans le cas où 0 et 1 appartiennent à $A$.
2. Soit $A$ et $B$ deux parties de $\mathbb{N}$ disjointes.
   (a) Montrer que $f_{A \cup B} = f_A + f_B$.
   (b) En déduire que $f_{\overline{A}} = -f_A$.
3. (a) Montrer que pour tout $k$ de $\mathbb{N}$, la fonction $f_A$ vérifie la relation suivante :

$$\lambda f_A(k+1) - k f_A(k) = \begin{cases} P([M \in \overline{A}]) & \text{si } k \in A \\ -P([M \in A]) & \text{si } k \in \overline{A}. \end{cases}$$

   (b) En déduire que si $A$ est non vide et distincte de $\mathbb{N}$, la fonction $f_A$ n'est pas identiquement nulle.
4. *Dans cette question, $j$ est un entier naturel non nul, et $A$ est le singleton $\{j\}$. On pose $f_{\{j\}} = f_j$.*
   (a) Pour tout $k$ de $\mathbb{N}^*$, montrer l'égalité suivante :

$$f_j(k+1) = \begin{cases} \dfrac{k!}{j! \lambda^{k-j+1}} P([M \geqslant k+1]) & \text{si } k \geqslant j \\ -\dfrac{k!}{j! \lambda^{k-j+1}} P([M \leqslant k]) & \text{si } k < j. \end{cases}$$

   (b) Calculer $f_j(j+1) - f_j(j)$, et déterminer son signe.
   (c) Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, différent de $j$, $f_j(k+1) - f_j(k)$ en distinguant les deux cas : $k > j$ et $k < j$.
   En déduire que la différence $f_j(k+1) - f_j(k)$ est positive si et seulement si $k = j$.
   (d) Établir les inégalités suivantes : $f_j(j+1) - f_j(j) \leqslant \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} \leqslant \min\left(1, \dfrac{1}{\lambda}\right)$.
5. On considère le singleton $\{0\}$ et on pose $f_{\{0\}} = f_0$. Montrer, pour tout $k$ de $\mathbb{N}^*$, l'inégalité suivante :

$$f_0(k+1) - f_0(k) \leqslant 0.$$

6. (a) Établir, pour tout $k$ de $\mathbb{N}$, l'inégalité suivante : $f_A(k+1) - f_A(k) \leqslant f_k(k+1) - f_k(k)$.
   (On distinguera les deux cas : $k \in A$ et $k \in \overline{A}$.)
   (b) En déduire, pour toute partie $A$ de $\mathbb{N}$, l'inégalité suivante :

$$\sup_{k \geqslant 0} |f_A(k+1) - f_A(k)| \leqslant \min\left(1, \frac{1}{\lambda}\right).$$

**Partie III –**

*Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2. On considère $n$ variables aléatoires discrètes indépendantes $X_1, X_2, \dots, X_n$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telles que pour tout $i$ de $[\![1, n]\!]$, la variable aléatoire $X_i$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p_i$, strictement positif.*

*On pose* $\lambda_n = \sum_{i=1}^{n} p_i$, $W_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ *et, pour tout* $i$ *de* $[\![1,n]\!]$, $R_i = W_n - X_i$.
*On note* $M_n$ *une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre* $\lambda_n$. *Soit* $A$ *une partie quelconque de* $\mathbb{N}$, *et* $f_A$ *la fonction définie dans la partie II, dans l'expression de laquelle on remplace* $M$ *par* $M_n$ *et* $\lambda$ *par* $\lambda_n$. *On pose* $f = f_A$.

1. (a) Établir, pour tout $i$ de $[\![1,n]\!]$, l'égalité des variables aléatoires $X_i f(W_n)$ et $X_i f(1+R_i)$.
   (b) En déduire pour tout $i$ de $[\![1,n]\!]$, l'égalité : $E(X_i f(W_n)) = p_i E(f(1+R_i))$.
2. Pour tout $i$ de $[\![1,n]\!]$, on pose : $Y_i = f(1+W_n) - f(1+R_i)$.
   Établir la relation suivante : $E(\lambda_n f(1+W_n) - W_n f(W_n)) = \sum_{i=1}^{n} p_i E(Y_i)$.
3. (a) Établir pour tout $i$ de $[\![1,n]\!]$, la formule suivante :
$$E(Y_i \mid [X_i = 1]) = E(f(2+R_i) - f(1+R_i)).$$
   (b) Calculer pour tout $i$ de $[\![1,n]\!]$, $E(Y_i \mid [X_i = 0])$.
   (c) Déduire des questions précédentes l'égalité suivante :
$$E(\lambda_n f(1+W_n) - W_n f(W_n)) = \sum_{i=1}^{n} p_i^2 E(f(2+R_i) - f(1+R_i)).$$
4. Établir l'inégalité suivante :
$$|E(\lambda_n f(1+W_n) - W_n f(W_n))| \leqslant \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) \times \sum_{i=1}^{n} p_i^2.$$
5. À l'aide de la question II-3(a), montrer, pour toute partie $A$ de $\mathbb{N}$, l'égalité suivante :
$$E(\lambda_n f(1+W_n) - W_n f(W_n)) = P([W_n \in A]) - P([M_n \in A]).$$
   En déduire, pour toute partie $A$ de $\mathbb{N}$, la majoration suivante :
$$|P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])| \leqslant \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) \times \sum_{i=1}^{n} p_i^2.$$
6. Dans cette question uniquement, on suppose que pour tout $i$ de $[\![1,n]\!]$, $X_i$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $p_i = \dfrac{1}{n+i}$.
   (a) Déterminer $\lambda = \lim_{n\to+\infty} \lambda_n$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} p_i^2 = 0$
   (b) Quelle est la limite en loi de la variable aléatoire $M_n$ (ie, la suite $(\lim_{n\to+\infty} P(M_n = k))_{k\in\mathbb{N}}$ définit-elle une loi, et si oui, laquelle ?)
   (c) Déterminer la limite en loi de la suite $(W_n)_{n\geqslant 2}$.

**Partie IV –**

*Les notations sont identiques à celles de la partie III, mais les variables aléatoires* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ***ne sont pas nécessairement indépendantes.***

1. (a) Montrer que pour tout $i$ de $[\![1,n]\!]$, on a $E(X_i f(W_n)) = p_i E(f(1+R_i) \mid [X_i = 1])$.
   (b) En déduire l'égalité suivante :
$$P([W_n \in A]) - P([M_n \in A]) = \sum_{i=1}^{n} p_i \Big[E(f(1+W_n)) - E(f(1+R_i) \mid [X_i = 1])\Big]$$
2. On suppose que pour tout $i$ de $[\![1,n]\!]$, il existe une variable aléatoire $Z_i$ définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que la loi de $Z_i$ soit identique à la loi conditionnelle de $R_i$ sachant $[X_i = 1]$

(a) Justifier, pour tout couple $(\ell, j)$ d'entiers naturels, l'inégalité : $|f(\ell)-f(j)| \leqslant |\ell - j| \times \min\left(1, \dfrac{1}{\lambda_n}\right)$ et en déduire la majoration suivante :

$$|P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])| \leqslant \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) \times \sum_{i=1}^{n} p_i E(|W_n - Z_i|).$$

(b) On suppose de plus que pour tout $\omega$ de $\Omega$, pour tout $i$ de $[\![1, n]\!]$, on a $W_n(\omega) \geqslant Z_i(\omega)$. Établir l'égalité :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i E(|W_n - Z_i|) = \lambda_n - V(W_n),$$

où $V(W_n)$ désigne la variance de $W_n$.

En déduire, pour toute partie $A$ de $\mathbb{N}$, l'inégalité suivante :

$$|P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])| \leqslant \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) \times (\lambda_n - V(W_n)).$$

**Problème 4 – Séries numériques aléatoires**

*On étudie dans ce problème la convergence de certaines séries aléatoires. Toutes les variables aléatoires évoquées dans le sujet sont supposées à valeurs réelles et définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On rappelle qu'une propriété est* presque sûre *(ou satisfaite presque sûrement) lorsqu'il existe un événement de probabilité* 1 *sur lequel la propriété est vérifiée.*

**Partie I – Un lemme de finitude**

*Soit $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires positives possédant une espérance. On suppose que la série $\sum \mathbb{E}(Y_n)$ converge et on note $E$ sa somme. On souhaite montrer que la série $\sum Y_n$ converge presque sûrement, c'est-à-dire qu'il existe un événement $A$ presque certain tel que pour tout $\omega$ de $A$, $\sum Y_n(\omega)$ converge. Pour $N$ et $M$ dans $\mathbb{N}^*$, on note $A_{N,M}$ l'événement :*

$$A_{N,M} = \Big(\sum_{k=1}^{N} Y_k \geqslant M\Big).$$

*Soit enfin $A$ l'événement « la série $\sum Y_n$ diverge ».*

1. Montrer que : $A = \displaystyle\bigcap_{M\geqslant 1} \bigcup_{N \geqslant 1} A_{N,M}$.
2. Montrer que : $\forall N, M \geqslant 1,\ \mathbb{P}(A_{N,M}) \leqslant \dfrac{E}{M}$
3. (a) Montrer que la suite d'événements $\left(\displaystyle\bigcup_{N\geqslant 1} A_{N,M}\right)_{M\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

   (b) Montrer que $\mathbb{P}(A) = 0$ et conclure quant à l'objectif annoncé.

**Partie II – Loi forte des grands nombres dans le cas $\mathcal{L}^4$**

*Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires. On les suppose mutuellement indépendantes, suivant toutes la même loi, et possédant un moment d'ordre* 4*. On souhaite montrer que, presque sûrement, on a, en posant $m = \mathbb{E}(X_1)$ :*

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \longrightarrow m \quad \textit{quand } n \to +\infty.$$

1. Expliquer comment se ramener au cas où $m = 0$ dans l'objectif annoncé de cette partie, ce que l'on suppose désormais.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Justifier que : $\mathbb{E}\big((X_1 + \cdots + X_n)^4\big) = \displaystyle\sum_{i_1+\cdots+i_n=4} \frac{4!}{i_1! \cdots i_n!} \mathbb{E}(X_1^{i_1}) \cdots \mathbb{E}(X_n^{i_n})$.

   (b) En déduire que : $\mathbb{E}\big((X_1 + \cdots + X_n)^4\big) = n\mathbb{E}(X_1^4) + 3n(n-1)\mathbb{E}(X_1^2)^2$.

3. Pour $n \geqslant 1$, on pose :
$$Y_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$
Montrer que la série $\sum \mathbb{E}(Y_n^4)$ converge.
4. Conclure quant à l'objectif annoncé à l'aide du résultat de la première partie.

### Partie III – Inégalité de Kolmogorov

*Soit $n \geqslant 1$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles, mutuellement indépendantes, possédant un moment d'ordre 2 et centrées. On pose $S_k = X_1 + \cdots + X_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$. On souhaite montrer que pour tout $\alpha > 0$, on a :*
$$\mathbb{P}\big(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k| \geqslant \alpha\big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(S_n)}{\alpha^2}.$$
*On fixe $\alpha > 0$. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on note $A_k$ l'événement :*
$$A_k = (|S_1| < \alpha) \cap \cdots \cap (|S_{k-1}| < \alpha) \cap (|S_k| \geqslant \alpha).$$

1. On note $A$ l'événement $\big(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k| \geqslant \alpha\big)$.
   (a) Exprimer $A$ en fonction de $A_1, \ldots, A_n$.
   (b) Justifier que $\mathbb{1}_{A_1} + \cdots + \mathbb{1}_{A_n} \leqslant 1$.
2. (a) Montrer que : $\mathbb{V}(S_n) \geqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(S_n^2 \mathbb{1}_{A_k})$.
   (b) En déduire que : $\mathbb{V}(S_n) \geqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big((S_k^2 + 2S_k(S_n - S_k))\mathbb{1}_{A_k}\big)$
   puis que : $\mathbb{V}(S_n) \geqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(S_k^2 \mathbb{1}_{A_k})$.
   On pourra utiliser l'indépendance des variables $X_1, \ldots, X_n$.
3. Conclure quant à l'objectif annoncé de cette partie

### Partie IV – Un résultat de convergence

*Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables réelles, mutuellement indépendantes, possédant un moment d'ordre 2 et centrées. On suppose de plus que la série $\sum \mathbb{V}(X_n)$ converge. On souhaite montrer sous ces hypothèses que la série $\sum X_n$ converge presque sûrement.*
*On note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ pour tout $n \geqslant 1$ et $C$ l'événement « $\big((S_n)_{n\geqslant 1}$ est de Cauchy$\big)$ ».*
*On rappelle qu'une suite $(S_n)$ est de Cauchy si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n, p \geqslant N$, $|S_n - S_p| \leqslant \varepsilon$, et qu'une suite réelle converge dans $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est de Cauchy.*

1. Pour $i, N \in \mathbb{N}^*$, on note $C_{i,N}$ l'événement : $C_{i,N} = \Big(\forall n, p \geqslant N,\ |S_n - S_p| \leqslant \dfrac{1}{2^i}\Big)$.
   Justifier que : $C = \displaystyle\bigcap_{i\geqslant 1} \bigcup_{N\geqslant 1} C_{i,N}$.
2. Expliquer pourquoi, pour conclure, il suffit de montrer que pour tout $i \geqslant 1$, l'événement $C_i$ suivant est de probabilité 1 :
$$C_i = \bigcup_{N\geqslant 1} C_{i,N}.$$
3. On fixe désormais $i \geqslant 1$. Pour tout $N \geqslant 1$ et $M \geqslant N$, on note :
$$B_N = \Big(\sup_{n\geqslant N} |S_n - S_N| > \frac{1}{2^{i+1}}\Big) \quad \text{et} \quad B_{N,M} = \Big(\max_{N\leqslant n\leqslant M} |S_n - S_N| \geqslant \frac{1}{2^{i+1}}\Big).$$
   Justifier que : $B_N \subset \displaystyle\bigcup_{M\geqslant N} B_{N,M}$.
4. Montrer à l'aide des résultats de la partie précédente que :
$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}(B_N) = 0.$$

5. En déduire que :

$$\lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}(C_{i,N}) = 1.$$

6. Conclure.

### Partie V – Application aux séries harmoniques de signe aléatoire

*Soit $p \in [0,1]$ et $(\varepsilon_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et à valeurs dans $\{-1,1\}$ telles que :*

$$\forall n \geqslant 1,\ \mathbb{P}(\varepsilon_n = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\varepsilon_n = -1) = 1-p.$$

*On étudie dans cette partie la nature de la série $\sum \dfrac{\varepsilon_n}{n}$.*

1. On suppose à cette question que $p \neq \frac{1}{2}$ et on note $T_n = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n$ pour $n$ dans $\mathbb{N}$.

   (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a :

   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{T_k}{k(k+1)} + \frac{T_n}{n}.$$

   (b) À l'aide des résultats de la deuxième partie, montrer que, presque sûrement, la série $\sum \dfrac{\varepsilon_n}{n}$ diverge.

2. On suppose à cette question que $p = \frac{1}{2}$. Montrer que, presque sûrement, la série $\sum \dfrac{\varepsilon_n}{n}$ converge.