Lycée Louis-Le-Grand, Paris 2023/2024
MP2I – Mathématiques
A. Troesch

Programme des colles de la semaine 12 (08/01 – 12/01)

Chapitre 10 : Calcul intégral

L'intégration n'est abordée dans ce chapitre que sous un angle calculatoire. Il n'est pas dans l'esprit de ce chapitre de donner des exercices théoriques sur les intégrales. Le point de départ du cours est le théorème fondamental du calcul intégral, démontré en admettant certaines propriétés des intégrales.

Révision du chapitre.

Chapitre 11 : Équations différentielles linéaires

Conformément au programme, ne sont traitées ici que les EDL du premier ordre à coefficients variables et les EDL du second ordre à coefficients constants.

ENCORE PEU D'EXERCICES FAITS EN CLASSE POUR LE MOMENT SUR LES THÈMES SUIVANTS

1. **Généralités sur les EDL**
   - Notion d'équation différentielle.
   - Équations différentielles linéaires, systèmes d'équations linéaires.
   - Théorème de structure pour une EDL. Les élèves doivent savoir que l'ensemble des solutions est obtenu en ajoutant une solution particulière à l'ensemble des solutions de l'équation homogène, et que l'ensemble des solutions de l'EH est stable par CL. La terminologie d'espace affine a été évoquée, sans plus.
   - Principe de superposition.
2. **EDL d'ordre 1**
   - Les élèves doivent savoir se ramener à la forme $y' = a(x)y + b$, quitte à restreindre le domaine d'étude à une union d'intervalles disjoints et ensuite à recoller les solutions si c'est possible.
   - Résolution de l'équation homogène $y' = a(x)y$.
   - Méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière de $y' = a(x)y + b(x)$.
   - Théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas des EDL d'ordre 1.
3. **EDL d'ordre 2 à coefficients constants**
   - Recherche de l'ensemble des solutions d'une ED d'ordre 2 à coefficients pas forcément constants, connaissant une solution particulière de l'EDH, par une méthode du type variation de la constante.
   - Cas des coefficients constants : recherche d'une solution de l'ED homogène sous forme exponentielle.
   - Polynôme caractéristique. Expression des solutions dans $\mathbb{C}$ d'une EDL homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
   - Description des solutions réelles d'une EDL homogène d'ordre 2 à coefficients constants réels.
   - Recherche d'une solution particulière d'une équation avec second membre, dans les situations particulières suivantes :
     $$f(x) = P(x)\mathrm{e}^{\lambda x}, \quad f(x) = P(x)\cos(\omega t), \quad f(x) = P(x)\sin(\omega t),$$
     où P est un polynôme. Les élèves doivent notamment savoir *a priori* le degré du polynôme Q dans l'expression de la solution recherchée suivant l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine du polynôme caractéristique.
   - Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les EDL d'ordre 2 à coefficients constants ou non (admis)

Chapitre 13 : Suites

LES EXERCICES DE CE CHAPITRE NE SERONT ABORDÉS QU'EN DÉBUT DE SEMAINE.
Vous pouvez poser des exercices sur ces thèmes, mais en restant très proche du cours et des définitions.

1. **Convergence**

- Définition de la limite (dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{C}$, dans $\overline{\mathbb{R}}$).
- Définition équivalente par voisinages
- Unicité de la limite
- Suites stationnaires. Suites convergentes à valeurs entières.
- Effet d'une translation sur les indices.
- Toute suite convergente est bornée.
- Cas des suites complexes et vectorielles (dans $\mathbb{R}^n$ muni de la distance euclidienne usuelle, ils n'en connaissent pas d'autre) : caractérisation de la convergence par la convergence coordonnée par coordonnée.
- Les suites de Cauchy sont HP

2. **Propriétés liées à la convergence**
   - Préliminaire : caractérisation séquentielle des limites et de la continuité.
   - Opérations sur les limites.
     * Valeur absolue, combinaison linéaire, produit, quotient, dans $\mathbb{C}$, dans $\overline{\mathbb{R}}$.
     * Formes indéterminées multiplicatives et additives.
     * Produit $0\times$ borné.
     * Passage à la limite sous une fonction continue.
     * Règles de passage à la limite pour les puissances. Formes indéterminées 0^0, 1^∞, ∞^0.
     * Utilisation du critère séquentiel pour transférer ces propriétés au cas des fonctions (développé sur l'exemple des CL, le transfert des autres propriétés est laissé en exercice)
   - Limites et inégalités.
     * Conservation des inégalités larges.
     * Théorème d'encadrement. Théorème de divergence vers $+\infty$ ou $-\infty$ par minoration ou majoration.
     * Transfert au cas des fonctions à l'aide du CS.
     * Comparaison à une suite géométrique lorsque $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to \ell \neq 1$.
   - Suites monotones
     * Théorème de convergence monotone.
     * Suites adjacentes. Théorème des suites adjacentes. Exemple d'utilisation : étude des séries alternées.
   - Digression sur la construction de $\mathbb{R}$
     * Équivalence entre la propriété de la borne supérieure, le théorème de convvergence monotone, le théorème des suites adjacentes et la description des intervalles réels.
   - Caractérisation séquentielle de certaines propriétés
     * Densité
     * Borne supérieure
     * Limite et continuité
     * Sous-ensembles fermés

SEULEMENT DES QUESTIONS DE COURS SUR CE QUI SUIT, PAS D'EXERCICES CETTE SEMAINE

3. **Suites extraites, valeurs d'adhérence**
   - Définition
   - Lemme des pics (ou soleil levant). Avoir bien compris l'idée lumineuse, et savoir la mettre en forme rigoureusement
   - Convergence des suites extraites d'une suite convergente.
   - Convergence d'une suite (u_n) telle que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite. La démonstration a été faite pour N extractrices telles que $\bigcup \varphi_k(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$.
   - Valeur d'adhérence (définition donnée par les suites extraites). Caractérisation par une infinité de termes de la suite aussi proches que souhaité. Existence d'une v.a. dans $\overline{\mathbb{R}}$. Caractérisation de la convergence dans $\overline{\mathbb{R}}$ par l'unicité de la v.a. dans $\overline{\mathbb{R}}$.
   - Théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$ (par le lemme des pics ou par dichotomie, les deux points de vue sont exigibles), puis dans $\mathbb{C}$. Ce principe des extractions *successives* est à avoir bien compris. Attention à l'ordre des compositions sur les extractrices.